

고지우의 **난문현답**

제 5 일

1. 2009년 3월 교육청
2. 2014년 6월 평가원
3. 2016년 9월 평가원
4. 2015년 11월 교육청
5. 2013년 경찰대
6. 2007년 3월 교육청
7. 2009년 6월 평가원
8. 2011년 경찰대
9. 2006년 수능
10. 2006년 10월 교육청

1. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, \quad pa_{n+1} = qa_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

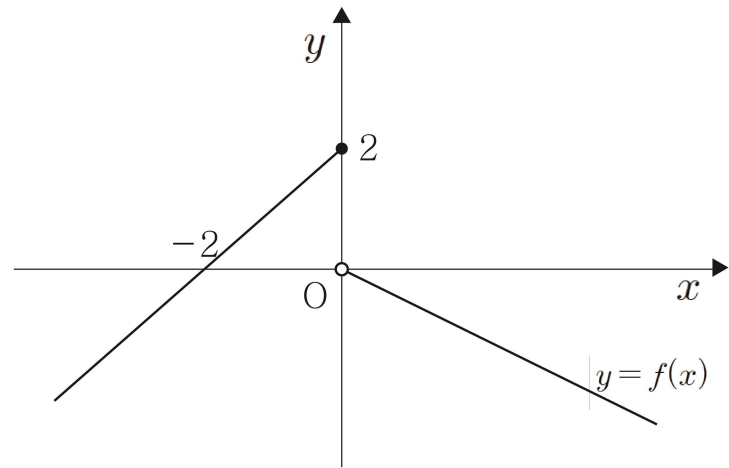
일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?
(단, p, q 는 0이 아닌 실수이다.) [4점]

- ㄱ. $p=q$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
- ㄴ. $p \neq q$ 일 때, 수열 $\left\{a_n - \frac{1}{p-q}\right\}$ 은 등비수열이다.
- ㄷ. $-1 < \frac{q}{p} < 1$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 함수 $f(x) = \begin{cases} x+2 & (x \leq 0) \\ -\frac{1}{2}x & (x > 0) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.

수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고 $a_{n+1} = f(f(a_n))$ ($n \geq 1$)을 만족시킬 때,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

3. 실수 t 에 대하여 직선 $x=t$ 가 두 함수

$$y = x^4 - 4x^3 + 10x - 30, \quad y = 2x + 2$$

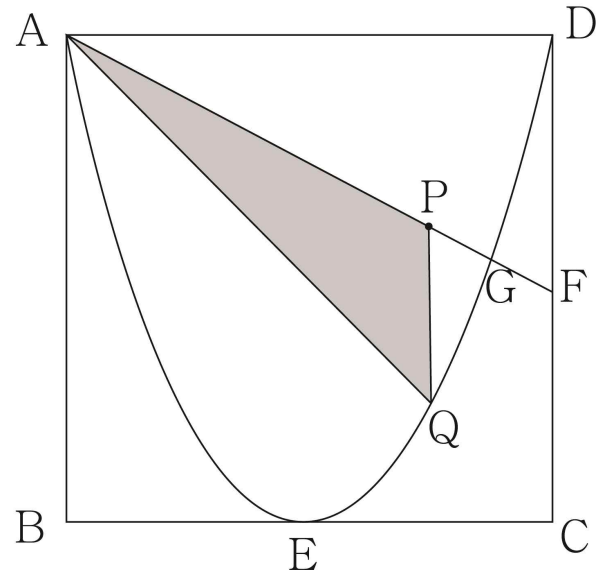
의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$ 라 하자.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \leq 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 합은? [4점]

- ① -7 ② -3 ③ 1
 ④ 5 ⑤ 9

4. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 BC와 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하자. 점 E를 꼭짓점으로 하고, 두 점 A, D를 지나는 포물선과 선분 AF가 만나는 점을 G라 하자. 선분 AG 위를 움직이는 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A와 점 G가 아니다.) [4점]



- ① $\frac{85}{27}$ ② $\frac{343}{108}$ ③ $\frac{173}{54}$
 ④ $\frac{349}{108}$ ⑤ $\frac{88}{27}$

5. 다음을 만족시키는 한 자리 자연수 a 의 개수는?

방정식 $x^3 - x^2 - ax - 3 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가진다.

