1) 답 ③

[해설] $f(x)=\dfrac{ax^2+1}{x^2+2}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(ax^2+1)'(x^2+2)-(ax^2+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{2ax(x^2+2)-2x(ax^2+1)}{(x^2+2)^2}$$
$$=\frac{2(2a-1)x}{(x^2+2)^2}$$

$f'(1)=\dfrac{2(2a-1)}{9}=\dfrac{2}{3}$에서 $a=2$이므로

$f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2+2}$, $f(1)=1$

$g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$에서 $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$$g'(1)=-\frac{f'(1)}{\{f(1)\}^2}=-\frac{\frac{2}{3}}{1^2}=-\frac{2}{3}$$

2) 답 ④

[해설] $f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}(x-x^{-1}+2x^{-2})$$

이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x^{-2}-4x^{-3})=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)$$

따라서 $f'(1)=\dfrac{1}{2}(1+1-4)=-1$

3) 답 ①

[해설] $f(x)=\dfrac{ax}{x+3}$에서

$$f'(x)=\frac{(ax)'(x+3)-ax\cdot(x+3)'}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{a(x+3)-ax}{(x+3)^2}$$
$$=\frac{3a}{(x+3)^2}$$

$f'(0)=\dfrac{3a}{9}=\dfrac{a}{3}=2$에서 $a=6$

4) 답 ①

[해설] $f(x)=2\sec x+\tan x$에서

$$f'(x)=2\sec x\tan x+\sec^2 x=\sec x(2\tan x+\sec x)$$
$$=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{2\sin x+1}{\cos^2 x}$$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$0\le x\le 2\pi$에서 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$을 만족시키는 x의 값은 $\dfrac{7}{6}\pi$, $\dfrac{11}{6}\pi$이다.

따라서 $a=\dfrac{7}{6}\pi$이므로

$$f(a)=f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=2\sec\frac{7}{6}\pi+\tan\frac{7}{6}\pi$$
$$=2\times\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\sqrt{3}$$

5) 답 ④

[해설] $f(x)=\dfrac{\sin x}{x+\sec x}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(\sin x)'(x+\sec x)-\sin x(x+\sec x)'}{(x+\sec x)^2}$$
$$=\frac{\cos x(x+\sec x)-\sin x(1+\sec x\tan x)}{(x+\sec x)^2}$$

$$f'(0)=\frac{1\cdot(0+1)-0\cdot(1+0)}{(0+1)^2}=1$$

6) 답 ③

[해설] $h(x)=f(g(x))$라 하면 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이다.

$g(1)=1$, $f(1)=4$이므로

$h(1)=f(g(1))=f(1)=4$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)=f'(g(1))g'(1)$$
$$=f'(1)g'(1)$$

이때

$f'(x)=2(x^2-3)\cdot(x^2-3)'=2(x^2-3)\times2x=4x(x^2-3)$

$g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ 이므로

$f'(1)=4\times1\times(1-3)=-8$, $g'(1)=-1$

따라서 구하는 값은

$f'(1)g'(1)=(-8)\times(-1)=8$

7) 답 ⑤

[해설] $y=\cot^2(3x)$, $u=\cot(3x)$로 놓으면 $y=u^2$이므로

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot\{-3\csc^2(3x)\}$$
$$=-6\cot\frac{3}{4}\pi\times\csc^2\frac{3}{4}\pi$$
$$=-6\times(-1)\times2$$
$$=12$$

8) 답 ①

[해설] $f(x)=\cos x$, $g(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 에서

$f'(x)=-\sin x$

$$g'(x)=\frac{(2x)'(x^2+1)-2x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{2(x^2+1)-4x^2}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=g'(0)f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2\times(-1)$$
$$=-2$$

9) 답 ③

[해설] $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2^{f(x)}-1}{x-1}$이 수렴하고 (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}(2^{f(x)}-1)=2^{f(1)}-1=0$에서 $f(1)=0$

$g(x)=2^{f(x)}$이라 하면 $g(1)=2^{f(1)}=1$이고, $g'(x)=2^{f(x)}\ln2\cdot f'(x)$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{2^{f(x)}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$

$=2^{f(1)}\ln 2\cdot f'(1)$
$=f'(1)\ln 2$
따라서 $f'(1)\ln 2=2\ln 2$이므로 $f'(1)=2$
10) 답 ④
[해설] $f(x)=\ln|x^2-3|$에서
$f'(x)=\dfrac{(x^2-3)'}{x^2-3}=\dfrac{2x}{x^2-3}$
$f(2)=f(-2)=0$이므로
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to 2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}+\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$ $\cdots$㉠
이때
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$
$-x=t$라 하면, $x\to 2$일 때, $t\to -2$이므로
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}$
$=\lim\limits_{t\to -2}\left\{\dfrac{f(t)-f(-2)}{t-(-2)}\cdot(-1)\right\}$
$=-f'(-2)$
이므로 ㉠에서
$\lim\limits_{x\to 2}\left\{\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}+\dfrac{f(-x)-f(-2)}{x-2}\right\}$
$=f'(2)-f'(-2)$
$=\dfrac{2\times 2}{2^2-3}-\dfrac{2\times(-2)}{(-2)^2-3}$
$=8$
11) 답 ②
[해설] $|f(x)|$에 자연로그를 취하면
$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)^3}\right|$
$\ln|f(x)|=\ln|x-1|+\ln|x+4|-3\ln|x+2|$
양변을 x에 대하여 미분하면
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x+2}$에서
$f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)^3}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{3}{x+2}\right)$
따라서
$f'(0)=\dfrac{(-1)\times 4}{2^3}\left(-1+\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{2}\right)$
$=-\dfrac{4}{8}\times\left(-\dfrac{9}{4}\right)$
$=\dfrac{9}{8}$
12) 답 ②
[해설] 함수 $f(x)=(4x^3-5)^3$의 역함수가 $g(x)$이고 $g(a)=1$에서 $f(1)=a$이므로 $a=f(1)=(4-5)^3=-1$
따라서 $g(-1)=1$
이때
$f'(x)=3(4x^3-5)^2\cdot(4x^3-5)'$
$=3(4x^3-5)^2\cdot(12x^2)$
$=36x^3(4x^3-5)^2$
이고
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$
$=g'(-1)$
$=\dfrac{1}{f'(g(-1))}$
$=\dfrac{1}{f'(1)}$
$=\dfrac{1}{36}$
따라서 $a=-1$, $b=\dfrac{1}{36}$이므로
$a+b=-1+\dfrac{1}{36}=-\dfrac{35}{36}$
13) 답 ①
[해설] $f(0)=1$, $f(1)=2$이므로 $g(1)=0$, $g(2)=1$
또, $f'(0)=2$, $f'(1)=3$이므로
$g'(1)=\dfrac{1}{f'(g(1))}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$,
$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{3}$
$h(x)=(g\circ g)(x)=g(g(x))$에서
$h'(x)=g'(g(x))g'(x)$이므로
$h'(2)=g'(g(2))g'(2)$
$=g'(1)g'(2)$
$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$
$=\dfrac{1}{6}$
14) 답 ⑤
[해설] $f(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$에서
$f'(x)=\dfrac{(3x)'(2x^2+1)-3x(2x^2+1)'}{(2x^2+1)^2}$
$=\dfrac{3(2x^2+1)-3x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}$
$=\dfrac{-6x^2+3}{(2x^2+1)^2}$
따라서 $f'(1)=\dfrac{-6+3}{(2+1)^2}=-\dfrac{1}{3}$
15) 답 ③
[해설] $f(x)=a\tan 2x+\sec 2x$에서
$f'(x)=2a\sec^2 2x+2\sec 2x\tan 2x$
$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2a\sec^2\dfrac{\pi}{3}+2\sec\dfrac{\pi}{3}tan\dfrac{\pi}{3}$
$=2a\times 2^2+2\times 2\times\sqrt{3}$
$=8a+4\sqrt{3}$
$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-4\sqrt{3}$에서 $8a+4\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$이므로 $a=-\sqrt{3}$
16) 답 ④
[해설] $g(x)=\ln f(x)$라 하면 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$이고
$g(2)=\ln f(2)=\ln 1=0$
따라서
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}$
$=g'(2)$
$=\dfrac{f'(2)}{f(2)}$
$=\dfrac{4}{1}=4$
17) 답 ④
[해설] $f(x)=2^x+2^{2x}$에서
$f'(x)=2^x\ln 2+2\times 2^{2x}\ln 2=(2^x+2^{2x+1})\ln 2$
$f'(x)=36\ln 2$에서 $(2^x+2^{2x+1})\ln 2=36\ln 2$

$2^x+2^{2x+1}=36$

$2\cdot 2^{2x}+2^x-36=0$ $\cdots$㉠

$2^x=t$로 놓으면 $t>0$이고 $2t^2+t-36=0$

$(t-4)(2t+9)=0$

따라서 $t=4$ ($t>0$이므로)

$2^x=4$에서 구하는 x의 값은 $x=2$

18) 답 ①

[해설] $\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$

$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$

$f(0)=1$이고 $f'(x)=1+e^x$에서

$g(1)=0$, $g'(1)=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$이므로 $2g'(1)=1$

19) 답 ④

[해설] $f(x)=\frac{\tan^2 x-1}{\sec x}$에서

$f'(x)=\frac{2\tan x\sec^2 x\cdot\sec x-(\tan^2 x-1)\cdot\sec x\tan x}{\sec^2 x}$

$=\frac{\sec x\tan x(2\sec^2 x-\tan^2 x+1)}{\sec^2 x}$

$=\frac{\tan x(\sec^2 x+2)}{\sec x}$ ($\sec^2 x-\tan^2 x=1$이므로)

따라서

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}\left(\sec\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)$

$=\frac{5}{3}$

20) 답 ①

[해설] $x\neq 1$일 때

$f(x)=\sum_{n=1}^{20}x^{n-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{19}=\frac{x^{20}-1}{x-1}$이므로

$f'(x)=\frac{(x^{20}-1)'(x-1)-(x^{20}-1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$=\frac{20x^{19}(x-1)-(x^{20}-1)}{(x-1)^2}$

$=\frac{19x^{20}-20x^{19}+1}{(x-1)^2}$ (단, $x\neq 1$)

$g(x)=(x-1)^2 f'(x)$에서 $g(1)=0$이고

$x\neq 1$일 때 $g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

따라서 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=19x^{20}-20x^{19}+1$

$g'(x)=380x^{19}-380x^{18}$이므로

$g'(-1)=-380-380=-760$

21) 답 ②

[해설] $f(x)=x^2+4$에서 $f'(x)=2x$

$f(g(x))=f(x)g(x)-2x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-4x$ $\cdots$㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)-4$ $\cdots$㉡

㉡에 $f(1)=5$, $f'(1)=2$, $g(1)=3$을 대입하면

$f'(3)g'(1)=2\times 3+5g'(1)-4$

$f'(3)=6$이므로 $6g'(1)=5g'(1)+2$에서 $g'(1)=2$

22) 답 ①

[해설] $f(x)=\sqrt{x^3+x^2+x+1}$에서

$f'(x)=\left\{(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}'$

$=\frac{1}{2}(x^3+x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}(x^3+x^2+x+1)'$

$=\frac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{x^3+x^2+x+1}}$

함수 $f(x-1)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(x-1))=x$ $\cdots$㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(x-1))f'(x-1)=1$ $\cdots$㉡

$f(1)=2$이므로 ㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(f(1))f'(1)=1$

$f'(1)=\frac{6}{2\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$이므로 $g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{2}{3}$

23) 답 ④

[해설] $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$에서

$g'(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$g'(0)=\frac{f''(0)f(0)-\{f'(0)\}^2}{\{f(0)\}^2}$

$f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$에서 $f(0)=1$

$f'(x)$

$=1\cdot(x^2+1)(x^4+1)+(x+1)\cdot 2x\cdot(x^4+1)$

$+(x+1)(x^2+1)\cdot 4x^3$

$=(x^2+1)(x^4+1)+2x(x+1)(x^4+1)+4x^3(x+1)(x^2+1)$

따라서 $f'(0)=1$

$f''(0)$은 $f''(x)$의 상수항이고, 이는 $f'(x)$의 일차항의 계수와 같으므로 $f''(0)=2$

따라서 $g'(0)=\frac{2\times 1-1^2}{1^2}=1$

24) 답 ⑤

[해설] 함수 $h(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(x)=h(g(x))$에서 $f(f(x))=g(x)$ $\cdots$㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(f(x))f'(x)=g'(x)$ $\cdots$㉡

㉡에 $x=0$을 대입하면 $f'(f(0))f'(0)=g'(0)$,

$f'(1)\times 1=e$

따라서 $f'(1)=e$

25) 답 ②

[해설] ㄱ. $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}} & (-1<x<0)\\ \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} & (0\le x<1)\end{cases}$ 이므로

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{-h}{\sqrt{2-h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{-1}{\sqrt{2-h^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{h}{\sqrt{2-h^2}}}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2-h^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

즉, $\lim_{h\to 0-}\frac{f(h)}{h}\neq\lim_{h\to 0+}\frac{f(h)}{h}$ (거짓)

ㄴ. $g(0)=1$이므로

$g'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{1+hf(h)}-1}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1-\{1+hf(h)\}}{h\{1+hf(h)\}}=\lim_{h\to0}\frac{-f(h)}{1+hf(h)}=-f(0)=0$$

(참)

ㄷ. $x\neq0$일 때 $f(x)$는 미분가능하므로

$$g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{f(x)+xf'(x)}{\{1+xf(x)\}^2} & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$$g''(0)=\lim_{h\to0}\frac{g'(h)-g'(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-\dfrac{f(h)+hf'(h)}{\{1+hf(h)\}^2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{-\left\{\dfrac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} & (-1<x<0)\\ \dfrac{2}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} & (0<x<1)\end{cases}$$ 이고

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0-}f'(h)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0+}f'(h)=\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로

$\displaystyle\lim_{h\to0-}\frac{-\left\{\dfrac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2}=\sqrt{2}$,

$\displaystyle\lim_{h\to0+}\frac{-\left\{\dfrac{f(h)}{h}+f'(h)\right\}}{\{1+hf(h)\}^2}=-\sqrt{2}$

따라서 $g''(0)$의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

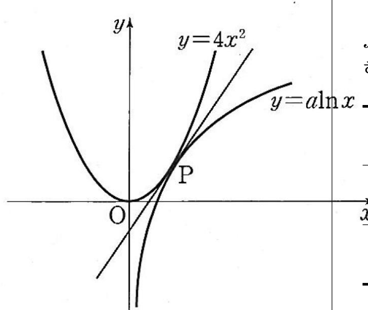
그러므로 옳은 것은 ㄴ이다.

26) 답 ②

[해설]

$f(x)=a\ln x$, $g(x)=4x^2$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{a}{x}$, $g'(x)=8x$



$x=b$일 때 두 곡선의 접선의 기울기가 서로 같으므로

$f'(b)=g'(b)$

즉, $\dfrac{a}{b}=8b$이므로

$a=8b^2$ …… ㉠

점 $P(b,\ 4b^2)$이 곡선 $y=a\ln x$ 위의 점이므로

$a\ln b=4b^2$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8b^2\ln b=4b^2$

$\ln b=\dfrac{1}{2}$ $(b>0)$이므로 $b=\sqrt{e}$

㉠에서 $a=8e$

따라서 $a+b^2=8e+e=9e$

27) 답 ⑤

[해설]

$f(x)=2e^{x+1}$이라 하면

$f'(x)=2e^{x+1}$

접점의 좌표를 $(a,\ 2e^{a+1})$이라 하면 이 점에서 접선의 기울기는 $f'(a)=2e^{a+1}$이므로 접선의 방정식은

$y-2e^{a+1}=2e^{a+1}(x-a)$

$y=2e^{a+1}x-2(a-1)e^{a+1}$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$x=0$, $y=0$을 대입하면

$0=-2(a-1)e^{a+1}$에서 $e^{a+1}>0$이므로

$a=1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2e^2x$이므로 $k=2e^2$

28) 답 ②

[해설]

$f(x)=\sin(\ln x^2)+1$이라 하면

$f'(x)=\cos(\ln x^2)\times(\ln x^2)'$

$=\dfrac{2\cos(\ln x^2)}{x}$

$f'(1)=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$

즉, $y=2x-1$ …… ㉠

따라서 직선 ㉠의 x절편은 $\dfrac{1}{2}$, y절편은 -1이므로

직선 ㉠과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{4}$

29) 답 ④

[해설]

$f(x)=\dfrac{ax+1}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+2)-(ax+1)\times2x}{(x^2+2)^2}$$

$$=\frac{-ax^2-2x+2a}{(x^2+2)^2}\quad\cdots\cdots ㉠$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $f'(1)=0$

$f'(1)=\dfrac{-a-2+2a}{3^2}=0$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$$f'(x)=\frac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(-2)=\dfrac{2\times(-2)+1}{4+2}=-\dfrac{1}{2}$

30) 답 ①

[해설]

$f(x)=4\ln x-3x+\dfrac{1}{x}$에서

$$f'(x)=\frac{4}{x}-3-\frac{1}{x^2}=\frac{4x-3x^2-1}{x^2}=\frac{-(3x-1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{3}$일 때 극소, $x=1$일 때 극대이므로

$m=f\left(\frac{1}{3}\right)=4\ln\frac{1}{3}-1+3=-4\ln3+2$

$M=f(1)=4\ln1-3+1=-2$

따라서

$M+m=-2+(-4\ln3+2)=-4\ln3$

31) 답 ③

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)이라 하자.

