1일차 과제

1. $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}dt$의 값을 구하여라.

필수개념. $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

미분 $\downarrow$ $f(x)$. (* 1계3)

$e^{t^2} = f(t)$ 라하면, $\int_1^{\sqrt{x}} e^{t^2}dt = F(\sqrt{x}) - F(1)$

준식 $\lim_{x\to1}\frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{x-1} = \frac{F(\sqrt{x})-F(1)}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$= f(1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{e}{2}$.

2. 정적분 $\int_0^{\ln 2} x^2e^x dx$의 값을 구하면?

① $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
② $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
③ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
④ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
⑤ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 - 2$

필수개념 = 부분적분 (치환이 발견되지 않으므로).
속성법. (다항함수 × 지수함수)
⇒ 그 · 적 · 미 · 적 .... (부호번갈조심)

$$\int_0^{\ln 2} x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\Big]_0^{\ln 2}$$

$$= e^x(x^2-2x+2)\Big]_0^{\ln 2}$$

$$= 2((\ln 2)^2 - 2\cdot\ln 2 + 2) - 2$$

$$= 2(\ln 2)^2 - 4\cdot\ln 2 + 2.$$

3. 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}$ 의 값을 구하여라.

* 급수 → 정적분.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$\frac{k}{n} = x$, $dx = \frac{1}{n}$ 이므로.

(★)······ $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

* 삼각치환 ① $\sqrt{a^2-x^2}$ 꼴 ⇒ $x = \sin\theta$ or $\cos\theta$ 치환
② $\sqrt{a^2+x^2}$ 꼴 ⇒ $x = \tan\theta$ 치환

또는, 반원 해석.

(★)···

4분원의 넓이이므로 $\frac{\pi}{4}$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$의 값을 구하여라.

* 급수 → 정적분.

우선 합 표현은 Σ로.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{k}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$$

이므로. $\frac{k}{n} = x$, $dx = \frac{1}{n}$ 이므로.

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 = 2.$$

1일차 과제

5. 함수 $f(x)=3^x$일 때, 정적분

$$\int_0^1 \{f(x)+f(2-x)\}dx$$

의 값을 구하여라.

* 필수개념 ⇒ 강제 대칭 & 평행이동.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

$$\int_0^1 f(2-x)dx = \int_0^1 f(x-1)dx \quad (\because \text{강제대칭})$$

$$\int_0^1 f(x-1)dx = \int_1^2 f(x)dx \quad (\because \text{평행이동})$$

즉 $\int_0^1 \{f(x)+f(2-x)\}dx = \int_0^2 f(x)dx$ 이므로

$$\int_0^2 3^x dx = \left.\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^2 = \frac{8}{\ln 3}.$$

6. 정적분 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{e^x+1}dx$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

* 조금 까다로운 치환적분.

$d(e^x) = e^x dx$ 이므로.

$$\int_{-2}^{2} \frac{e^x}{e^x(e^x+1)}dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{e^x(e^x+1)}d(e^x)$$

이므로. $\int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^x+1}\right) d(e^x).$

$$= \ln e^x - \ln e^x+1 \Big]_{-2}^{2} = \ln \frac{e^x}{e^x+1}\Big]_{-2}^{2}$$

$$= \ln\frac{e^2}{e^2+1} - \ln\frac{1}{e^2+1} = 2.$$

7. 함수 $f(x)=\sin x+\sin 2x\cos x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

* $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

$f(x) = \sin x(1+2\cos^2 x)$

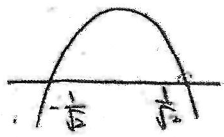
$= \sin x(3-2\sin^2 x)$: $\sin x = t$ 치환

* $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ 이므로. $0 \le t \le 1$ (치환할때, 범위 주의!)

$f(x) = h(t)$ 라하면,

$h(t) = 3t - 2t^3$

$h'(t) = 3-6t^2$ 이므로



t는 $0 \le t \le 1$ 이므로.

$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 즉 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $x=\frac{\pi}{4}$ 일때를

만족한다. $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

8. 함수 $f(x)=e^{-2x^2}$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

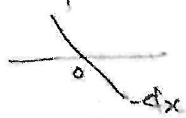
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 3개다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=f(-x)$를 만족하므로 성립.

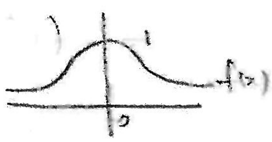
ㄴ, ㄷ 은 그래프를 그려봅시다.

