

2014학년도 사관학교 기출 문제

수학 영역(가형)

1

1. $\log_2(4\sqrt{2} - \sqrt{10}) - \log_2(4 - \sqrt{5})$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

3. 두 벡터 \vec{a}, \vec{b} 에 대하여 $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |3\vec{a}-2\vec{b}|=6$ 일 때, 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 1008, 1233과 같이 각 자리의 숫자의 합이 9인 네 자리의 자연수의 개수는? [3점]

- ① 165 ② 170 ③ 175
④ 180 ⑤ 185

5. 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 수가 각각 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 적힌 수를 확인하고 다시 집어넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 25회 반복할 때, 꺼낸 3개의 공에 적힌 수들 중 두 수의 합이 나머지 한 수와 같은 경우가 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. 확률변수 X^2 의 평균 $E(X^2)$ 의 값은? [3점]

- ① 102 ② 104 ③ 106
 ④ 108 ⑤ 110

6. $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 인 두 수 α, β 가

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\cos(3\alpha + \beta)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

[7~8] 두 연속함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 을 다음과 같이 정의하자.

$$7. \quad a_n = \int_0^n f(x) dx, \quad b_n = \int_{n-1}^n g(x) dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

다음 두 물음에 답하여라.

$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = f(x) + 1$ 일 때, $a_3 + b_4$ 의 값은? [3점]

- ① 5 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{17}{3}$
 ④ 6 ⑤ $\frac{19}{3}$

8. $f(x) = g(x)$ 이고 $b_n = 2n + 3$ 일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

- ① 110 ② 120 ③ 130
 ④ 140 ⑤ 150

수학 영역(가형)

3

9. 모든 실수 x 에서 미분가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 4$$

가 성립한다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(g(x))-1}{x-3} \text{의 값은? [3점]}$$

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

10. 그림과 같이 곡선

$$y = \sin \frac{\pi}{2}x \quad (0 \leq x \leq 2) \text{와 직선}$$

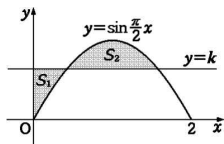
$$y = k \quad (0 < k < 1) \text{가 있다. 곡선}$$

$$y = \sin \frac{\pi}{2}x \text{와 직선 } y = k, y \text{축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 } S_1,$$

$$\text{곡선 } y = \sin \frac{\pi}{2}x \text{와 직선 } y = k \text{로 둘러싸인 부분의 넓이를 } S_2 \text{라}$$

하자. $S_2 = 2S_1$ 일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{3}{2\pi}$
 ④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{2\pi}$



11. 수직선 위의 원점에 위치한 점 A가 있다. 주사위 1개를 던질 때 3의 배수의 눈이 나오면 점 A를 양의 방향으로 3만큼 이동하고, 그 이외의 눈이 나오면 점 A를 음의 방향으로 2만큼 이동하는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 72회 반복할 때, 점 A의 좌표를 확률변수 X 라 하자. 확률 $P(X \geq 11)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.00	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

- ① 0.0228 ② 0.0401 ③ 0.0668
 ④ 0.1056 ⑤ 0.1587

12. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$A^2 - A = O, \quad A - B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, O 는 영행렬이고, E 는 단위행렬이다.) [3점]

보기

- ㄱ. $AB = O$
 ㄴ. $A \neq E$ 이면 A 의 역행렬은 존재하지 않는다.
 ㄷ. $A+B$ 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13. 곡선 $x^2 + (y-1)^2 = 1 (y \geq 1)$ 과 두 직선 $x = -1, x = 1$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]

- ① $\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{5}{3}\pi$ ② $\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{10}{3}\pi$ ③ $\pi^2 + \frac{5}{3}\pi$
 ④ $\pi^2 + \frac{10}{3}\pi$ ⑤ $2\pi^2 + \frac{5}{3}\pi$

14. 두 함수 $f(x) = e^x(x^2 + ax + b)$, $g(x) = e^{-x}(x^2 + ax + b)$ 는 각각 $x = -3, x = 2$ 에서 극댓값을 갖는다. 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 극솟값을 각각 m_1, m_2 라 할 때, $m_1 + m_2$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① $-2e$ ② $-e-1$ ③ 0
 ④ $e-1$ ⑤ $2e$

15. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고

중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB에서

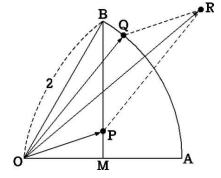
선분 OA의 중점을 M이라 하자. 점

P는 두 선분 OM과 BM 위의

움직이고, 점 Q는 호 AB 위의

움직인다. $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 를

만족시키는 점 R가 나타내는 영역 전체의 넓이는? [4점]



- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $2\sqrt{3}$
 ④ 4 ⑤ $3\sqrt{3}$

16. 첫째항이 -8 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_{n+1} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = 2^{n+1}(n^2 + n + 2) \quad (n \geq 1)$$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

주어진 식에 의하여

$$a_n - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} = 2^n(n^2 - n + 2) \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서 2 이상의 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n - \frac{2}{n}a_n = \boxed{(\text{㉑})}$$

이므로

$$a_{n+1} - \frac{n+2}{n}a_n = \boxed{(\text{㉒})}$$

이다. $b_n = \frac{a_n}{n(n+1)}$ 이라 하면

$$b_{n+1} - b_n = \boxed{(\text{㉓})} \quad (n \geq 2)$$

이고, $b_2 = 0$ 이므로

$$b_n = \boxed{(\text{㉔})} \quad (n \geq 2)$$

이다.

⋮

위의 ㉑), ㉒), ㉓)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(4)}{g(5)} + h(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 65 ② 70 ③ 75
- ④ 80 ⑤ 85

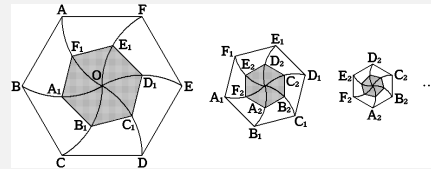
17. 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 길이가 2인 대각선의 교점을 O라 하자. 그림과 같이 꼭짓점 A, B, C, D, E, F를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 이라 하자.

정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 에서 꼭짓점 $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ 을 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ 라 하자.

정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 에서 꼭짓점 $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ 를 중심으로 하여 점 O를 시계 방향으로 60° 만큼 회전시키면서 호를 그린 다음, 이들 호의 길이를 이등분하는 점을 각각 $A_3, B_3, C_3, D_3, E_3, F_3$ 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 정육각형

$A_nB_nC_nD_nE_nF_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]

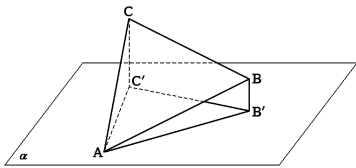


- ① $\frac{7-3\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{7-2\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{9-4\sqrt{3}}{4}$
- ④ $\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{9-2\sqrt{3}}{4}$

18. $0 \leq x \leq \pi$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 2}$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x = \pi$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하자. $S_1 + S_2$ 의 값은? [4점]

- ① $\ln \frac{3}{2}$ ② $\ln \frac{4}{3}$ ③ $2\ln \frac{3}{2}$
- ④ $2\ln \frac{4}{3}$ ⑤ $4\ln \frac{3}{2}$

19. 그림과 같이 평면 α 와 한 점 A에서 만나는 정삼각형 ABC가 있다. 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B', C'이라 하자. $\overline{AB'} = \sqrt{5}$, $\overline{B'C'} = 2$, $\overline{C'A} = \sqrt{3}$ 일 때, 정삼각형 ABC의 넓이는?



- ① $\sqrt{3}$ ② $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$
- ④ $\frac{1 + 2\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$

20. 함수 $f(x) = x \sin x$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

보기

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
- ㄴ. 직선 $y=x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.
- ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) = e^x - 1$ 이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$ 이다.