두 점 $(0,\ 4)$, $(1,\ 0)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(0)=d=4$, $f(1)=a+b+c+d=0$

즉, $a+b+c=-4$ …… ㉠

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고 $f'(0)=0$ 이므로 $c=0$ …… ㉡

$f''(x)=6ax+2b$이고 $f''(1)=0$ 이므로 $6a+2b=0$

즉, $3a+b=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a=2$, $b=-6$이므로 $f(x)=2x^3-6x^2+4$

$f'(x)=6x^2-12x$이고 $f'(1)=-6$이므로 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은

$y-0=-6(x-1)$

즉, $y=-6x+6$ …… ㉣

점 $(0,\ k)$가 직선 ㉣ 위의 점이므로 $k=6$

[다른 풀이]

주어진 조건에서 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같고

$y=f(x)-4$는 $x=0$에서 극댓값이 0이므로 x축에 접한다.

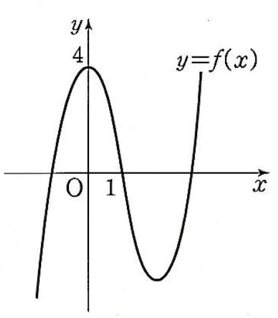
따라서 $f(x)-4=x^2(ax+b)$

즉, $f(x)=x^2(ax+b)+4=ax^3+bx^2+4$ (a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$f'(x)=3ax^2+2bx$, $f''(x)=6ax+2b$이고, 조건 (가)에서

$f(1)=0$, $f''(1)=0$이므로 $f(1)=a+b+4=0$, $f''(1)=6a+2b=0$

따라서 $a=2$, $b=-6$이므로 $f(x)=2x^3-6x^2+4$



32) 답 ②

[해설]

$f(x)=\frac{x^2}{x^2+3}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2x(x^2+3)-x^2\cdot2x}{(x^2+3)^2}=\frac{6x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=\frac{6(x^2+3)^2-6x\cdot2\cdot2x\cdot(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$=\frac{6(x^2+3)-24x^2}{(x^2+3)^3}=\frac{-18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$x>0$일 때 $f''(x)=0$이면 $x=1$이고 $f''(x)$의 부호는 $x=1$의 좌우에서 양에서 음으로 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$는 $x=1$에서 변곡점을 갖는다.

$f(1)=\frac{1}{4}$ 이므로 변곡점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$이다.

따라서 $a=1$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$20(a+b)=20\left(1+\frac{1}{4}\right)=25$

33) 답 ②

[해설]

$y=e^{-x}$에서 $y'=-e^{-x}$이므로 점 $(t,\ e^{-t})$에서의 접선의 기울기

는 $-e^{-t}$이고 접서의 방정식은 $y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$ 이므로

$y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$ …… ㉠

직선 ㉠에 $x=0$, $y=0$을 각각 대입하여 두 점 P, Q의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}(t+1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ (t+1)e^{-t})$

이므로 삼각형 OPQ의 넓이 $f(t)$는

$f(t)=\frac{1}{2}(t+1)^2e^{-t}$

$f'(t)=(t+1)^{-t}+\frac{1}{2}(t+1)^2(-e^{-t})=\frac{(t+1)(1-t)}{2}e^{-t}$

$t>0$일 때, $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최대이므로 $f(t)$의 최댓값은

$f(1)=2e^{-1}=\frac{2}{e}$

34) 답 ③

[해설]

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ 에서

$f'(x)=\sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (단, $-1<x<1$)

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	극대	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극소이고, $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극대이므로 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

극댓값은

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

구간의 양 끝점에서의 함숫값은 $f(-1)=f(1)=0$이므로

최댓값은 $M=\frac{1}{2}$, 최솟값은 $m=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $M-m=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

35) 답 ②

[해설]

ㄱ. $f(x)=x^2\ln x$에서 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=x(2\ln x+1)$

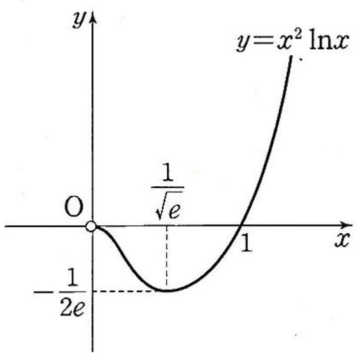
$f'(1)=1\cdot(2\ln 1+1)=1$ (참)

ㄴ. $x>0$이므로 $f'(x)=0$에서 $\ln x=-\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$에서 극솟값을 갖는다. (참)



ㄷ. 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=-\frac{1}{2e}$

이고, 이 값이 $f(x)$의 최솟값이므로 $f(x)\geq-\frac{1}{2e}$이다.

이때 $f(x)+\frac{1}{e}\geq-\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}>0$이므로 방정식 $f(x)+\frac{1}{e}=0$의

실근은 존재하지 않는다. (거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

36) 답 ②

[해설]

$f(x)=\tan x-2x$라 하면

$f'(x)=\sec^2 x-2$

$f'(x)=0$에서

$\sec^2 x=2$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}$이고 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $x=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

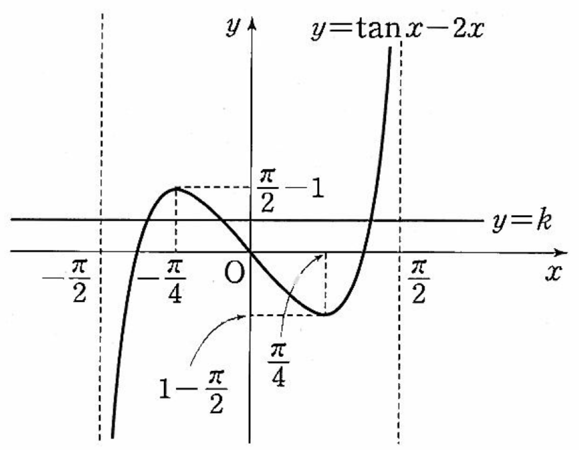
x	$\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{\pi}{4}$에서 극댓값 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-1$,

$x=\frac{\pi}{4}$에서 극솟값 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{2}$를 갖는다.

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의

교점의 개수와 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$1-\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}-1$

따라서 $\alpha=1-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}-1$일 때 $\beta-\alpha$의 값은 최대이고

$\beta-\alpha=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\left(1-\frac{\pi}{2}\right)=\pi-2$

37) 답 ③

[해설]

$f(x)=kx+\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=k+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{kx^2+2x+k}{x^2+1}$

$k>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

$x^2+1>0$이므로

$kx^2+2x+k\geq0$

방정식 $kx^2+2x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k^2=-(k+1)(k-1)\leq0$에서

$k\geq0$($k>0$이므로) 따라서 k의 최솟값은 1이다.

38) 답 ④

[해설]

$f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-(3x-4)\cdot2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3$

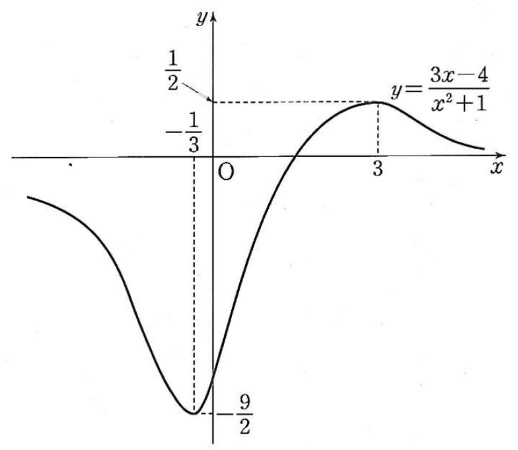
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{1}{3}$일 때 극솟값 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{9}{2}$,

$x=3$일 때 극댓값 $f(3)=\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값 $M=\dfrac{1}{2}$, 최솟값 $m=-\dfrac{9}{2}$이므로

$M+m=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{9}{2}\right)=-4$

39) 답 33

[해설]

$f(x)=a\sin2x+b\sin x$라 하자.

점 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ 3\right)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=a\sin\dfrac{\pi}{2}+b\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=a+\dfrac{b}{\sqrt{2}}=3$

에서 $\sqrt{2}a+b=3\sqrt{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=2a\cos2x+b\cos x$

$f''(x)=-4a\sin2x-b\sin x$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-4a\sin\dfrac{\pi}{2}-b\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=-4a-\dfrac{b}{\sqrt{2}}=0$

에서 $b=-4\sqrt{2}a$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 풀면

$a=-1,\ b=4\sqrt{2}$ 따라서 $a^2+b^2=1+32=33$

40) 답 ②

[해설]

$kx^2-2\ln x>1$에서 $k>\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$이므로

$f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{x^2}(0<x<1)$이라 하자.

$f'(x)=\dfrac{\dfrac{2}{x}\times x^2-(2\ln x+1)\times 2x}{x^4}=-\dfrac{4\ln x}{x^3}$

$0<x<1$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=1$에서 $f(x)<1$이므로 $k\geq1$이다.

따라서 실수 k의 최솟값은 1이다.

41) 답 ④

[해설]

접점의 좌표를 $(\alpha,\ ke^{-\alpha-1})$이라 하자.

$y=ke^{-x-1}$에서 $y'=-ke^{-x-1}$이므로 $x=\alpha$에서 접선의 기울기는 $-ke^{-\alpha-1}$이고 접선의 방정식은

$y-ke^{-\alpha-1}=-ke^{-\alpha-1}(x-\alpha)$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$0-ke^{-\alpha-1}=-ke^{-\alpha-1}(x-\alpha)$

에서 $\alpha=-1$

$x=-1$에서 접선의 기울기가 -3이므로

$-ke^{-(-1)-1}=-3$

따라서 $k=3$

42) 답 9

[해설]

$f(x)=e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)$에서

$f'(x)=-e^{-x}(x^4+ax^3+5x^2)+e^{-x}(4x^3+3ax^2+10x)$

$=e^{-x}\{-x^4+(4-a)x^3+(3a-5)x^2+10x\}$

$f'(1)=0$에서 $f'(1)=e^{-1}(8+2a)=0$이므로 $a=-4$

이때

$f(x)=e^{-x}x^2(x^2-4x+5)$

$f'(x)=e^{-x}(-x^4+8x^3-17x^2+10x)$

$=-e^{-x}x(x^3-8x^2+17x-10)$

$=-e^{-x}x(x-1)(x-2)(x-5)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	$\dfrac{4}{e^2}$	↗	$\dfrac{250}{e^5}$	↘

$f(x)$는 $x=1,\ x=5$에서 극대이고

$f(5)-f(1)=\dfrac{250}{e^5}-\dfrac{2}{e}=\dfrac{2(125-e^4)}{e^5}>0$

이므로 $x\geq0$일 때, $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $b=5$이므로

$b-a=5-(-4)=9$

43) 답 ①

[해설]

$f(x)=4\cos^2x-3,\ g(x)=a\cos x-a$라 하자.

두 곡선 $y=f(x),\ y=g(x)$의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$이므로

$4\cos^2t-3=a\cos t-a$

$4\cos^2t-a\cos t+a-3=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=8\cos x(-\sin x)=-8\sin x\cos x$

$g'(x)=-a\sin x$

이고 교점에서 두 곡선의 접선이 일치하므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$-8\sin t\cos t=-a\sin t$

$\sin t(8\cos t-a)=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

(ⅰ) $\sin t=0$일 때

$t=\pi$이고 $\cos t=-1$이므로 ㉠에 대입하면

$4+a+a-3=0$에서

$a=-\dfrac{1}{2}$이므로 양수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\cos t=\dfrac{a}{8}$일 때

㉠에서

$4\left(\dfrac{a}{8}\right)^2-a\left(\dfrac{a}{8}\right)+a-3=0$

$a^2-16a+48=0$

$(a-12)(a-4)=0$

따라서 $a=12$ 또는 $a=4$

$a=12$이면 $\cos t=\dfrac{3}{2}$을 만족시키는 실수 t가 존재하지 않으므로 성립하지 않는다.

$a=4$이면 $\cos t=\dfrac{1}{2}$이므로 $t=\dfrac{\pi}{3}$, $t=\dfrac{5}{3}\pi$일 때 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 양수 a의 값은 4이다.

44) 답 ③

[해설]

$h(x)=\ln(1-x)+x^2+x$라 하면

$0\le x\le\dfrac{1}{2}$에서 $h(x)\ge a$가 성립하여야 한다.

$h'(x)=\dfrac{-1}{1-x}+2x+1=\dfrac{x(1-2x)}{1-x}\ge 0$ 이므로

$h(x)$는 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$에서 증가하고 최솟값은 $h(0)=0$이다.

즉, $h(x)\ge 0$이므로 $a\le 0$이다.

따라서 실수 a의 최댓값은 0이다.

45) 답 ②

[해설]

$y=\sin^2 x$에서 $y'=2\sin x\cos x$

곡선 $y=\sin^2 x$위의 점 $(t,\ \sin^2 t)$에서 접선의 기울기는 $2\sin t\cos t$이므로 접선의 방정식은

$y-\sin^2 t=2\sin t\cos t(x-t)$에서

$y=2x\sin t\cos t+\sin^2 t-2t\sin t\cos t$

$=\sin t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$

$f'(t)=\cos t(\pi\cos t+\sin t-2t\cos t)$

$+\sin t(-\pi\sin t+\cos t-2\cos t+2t\sin t)$

$=(\pi-2t)(\cos^2 t-\sin^2 t)$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$일 때 $f'(t)=0$에서 $\pi-2t\ne 0$이므로

$\cos^2 t-\sin^2 t=0$

그런데 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos t=\sin t$ 따라서 $t=\dfrac{\pi}{4}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗	극대	↘	

함수 $f(t)$는 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서 극대이면서 최대가 된다.

따라서 $f(t)$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-2\cdot\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

46) 답 ⑤

[해설]

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$이라 하자.

선분 AP의 길이가 최소가 되는 점 P는 제 1사분면에 있으므로 $t>0$이다. $f(t)=\overline{AP}^2$이라 하면

$f(t)=(t-4)^2+\left(\dfrac{1}{t}-4\right)^2$

$=t^2-8t+16+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{8}{t}+16$

$=t^2-8t+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{8}{t}+32$

$f'(t)=2t-8-\dfrac{2}{t^3}+\dfrac{8}{t^2}$

$=\dfrac{2(t^4-4t^3+4t-1)}{t^3}$

$=\dfrac{2(t+1)(t-1)(t^2-4t+1)}{t^3}$

$t>0$일 때 $f'(t)=0$에서

$t=1$ 또는 $t=2\pm\sqrt{3}$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$2+\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

$f(2-\sqrt{3})=(2-\sqrt{3}-4)^2+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-4\right)^2$

$=(-2-\sqrt{3})^2+(-2+\sqrt{3})^2=14$

$f(2+\sqrt{3})=14$

따라서 함수 $f(t)$의 최솟값은 14이고, 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{14}$이다.

47) 답 ①

[해설]

$f(x)=|x^2-1|e^{-x}$에서

$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)e^{-x} & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\(1-x^2)e^{-x} & (-1<x<1)\end{cases}$

ㄱ. $-1<x<1$에서 $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$이므로

$f'(x)=-2xe^{-x}+(1-x^2)(-e^{-x})=(x^2-2x-1)e^{-x}$

$f'(0)=(0-0-1)e^0=-1$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}\frac{\{(1+h)^2-1\}e^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0+}(2+h)e^{-(1+h)}$

$=2e^{-1}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0-}\frac{\{1-(1+h)^2\}e^{-(1+h)}-0}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0-}(-2-h)e^{-(1+h)}$

$=-2e^{-1}$

$\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\ne\lim_{h\to 0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.(거짓)

ㄷ. $x<-1$ 또는 $x>1$일 때

$f'(x) = 2xe^{-x} + (x^2-1)(-e^{-x})$

$\quad = -(x^2-2x-1)e^{-x}$

$-1 < x < 1$일 때

$f'(x) = (x^2-2x-1)e^{-x}$이고 ㄴ과 같은 방법으로

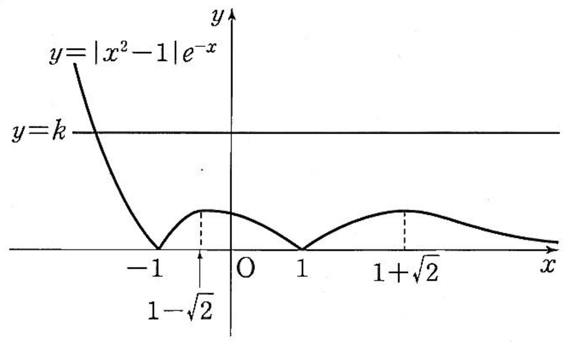
$f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 미분가능하지 않다.

$f'(x)=0$에서

$x = 1-\sqrt{2}$, $x = 1+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$1-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘



함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

또, $x=1-\sqrt{2}$, $x=1+\sqrt{2}$에서 극댓값을 갖고

$f(1-\sqrt{2})>0$, $f(1+\sqrt{2})>0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$이다.

따라서 양수 k에 대하여 방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수의 최솟값은 1이다.(거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ이다.

