6일차 과제

1. 구간 $[0,\ 4]$에서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+b & (0\le x<3)\\ 3(x-3) & (3\le x\le 4)\end{cases}$$

으로 정의되고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(x+4)$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(10)$의 값은? (단, $a,\ b$는 상수이다.)

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

2. 모든 실수 x에서 연속인 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$$

의 최댓값이 $\frac{5}{4}$일 때, 상수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, $a>0$이고 n은 자연수이다.)

3. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$

으로 정의될 때, $\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값을 구하여라.

4. 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=-x^3+27x+k$의 최댓값과 최솟값의 합이 50일 때, 상수 k의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

5. 함수 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2-a$일 때, 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값을 구하여라.(단, $a\neq 0$)

6. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-6}^{6} f(x)dx$의 값을 구하면?

(가) $-1\le x\le 1$일 때, $f(x)=x^2$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$

① 2　② 3　③ $\frac{10}{3}$
④ 4　⑤ $\frac{14}{3}$

7. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$ 일 때,

$$\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$$

의 값을 구하여라.

8. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$을 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^{2-a}(a+x)^2dx$

ㄴ. $\int_a^2 x^2dx$

ㄷ. $\int_{a-2}^{0}(x-2)^2dx$

① ㄱ　② ㄱ,ㄴ　③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

9. 곡선 $y=x^2+1$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

10. 곡선 $y=x^3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{15}{4}$　② $\frac{9}{2}$　③ $\frac{21}{4}$
④ 6　⑤ $\frac{27}{4}$

11. 함수 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{1-x} & (x<0)\end{cases}$에 대하여
$(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

12. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f, g를 각각
$f(n)=2n-1$, $g(n)=(7n$을 9로 나누었을 때의 나머지$)$
라 할 때, $(f\circ g)^{-1}(5)+(g\circ f)^{-1}(7)$의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

13. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=9,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수}) \\ a_n+1 & (a_n\text{이 홀수})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의될 때, a_{18}의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

14. $\log 60.4=1.7810$일 때, $\log x=-0.2190$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

15. 7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 짝수 번째에는 짝수를 나열하는 방법의 수를 구하여라.

16. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\text{는 정수}\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 점프로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 $A(-3,\ 0)$에서 점 $B(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

17. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$중에서 $f(2) \neq 2$인 함수의 개수는?

① 64 ② 96 ③ 100
④ 124 ⑤ 125

18. 빨간색, 파란색, 흰색의 세 깃발이 있다. 이 깃발들을 다섯 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (단, 깃발은 한 번 이상 올려야 하고, 두 개 이상의 깃발을 동시에 올리지 않는다.)

① 351 ② 354 ③ 357
④ 360 ⑤ 363

19. 집합 $A=\{x|x$는 한 자리의 자연수$\}$에 대하여 집합 A의 부분집합 중에서 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구하여라.

20. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X \to Y$ 중에서 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구하여라.

6일차 과제

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10)

11) 12) 13) 14)

15) 16) 17) 18) 19) 20)

---

1) **정답** ④

$f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to3+}3(x-3)=\lim_{x\to3-}(-x^2+ax+b)$

$\therefore\ -9+3a+b=0$ ...... ㉠

이때 $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$\therefore\ b=3(4-3)=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$-9+3a+3=0$ $\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3 & (0\le x<3)\\ 3(x-3) & (3\le x\le4)\end{cases}$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$

2) **정답** 3

(i) $|x|<1$일 때, $f(x)=-x^2+bx+c$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

(iii) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^{2n-2}}+\dfrac{b}{x^{2n-1}}+\dfrac{c}{x^{2n-2}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $f(-1)=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$-1+b+c=a=\dfrac{a-1+b+c}{2}$

$\therefore\ a-b-c=-1$ ...... ㉠

또, $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$-1-b+c=-a=\dfrac{-a-1-b+c}{2}$

$\therefore\ a-b+c=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=1$, $b=a$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+1+\dfrac{a^2}{4} & (|x|\le1)\\ \dfrac{a}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$

$0<a\le2$이면 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=1+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5}{4}$

$4+a^2=5$, $a^2=1$ $\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

$a>2$이면 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a=\dfrac{5}{4}$

그런데 $a>2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=1$이므로 $a+b+c=3$

3) **정답** 0

$x^2-(x-2)^2=4(x-1)$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2<(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2n}+(x-2)}{\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2n}+1}=x-2$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $x>1$일 때, $x^2>(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+(x-2)\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2n}}=x$$

$\therefore\ \lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1-}f(x)=1+(-1)=0$

4) **정답** ②

$f(x)=-x^3+27x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3\ (\because\ 0\le x\le4)$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	↗	$54+k$	↘	$44+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $54+k$, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 50이므로

$54+k+k=50$ $\therefore k=-2$

5) **정답** $-\sqrt3$, $\sqrt3$

$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+ax^2-a$에서

$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 $f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$ 그런데, $f(0)=-a\ne0$이므로 $f(a)=0$

$f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-a=0$, $\dfrac{1}{3}a(a+\sqrt3)(a-\sqrt3)=0$

$\therefore\ a=-\sqrt3$또는 $a=\sqrt3$

6) **정답** ④

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

이때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-6}^{6}f(x)dx=6\int_{-1}^{1}f(x)dx=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

7) **정답** 46

$|x-n|=\begin{cases}x-n & (x\ge n)\\ -x+n & (x<n)\end{cases}$이므로

$$\begin{aligned}f(n)&=\int_0^{2n}|x-n|dx\\&=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}\\&=\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=n^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}&=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}f(k)\\&=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}k^2\\&=\frac{1}{11}\cdot\frac{11\cdot12\cdot23}{6}\\&=46\end{aligned}$$