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

6. 그림과 같이 각 단의 부피가 일정한 비율로 감소하는 8단 케이크를 만들었다. 이 케이크의 제 2단의 부피를 p , 제 4단의 부피를 q 라 할 때, 제 8단의 부피를 p 와 q 로 나타낸 것은? [4점]



- ① $\frac{q^3}{p^2}$ ② $\frac{q^2}{p^2}$ ③ $\frac{p^3}{q^2}$
 ④ $\frac{p^3}{q}$ ⑤ $\frac{p^2}{q}$

7. 부등식 $1 < m^{n-5} < n^{m-8}$ 을 만족시키는 자연수 m, n 에 대하여

$$A = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$B = m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$C = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}$$

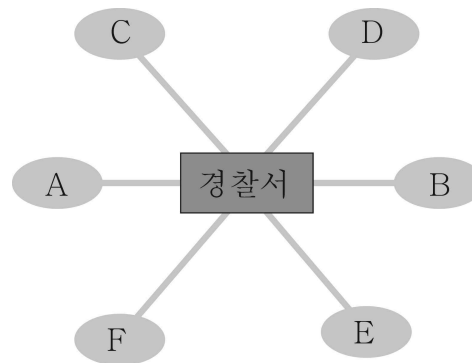
이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은? [4점]

- ① $A > B > C$
- ② $A > C > B$
- ③ $B > A > C$
- ④ $B > C > A$
- ⑤ $C > A > B$

8. 아래 그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 구역이 경찰서를 중심으로 하여 길로 연결되어 있다. A와 B의 넓이는 각각 4km^2 이고 C, D, E, F의 넓이는 각각 2km^2 이다.

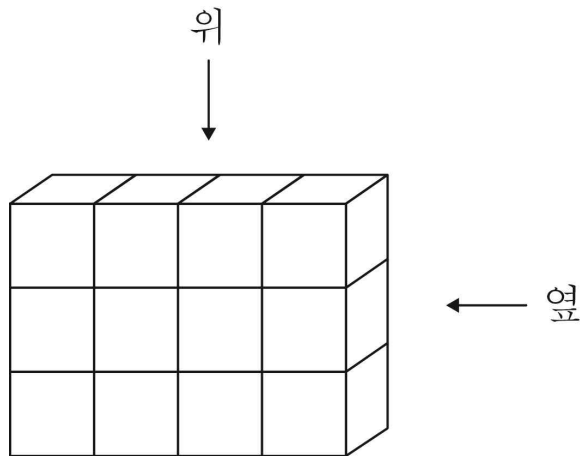
2명의 경찰관이 이 6개의 구역을 넓이의 합이 같아지도록 2부분으로 나누어 1부분씩을 맡고, 각자 맡은 모든 구역을 순서를 정하여 순찰하는 방법의 수는?

(단, 1개의 구역을 나누지는 않는다.)

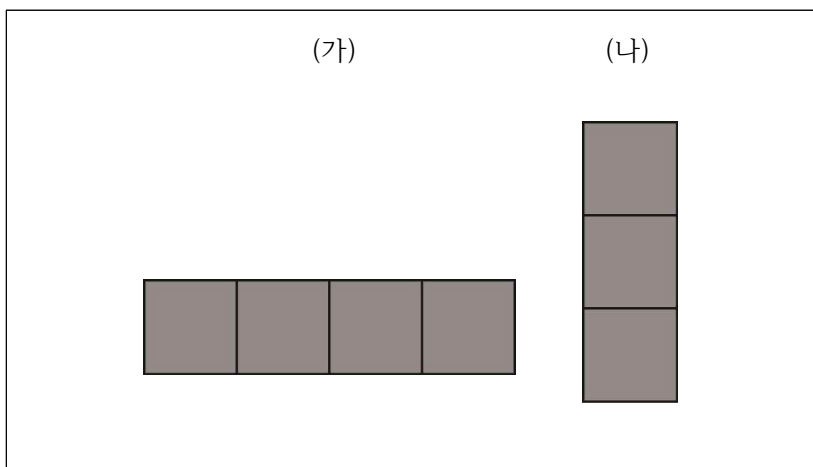


- ① 524 ② 528 ③ 532
- ④ 536 ⑤ 540

9. 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점]



- ① 30 ② 36 ③ 42
- ④ 48 ⑤ 54

10. 아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에서 공을 넣으면 A,B,C,D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.

예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A,B를 지나면 A,B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A,B,C,D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$ 라고 하자.

(a, b 는 서로소인 자연수). 이때, $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.) [4점]