48) [정답] ②

$$\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(0)+f(0)-f(\sin x)}{x}$$

$$=3\lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(0)}{3x-0}-\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\times\frac{\sin x}{x}\right\}$$

$$=3f'(0)-f'(0)\times1$$

$$=2f'(0)$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)'(x^2+3)-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{(x^2+3)-(x-1)2x}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

에서

$$f'(0)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(3x)-f(\sin x)}{x}=2f'(0)=\frac{2}{3}$$

49) [정답] ④

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2}$$

$$=2$$

50) [정답] ④

$f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x+1)-ax\times1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{a}{(x+1)^2}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x+1}$$

$$=\frac{1}{4}f'(3)=\frac{1}{8}$$

즉, $f'(3)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $f'(3)=\dfrac{a}{16}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a=8$

$$f'(x)=\frac{8}{(x+1)^2}$$

$\therefore\ f'(1)=\dfrac{8}{4}=2$

51) [정답] ④

$$g'(x)=\frac{-f'(x)\{1+f(x)\}-\{1-f(x)\}f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}$$

$$=\frac{-2f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}$$

$g(0)=\dfrac{1-f(0)}{1+f(0)}=-\dfrac{2}{3}$에서

$f(0)=5$

$g'(0)=-\dfrac{2}{9}$이므로

$$\frac{-2f'(0)}{\{1+f(0)\}^2}=-\frac{2}{9}$$

$\therefore\ f'(0)=4$

$f(x)=x^2+ax+b$에서

$f(0)=b=5$

$f'(x)=2x+a$에서

$f'(0)=a=4$

따라서 $f(x)=x^2+4x+5$이므로

$f(2)=4+8+5=17$

52) [정답] ②

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=x^2+x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=2x+1$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=3$

이때 $g(1)=g'(1)=3$이므로

$f'(g(1))g'(1)=f'(3)\times 3=3$

$\therefore\ f'(3)=1$

53) [정답] ①

$g(x)=\sqrt{f(x)}$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(1+h)}-\sqrt{f(1)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$$
$$=g'(1)$$

그런데 $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$이므로

$$g'(1)=\frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}}$$

$f(2x-1)=x^2-x+4$에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=4$

$f'(2x-1)\times 2=2x-1$에서 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f'(1)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ g'(1)=\frac{f'(1)}{2\sqrt{f(1)}}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{2\times 2}=\frac{1}{8}$$

다른 풀이

$f(2x-1)=x^2-x+4$에서

$f(1)=4$

$f'(2x-1)\times 2=2x-1$에서 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{f(1+h)}-\sqrt{f(1)}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{\sqrt{f(1+h)}+\sqrt{f(1)}}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2\sqrt{f(1)}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{4}}$$
$$=\frac{1}{8}$$

54) [정답] ②

$h(x)=g(f(x))$라 하면 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

또 $f(0)=16$이고

$$f'(x)=4\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)'$$
$$=4\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^3\times\frac{(x+2)'(x^2+1)-(x+2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=-4\left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)^3\times\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)^2}$$

에서 $f'(0)=32$이므로

$$4=\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-g(16)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-g(f(0))}{x-0}$$
$$=h'(0)$$
$$=g'(f(0))f'(0)$$
$$=g'(16)\times 32$$

$$\therefore\ g'(16)=\frac{1}{8}$$

55) [정답] ②

$f^{-1}(x)=g(x)$이고, $f(-3)=0$이므로

$g(0)=-3$

$$f'(x)=\frac{(x-4)-(x+3)}{(x-4)^2}$$
$$=\frac{-7}{(x-4)^2}$$

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}$$
$$=\frac{1}{f'(-3)}$$
$$=\frac{1}{-\frac{7}{49}}=-7$$

56) [정답] ①

$f^{-1}(x)=g(x)$이고, $f(0)=8$이므로

$g(8)=0$

또 $f'(x)=3(x+2)^2$에서

$f'(g(8))=f'(0)=12$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{g(x+8)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x+8)-g(8)}{x}$$
$$=g'(8)$$
$$=\frac{1}{f'(g(8))}$$
$$=\frac{1}{f'(0)}$$
$$=\frac{1}{12}$$

57) [정답] ②

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 4)$를 지나므로

$f(1)=4$

또 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{6}$이므로

$$f'(1)=\frac{1}{6}$$

함수 $f(3x+4)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(f(3x+4))=x$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g(f(1))=-1$

$\therefore\ g(4)=-1$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(3x+4))\times 3\times f'(3x+4)=1$ …… ㉡

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(f(1))\times 3\times f'(1)=1$

따라서 $f(1)=4,\ f'(1)=\dfrac{1}{6}$이므로

$g'(4)=\dfrac{1}{3f'(1)}=2$

$\therefore\ \dfrac{g'(4)}{\{g(4)\}^2}=\dfrac{2}{(-1)^2}=2$

58) [정답] ⑤

$h(x)=g(f(x))$라 하면 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$f(x)=\sin x+\sin 2x\cos x$에서 $f(0)=0$

$f'(x)=\cos x+2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$

에서 $f'(0)=3$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(f(x))-g(0)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}\\&=h'(0)\\&=g'(f(0))f'(0)\\&=g'(0)\times 3=6\end{aligned}$$

$\therefore\ g'(0)=2$

59) [정답] ④

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left\{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}\\&=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$f(x)=\tan 2x+\cos 2x$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\sec^2 2x-2\sin 2x\\&=\frac{2}{\cos^2 2x}-2\sin 2x\end{aligned}$$

이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\cos^2\pi}-2\sin\pi=2$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4$$

60) [정답] ⑤

$$\begin{aligned}f(x)&=1-\sin^2\frac{x}{2}\\&=1-\frac{1-\cos x}{2}\\&=\frac{1+\cos x}{2}\end{aligned}$$

이므로 $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}&=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{2}\sin x}{x-\pi}\\&=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x}{2(x-\pi)}\end{aligned}$$

이때 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고

$x\to\pi$일 때, $t\to 0$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin(\pi+t)}{2t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2t}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

61) [정답] ②

$$\begin{aligned}f(a)&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{e^x-e^a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{x^2+ax+a^2}{\frac{e^x-e^a}{x-a}}\\&=\lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2)\times\frac{1}{\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}}\\&=\frac{3a^2}{e^a}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}f'(a)&=\frac{6ae^a-3a^2e^a}{e^{2a}}\\&=\frac{6a-3a^2}{e^a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ &\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1+h)}{h}\\&=-\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\\&=-2f'(1)\\&=-2\times\frac{6-3}{e}\\&=-\frac{6}{e}\end{aligned}$$

참고

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}$에서 $g(x)=e^x$이라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=g'(a)\\&=e^a\end{aligned}$$

62) [정답] ①

$f(x)=x\ln(x^2+1)$에서

$f'(x)=(x)'\ln(x^2+1)+x\{\ln(x^2+1)\}'$

$=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x(x^2+1)-2x^2\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

따라서

$f'(1)=\ln 2+1$,

$f''(-1)=-1-1=-2$

이므로

$f'(1)+f''(-1)=\ln 2+1+(-2)$

$=\ln 2-1$

63) [정답] ③

$f(x)=e^x$에서 $f^{-1}(x)=\ln x$이므로

$h(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$

$=\ln\sqrt{x^2+3}$

$=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+3)$

따라서 $h'(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+3}=\dfrac{x}{x^2+3}$이므로

$h'(3)=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

64) [정답] ②

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$에서

$a=b+1-a$

$2a-b=1$ …… ㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$f'(x)=\begin{cases}-ae^{-x+1} & (x>1)\\ \dfrac{\pi}{2}b\cos\dfrac{\pi}{2}x+1 & (x<1)\end{cases}$

에서 $\lim\limits_{x\to 1+0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}f'(x)$이므로

$-a=1$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡에서

$a=-1,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=-4$

65) [정답] ③

$y=k\ln x$에서 $y'=\dfrac{k}{x}$이므로

접점 $T_k(x_k,\ y_k)$에서의 접선의 방정식은

$y-y_k=\dfrac{k}{x_k}(x-x_k)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-y_k=-k$

즉, $y_k=k$

이것을 $y=k\ln x$에 대입하여 정리하면

$x_k=e$

$\therefore\ T_k(e,\ k)$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{y_k}{x_k}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{10}k$

$=\dfrac{1}{e}\times\dfrac{10\times 11}{2}$

$=\dfrac{55}{e}$

66) [정답] ④

$f(x)=\ln(ax+2)$, $g(x)=-\ln x^3+b$라 하면

$f'(x)=\dfrac{a}{ax+2}$, $g'(x)=-\dfrac{3}{x}$

두 곡선이 점 $\mathrm{A}(1,\ c)$에서 만나므로

$f(1)=g(1)$에서

$\ln(a+2)=b$ …… ㉠

또 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 점 A에서의 접선이 서로 수직이므로

$f'(1)g'(1)=-1$에서

$\dfrac{a}{a+2}\times(-3)=-1$

$\therefore\ a=1$

㉠에서 $b=\ln(a+2)=\ln 3$

$f(1)=\ln 3=c$

$\therefore\ ab+c=1\times\ln 3+\ln 3=\ln 9$

67) [정답] ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$에서 $f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4}{e^2}$	$\searrow$

$0<x<2$에서 $f'(x)>0$이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

따라서 $0<x_1<x_2<2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$이다. (참)

ㄴ. $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-0}{x-0}$이므로 $\dfrac{f(x)}{x}$는 두 점 $(0,\ 0)$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기이다.

$f''(x)=(x^2-4x+2)e^{-x}$이고, $x<0$이면 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

따라서 $x_1<x_2<0$일 때, $\dfrac{f(x_1)}{x_1}<\dfrac{f(x_2)}{x_2}$이다. (참)

ㄷ. $f(x)$는 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(a)$, 즉 $f'(a)=\dfrac{1}{e}$인 실수 a가 0과 1 사이에 적어도 한 개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

68) [정답] ②

$f(x)=a^2\ln\dfrac{1}{x}-x^2+12x$에서

$$f'(x)=-\frac{a^2}{x}-2x+12$$
$$=\frac{-2x^2+12x-a^2}{x}$$

함수 $f(x)$가 $0<x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$가 성립하려면 $x>0$에서 감소하는 함수이어야 하므로 $x>0$인 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

따라서 $x>0$에서 $-2x^2+12x-a^2\le 0$이어야 하므로

$g(x)=-2x^2+12x-a^2$이라 하면

$g(x)=-2(x-3)^2+18-a^2$

$x>0$에서 $g(x)\le 0$이 성립하려면

$g(3)=18-a^2\le 0$

$a^2-18\ge 0$

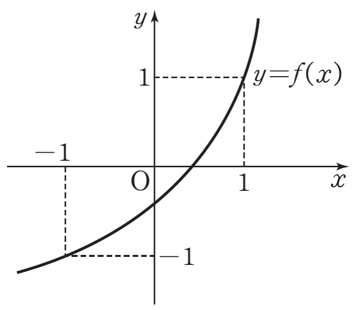
$(a+3\sqrt{2})(a-3\sqrt{2})\ge 0$

$\therefore\ a\le -3\sqrt{2}$ 또는 $a\ge 3\sqrt{2}$

따라서 $\sqrt{16}<3\sqrt{2}<\sqrt{25}$이므로 자연수 a의 최솟값은 5이다.

69) [정답] ⑤

함수 $f(x)$의 그래프는 모든 구간에서 아래로 볼록하게 증가하므로 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 아래로 볼록하다.
따라서 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$을 지나는 직선 $y=x$보다 곡선 $y=f(x)$가 아래에 있어야 하므로 $f(0)<0$이다. (참)

ㄴ. $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하는 함수이다.
그러므로 $f'(-1)<f'(1)$이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고 -1과 1 사이에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여
$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{2}{2}=1=f'(a)$$
즉, $f'(a)=1$인 실수 a가 -1과 1 사이에 적어도 한 개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

70) [정답] ③

$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x\times\ln\frac{1}{x}$$
$$=-(\ln x)^2$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-2(\ln x)\times\frac{1}{x}$이므로

$$f'(x)=-\frac{2f(x)\ln x}{x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=1$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 1을 갖는다.

$\therefore\ \alpha\beta=1$

71) [정답] ④

$f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-2}=1+\frac{2}{\sin x+\cos x-2}$이므로

$$f'(x)=-\frac{2(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x-2)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\sin x$

$\therefore\ x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ (단, n은 정수)

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	(2π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$에서 극솟값을 갖고,

$x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

$0<\alpha<2\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\therefore\ \cos\alpha=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

72) [정답] ③

$f(x)=\frac{\ln x}{x^n}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^n-nx^{n-1}\times\ln x}{x^{2n}}$$
$$=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$$

$f'(x)=0$이면 $\ln x=\frac{1}{n}$

$\therefore\ x=e^{\frac{1}{n}}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e^{\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{\frac{1}{n}}$에서

극댓값 $f(e^{\frac{1}{n}})=\dfrac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{(e^{\frac{1}{n}})^n}=\dfrac{1}{en}$을 갖는다.

$a_n=\dfrac{1}{en}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{en}$$
$$=\frac{1}{e}$$

73) [정답] ③

$f(x)=\dfrac{x^n}{e^x}$에서 $f'(x)=\dfrac{nx^{n-1}e^x-x^ne^x}{(e^x)^2}=\dfrac{x^{n-1}(n-x)}{e^x}$

ㄱ. $f\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$이고 $f'\left(\dfrac{n}{2}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\dfrac{n}{2}\right)}{e^{\frac{n}{2}}}=\dfrac{\left(\dfrac{n}{2}\right)^n}{e^{\frac{n}{2}}}$

$\therefore\ f\left(\dfrac{n}{2}\right)=f'\left(\dfrac{n}{2}\right)$ (참)

ㄴ. $f'(x)=-x^{n-1}(x-n)e^{-x}$

(ⅰ) n이 홀수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

(ⅱ) n이 짝수일 때

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=n$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 n이 짝수일 때는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로 점 $(0,\ 0)$에서 변곡점이 될 수 없다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

74) [정답] ④

$y=\dfrac{1}{x}\ln x$에서

$$y'=-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}$$
$$=\frac{1}{x^2}(1-\ln x)$$
$$y''=-\frac{2}{x^3}(1-\ln x)-\frac{1}{x^3}$$
$$=\frac{1}{x^3}(2\ln x-3)$$

$y''=0$에서 $x=e^{\frac{3}{2}}$이므로 변곡점의 좌표는

$\left(e^{\frac{3}{2}},\ \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

이 점에서의 접선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}e^{-3}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2}e^{-3}(x-e^{\frac{3}{2}})$에서

$y=-\dfrac{1}{2}e^{-3}x+2e^{-\frac{3}{2}}$

따라서 이 직선이 x축과 만나는 점은 $(4e^{\frac{3}{2}},\ 0)$, y축과 만나는 점은 $(0,\ 2e^{-\frac{3}{2}})$이므로 변곡점에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times4e^{\frac{3}{2}}\times2e^{-\frac{3}{2}}=4$

75) [정답] ②

$f(x)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}x^2+\sin x+\cos x$라 하면

$$f'(x)=\sqrt{2}ax+\cos x-\sin x$$
$$f''(x)=\sqrt{2}a-\sin x-\cos x$$
$$=\sqrt{2}a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

주어진 곡선이 변곡점을 갖기 위해서는 $f''(x)=0$인 x가 존재하고, 그 점의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 하므로

$f''(x)$의 최댓값은 양수, 최솟값은 음수이어야 한다. 즉,

$f''(x)$의 최솟값은 $\sqrt{2}a-\sqrt{2}<0$ …… ㉠

$f''(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}a+\sqrt{2}>0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-1<a<1$

76) [정답] ③

ㄱ. 함수 $y=f(x)$에 대하여

$$f'(x)=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x$$
$$=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$$

이므로 $f'(x)=0$에서

$e^{2x}(2\cos x-\sin x)=0$

$e^{2x}>0$이므로

$2\cos x-\sin x=0$

$2=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\tan x$

$\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}<2=\tan x$이므로 $\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. $f''(x)=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)$

$=e^{2x}(4\cos x-2\sin x-2\sin x-\cos x)$

$=3^{2x}(3\cos x-4\sin x)$

$=5e^{2x}\sin(x+\alpha)$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=-\dfrac{4}{5}\right)$

이때 α는 제 2사분면의 각이고 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}>\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{5}{6}\pi$에서

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{5}{6}\pi$이다.

그러므로 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 $\dfrac{\pi}{2}<x+\alpha<\pi$이고,

$\sin(x+\alpha)>0$이므로 $f''(x)>0$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다. (참)

ㄷ. $f''(x)=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)=0$에서

$f''(\alpha)=0$이라 하면 $e^{2x}>0$이므로

$3\cos\alpha-4\sin\alpha=0$

$\dfrac{3}{4}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

$0<\tan\alpha<1$이므로

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

또한 $x<\alpha$일 때 $f''(x)>0$, $x>\alpha$일 때 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 변곡점을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

77) [정답] ③

$\sin x=t(-1\le t\le 1)$라 하고, 주어진 식을 $g(t)$로 놓으면

$g(t)=2t^3+3(1-t^2)+a$

$\quad=2t^3-3t^2+a+3$

$-1<t<1$일 때, $g'(t)=6t^2-6t=0$에서 $t=0$이고,

함수 $g(t)$는 $t=0$에서 극대이다.

$\therefore\ g(0)=a+3,\ g(1)=a+2,\ g(-1)=a-2$

이때 최댓값이 4이므로

$a+3=4$

$\therefore\ a=1$

따라서 최솟값은

$a-2=-1$

78) [정답] ②

$f(x)=e^x\{2x^2-(k+5)x+k+5\}$에서

$f'(x)=e^x\{2x^2-(k+5)x+k+5\}+e^x\{4x-(k+5)\}$

$\quad=xe^x(2x-k-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{k+1}{2}$

(i) $\dfrac{k+1}{2}\ge 1$, 즉 $k\ge 1$일 때

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $-1\le x\le 1$일 때, $x=0$에서 극대이자 최대이므로 $k+5=8$

$\therefore\ k=3$

(ii) $0<\dfrac{k+1}{2}<1$, 즉 $-1<k<1$일 때

$-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{k+1}{2}$	$\cdots$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$k+5$	$\searrow$		$\nearrow$	$2e$

이때 $f(0)=k+5<6$, $f(1)=2e<6$

이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은 8이 될 수 없다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 k의 값은 3이다.