8) **정답** ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$

$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx=\int_a^2x^2dx$$

$$=\int_{a-2}^{0}(x+2)^2dx$$

이상에서 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

6일차 과제

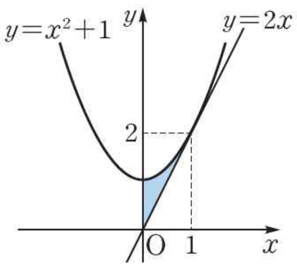
9) **정답** ①

$y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot1=2$이고, 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{(x^2+1)-2x\}dx=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

10) **정답** ⑤

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $3\cdot1^2=3$이고, 접선의 방정식은 $y-1=3(x-1)$

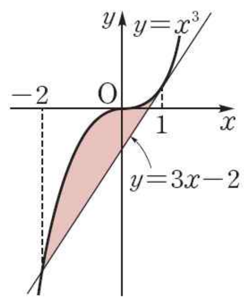
$\therefore\ y=3x-2$

곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는

$x^3=3x-2$에서

$x^3-3x+2=0,\ (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^1\{x^3-(3x-2)\}dx=\int_{-2}^1(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^1=\frac{27}{4}$$

11) [정답] 2

$(f^{-1}\circ f^{-1})^{-1}=f\circ f$이므로 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서

$(f\circ f)(16)=a$

이때 $f(16)=1-\sqrt{16}=1-4=-3$이고, $16\ge0$ 이므로 $f(x)=1-\sqrt{x}$

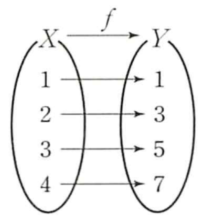
$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$이므로 $-3<0$ 이므로 $f(x)=\sqrt{1-x}$

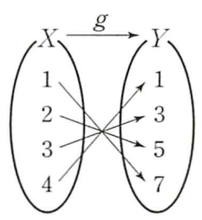
$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))=f(-3)=2$

12) [정답] ②

풀이

두 함수 f, g의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.





$\therefore\ (f\circ g)^{-1}(5)+(g\circ f)^{-1}(7)$

$=(g^{-1}\circ f^{-1})(5)+(f^{-1}\circ g^{-1})(7)$

$=g^{-1}(f^{-1}(5))+f^{-1}(g^{-1}(7))$

$=g^{-1}(3)+f^{-1}(1)$

$=3+1=4$

13) [정답]②

$a_1=9$에서

$a_2=a_1+1=10,\ a_3=\frac{1}{2}a_2=5,$

$a_4=a_3+1=6,\ a_5=\frac{1}{2}a_4=3,$

$a_6=a_5+1=4,\ a_7=\frac{1}{2}a_6=2,$

$a_8=\frac{1}{2}a_9=1,\ a_9=a_8+1=2,$

$a_{10}=\frac{1}{2}a_9=1,\ a_{10}=a_9+1=2,\ \cdots$

따라서 $n\ge8$ 일 때, $a_n=\begin{cases}1 & (n\text{은 짝수})\\ 2 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$ 이므로

$a_{18}=1$

14) [정답] 0.604

$\log x=-0.2190=-1+0.7810$에서 $\log x$와 $\log 60.4$의 소수부분이 같으므로 x는 60.4와 숫자의 배열이 같다. 또 정수 부분이 -1이므로 소수점아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore x=0.604$

15) **정답** 12

다음 그림에서 짝수 2, 2, 4는 △에, 홀수 1, 3, 3, 3은 ○에 놓이게 된다.

○ △ ○ △ ○ △ ○

이때 3개의 숫자 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

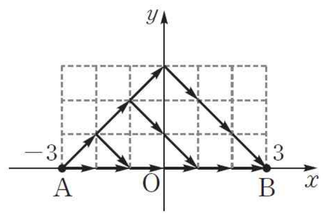
따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot4=12$

16) **정답** 141

[전략] 점프하는 방향을 정한 다음 점프하는 방향의 개수로 경우를 나누어 생각한다.

[풀이]

점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하려면 오른쪽 그림과 같이 길이가 1인 점프의 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$인 점프의 방향은 ↗ 또는 ↘이어야 한다. • 10 %



이때 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) →, →, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

1 • 20 %

(ⅱ) ↗, ↘, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=30$ • 20 %

(ⅲ) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$ • 20 %

(ⅳ) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 점프하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot3!}=20$ • 20 %

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$ • 10 %

17) **정답** ③

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

[다른 풀이]

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2를 제외한 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 5개이므로 구하는 함수의 개수는

$5\cdot4\cdot5=100$

18) **정답** ⑤

깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는

$$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$$

19) **정답** (1) 28

(1) 2를 제외한 8개의 수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

$${}_8C_2 = 28 \qquad \cdot\ 40\%$$

20) **정답** 1500

[전략] 치역의 원소가 3개이려면 함숫값이 같은 X의 원소가 2개 또는 3개 존재해야 함을 이용한다.

[풀이]

집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3 = 10 \qquad \cdot\ 20\%$$

이때 치역의 원소를 a, b, c라 하면 a, b, c 중에서 함숫값을 택하는 경우는

a, a, a, b, c 또는 a, a, b, b, c

의 2가지이다.

(i) 함숫값이 a, a, a, b, c인 함수의 개수는

$${}_3C_1 \cdot \frac{5!}{3!} = 60 \qquad \cdot\ 30\%$$

(ii) 함숫값이 a, a, b, b, c인 함수의 개수는

$${}_3C_2 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 90 \qquad \cdot\ 30\%$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$10 \cdot (60 + 90) = 1500$$