$\int_0^3 f(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $2e - 3$ ② $2e - 1$ ③ $2e + 1$
- ④ $2e + 3$ ⑤ $2e + 5$

수학 영역(가형)

7

22. 좌표평면에서 x 축에 대한 대칭변환을 f , 원점을 중심으로 60° 만큼 회전하는 회전변환을 g 라 하자 일차변환 $(g \circ f)^{-1}$ 을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 이라 할 때, $100(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하여라. [3점]

24. 한 모서리의 길이가 $6\sqrt{6}$ 인 정사면체 ABCD에 대하여 등식 $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PA}$ 를 만족시키는 점 P가 있다. 삼각형 BCD의 무게중심을 G라 할 때, 선분 PG의 길이를 구하여라. [3점]

23. 표는 어느 학교의 두 동아리 A, B의 남학생 수와 여학생 수를 나타낸 것이다.

동아리 \ 구분	남학생(명)	여학생(명)	합계(명)
A	8	16	24
B	12	12	24

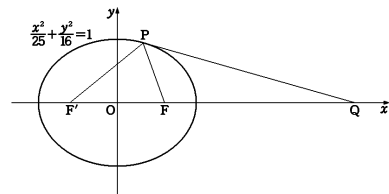
다음은 여름방학이 지난 후 두 동아리 A, B의 변동된 학생 수에 대한 설명이다.

- (가) 동아리 A에서는 남학생 x 명이 새로 가입하여 동아리 A의 학생 중에서 남학생의 비율이 $y\%$ 가 되었다.
- (나) 동아리 B에서는 여학생 x 명이 탈퇴하여 동아리 B의 학생 중에서 남학생의 비율이 $(y+25)\%$ 가 되었다.

$x+y$ 의 값을 구하여라.[3점]

25. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점을 각각 F, F'이라 하자. 타원 위의 한 점 P와 x 축 위의 한 점 Q에 대하여 $\overline{PF} : \overline{PF'} = \overline{QF} : \overline{QF'} = 2 : 3$ 일 때, \overline{PQ}^2 의 값을 구하여라.

(단, 점 Q는 타원 외부의 점이다.) [3점]

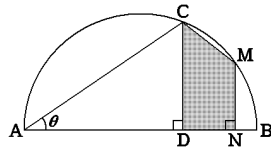


26. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할 때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

- (가) 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다.
- (나) 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률은 $\frac{k}{243}$ 이다. 자연수 k 의 값을 구하여라.
(단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.) [4점]

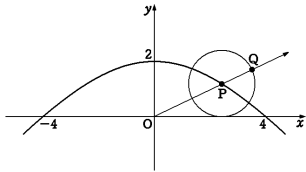
27. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위를 움직이는 점 C가 있다. 호 BC의 길이를 이등분하는 점을 M이라 하고, 두 점 C, M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 D, N이라 하자. $\angle CAB = \theta$ 라 할 때, 사각형 CDNM의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = a$ 일 때, $16a$ 의 값을 구하여라.



(단, 점 C는 선분 AB의 양 끝점이 아니다.) [4점]

28. 좌표공간에 여섯 개의 점 $A(0, 0, 2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(-2, 0, 0)$, $E(0, -2, 0)$, $F(0, 0, -2)$ 를 꼭짓점으로 하는 정팔면체 ABCDEF가 있다. 이 정팔면체와 평면 $x+y+z=0$ 이 만나서 생기는 도형의 넓이를 S 라 할 때, S^2 의 값을 구하여라. [4점]

29. 그림과 같이 좌표평면에서 세 점 $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0, 2)$ 를 지나는 포물선이 있다. $-4 < x < 4$ 인 범위에서 포물선 위를 움직이는 점을 P 라 할 때, 점 P 를 중심으로 하고 x 축에 접하는 원을 그린 다음, 반직선 OP 와 이 원의 교점 중에서 원점 O 로부터 더 멀리 있는 점을 Q 라 하자. 점 Q 가 그리는 도형과 x 축 및 직선 $x = -4$, $x = 4$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, p , q 는 서로소인 자연수이다.)



[4점]

30. 자연수 n 에 대하여 $\log n$ 의 지표와 가수를 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 하자. 좌표평면 위의 점 $P_n(f(n), g(n))$ 이 연립부등식

$$\begin{cases} y \geq \frac{1}{3}x \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

의 영역에 속하도록 하는 자연수 n 의 개수를 오른쪽 상용로그 표를 이용하여 구하여라. [4점]

x	$\log x$
2.1	0.3222
2.2	0.3424
3.1	0.4914
3.2	0.5051