79) [정답] ⑤

$t=\dfrac{4x+1}{3x}=\dfrac{1}{3}\left(4+\dfrac{1}{x}\right)$이라 하면 주어진 부등식은

$3t\ge a\ln t\left(t>\dfrac{4}{3}\right)$

$t>\dfrac{4}{3}$이므로 $\ln t>0$

(i) $a\le 0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a>0$일 때, $\dfrac{3}{a}\ge\dfrac{\ln t}{t}$

$f(t)=\dfrac{\ln t}{t}$로 놓으면

$f'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$

$f'(t)=0$이면 $t=e$

함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\left(\dfrac{4}{3}\right)$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

위의 표에서 함수 $f(t)$는 $t=e$일 때 극대이고 동시에 최대이다.

따라서 최댓값은 $f(e)=\dfrac{1}{e}$이므로

$\dfrac{3}{a}\ge\dfrac{1}{e}$

$\therefore\ 0<a\le 3e$

(i), (ii)에서 $a\le 3e$

따라서 실수 a의 최댓값은 $3e$이다.

80) [정답] ⑤

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$에 대하여 $x>0$일 때

$f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{2-2\ln x}{x^2}$

$$f''(x)=\dfrac{-\dfrac{2}{x}\times x^2-(2-2\ln x)\times 2x}{x^4}$$

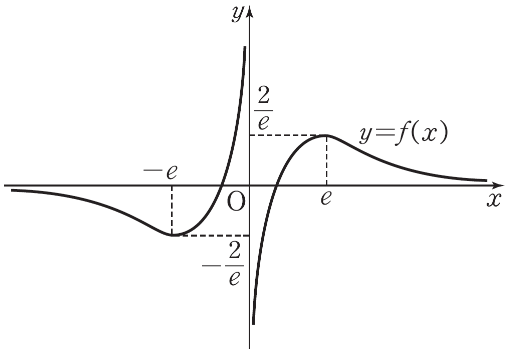
$$=\dfrac{-2(3-2\ln x)}{x^3}$$

따라서 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$		$\searrow$

한편 $x\ne 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하므로 함수 $f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이

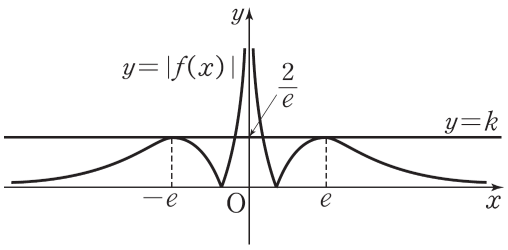
다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



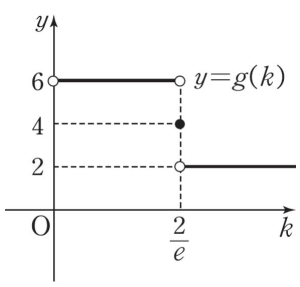
ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. $f''(e^{\frac{3}{2}})=0$이고 $0<x<e^{\frac{3}{2}}$에서 $f''(x)<0$이므로 $f(x)$의 그래프는 열린 구간 $(0,\ e^{\frac{3}{2}})$에서 위로 볼록하다.
따라서 $f''(\alpha)=0$인 양수 α에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프는 열린 구간 $(0,\ \alpha)$에서 위로 볼록하다. (참)

ㄷ. $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$0<k<\dfrac{2}{e}$일 때 곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 6이므로
$g(k)=6$
$k=\dfrac{2}{e}$일 때 교점의 개수가 4이므로
$g(k)=4$
$k>\dfrac{2}{e}$일 때 교점의 개수가 2이므로
$g(k)=2$
따라서 함수 $g(k)$의 그래프는 다음과 같으므로
함수 $g(k)$는 $k=\dfrac{2}{e}$에서 불연속이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

81) [정답] ⑤

$f(x)=\ln|\ln x-2|$에서

$$f'(x)=\frac{1}{x(\ln x-2)}$$

$$f''(x)=\frac{-\left\{(\ln x-2)+x\times\dfrac{1}{x}\right\}}{x^2(\ln x-2)^2}$$

$$=\frac{1-\ln x}{x^2(\ln x-2)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=e$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	(e^2)	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$		$+$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$		↘	0	↘		↗

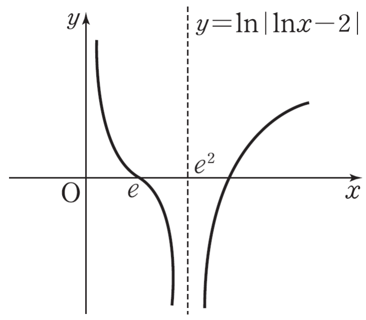
따라서 변곡점은 $(e,\ 0)$이고

$\lim\limits_{x\to+0}\ln|\ln x-2|=\infty$

$\lim\limits_{x\to e^2}\ln|\ln x-2|=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln|\ln x-2|=\infty$

이므로 함수 $y=\ln|\ln x-2|$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 극값이 존재하지 않는다. (참)
ㄴ. 변곡점은 $(e,\ 0)$으로 1개다. (참)
ㄷ. 직선 $y=ax(a<0)$와 반드시 두 점에서 만난다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

82) [정답] ①

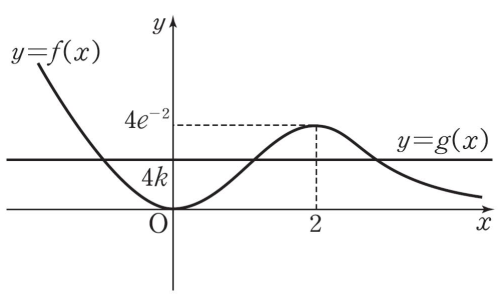
방정식 $x^2e^{-x}=4k$에서 $f(x)=x^2e^{-x}$, $g(x)=4k$로 놓으면

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$
$\quad=x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 $f(x)=x^2e^{-x}$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $x^2e^{-x}=4k$가 서로 다른 세 실근을 갖는 실수 k의 값의 범위는 $0<4k<4e^{-2}$

$\therefore\ 0<k<e^{-2}$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=e^{-2}$이므로

$$\ln(\alpha+\beta)=\ln e^{-2}$$
$$=-2$$

83) [정답] ②

$y=f(x)$와 $y=g(x)$에서 $f(x)=g(x)$라 하면

$e^x=k(x-1)^3$

이때 $x>1$이므로

$\dfrac{e^x}{(x-1)^3}=k$

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 두 함수 $y=\dfrac{e^x}{(x-1)^3}$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

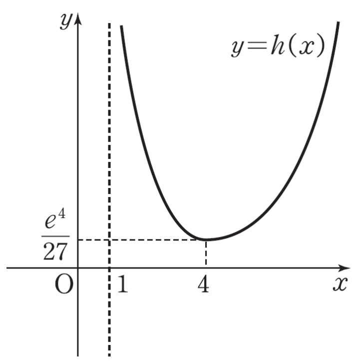
$h(x)=\dfrac{e^x}{(x-1)^3}$이라 하면

$$h'(x)=\frac{e^x(x-1)^3-3e^x(x-1)^2}{(x-1)^6}$$
$$=\frac{e^x(x-1)^2(x-4)}{(x-1)^6}$$
$$=\frac{e^x(x-4)}{(x-1)^4}$$

$h'(x)=0$에서 $x=4$이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	$\dfrac{e^4}{27}$	↗

또 $\lim\limits_{x\to1+0}h(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$이므로 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그림에서 $x>1$일 때, 함수 $h(x)=\dfrac{e^x}{(x-1)^3}$의 최솟값은 $\dfrac{e^4}{27}$이고, 곡선 $y=h(x)$와 직선 $y=k$가 만나려면 $k\geq\dfrac{e^4}{27}$이다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점이 존재하도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\dfrac{e^4}{27}$이다.

84) [정답] ①

$f(x)-g(x)=F(x)$라 하면

$F(x)=x^{n+1}-(n+1)x-n(n-3)$

$$F'(x)=(n+1)x^n-(n+1)$$
$$=(n+1)(x^n-1)$$

$F'(x)=0$에서 $x=1$

$F(x)$는 $x=1$에서 극소이자 최소이므로

$F(1)=1-(n+1)-n(n-3)>0$이면 된다.

즉, $n^2-2n<0,\ n(n-2)<0$

따라서 $0<n<2$이므로 자연수 n의 값은 $n=1$

85) [정답] ⑤

$x\ln x=-x+k$에서 $x\ln x+x=k$라 하고

$f(x)=x\ln x+x$라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}+1$$
$$=\ln x+2$$

$f'(x)=\ln x+2=0$에서

$x=e^{-2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^{-2}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗

$f(x)$는 $x=e^{-2}$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값 $-e^{-2}$을 갖는다.

따라서 $k<-e^{-2}$일 때 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=x\ln x$는 교점을 갖지 않는다.

따라서 직선 $y=-x+k$와 곡선 $y=x\ln x$의 교점의 개수 $g(k)$에 대하여 $g(k)\geq1$을 만족시키는 실수 k의 최솟값은 $-\dfrac{1}{e^2}$이다.

86)[정답] ⑤

$$g(x)=1-\log_2 x$$
$$=1-\frac{\ln x}{\ln 2}$$

이므로 $h(x)=x+g(x)\ln 2=x-\ln x+\ln 2$라 하면

$$h'(x)=1-\frac{1}{x}$$
$$=\frac{x-1}{x}$$

따라서 $x>0$에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	극소	↗

이때 $h(x)$의 최솟값은 $h(1)=1+\ln 2$이므로 실수 a의 최댓값은 $1+\ln 2$이다.

87) 정답 ⑤

[풀이] $f(x)=(x^2+x-1)e^{x+1}$에서

$$f'(x)=(2x+1)e^{x+1}+(x^2+x-1)e^{x+1}$$

$=(x^2+3x)e^{x+1}$

$=x(x+3)e^{x+1}$

$f'(x)=x(x+3)e^{x+1}=0$에서 $e^{x+1}>0$이므로

$x=0$ 또는 $x=-3$

$\therefore f(\alpha)\times f(\beta)=f(0)\times f(-3)$

$=(-e)\times 5e^{-2}$

$=-\dfrac{5}{e}$

88) **정답** ④

[풀이]$f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}\right|=\ln|x|+\ln|x+1|-\ln|x+2|^2$

$\therefore \ln|f(x)|=\ln|x|+\ln|x+1|-2\ln|x+2|$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}=\dfrac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}$

$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\dfrac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{x(x+1)}{(x+2)^2}\cdot\dfrac{3x+2}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{3x+2}{(x+2)^3}$

$\therefore f'(2)=\dfrac{8}{4^3}=\dfrac{1}{8}$

[다른 풀이] $f(x)=\dfrac{x^2+x}{(x+2)^2}$에서 몫의 미분법에 의하여

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x+2)^2-(x^2+x)\{2(x+2)\}}{(x+2)^4}$

$=\dfrac{(2x+1)(x+2)-2(x^2+x)}{(x+2)^3}=\dfrac{3x+2}{(x+2)^3}$

89) **정답** ④

[풀이]$x>0$이므로 $x^{\sqrt{x}}>0$이다.

$f(x)=x^{\sqrt{x}}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sqrt{x}}$

$\therefore \ln f(x)=\sqrt{x}\ln x$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln x+\sqrt{x}\times\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$

$=\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln x+2)$

$\therefore f'(e^2)=\dfrac{e^{2e}}{2e}(\ln e^2+2)$

$=\dfrac{e^{2e-1}}{2}(2+2)$

$=2e^{2e-1}$

[오답 피하기]

함수 $g(x)=x^{\sqrt{a}}$에서 $\sqrt{a}$가 상수이면

$g'(x)=\sqrt{a}\,x^{\sqrt{a}-1}$

그런데 $f(x)=x^{\sqrt{x}}$에서 $\sqrt{x}$가 상수가 아니므로

$f'(x)$를 $\sqrt{x}\cdot x^{\sqrt{x}-1}$로 실수하지 않도록 주의한다.

90) **정답** ②

[풀이]$f(x)=e^{-x^2}$에서

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

이므로

$f''(x)=(-2xe^{-x^2})'$

$=(-2)e^{-x^2}-2x\{e^{-x^2}(-2x)\}$

$=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

이때 $f''(x)=0$에서

$2(2x^2-1)e^{-x^2}=0$

$2x^2-1=0\ (\because e^{-x^2}>0)$

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

91) **정답** ③

[풀이]$f'(x)=\left(\dfrac{\ln|x|}{x}\right)'$

$=\dfrac{(\ln|x|)'\cdot x-\ln|x|\cdot(x)'}{x}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln|x|\cdot 1}{x^2}$

$=\dfrac{1-\ln|x|}{x^2}$

이므로

$f'(-e)=\dfrac{1-\ln|-e|}{(-e)^2}$

$=\dfrac{1-\ln e}{e^2}$

$=0$

[다른 풀이] $f(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\ln|x|$이므로 곱의 미분법에 의하여

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'\ln|x|+\dfrac{1}{x}\cdot(\ln|x|)'$

$=-\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln|x|+\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{1-\ln|x|}{x^2}$

[오답 피하기]

$(\ln|x|)'$을 $\dfrac{1}{|x|}$로 착각하지 않도록 주의한다.

$x>0$이면 $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이고,

$x<0$이면 $(\ln|x|)'=\{\ln(-x)\}'=\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$이므로

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$

92) **정답** ④

[풀이]$f(x)=e^{\tan x}$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$f'(x)=e^{\tan x}\cdot(\tan x)'$

$=e^{\tan x}\cdot\sec^2 x$

$=e^{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\tan\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$$
$$=e^1\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}$$
$$=2e$$

[다른 풀이1]
$u=\tan x$라 하면
$f(x)=e^u$
이때 $\dfrac{du}{dx}=\sec^2 x$이고 $\dfrac{d}{du}e^u=e^u$이므로
$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}e^u$$
$$=\frac{d}{dx}e^u\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=e^u\sec^2 x$$
$$=e^{\tan x}\cdot\sec^2 x$$
$$\therefore f'(x)=e^{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

[다른 풀이2]
$e^{\tan x}>0$이므로 $f(x)=e^{\tan x}$의 양변에 로그를 취하면
$\ln f(x)=\ln e^{\tan x}$
$\therefore \ln f(x)=\tan x$
위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sec^2 x$$
$$\therefore f'(x)=f(x)\sec^2 x=e^{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

93) **정답** ⑤

[풀이] $f(b)=g(b)$에서 $b^2=a\ln b$
이때 $\ln b\neq 0$ 이므로
$$a=\frac{b^2}{\ln b} \quad\cdots\cdots ㉠$$
$f'(x)=2x,\ g'(x)=\dfrac{a}{x}$이므로
$f'(b)=g'(b)$에서
$$2b=\frac{a}{b}$$
$$\therefore a=2b^2 \quad\cdots\cdots ㉡$$
㉠, ㉡에서 $\dfrac{b^2}{\ln b}=2b^2$ 이므로
$$\frac{1}{\ln b}=2\ (\because b\neq 0)$$
$$\ln b=\frac{1}{2}$$
$$\therefore b=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$
이를 ㉡에 대입하면
$a=2(\sqrt{e})^2=2e$
$\therefore ab=2e\times\sqrt{e}=2e\sqrt{e}$

94) **정답** 256

[풀이] $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로 주어진 조건에서
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h}}{h}$$
이때
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-(x-h)}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h})}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=x^{-\frac{1}{2}}$$
이므로
$$f'(x)=x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\therefore f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)$$
$$=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$
$$=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$
$$=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$
$$\therefore f''(4)=-\frac{1}{2\times 4\times\sqrt{4}}=-\frac{1}{16}$$
따라서 $p=-\dfrac{1}{16}$이므로
$$\frac{1}{p^2}=16^2=256$$

[다른 풀이] $g(x)=\sqrt{x}$라 하면 $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$이므로
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x-h)}{h}$$
$$=2g'(x)$$
$$=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=x^{-\frac{1}{2}}$$

95) **정답** 8

[풀이] $f'(x)=\cos x,\ g'(x)=2x$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로
$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$
$$=2f(x)\cdot\cos x$$
$$=2\sin x\cos x$$
$$=\sin 2x$$
한편 $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$이므로
$$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha$$
$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$
이때 $0<2\alpha<\pi$이므로

$$\sin 2\alpha=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore p=(g\circ f)'(\alpha)$
$=\sin 2\alpha$
$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\therefore 9p^2=9\times\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=9\times\frac{8}{9}=8$$

[다른 풀이1]
$(g\circ f)(x)=g(\sin x)=(\sin x)^2$
이므로 합성함수의 미분법에 의하여
$(g\circ f)'(x)=2(\sin x)^{2-1}\cdot(\sin x)'$
$=2\sin x\cos x$
$=\sin 2x$

[다른 풀이2]
$(g\circ f)(x)=\sin^2 x=\sin x\sin x$이므로 곱의 미분법에 의하여
$(g\circ f)'(x)=(\sin x)'\sin x+\sin x(\sin x)'$
$=\cos x\sin x+\sin x\cos x$
$=2\sin x\cos x$
$=\sin 2x$

96) **정답** ③

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$과 $x=e$에서
미분가능하면 된다.