$f'(x) = -4x \cdot e^{-2x^2}$ 부호변동은 $-4x$만 보면 됩니다.



이므로

$x=0$ 에서 극대. $x \to \infty$ 일때. $f(x) \to 0^+$.
$x \to -\infty$ 일때 $f(x) \to 0^+$ 이므로.



치역은 $\{y \mid 0 < y \le 1\}$.

ㄷ. 그래프 개형상으로도 2개이지만, 이계도함수를 구해 보아도 2개임을 정확히 알수있음.

9. 타원 $3x^2+2y^2=6$의 두 초점을 F, F'이라 할 때, 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{FP}^2+\overline{F'P}^2$의 최솟값을 구하여라.

타원의 정의.

$\overline{FP}+\overline{F'P}=$ 일정.

$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$. $\overline{FP}=a$, $\overline{F'P}=b$ 라 할 때

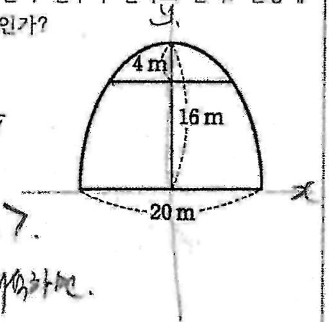
$a+b=2\sqrt{3}$. $b=2\sqrt{3}-a$ 이므로.

준식은 $a^2+(2\sqrt{3}-a)^2$ 로 a에 관한 이차함수로 해석하라.

$2a^2-4\sqrt{3}a+12$ 이므로. $a=\sqrt{3}$ 에서 최소값을 갖는다. ∴ 6.

(a의 범위에 대해서 주의하자).

10. 오른쪽 그림과 같이 폭이 20m이고 높이가 16m인 동굴의 단면은 지면을 단축으로 하는 타원의 일부와 같다고 한다. 천장에서 4m 떨어진 곳의 폭은 몇 m인가?



① $5\sqrt{2}$ ② 10 ③ $5\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{7}$ ⑤ 15

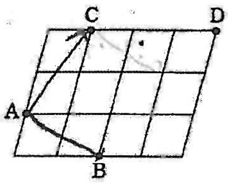
〈타원의 방정식 활용〉.

x축, y축을 도입하여 해석하면.

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{256}=1$ 이고, 천장에서 4m 떨어진 곳의 y좌표는 12이므로 $\frac{x^2}{100}+\frac{144}{256}=1$

$x=\pm\frac{5\sqrt{7}}{2}$ 따라서 폭은 $5\sqrt{7}$이다.

11. 오른쪽 그림과 같이 일정한 간격의 평행선으로 이루어진 도형 위에 네 점 A, B, C, D가 있다. $\overrightarrow{AD}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$일 때, 실수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은?



① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{4}{5}$ ⑤ -1

〈* 벡터의 일반화〉

$\vec{a}$ $\vec{b}$ 라고 하면, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+2\vec{b}$ 이고.

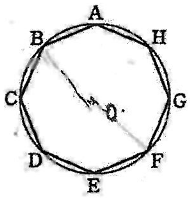
$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$ 이다. 또한 $\overrightarrow{AD}=4\vec{a}+3\vec{b}$이므로

준식은 $4\vec{a}+3\vec{b}=(2p+q)\vec{a}+(2q-p)\vec{b}$ 이다.

$2p+q=4$, $2q-p=3$ 이므로 $p=\frac{6}{5}$ $q=\frac{8}{5}$

∴ $p-q=-\frac{2}{5}$

12. 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정팔각형에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}|=8$일 때, 정팔각형의 넓이는?



① 16 ② $16\sqrt{2}$ ③ 32 ④ $32\sqrt{2}$ ⑤ 48

* 원의 중심을 시점으로 '위치벡터' 도입.

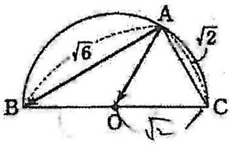
$|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}|=8$

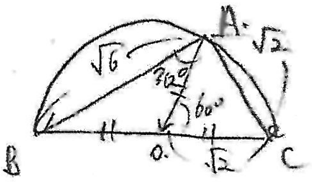
$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OF}$ 이므로. $2\cdot|\overrightarrow{OA}|=8$. ∴ $|\overrightarrow{OA}|=4$

팔각형을 8등분한 삼각형의 넓이는.