(i) $x=0$에서의 미분가능성

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}e^x=1$

$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}(ax+b)=b$

$f(0)=b$

따라서 $\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)$에서 $b=1$

이제 $f'(0)$의 값을 구해보자

$$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to -0}\frac{ax+1-1}{x}=a$$

이때 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재해야 하므로

$\lim_{x\to -0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to +0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$이어야 한다.

$\therefore a=1$

(ii) $x=e$에서의 미분가능성

(i)에서

$$f(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ x+1 & (0\le x\le e)\\ c\ln x+d & (x>e)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=e$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to e-0}f(x)=\lim_{x\to e-0}(x+1)=e+1$

$\lim_{x\to e+0}f(x)=\lim_{x\to e+0}(c\ln x+d)=c+d$

$f(e)=e+1$

따라서 $\lim_{x\to e-0}f(x)=\lim_{x\to e+0}f(x)=f(e)$에서

$c+d=e+1$ …… ㉠

이제 $f'(e)$의 값을 구해 보자

$$\lim_{x\to e-0}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=\lim_{x\to e-0}\frac{x+1-(e+1)}{x-e}=\lim_{x\to e-0}\frac{x-e}{x-e}=1$$

$$\lim_{x\to e+0}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e+0}\frac{c\ln x+d-(e+1)}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e+0}\frac{c\ln x+d-(c+d)}{x-e}\quad(\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to e+0}\frac{c(\ln x-1)}{x-e}$$

이때 $g(x)=\ln x$라 하면

$g'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}=g'(e)=\frac{1}{e}$$

$$\therefore \lim_{x\to e+0}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e+0}\frac{c(\ln x-1)}{x-e}=\frac{c}{e}$$

이때 $x=e$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x\to e-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to e+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

이어야 한다.

$\therefore \frac{c}{e}=1$

$\therefore c=e,\ d=1\ (\because ㉠)$

(i), (ii)에서

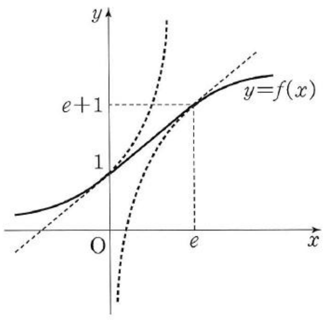
$$abcd=1\times1\times e\times1=e$$

[다른 풀이]

$\lim_{x\to e+0}\frac{\ln x-1}{x-e}$에서 $x-e=t$라 하면 $x\to e+0$일 때 $t\to +0$이므로

$$\lim_{x\to e+0}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{t\to +0}\frac{\ln(e+t)-1}{t}$$
$$=\lim_{t\to +0}\frac{\ln(e+t)-\ln e}{t}$$
$$=\lim_{t\to +0}\frac{\ln\frac{e+t}{e}}{t}$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to +0}\frac{e}{t}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)$$
$$=\frac{1}{e}\lim_{t\to +0}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}$$
$$=\frac{1}{e}\times1\ \left(\because \lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1\right)$$
$$=\frac{1}{e}$$

[참고] 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



97) **정답** ①

[풀이]$\sin y=\cos x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(\sin y)=\frac{d}{dx}(\cos x^2)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin y)\cdot\frac{dy}{dx}=(-\sin x^2)\cdot(x^2)'$$

$$\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x\sin x^2$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=-\frac{2x\sin x^2}{\cos y}\ (\text{단, } \cos y\neq 0)$$

위 식에 $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y=\frac{\pi}{6}$를 대입하면 구하는 접선의 기울기는

$$-\frac{2\sqrt{\frac{\pi}{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3\pi}}{3}$$

[다른 풀이]

$\sin y=\cos x^2$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos x^2$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-y=2n\pi\pm x^2$ (단, n은 정수이다.)

이때 $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$, $y=\frac{\pi}{6}$가 위 등식을 만족시키는 것은

$y=-x^2+\frac{\pi}{2}$

일 때이다.

이때, $y'=-2x$이므로 구하는 접선의 기울기는

$$-2\sqrt{\frac{\pi}{3}}=-\frac{2\sqrt{3\pi}}{3}$$

98) **정답** ②

[풀이]$f(x)=x^2e^x$에서

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f''(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2+2x)e^x-(x^2+4x+2)e^x}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-2(x+1)e^x}{x-a}=b$$

이때 $x\to a$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$-2(a+1)e^a=0$에서 $e^a>0$이므로

$a+1=0$

따라서 $a=-1$이므로

$$b=\lim_{x\to -1}\frac{-2(x+1)e^x}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}(-2e^x)$$

$$=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$$

$$\therefore ab=(-1)\times\left(-\frac{2}{e}\right)=\frac{2}{e}$$

99) **정답** ③

[풀이]$f(x)=\log_2(\cos x)$에서

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\log_2\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\ln 2}=-\frac{\tan x}{\ln 2}$$

이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{\ln 2}=-\frac{\sqrt{3}}{\ln 2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$g(-1)=\frac{\pi}{3}$$

$$g'(-1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\ln 2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{3g(x)-\pi}{x+1}$$

$$=3\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-\frac{\pi}{3}}{x+1}$$

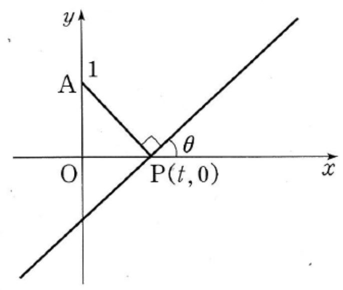
$$=3\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}$$

$$=3g'(-1)$$

$$=-\sqrt{3}\ln 2$$

100) **정답** 25

[풀이]



점 P의 속력은 매초 1로 일정하므로 점 P가 원점을 출발하여 t초가

지난 순간 점 P의 좌표는 $(t,\ 0)$이다.

따라서 직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-1}{t=0}=-\frac{1}{t}$$

이때 점 P를 지나고 직선 AP에 수직인 직선의 기울기를 $f(t)$라 하면

$$-\frac{1}{t}\times f(t)=-1$$

이므로

$f(t)=t$

이때 $f(t)=\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$\tan\theta=t \quad \cdots\cdots ㉠$

위 등식의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}=1$$

$\therefore \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{\sec^2\theta} = \cos^2\theta$ ...... ㉡

$t = \sqrt{3}$일 때 ㉠에서 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$이므로 $\dfrac{d\theta}{dt}$의 값은 ㉡에 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$를 대입한 값과 같다.

$\therefore p = \cos^2\dfrac{\pi}{3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore 100p = 100 \times \dfrac{1}{4} = 25$

101) **정답** ③

[풀이]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1} = a$에서 $x \to 1$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\{f(x)-2\} = 0$

이때 함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재하면 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-2\} = \lim\limits_{x\to1}f(x) - 2 = f(1) - 2 = 0$

$\therefore f(1) = 2$

$g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로 $g(2) = 1$이다. (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x-1} = 2$에서 $x \to 1$일 때,

(분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\{f'(x)+f(x)\} = 0$

함수 $f(x)$의 이계도함수가 존재하면 $f'(x)$와 $f(x)$는 모두 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to1}\{f'(x)+f(x)\} = \lim\limits_{x\to1}f'(x) + \lim\limits_{x\to1}f(x)$

$= f'(1) + f(1) = 0$

$\therefore f'(1) = -f(1) = -2$ ...... ㉠

그러므로 역함수의 미분법에 의하여

$g'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+f(x)}{x-1} = 2$에서

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+2+\{f(x)-2\}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)+\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1} + \lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= f''(1) + f'(1)$

$= f''(1) - 2 = 2$

$\therefore f''(1) = 4$ ...... ㉡

$y = g(x)$에서 $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$이므로

$g''(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}$

$= \dfrac{d}{dy}\left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\} \times \dfrac{dy}{dx}$

$= \dfrac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \times \dfrac{dy}{dx}$

$= \dfrac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^2} \times g'(x)$

$= \dfrac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$ $\left(\because g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}\right)$

$\therefore g''(2) = \dfrac{-f''(1)}{\{f'(1)\}^3}$

$= \dfrac{-4}{(-2)^3}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$= \dfrac{1}{2}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고]

$f(g(x)) = x$이므로

$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$ ...... ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x) = 0$

$\therefore g''(x) = \dfrac{-f''(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2}{f'(g(x))}$

$= \dfrac{-f''(y)}{f'(y)} \times \left\{\dfrac{1}{f'(y)}\right\}^2$

$= \dfrac{-f''(y)}{\{f'(y)\}^3}$

102) **정답** ③

$f(e^2) = (e^2-1)f'(c) + f(1)$에서

$\dfrac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1} = f'(c)$ ...... ㉠

함수 $f(x) = \ln x^2$은 닫힌 구간 $[1,\ e^2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(1,\ e^2)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ㉠을 만족시키는 c가 1과 e^2사이에 적어도 하나 존재한다.

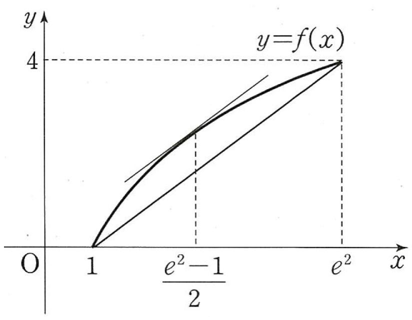
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$이므로

$\dfrac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1} = \dfrac{2}{c}$

$\dfrac{\ln e^4 - \ln 1}{e^2-1} = \dfrac{2}{c}$

$\dfrac{4}{e^2-1} = \dfrac{2}{c}$

$\therefore c = \dfrac{e^2-1}{2}$



103) **정답** ③

함수 $f(x) = \sin x + \cos x$는 닫힌 구간 $[0,\ 2\pi]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 미분가능하다.

또한 $f(0) = f(2\pi) = 1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$인 c가 0과 2π사이에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x) = \cos x - \sin x$에서

$f'(c) = \cos c - \sin c = 0$이므로

$\sin c - \cos c = 0$

$\sqrt{2}\sin\left(c - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$0 < c < 2\pi$이므로

$c = \dfrac{\pi}{4}$ 또는 $c = \dfrac{5}{4}\pi$

따라서 $f'(c) = 0$을 만족시키는 모든 상수 c의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5}{4}\pi = \dfrac{3}{2}\pi$

[다른풀이]

$\sin c - \cos c = 0$ ...... ㉠

(i) $\cos c = 0$일 때

$\sin c = 1$ 또는 $\sin c = -1$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $\cos c \neq 0$일 때

$$\frac{\sin c}{\cos c}-1=0$$

$\tan c=1$

$\therefore\ c=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $c=\dfrac{5}{4}\pi$ $(\because\ 0<c<2\pi)$

104) 정답 ③

함수 $f(x)=\sin 2\pi x$는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하다.

또 $f(1)=f(2)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

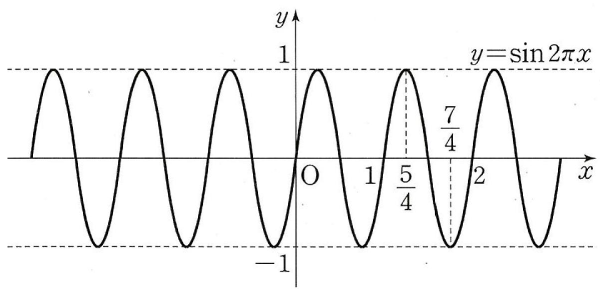
$f'(x)=2\pi\cos 2\pi x$에서

$f'(c)=2\pi\cos 2\pi c$

$1<c<2$에서 $2\pi<2\pi c<4\pi$이므로 $f'(c)=0$,

즉, $\cos 2\pi c=0$을 만족시키는 $2\pi c$의 값은 $\dfrac{5}{2}\pi$, $\dfrac{7}{2}\pi$

$\therefore\ c=\dfrac{5}{4}$ 또는 $c=\dfrac{7}{4}$



따라서 $f'(c)=0$을 만족시키는 모든 상수 c의 값의 합은

$\dfrac{5}{4}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{12}{4}=3$

105) 정답 ③

$f(x)=x\ln x+2x$로 놓으면

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}+2=\ln x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ t\ln t+2t)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\ln t+3$

직선 $y=4x-1$에 평행한 직선의 기울기는 4이므로

$\ln t+3=4$, $\ln t=1$

$\therefore\ t=e$

따라서 접점의 좌표는 $(e,\ 3e)$이고 기울기가 4인 접선의 방정식은

$y-3e=4(x-e)$

$\therefore\ y=4x-e$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로 $0=4a-e$에서 $a=\dfrac{e}{4}$

106) 정답 10

함수 $f(x)=\cos^2 x$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right]$에서 연속이고, 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f\left(\frac{9}{2}\pi\right)-f(0)}{\frac{9}{2}\pi}=f'(c)$$

인 c가 0과 $\dfrac{9}{2}\pi$사이에 적어도 하나 존재한다.

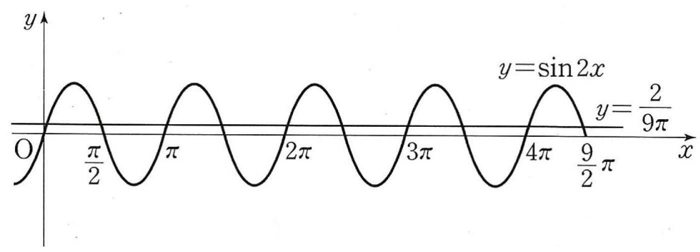
$f'(x)=-2\cos x\sin x=-\sin 2x$이므로

$$\frac{f\left(\frac{9}{2}\pi\right)-f(0)}{\frac{9}{2}\pi}=-\sin 2c$$

$$\frac{0-1}{\frac{9}{2}\pi}=-\sin 2c$$

$$\frac{2}{9\pi}=\sin 2c$$

$0<\dfrac{2}{9\pi}<1$이므로 직선 $y=\dfrac{2}{9\pi}$와 곡선 $y=\sin 2x$가 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right)$에서 만나는 점은 그림과 같이 10개이다.



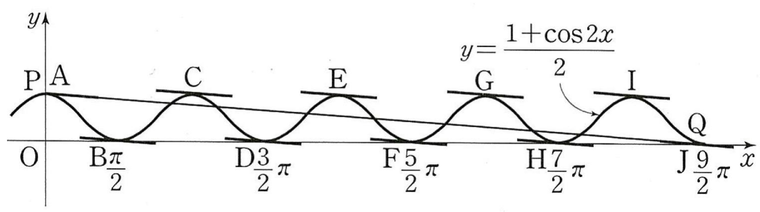
따라서 주어진 등식을 만족시키는 실수 c의 개수는 10이다.

[다른풀이]

함수 $f(x)=\cos^2 x$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right]$에서 연속이고, 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right)$에서 미분가능하다.

즉, 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{9}{2}\pi\right)$에서 평균값의 정리를 만족시키는 상수$c$는 두 점 $\mathrm{P}(0,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{9}{2}\pi,\ 0\right)$을 지나는 직선에 평행한 접선에서 접점의 x좌표이다.

함수 $y=\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$의 그래프는 그림과 같으므로 두 점 P, Q를 잇는 직선과 평행한 접선을 10개의 점 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J에서 각각 그을 수 있다.



따라서 주어진 등식을 만족시키는 실수 c의 개수는 10이다.

107) 정답 ③

$f(x)=(x-6)e^x$으로 놓으면

$f'(x)=e^x+(x-6)e^x=(x-5)e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-6)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t-5)e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-6)e^t=(t-5)e^t(x-t)$

$y=(t-5)e^t x-(t^2-6t+6)e^t$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$0=(t-5)e^t a-(t^2-6t+6)e^t$

$\{t^2-(a+6)t+(5a+6)\}e^t=0$

$e^t>0$이므로

$t^2-(a+6)t+(5a+6)=0$ …… ㉠

두 개의 접선을 그으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(a+6)^2-4(5a+6)>0$

$a^2-8a+12>0$

$(a-2)(a-6)>0$

$\therefore\ a<2$ 또는 $a>6$

따라서 9이하의 자연수 a는 1, 7, 8, 9이므로 그 합은

$1+7+8+9=25$

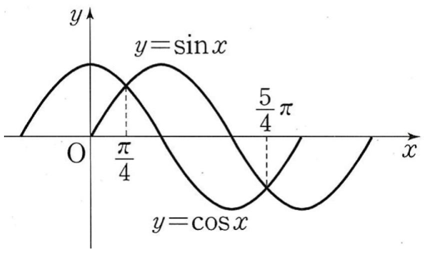
108) **정답** ④

$f(t)=e^{t}$이라 하자.

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{5}{4}\pi$일 때, $\cos x<\sin x$이므로 함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[\cos x,\ \sin x]$에서 연속이고 열린 구간 $(\cos x,\ \sin x)$에서 미분가능하다. 따라서 평균값의 정리에 의하여

$\frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\sin x-\cos x}=f'(c)$

인 c가 $\cos x$와 $\sin x$사이에 적어도 하나 존재한다.



$\cos x<c<\sin x$에서 $x\to\frac{\pi}{4}+0$일 때,

$\cos x\to\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin x\to\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $c\to\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{c\to\frac{\sqrt{2}}{2}}f'(c)=\lim_{c\to\frac{\sqrt{2}}{2}}e^{c}=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

[다른풀이]

$\sin x-\cos x=t$로 놓으면 $t=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$x\to\frac{\pi}{4}+0$일 때 $t\to+0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\frac{e^{\sin x}-e^{\cos x}}{\sin x-\cos x}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\left\{e^{\cos x}\cdot\frac{e^{\sin x-\cos x}-1}{\sin x-\cos x}\right\}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}e^{\cos x}\cdot\lim_{t\to+0}\frac{e^{t}-1}{t}\\&=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times1=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{aligned}$$

109) **정답** ②

함수 $f(x)=2xe^{-\frac{1}{2}x^{2}}$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f(x)=2xe^{-\frac{1}{2}x^{2}}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=2e^{-\frac{1}{2}x^{2}}+2xe^{-\frac{1}{2}x^{2}}(-x)\\&=(2-2x^{2})e^{-\frac{1}{2}x^{2}}\\&=-2(x+1)(x-1)e^{-\frac{1}{2}x^{2}}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, $x=1$에서 극대이므로

극솟값은 $m=f(-1)=-2e^{-\frac{1}{2}}$이고,

극댓값은 $M=f(1)=2e^{-\frac{1}{2}}$이다.

$$\begin{aligned}\therefore\ M-m&=2e^{-\frac{1}{2}}-(-2e^{-\frac{1}{2}})\\&=4e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

110) **정답** ④

함수 $f(x)=\frac{2\ln x}{x^{2}}$의 정의역은 $\{x|x>0\}$이다.

$f(x)=\frac{2\ln x}{x^{2}}$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(2\ln x)'\cdot x^{2}-2\ln x\cdot(x^{2})'}{(x^{2})^{2}}\\&=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^{2}-4x\ln x}{x^{4}}\\&=\frac{2x-4x\ln x}{x^{4}}\\&=\frac{2(1-2\ln x)}{x^{3}}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서

$1-2\ln x=0$

즉, $\ln x=\frac{1}{2}$이므로

$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{e}$에서 극대이고 극댓값은

$$\begin{aligned}f(\sqrt{e})&=\frac{2\ln\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^{2}}\\&=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

따라서 $a=\sqrt{e}$이고 $M=\frac{1}{e}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{a}{M}&=\frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{e}}=e\sqrt{e}\\&=e^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

참고)

$f'(x)=\frac{2(1-2\ln x)}{x^{3}}=0$에서 $x=\sqrt{e}$

$f'(x)=\frac{2(1-2\ln x)}{x^{3}}$에서

$$\begin{aligned}f''(x)&\\&=\frac{\{2(1-2\ln x)\}'\cdot x^{3}-2(1-2\ln x)\cdot(x^{3})'}{(x^{3})^{2}}\\&=\frac{\left(-\frac{4}{x}\right)x^{3}-6x^{2}(1-2\ln x)}{x^{6}}\\&=\frac{-4x^{2}-6(1-2\ln x)x^{2}}{x^{6}}\\&=\frac{-4-6(1-2\ln x)}{x^{4}}\quad(\because\ x>0)\end{aligned}$$

$$= -\frac{4+6(1-2\ln x)}{x^4}$$

$$f''(\sqrt{e}) = -\frac{4+6(1-2\ln\sqrt{e})}{(\sqrt{e})^4}$$

$$= -\frac{4+6\times 0}{e^2}$$

$$= -\frac{4}{e^2} < 0$$

이므로 이계도함수를 이용한 극값의 판정에 의하여 함수 $f(x)$는

$x = \sqrt{e}$ 에서 극대이다.

111) **정답** ③

$f(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos x$ 에서

$$f'(x) = \sqrt{2}\{e^x \cos x + e^x(-\sin x)\}$$

$$= \sqrt{2}\, e^x(\cos x - \sin x)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = \sin x$

$0 \le x \le 2\pi$ 일 때

$x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대이고, $x = \frac{5}{4}\pi$ 에서 극소이므로

극댓값과 극솟값은 각각 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} \cos\frac{\pi}{4} = e^{\frac{\pi}{4}}$,

$f\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi} \cos\frac{5}{4}\pi = -e^{\frac{5}{4}\pi}$ 이고,

구간의 양 끝점에서의 함숫값은 $f(0) = \sqrt{2}\, e^0 \cos 0 = \sqrt{2}$,

$f(2\pi) = \sqrt{2}\, e^{2\pi} \cos 2\pi = \sqrt{2}\, e^{2\pi}$ 이므로

최댓값은 $M = \sqrt{2}\, e^{2\pi}$, 최솟값은 $m = -e^{\frac{5}{4}\pi}$ 이다.

$$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\sqrt{2}\, e^{2\pi}}{-e^{\frac{5}{4}\pi}} = -\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi}$$

112) **정답** ②

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f(x) = \frac{3x}{x^2+4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(3x)'(x^2+4) - 3x \cdot (x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{3(x^2+4) - 3x \cdot 2x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$x = -2$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2+4} = 0$ 이고,

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x^2+4} = 0$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x = -2$ 에서 극솟값이자 최솟값

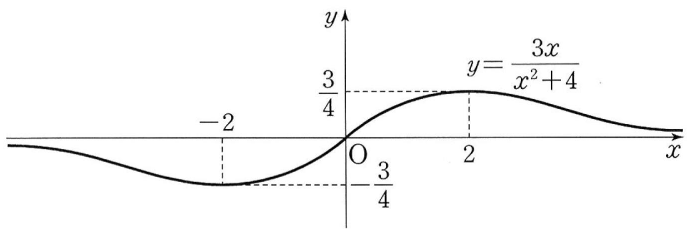
$f(-2) = \frac{3\times(-2)}{(-2)^2+4} = -\frac{3}{4}$

을 갖고, $x = 2$ 에서 극댓값이자 최댓값

$f(2) = \frac{3\times 2}{2^2+4} = \frac{3}{4}$

을 갖는다.

함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $M = \frac{3}{4}$, $m = -\frac{3}{4}$ 이므로

$$M - m = \frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

참고)

$f'(x) = \frac{-3(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2} = 0$ 에서

$x = -2$ 또는 $x = 2$

$f'(x) = \frac{-3x^2+12}{(x^2+4)^2}$ 에서

$f''(x)$

$$= \frac{(-3x^2+12)'(x^2+4)^2 - (-3x^2+12)\{(x^2+4)^2\}'}{\{(x^2+4)^2\}^2}$$

$$= \frac{-6x(x^2+4)^2 + (3x^2-12)\{2(x^2+4)\cdot 2x\}}{(x^2+4)^4}$$

$$= \frac{-6x(x^2+4) + 4x(3x^2-12)}{(x^2+4)^3}$$

$$f''(-2) = \frac{12(4+4) - 8(12-12)}{(4+4)^3}$$

$$= \frac{12\times 8}{8^3}$$

$$= \frac{3}{16} > 0$$

$$f''(2) = \frac{-12(4+4) + 8(12-12)}{(4+4)^3}$$

$$= -\frac{12\times 8}{8^3}$$

$$= -\frac{3}{16} < 0$$

이므로 이계도함수를 이용한 극값의 판정에 의하여 함수 $f(x)$는 $x = -2$ 에서 극소이고, $x = 2$ 에서 극대이다.

113) **정답** ③

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
$f(x)=xe^{x+1}$에서

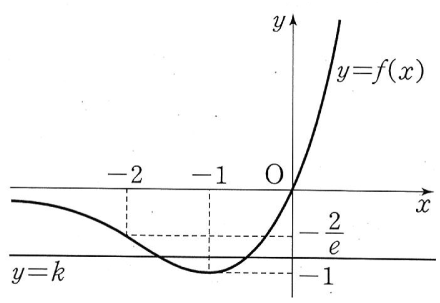
$f'(x)=e^{x+1}+xe^{x+1}=(x+1)e^{x+1}$,
$f''(x)=e^{x+1}+(x+1)e^{x+1}=(x+2)e^{x+1}$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$, $f''(x)=0$에서 $x=-2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 나타내면 오른쪽 표와 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(-2,\ f(-2))$에 대하여 $f''(-2)=0$이고, $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-2,\ f(-2))$, 즉 $\left(-2,\ -\frac{2}{e}\right)$이다. (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고, 극솟값 $f(-1)=-1$만을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $y=0$이고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-1<k<0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

114) **정답** 90

$f(x)=3x+\sin 2x$에서
$f'(x)=3+2\cos 2x$
$f''(x)=-4\sin 2x$
$0<x<\pi$일 때, $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가하고,
$f''(x)=0$에서 $\sin 2x=0$이므로 $x=\frac{\pi}{2}$이다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	변곡점	↗	3π

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(\frac{\pi}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이고 $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

따라서 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{3}{2}\pi$이므로

$$\frac{30b}{a}=30\times\frac{\frac{3}{2}\pi}{\frac{\pi}{2}}=30\times3=90$$

[다른 풀이]
곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(a,\ b)$이므로
$f(a)=b$이고 $f''(a)=0$
$f''(x)=-4\sin 2x$에서 $f''(a)=0$이므로
$-4\sin 2a=0$, 즉 $\sin 2a=0$
$f(x)=3x+\sin 2x$에서 $f(a)=b$이므로
$3a+\sin 2a=b$
$\sin 2a=0$이므로
$b=3a$
$\therefore \frac{30b}{a}=\frac{30\times3a}{a}=90$

115) **정답** ④

$f(x)=x^2e^x$으로 놓으면
$f'(x)=2xe^x+x^2e^x$
$f''(x)=2e^x+2xe^x+2xe^x+x^2e^x$
$=(x^2+4x+2)e^x$
$f''(x)=0$에서 $e^x>0$이므로
$x^2+4x+2=0$ …… ㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-2=2>0$이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을
갖는다.
곡선 $y=x^2e^x$의 두 변곡점의 x좌표는 x_1, x_2이고, 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 이 이차방정식의 두 실근은 x_1, x_2이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1+x_2=-4$

116) **정답** ③

$f(x)=(1-x)\sqrt{1-x^2}$에서
(근호 안) $=1-x^2\geq0$, 즉 $-1\leq x\leq1$이므로
함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|-1\leq x\leq1\}$이다.
$-1<x<1$일 때

$$\begin{aligned}f'(x)&=(1-x)'\sqrt{1-x^2}+(1-x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)'\\&=(-1)\cdot\sqrt{1-x^2}+(1-x)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\\&=-\sqrt{1-x^2}+\frac{x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{-(1-x^2)+x^2-x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{(2x+1)(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $-1<x<1$이므로 $x=-\frac{1}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극대이자 최대이다.
따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

117) **정답** ③

$f(x)=(x-2)e^{x-1}$으로 놓으면
$f'(x)=e^{x-1}+(x-2)e^{x-1}$
$=(x-1)e^{x-1}$
$f''(x)=e^{x-1}+(x-1)e^{x-1}$
$=xe^{x-1}$
$f''(x)=0$에서 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바
뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0,\ f(0))$, 즉 $\left(0,\ -\frac{2}{e}\right)$이다.
$f'(0)=-\frac{1}{e}$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $\left(0,\ -\frac{2}{e}\right)$에서의
접선의 방정식은

$$y+\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}(x-0)$$

즉, $y=-\frac{1}{e}x-\frac{2}{e}$

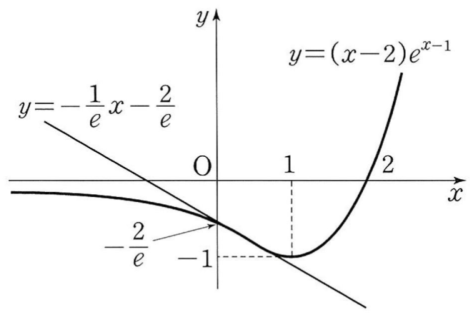
따라서 $a=-\frac{1}{e}$이고 $b=-\frac{2}{e}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{-\frac{2}{e}}{-\frac{1}{e}}=2$$

참고)
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타
내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	변곡점	↘	극소	↗

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^{x-1}=0$이므로 곡선 $y=f(x)$의
점근선은 $y=0$이다.
$f(0)=-\frac{2}{e}$, $f(1)=-1$, $f(2)=0$
이므로 곡선 $y=(x-2)e^{x-1}$과 접선 $y=-\frac{1}{e}x-\frac{2}{e}$는 그림과 같
다.



118) **정답** 95

$W(t)=t-9\ln(t+1)+70$에서
$W'(t)=1-\frac{9}{t+1}=\frac{t-8}{t+1}$
$W'(t)=0$에서
$t=8$
함수 $W(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	8	$\cdots$	12
$W'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$W(t)$	70	↘	극소	↗	$82-9\ln 13$

함수 $W(t)$는 $t=8$에서 극소이자 최소이다.
그러므로 함수 $W(t)$의 최솟값은
$W(8)=8-9\ln 9+70$
$=78-9\ln 9$
$a=8$이고 $b=78-9\ln 9$이므로
$a+b=8+78-9\ln 9$
$=86-9\ln 9$
따라서 $p=86$이고 $q=9$이므로
$p+q=86+9$
$=95$

참고)
$W'(t)=\frac{t-8}{t+1}=0$에서 $t=8$
$W'(t)=\frac{t-8}{t+1}$에서

$$W''(t)=\frac{(t-8)'(t+1)-(t-8)(t+1)'}{(t+1)^2}$$
$$=\frac{(t+1)-(t-8)}{(t+1)^2}$$
$$=\frac{9}{(t+1)^2}$$

$W''(8)=\frac{9}{9^2}=\frac{1}{9}>0$이므로 이계도함수를 이용한 극값의 판정에
의하여 함수 $W(t)$는 $t=8$에서 극소이다.

119) **정답** 31

함수 $f(x)=|x-1|\sqrt{x}$에서 (근호 안) $=x\geq 0$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x\geq 0\}$이다.
$0<x<1$일 때, $f(x)=-(x-1)\sqrt{x}$ 이므로

$$f'(x)=-\sqrt{x}-(x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-2x-(x-1)}{2\sqrt{x}}$$
$$=-\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

이고, $f'(x)=0$에서 $3x-1=0$이므로
$x=\frac{1}{3}$

$x > 1$일 때, $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ 이므로

$$f'(x) = \sqrt{x} + (x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x + (x-1)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}} > 0$$

따라서 $x > 1$일 때 함수 $f(x)$는 증가한다.
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−		+
$f(x)$	0	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x = \frac{1}{3}$에서 극대, $x = 1$에서 극소이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$$M = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

함수 $f(x)$의 극솟값은

$$m = f(1) = 0 \times \sqrt{1} = 0$$
$$M^2 + m^2 = \frac{4}{27} + 0 = \frac{4}{27}$$

따라서 $p = 27$이고 $q = 4$이므로
$p + q = 27 + 4 = 31$

참고)
함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 미분가능하지 않지만 $x = 1$에서 연속이고,
$x = 1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음($-$)에서 양($+$)으로 바뀌므로
$x = 1$에서 극소이다.

120) **정답** ③

$f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'(2+\cos x) - \sin x(2+\cos x)'}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\cos x(2+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2}$$
$$= \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2}$$

$f''(x)$

$$= \frac{(2\cos x+1)'(2+\cos x)^2 - (2\cos x+1)\{(2+\cos x)^2\}'}{(2+\cos x)^4}$$
$$= \frac{-2\sin x(2+\cos x)^2 - (2\cos x+1)\cdot 2\cdot(2+\cos x)(-\sin x)}{(2+\cos x)^4}$$
$$= \frac{2\sin x(2+\cos x)(-2-\cos x+2\cos x+1)}{(2+\cos x)^4}$$
$$= \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$2\cos x + 1 = 0$, 즉 $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$0 \le x \le \pi$이므로 $x = \dfrac{2}{3}\pi$

$0 < x < \pi$일 때,
$\sin x > 0$, $\cos x - 1 < 0$, $2 + \cos x > 0$이므로

$$f''(x) = \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3} < 0$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y = f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타
내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f''(x)$		−	−	−	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	0

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x = \dfrac{2}{3}\pi$에서 극댓값

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\frac{2}{3}\pi}{2+\cos\frac{2}{3}\pi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

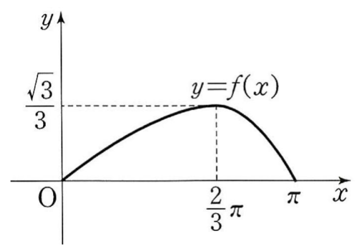
을 갖는다. (참)

ㄴ. $0 \le x \le \pi$일 때, $f(x)$는 $x = 0$, $x = \pi$에서 최솟값 0을 가지므로 $0 \le x \le \pi$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이다. (참)

ㄷ. $0 < x < \pi$에서 $f''(x) < 0$이므로 곡선 $y = f(x)$는 위로 볼록이다.
그러므로 곡선 $y = f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고)
함수 $y = f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



121) **정답** ①

모든 실수 x에 대하여 $e^x > 0$이므로 $x^2 - 3x + 1 \ge ke^{-x}$의 양변에 e^x을 곱하여 정리하면

$e^x(x^2 - 3x + 1) \ge k$

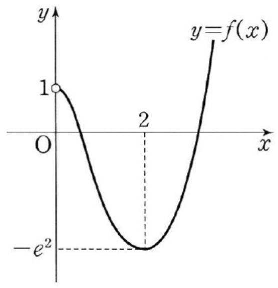
$f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$ $(x > 0)$로 놓으면

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3x + 1) + e^x(2x - 3)$$
$$= e^x(x^2 - x - 2)$$
$$= e^x(x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$에서
$x = 2$ $(\because x > 0)$

함수 $y = f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-e^2$	↗



따라서 $x>0$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=-e^2$이므로

$f(x) \geq f(2)=-e^2 \geq k$

에서

$k \leq -e^2$

따라서 실수 k의 최댓값은 $-e^2$이다.