4 45° 4 이므로. $\frac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin45°=32\sqrt{2}$

13. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=\sqrt{6}$, $\overline{AC}=\sqrt{2}$인 삼각형 ABC가 선분 BC를 지름으로 하는 반원 O에 내접할 때, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$를 구하여라.





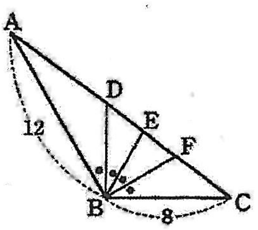
$\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이고.

$\triangle ABC$는 직각 삼각형 이므로. $\overline{AO} = \overline{BO}$.

따라서 $\angle BAO = \frac{\pi}{6}$ 이므로.

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 3.$$

14. 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=120°$이고 $\overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8$인 삼각형 ABC에서 $\angle B$의 사등분선이 $\overline{AC}$와 만나는 점을 차례대로 D, E, F라 할 때, 보기에서 그 값이 가장 큰 것과 작은 것을 차례대로 적은 것은?



보 기

ㄱ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$	ㄴ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}$
ㄷ. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}$	ㄹ. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$

① ㄱ, ㄷ ② ㄴ, ㄱ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄹ, ㄱ

<내적 해보라>.

ㄱ. $12\cdot 8\cdot\cos 120° = -48$

ㄴ. $12\cdot|\overline{BE}|\cdot\cos 60° = 6|\overline{BE}|$

ㄷ. $12\cdot|\overline{BF}|\cdot\cos 90° = 0$

ㄹ. $8\cdot|\overline{BE}|\cdot\cos 60° = 4\cdot|\overline{BE}|$

$|\overline{BE}|$는 피타고스 등으로 구할수는 있으나. 그럴필요없음.

ㄴ이 최대 ㄱ이 최소다.

15. 두 집합

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$에 대하여 $a\in A$, $b\in A$이고 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수 $f: A\to B$ 중에서 $f(1)f(4)=12$를 만족시키는 함수의 개수는?

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

$f(1)\cdot f(4)=12$ 이므로. 순서쌍을 구해보면.

(2,6), (3,4), (4,3), (6,2).

$a<b \to f(a)\le f(b)$를 만족해야 하므로

(2,6) … ① 과 (3,4) … ② 에서 따지도록 하자.

① 에서 ${}_5H_2 \times {}_2H_2 = 45$ 이고.

② 에서 ${}_2H_2 \times {}_4H_2 = 30$ 이므로

① + ② = 75.

16. 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

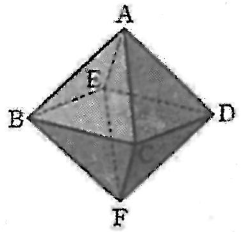
항의 구조는. $a^p b^q c^r$ 이라 할수있고.

$p+q+r=5$ 을 만족해야 한다.

(p, q, r는 정수).

따라서 ${}_3H_5 = 21$

17. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



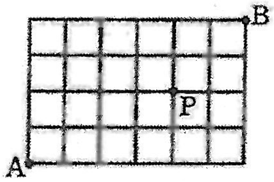
* 수형도를 써 보도록 하자.

A → B — C < D < E → F, F ; F
— E < D < C → F, F ; F
— F

위와 같이 구성되며, A에서 C, D, E로 이동해도 마찬가지이다.

$4 \cdot 7 = 28$.

18. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



A → P 로 가는 경우는 →→→→↑↑ 이므로 $\frac{6!}{4!2!}$ 이고.

P → B 로 가는 경우는 →→↑↑ 이므로 $\frac{4!}{2!2!}$ 이다.

따라서 A → P → B 는

$\frac{6!}{4!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 90$ 이다.

19. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

i) 4개인 경우, 집합의 원소의 개수의 구성이

* (1,1,1,3) 인 경우, * (1,1,2,2) 인 경우가 있다.

* ... $_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{3!} = 20$

* ... $_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{2!} = 45$

$S(6,4) = 65$

ii) 5개인 경우

(1,1,1,1,2) 이므로 $_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} = 15$

$S(6,5) = 15$

iii) 6개인 경우

$S(6,6) = 1$

∴ $65 + 15 + 1 = 81$개.

20. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

내릴 두개의 정류장을 정해주면 $_3C_2$ 이고,

6명의 승객을 두개의 집합으로 분할하는 경우는 $S(6,2)$ 이다.

두개의 정류장의 순서또한 고려해주어야 하므로,

$_3C_2 \times S(6,2) \times 2! = 186$.