122) **정답** ⑤

$x>0$에서 $\ln(x+1)>0$이므로

부등식 $2(x+1)-a\ln(x+1) \geq 0$의 양변을

$\ln(x+1)$로 나누면

$$\frac{2(x+1)}{\ln(x+1)}-a \geq 0$$

즉, $\dfrac{2(x+1)}{\ln(x+1)} \geq a$

$f(x)=\dfrac{2(x+1)}{\ln(x+1)}$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{(2x+2)'\ln(x+1)-2(x+1)\{\ln(x+1)\}'}{\{\ln(x+1)\}^2}$$

$$=\frac{2\ln(x+1)-\dfrac{2(x+1)}{x+1}}{\{\ln(x+1)\}^2}$$

$$=\frac{2\ln(x+1)-2}{\{\ln(x+1)\}^2}$$

$f'(x)=0$에서

$2\ln(x+1)-2=0$

$\ln(x+1)=1$

$x+1=e$

즉, $x=e-1$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$2e$	↗

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(e-1)=2e$이므로

$f(x) \geq f(e-1)=2e$

$\dfrac{2(x+1)}{\ln(x+1)} \geq 2e \geq a$에서

$a \leq 2e$

따라서 실수 a의 최댓값은 $2e$이다.

[다른 풀이]

$f(x)=2(x+1)-a\ln(x+1)$로 놓으면

$$f'(x)=2-\frac{a}{x+1}$$

$$=\frac{2x+2-a}{x+1}$$

(i) $a \leq 2$일 때

$x>0$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$\therefore\ f(x)>f(0)$

$=2(0+1)-a\ln(0+1)$

$=2 \geq 0$

따라서 주어진 부등식을 만족시킨다.

(ii) $a>2$일 때

$f'(x)=0$에서

$$\frac{2x+2-a}{x+1}=0$$

$$x=\frac{a}{2}-1$$

함수 $y=f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}-1$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f\left(\dfrac{a}{2}-1\right)$이다.

$$f\left(\frac{a}{2}-1\right)=2\left(\frac{a}{2}-1+1\right)-a\ln\left(\frac{a}{2}-1+1\right)$$

$$=a-a\ln\frac{a}{2}$$

$$=a\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)$$

$f(x) \geq f\left(\dfrac{a}{2}-1\right) \geq 0$이어야 하므로

$a\left(1-\ln\dfrac{a}{2}\right) \geq 0$에서 $a>2$이므로

$$1-\ln\frac{a}{2} \geq 0$$

$$\ln\frac{a}{2} \leq 1$$

$$\frac{a}{2} \leq e$$

$\therefore\ 2<a \leq 2e$

위의 (i), (ii)에서 부등식을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a \leq 2e$

따라서 실수 a의 최댓값은 $2e$이다.

123) **정답** ③

$x=0$은 방정식 $e^x=tx$의 근이 아니므로

$x \neq 0$

따라서 양변을 x로 나누면

$\dfrac{e^x}{x}=t$ ······ ㉠

이때 방정식 ㉠의 실근은 두 함수 $y=\dfrac{e^x}{x}$, $y=t$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

$g(x)=\dfrac{e^x}{x}$으로 놓으면

$$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$g'(x)=0$에서 $x=1$

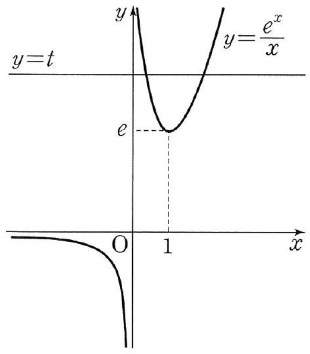
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↘	e	↗

$\lim\limits_{x\to+0} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-0} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 방정식 $e^x=tx$의 서로 다른 실근의 개수는

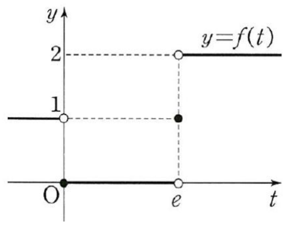
$t>e$일 때 2개,

$t=e$일 때 1개,

$0\le t<e$일 때 0개,

$t<0$일 때 1개

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $y=f(t)$가 불연속인 t의 값은 0, e이므로 그 합은 e이다.

124) **정답** ①

$f(x)=2x^3-tx^2+t^2$에서

$f'(x)=6x^2-2tx$

$\quad=2x(3x-t)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{t}{3}$

(ⅰ) $t<0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{t}{3}$일 때 극댓값 $f\left(\dfrac{t}{3}\right)$를 갖고, $x=0$일 때, 극솟값$f(0)$을 갖는다.

$$g(t)=f\left(\frac{t}{3}\right)$$
$$=2\left(\frac{t}{3}\right)^3-t\left(\frac{t}{3}\right)^2+t^2$$
$$=\frac{2t^3}{27}-\frac{t^3}{9}+t^2$$
$$=-\frac{1}{27}t^3+t^2$$

$h(t)=f(0)=t^2$

$$\frac{h(t)}{g(t)}=\frac{t^2}{-\frac{1}{27}t^3+t^2}$$
$$=\frac{27}{27-t}<1$$

(ⅱ) $t>0$일 때

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값 $f(0)$을 갖고,

$x=\dfrac{t}{3}$일 때 극솟값 $f\left(\dfrac{t}{3}\right)$를 갖는다.

$g(t)=f(0)=t^2$

$$h(t)=f\left(\frac{t}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{27}t^3+t^2$$
$$\frac{h(t)}{g(t)}=\frac{-\frac{1}{27}t^3+t^2}{t^2}$$
$$=-\frac{1}{27}t+1<1$$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에서 0이 아닌 실수 t에 대하여 $\dfrac{h(t)}{g(t)}<1$이다.

따라서 부등식 $\dfrac{h(t)}{g(t)}<k$가 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은 1이다.

125) **답** ④

풀이

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+3h)-f(3)\}-\{f(3-h)-f(3)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+3h)-f(3)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\times(-1)$$
$$=3f'(3)+f'(3)$$
$$=4f'(3)$$

한편, $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+5)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$

이므로 $f'(3)=\dfrac{3^2+2\times3-5}{(3+1)^2}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$

$\therefore\ \lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(3+3h)-f(3-h)}{h}=4f'(3)=4\times\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{2}$

126) **답** ③

풀이

$f(x)=1+\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}$ 에서

$$f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{-3\cdot2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$=-\frac{2}{(x+1)^2}-\frac{6}{(x+1)^3}$$

$f'(x)>0$ 에서

$-\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{6}{(x+1)^3}>0,\ \dfrac{2(x+1)+6}{(x+1)^3}<0$

$(x+4)(x+1)^3<0\qquad\therefore\ -4<x<-1$

따라서 부등식 $f'(x)>0$을 만족시키는 모든 정수 x의 값은 -3, -2이므로 구하는 합은

$-3+(-2)=-5$

이다.

127) **답** 2

풀이

$g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $f(g(x))=x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

$\therefore\ g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}$

$f'(x)=1+\{f(x)\}^2$에서 x 대신 $g(x)$를 대입하면

$f'(g(x))=1+\{f(g(x))\}^2=1+x^2$

$\therefore\ g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}=\dfrac{1}{1+x^2}$

$\therefore\ 10g'(2)=10\times\dfrac{1}{1+2^2}=2$

128) **답** ⑤

풀이

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{(x-2)g(x)}=\frac{3}{4}$ 에서

$x\to2$ 일 때, (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)-g(x)\}=0$ 에서

$f(2)=g(2)$

또한, $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계에 있으므로

$f(2)=g(2)=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{(x-2)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)-g(x)+g(2)}{(x-2)g(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{g(x)}-\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\frac{1}{g(x)}\right\}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{g(2)}-g'(2)\times\frac{1}{g(2)}$$
$$=\frac{1}{2}\{f'(2)-g'(2)\}$$
$$=\frac{3}{4}$$

이때 $g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(2)}$ 이므로

$\frac{1}{2}\left\{f'(2)-\frac{1}{f'(2)}\right\}=\frac{3}{4}$, $\{2f'(2)+1\}\{f'(2)-2\}=0$

$\therefore\ f'(2)=-\frac{1}{2}$ 또는 $f'(2)=2$

그런데 삼차함수 $f(x)$의 삼차항의 계수는 양수이고 역함수가 존재하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이다.

$\therefore\ f'(2)=2,\ g'(2)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ f(2)+g'(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

9 여러 가지 함수의 도함수

129) 답 ⑤

풀이

$f(x)=\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ 에서

$$f'(x)=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left\{\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}'$$
$$=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\left\{-\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)'$$
$$=-4\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$
$$=-4\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=-4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=(-4)\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2$$

130) 답 ④

풀이

$f(x)=-\sin^2\frac{x}{2}+1=\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ 에서

$f'(x)=-\frac{1}{2}\sin x$

따라서

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\frac{1}{2}\sin x}{x-\pi}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$$

에서 $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고,

$x\to\pi$일 때, $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f'(x)}{x-\pi}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin(\pi+t)}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

131) 답 5

풀이

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2h)-f(0)\}-\{f(-3h)-f(0)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot2-\lim_{h\to0}\frac{f(-3h)-f(0)}{-3h}\cdot(-3)$$
$$=f'(0)\cdot2-f'(0)\cdot(-3)=5f'(0)$$

이때

$f(x)=\tan x\sec x$ 에서

$$f'(x)=\sec^2x\sec x+\tan x\sec x\tan x$$
$$=\sec x(\sec^2x+\tan^2x)$$
$$=\sec x(2\sec^2x-1)$$

이므로 $f'(0)=\sec0\cdot(2\sec^2 0-1)=1$

$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-3h)}{h}=5f'(0)=5\cdot1=5$

132) 답 ⑤

풀이

미분계수의 정의에 따라

$$f'(0)$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{10}\sin\frac{1}{x^k}+x^k\sin\frac{1}{x^3}}{x}$$
$$=\lim_{x\to+0}\left(x^9\sin\frac{1}{x^k}+x^{k-1}\sin\frac{1}{x^3}\right)$$

이므로 $f'(0)$의 값이 존재하려면 $k-1>0$, 즉 $k>1$이어야 하고,

이때 $f'(0)=0$이다.

또한, $x>0$일 때

$$f'(x)=10x^9\sin\frac{1}{x^k}-kx^{9-k}\cos\frac{1}{x^k}+kx^{k-1}\sin\frac{1}{x^3}-3x^{k-4}\cos\frac{1}{x^3}$$

그런데 $f'(x)$가 $x=0$에서 연속이 되려면

$\lim_{x\to0}f'(x)=f'(0)=0$

이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to+0}f'(x)=0$이 되어야 하므로 $9-k>0$이고

$k-4>0$에서

$4<k<9$이므로 자연수 k는 5, 6, 7, 8의 4개다.

133) 답 15

풀이

$f(x)=5e^{3x-3}$ 에서

$f'(x)=5e^{3x-3}(3x-3)'=15e^{3x-3}$

$\therefore\ f'(1)=15e^0=15$

134) 답 ①

풀이

$f(x)=(2x^2-3)e^{-2x-4}$ 에서

$f'(x)=(2x^2-3)'\cdot e^{-2x-4}+(2x^2-3)\cdot(e^{-2x-4})'$
$=4xe^{-2x-4}+(2x^2-3)\cdot(-2)\cdot e^{-2x-4}$
$=(-4x^2+4x+6)e^{-2x-4}$
$\therefore\ f'(-2)=(-16-8+6)e^0=-18$

135) 답 ④

풀이

$f(x)=\dfrac{3^x}{x}$ 에서

$f'(x)=\dfrac{3^x\ln 3\cdot x-3^x}{x^2}=\dfrac{3^x(x\ln 3-1)}{x^2}$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2)+f(2)-f(2-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2+x)-f(2)}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2-x)-f(2)}{-x}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$

$=2\cdot\dfrac{3^2(2\ln 3-1)}{2}=\dfrac{9}{2}(\ln 9-1)$

136) 답 ③

풀이

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)-g(h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\cdot 2-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)}{h}$

$=2f'(0)-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)}{h}=0$

$\therefore\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)}{h}=2f'(0)$

한편, $f(x)=\sin(e^x-e^{-x})$ 에서

$f'(x)=(e^x+e^{-x})\cdot\cos(e^x-e^{-x})$ 이므로 $f'(0)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(h)}{h}=2f'(0)=2\cdot 2=4$

137) 답 ③

풀이

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2x}+x^n\cos x}{x^n+1}$ 에서

(ⅰ) $|x|<1$ 일 때, $n\to\infty$ 이면 $x^n\to 0$ 이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2x}+x^n\cos x}{x^n+1}=e^{2x}$

(ⅱ) $|x|>1$ 일 때, $n\to\infty$ 이면 $\dfrac{1}{x^n}\to 0$ 이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{2x}+x^n\cos x}{x^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{e^{2x}}{x^n}+\cos x}{1+\dfrac{1}{x^n}}=\cos x$

따라서

$f'(x)=\begin{cases}2e^{2x} & (|x|<1)\\ -\sin x & (|x|>1)\end{cases}$ 이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)+f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=2e^{2\cdot\frac{1}{2}}+\left(-\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)=2e-\dfrac{1}{2}$

138) 답 ①

풀이

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)$

$\lim\limits_{x\to 1-0}ae^{-x}=\lim\limits_{x\to 1+0}\left(b\sin\dfrac{\pi}{2}x+x-1\right)$

$\therefore ae^{-1}=b$ ……㉠

또한, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{ae^{-1-h}-ae^{-1}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{ae^{-1}(e^{-h}-1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{ae^{-1}(e^{-h}-1)}{-h}\times(-1)$

$=-ae^{-1}$

$\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{b\sin\dfrac{\pi}{2}(1+h)+h-b}{h}$

$(\because f(1)=ae^{-1}=b)$

$=\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{b\left\{\sin\dfrac{\pi}{2}(1+h)-1\right\}}{h}+1$

$=\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{b\left(\cos\dfrac{\pi}{2}h-1\right)}{h}+1$

$=\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{b\left(\cos^2\dfrac{\pi}{2}h-1\right)}{h\left(\cos\dfrac{\pi}{2}h+1\right)}+1$

$=\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{-b\sin^2\dfrac{\pi}{2}h}{h\left(\cos\dfrac{\pi}{2}h+1\right)}+1$

$=1$

따라서 $-ae^{-1}=1$에서 $a=-e$

㉠에서 $b=-1$

$\therefore a+b=-e+(-1)=-e-1$

139) 답 ③

풀이

$e^{x+y}=x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^{x+y}(x+y)'=1$

$e^{x+y}(1+y')=1$

$\therefore y'=\dfrac{1}{e^{x+y}}-1=\dfrac{1}{x}-1\,(\because e^{x+y}=x)$

따라서 $x=5$인 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{1}{5}-1=-\dfrac{4}{5}$

140) 답 ④

풀이

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(x)+f(h)+e^{x+h}-e^x-e^h+1\}-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\left\{\dfrac{f(x)}{h}+\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}-\dfrac{e^h-1}{h}\right\}$ ……㉠

한편, $f(x+y)=f(x)+f(y)+e^{x+y}-e^x-e^y+1$의 양변에

$x=y=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=2$

……㉡

또한,

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$
$$=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$
$$=e^x\left(\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right) \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$f'(x)=2+e^x-1=e^x+1$

$\therefore f'(\ln 3)=e^{\ln 3}+1=3+1=4$

141) 답 16

풀이

$f(x)=\ln(\tan x)$에서 $\ln(\tan x)=0$이면 $\tan x=1$, 즉 $x=\frac{\pi}{4}$이고 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(0)=\frac{\pi}{4}$이다.

이때 $f'(x)=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$이므로

$$g'(0)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{\sec^2\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-4g(0)}{8h}\times 8$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{4\{g(8h)-g(0)\}}{8h}\times 8$$
$$=32\lim_{h\to 0}\frac{g(8h)-g(0)}{8h}$$
$$=32\times g'(0)$$
$$=32\times\frac{1}{2}=16$$

142) 답 ③

풀이

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2h}$$
$$=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$f(x)=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)$에서

$$f'(x)=\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)'$$
$$=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$$
$$\therefore 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$$

143) 답 ②

풀이

$f(x)=\ln(x^2+2x)$에서

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x}$이므로 $f'(n)=\frac{2(n+1)}{n^2+2n}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

144) 답 ①

풀이

$f(x)=\ln\frac{1}{x^2}=-2\ln|x|$,

$g(x)=\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2=(-\ln x)^2=(\ln x)^2$에서

$f'(x)=-\frac{2}{x}$, $g'(x)=\frac{2}{x}\ln x$이다.

이때 $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'(e^2)=f'(g(e^2))g'(e^2)=f'(4)\cdot\frac{4}{e^2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{e^2}=-\frac{2}{e^2}$$

145) 답 ⑤

풀이

$f(x)=2x^3+\ln(\log_2 2x)$에서 $f(1)=2$이고

$f'(x)=6x^2+\{\ln(\log_2 2x)\}'$

$$=6x^2+\frac{1}{\log_2 2x}(\log_2 2x)'$$
$$=6x^2+\frac{1}{\log_2 2x}\cdot\frac{1}{x\ln 2}$$
$$=6x^2+\frac{1}{x\ln 2\cdot\log_2 2x}$$

이므로 $f'(1)=6+\frac{1}{\ln 2}$

$$\therefore f'(1)-2f(1)=6+\frac{1}{\ln 2}-4=2+\frac{1}{\ln 2}$$

146) 답 ②

풀이

함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(\ln 2,\ g(\ln 2))$에서의 접선의 기울기는

$$g'(\ln 2)=\frac{1}{f'(g(\ln 2))}$$

이다.

이때 $f(x)=\ln(e^{2x}+e^{3x})$에서 $f'(x)=\frac{2e^{2x}+3e^{3x}}{e^{2x}+e^{3x}}$

$\ln(e^{2x}+e^{3x})=\ln 2$에서 $e^{2x}+e^{3x}=2$, 즉 $x=0$이므로 $g(\ln 2)=0$

$$\therefore g'(\ln 2)=\frac{1}{f'(g(\ln 2))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$$

147) 답 ②

풀이

$f(x)=\frac{\ln x}{x^n}$에서

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^n-nx^{n-1}\times\ln x}{x^{2n}}=\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$$

$f'(x)=0$이면 $\ln x=\frac{1}{n}$ $\quad\therefore x=e^{\frac{1}{n}}$

따라서

$f(e^{\frac{1}{n}})=\frac{\ln e^{\frac{1}{n}}}{(e^{\frac{1}{n}})^n}=\frac{1}{en}=a_n$이고

$a_{n+1}=\frac{1}{e(n+1)}$이다.

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=\frac{1}{e^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{e^2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{e^2}$$

148) 답 ①

풀이

$f(x)=x^{\ln x}$에서 $\ln f(x)=(\ln x)^2$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}\ln x$이다.

따라서 $f'(x)=f(x)\left(\frac{2}{x}\ln x\right)=x^{\ln x}\left(\frac{2}{x}\ln x\right)$

$g(x)=(\ln x)^x$에서 $\ln g(x)=x\ln(\ln x)$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{g'(x)}{g(x)}=\ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}$ 이다.

$$\therefore\ g'(x)=g(x)\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$

$$=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}\right\}$$

$\therefore\ f'(e)-g'(e)=2-1=1$

149) 답 ②

풀이

$f(\pi)=\pi^{\sin\pi}=1$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$$

한편, $f(x)=x^{\sin x}\,(x>0)$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}=\sin x\ln x$에서 이 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore\ f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\therefore\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-1}{x-\pi}=f'(\pi)=\pi^0\times(-1\times\ln\pi+0)=-\ln\pi$$

150) 답 ③

풀이

$f(x)=\frac{x^5}{(x+3)(x-1)}$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{x^5}{(x+3)(x-1)^2}\right|$$

$=5\ln|x|-\ln|x+3|-2\ln|x-1|$

위 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{x}-\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-1}=\frac{2x^2+5x-15}{x(x-1)(x+3)}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{2x^2+5x-15}{x(x-1)(x+3)}\cdot\frac{x^5}{(x+3)(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^4(2x^2+5x-15)}{(x+3)^2(x-1)^3}$$

$$\therefore f'(-1)=\frac{9}{16}$$

151) 답 ③

풀이

$e^{4f(x)}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln e^{4f(x)}=\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

$$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{1}{4}\{\ln(1+\sin x)-\ln(1-\sin x)\}$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\cos x}{1-\sin x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos x\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cos x\cdot\frac{2}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{2\cos x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=1$$

152) 답 ④

풀이

$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=0$이므로 $f''(a)=0$이다.

$f(x)=\frac{1}{x^2+2}$에서

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2(x^2+2)^2-(-2x)\cdot 2(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^4}$$

$$=\frac{-2(x^2+2)+8x^2}{(x^2+2)^3}=\frac{6x^2-4}{(x^2+2)^3}$$

모든 실수 x에 대하여 $x^2+2>0$이므로 $f''(x)=0$이면

$6x^2-4=0$ $\qquad\therefore x^2=\frac{2}{3}$

따라서 $f''(a)=0$인 양수 a의 값은 $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$이다.

153) 답 ④

풀이

$f(x)=(ax+b)\sin x$에서

$f'(x)=a\sin x+(ax+b)\cos x$이므로

$f'(-\pi)=\pi a-b=0$ ……㉠

또한, $f''(x)=2a\cos x-(ax+b)\sin x$이므로

$f(x)+f''(x)=3\cos x$에서

$2a\cos x=3\cos x$

$(2a-3)\cos x=0$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$2a-3=0 \qquad \therefore a=\dfrac{3}{2}$

$a=\dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$\dfrac{3}{2}\pi-b=0 \qquad \therefore b=\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore ab=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{9}{4}\pi$

$\therefore \tan ab=\tan\dfrac{9}{4}\pi=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

154) 답 ③

풀이

$f(x)=e^{ax}\cos bx$에서

$f'(x)=ae^{ax}\cos bx+e^{ax}(-b\sin bx)$

$\quad=e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)$

$f''(x)=ae^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)+e^{ax}(-ab\sin bx-b^2\cos bx)$

$\quad=e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx-2ab\sin bx\}$

$f''(x)-6f'(x)+25f(x)=0$에서

$e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx-2ab\sin bx\}$

$\qquad-6e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)+25e^{ax}\cos bx=0$

$(a^2-b^2-6a+25)\cos bx-2b(a-3)\sin bx=0$ ……㉠

이때 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$a^2-b^2-6a+25=0$이고 $-2b(a-3)=0$이다.

$-2b(a-3)=0$에서 $a=3\,(\because b>0)$

$a^2-b^2-6a+25=0$에 $a=3$을 대입하면

$16-b^2=0 \qquad \therefore b=4\,(\because b>0)$

$\therefore a+b=3+4=7$

155) 답 ④

풀이

$f(x)=k^2e^{2x}+ke^x+1$에서 $f'(x)=2k^2e^{2x}+ke^x$이고 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선이 x축과 평행하므로

$f'(2)=2k^2e^4+ke^2=0,\ 2ke^2+1=0\ (\because ke^2\neq 0)$

$\therefore k=-\dfrac{1}{2e^2}$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{4e^4}e^{2x}-\dfrac{1}{2e^2}e^x+1,\ f'(x)=\dfrac{1}{2e^4}e^{2x}-\dfrac{1}{2e^2}e^x$

이므로

$f(1)=\dfrac{1}{4e^4}e^2-\dfrac{1}{2e^2}e+1=\dfrac{1}{4e^2}-\dfrac{1}{2e}+1$

$f'(1)=\dfrac{1}{2e^4}e^2-\dfrac{1}{2e^2}e=\dfrac{1}{2e^2}-\dfrac{1}{2e}$

따라서 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 방정식은

$y-\left(\dfrac{1}{4e^2}-\dfrac{1}{2e}+1\right)=\left(\dfrac{1}{2e^2}-\dfrac{1}{2e}\right)(x-1)$

이므로 y절편은

$\dfrac{1}{4e^2}-\dfrac{1}{2e}+1-\dfrac{1}{2e^2}+\dfrac{1}{2e}$

$=-\dfrac{1}{4e^2}+1=\dfrac{4e^2-1}{4e^2}$

156) 답 2

풀이

곡선 $y=\ln(x+a)$와 직선 $y=x+1$이 접할 때, 접점의 좌표를

$(t,\ t+1)$이라 하면 $y=\ln(x+a)$에서 $y'=\dfrac{1}{x+a}$이므로

$\dfrac{1}{t+a}=1,\ t+a=1 \qquad$ …… ㉠

또한, $t+1=\ln(t+a)$에서

$t+1=\ln(t+a)=\ln 1=0$

$\therefore t=-1$

$\therefore t=-1$을 ㉠에 대입하면

$-1+a=1$

$\therefore a=2$

157) 답 ①

풀이

$y=\sin 2x$에서 $y'=2\cos 2x$이므로 점 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의

기울기는 $2\cos\dfrac{\pi}{3}=2\times\dfrac{1}{2}=1$

따라서 기울기가 1인 직선과 곡선 $y=x^3-x^2+1$이 접할 때의 접점의

좌표를 $(t,\ t^3-t^2+1)$이라 하면 $y'=3x^2-2x$이므로

$3t^2-2t=1,\ 3t^2-2t-1=0$

$(3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=1$

따라서 접점은 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{23}{27}\right),\ (1,\ 1)$이므로 접선의 방정식은 각각

$y-\dfrac{23}{27}=x+\dfrac{1}{3},\ y-1=x-1$

$y=x+\dfrac{32}{27},\ y=x$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의 점 $(0,\ 0)$과 직선

$y=x+\dfrac{32}{27}$, 즉 $x-y+\dfrac{32}{27}=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{\left|\dfrac{32}{27}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{16\sqrt{2}}{27}$

158) 답 ①

풀이

$y=e^x$에서 $y'=e^x$이므로 점 $(f(t),\ g(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-g(t)=e^{f(t)}(x-f(t))$

$\therefore y=e^{f(t)}x-e^{f(t)}f(t)+g(t) \qquad$ …… ㉠

이때 $g(t)=e^{f(t)}$이고 ㉠이 점 $(\ln t,\ 0)$을 지나므로

$e^{f(t)}\ln t-e^{f(t)}f(t)+e^{f(t)}=0$

$\ln t-f(t)+1=0\ (\because e^{f(t)}\neq 0)$

$\therefore f(t)=\ln t+1,\ g(t)=e^{\ln t+1}$

$\therefore \displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t+1)-1}{g(t)}$

$=\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\{\ln(t+1)+1\}-1}{e^{\ln t+1}}$

$=\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{\ln(t+1)}{et}$

$=\displaystyle\frac{1}{e}\lim_{t\to+0}\frac{\ln(t+1)}{t}$

$=\dfrac{1}{e}\times 1=\dfrac{1}{e}$

159) 답 ⑤

풀이

ㄱ. $f'(\beta)$는 $x=\beta$에서의 접선의 기울기와 같고, $g'(x)$는 $g(x)$의 일차항의 계수인 접선의 기울기와 같으므로
$f'(\beta)=g'(\beta)$ (참)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $(\alpha,\ f(\alpha)),\ (\beta,\ f(\beta))$

에서의 접선이 서로 일치하므로 $x=\alpha$에서의 미분계수와 닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서의 평균변화율은 일치한다.

$\therefore f'(\alpha)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (참)

ㄷ. $f'(\alpha)=f'(\beta)$이고 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(\gamma)$

인 실수 γ가 α와 β 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f'(\alpha)=f'(\gamma)=f'(\beta)$가 성립하고 함수 $y=f'(x)$는 닫힌구간 $[\alpha,\ \gamma]$, $[\gamma,\ \beta]$에서 각각 연속이고 열린구간 $(\alpha,\ \gamma)$, $(\gamma,\ \beta)$에서 각각 미분가능 하므로 롤의 정리에 의하여 α와 γ 사이에 $f''(x)=0$인 x가 적어도 하나 존재하고, γ와 β 사이에 $f''(x)=0$인 x가 적어도 하나 존재한다.

즉, $f''(c)=0$인 실수 c가 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$에 적어도 두 개 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

160) 답 **3**

풀이

$f(x)=(x+a)e^{2x^2}$에서

$f'(x)=e^{2x^2}+(x+a)e^{2x^2}\times 4x=(4x^2+4ax+1)e^{2x^2}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $e^{2x^2}>0$이므로 $4x^2+4ax+1\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $4x^2+4ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(2a)^2-4=4a^2-4=4(a-1)(a+1)\leq 0$

$\therefore\ -1\leq a\leq 1$

따라서 정수 a는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개다.

161) 답 ④

풀이

$f(x)=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{3x-1}{(x+1)^2}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3x-5}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{(x+1)^3+12x-20}{4(x+1)^3}$

$=\dfrac{x^3+3x^2+15x-19}{4(x+1)^3}$

$=\dfrac{(x-1)(x^2+4x+19)}{4(x+1)^3}$

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 감소 상태에 있으므로 $f'(k)\leq 0$이어야 한다.

$\dfrac{(k-1)(k^2+4k+19)}{4(k+1)^3}\leq 0$

$(k-1)(k+1)^3(k^2+4k+19)\leq 0$

$(k-1)(k+1)\leq 0$ $(\because\ (k+1)^2>0,\ k^2+4k+19>0)$

$\therefore\ -1<k<1$ $(\because\ k\neq -1,\ k\neq 1)$

따라서 정수 k는 0이므로

$f(0)=1$

162) 답 ③

풀이

$f(x)=(1+\sin x)\cos x$에서

$f'(x)=\cos^2 x+(1+\sin x)(-\sin x)$

$=\cos^2-\sin x-\sin^2 x$

$=1-\sin x-2\sin^2 x$

$=-(2\sin x-1)(\sin x+1)$

$f'(x)<0$에서

$(2\sin x-1)(\sin x+1)>0$

$\therefore\ \sin x>\dfrac{1}{2}$ $(\because\ \sin x+1>0)$

$\therefore\ \dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{5}{6}\pi$ $(\because\ 0\leq x\leq\pi)$

따라서 열린 구간 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$m=\dfrac{\pi}{6}$, $M=\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore\ M+m=\pi$

163) 답 ④

풀이

$f(x)=\dfrac{3x+a}{x^2+1}$에서

$f'(x)=\dfrac{3(x^2+1)-(3x+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-3x^2-2ax+3}{(x^2+1)^2}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로

$f'(3)=\dfrac{-27-6a+3}{100}=0$, $6a=-24$

$\therefore\ a=-4$

$\therefore\ f'(x)=\dfrac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-(3x+1)(x-3)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{3}$ 또는 $x=3$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

즉, $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2+1}$에서

$M=f(3)=\dfrac{1}{2}$, $m=f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{9}{2}$

$\therefore\ M+m=\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{9}{2}\right)=-4$

164) 답 **5**

풀이

$f(t)=\overline{\mathrm{AP}}^2$

$=(t-a)^2+\left(\dfrac{1}{t}-a\right)^2$

$=t^2-2at+2a^2-\dfrac{2a}{t}+\dfrac{1}{t^2}$

$f'(t)=2t-2a+\dfrac{2a}{t^2}-\dfrac{2}{t^3}$

$=\dfrac{2}{t^3}(t^4-at^3+at-1)$

$=\dfrac{2}{t^3}(t-1)(t+1)(t^2-at+1)$

이때 $t>0$이므로 집합 $\{\alpha|f(\alpha)$는 함수 $f(x)$의 극값이다.$\}$의 원소가 서로 다른 세 개가 존재하려면 t에 대한 이차방정식

$t^2-at+1=0$ ⋯⋯ ㉠

이 0보다 크고 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

그런데 $a>2$이므로 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(-a)^2-4=a^2-4>0$

㉠의 서로 다른 두 실근을 $\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=1$

따라서 $\alpha<1<\beta$이므로 $a_1=\alpha$, $a_2=1$, $a_3=\beta$

$\therefore\ f(a_1)+f(a_2)=f(\alpha)+f(1)$

$=\left\{(\alpha-a)^2+\left(\frac{1}{\alpha}-a\right)^2\right\}+\{(1-a)^2+(1-a)^2\}$

$=\{(\alpha-a)^2+(\beta-a)^2\}+2(1-a)^2$ ($\because\ \alpha\beta=1$)

$=\{(\alpha^2+\beta^2)-2a(\alpha+\beta)+2a^2\}+2(1-a)^2$

$=\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2a(\alpha+\beta)+2a^2\}+2(1-a)^2$

$=(a^2-2)+2(1-a)^2$ ($\because\ \alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=1$)

$=3a^2-4a$

$=3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$

즉, $k=3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}$이고, $a>2$이므로 $k>4$

즉, 자연수 k의 최솟값은 5이다.

165) 답 ②

풀이

$\overline{AC}=x$라 하면 $x\sin2\theta=4$, $\overline{BC}=x\tan\theta$이므로

삼각형 ACB의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}x^2\tan\theta$

$=\frac{8\tan\theta}{\sin^2 2\theta}$ $\left(\because\ x=\frac{4}{\sin2\theta}\right)$

$=\frac{2}{\sin\theta\cos^3\theta}$ ($\because\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$)

$\therefore\ \frac{2}{f(\theta)}=\sin\theta\cos^3\theta$

$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{2}{f(\theta)}\right\}=\cos^4\theta+\sin\theta\cdot3\cos^2\theta\cdot(-\sin\theta)$

$=\cos^2\theta(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)$

$=\cos^2\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})(2\cos\theta+\sqrt{3})$

$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{2}{f(\theta)}\right\}=0$에서 $\theta=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

함수 $\frac{2}{f(\theta)}$는 $\theta=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$

$\therefore\ 9f(\alpha)=9\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)=9\times\frac{2}{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}=32\sqrt{3}$

166) 답 ⑤

출제의도 함수의 이계도함수를 이용하여 변곡점을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2$이라 하면

$f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=\{\ln(ax)^{-1}\}^2=(-\ln ax)^2=\{\ln ax\}^2$

$f'(x)=2\ln ax\cdot\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2a}{ax}\cdot x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$일 때 $f''(x)>0$이고, $x>\frac{e}{a}$일 때, $f''(x)<0$이다.

따라서 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$이다.

이때 변곡점 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$1=\frac{2e}{a}$ $\qquad\therefore\ a=2e$

167) 답 ③

풀이

$f''(x)=\frac{-6(2-2x)}{x^2(2-x)^2}=\frac{12(x-1)}{x^2(2-x)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=1$이고 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1,\ f(1))$, 즉 $(1,\ 1)$이다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=f'(1)(x-1)$

$y-1=7(x-1)$, $y=7x-6$

즉, y절편은 -6이다.

168) 답 ①

풀이

$-1\le x_1<x_2\le\alpha$인 임의의 x_1, x_2에 대하여

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

가 성립하기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 구간 $[-1,\ \alpha]$에서 위로 볼록해야 한다.

즉, $-1\le x\le\alpha$인 x에 대하여 $f''(x)\le0$이어야 한다.

$f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$에서

$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$

$f''(x)=\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{2x-1}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}$

$(x-1)^4>0$, $e^{\frac{1}{x-1}}>0$이므로

$f''(x)\le0$이기 위해서는

$2x-1\le0$

$\therefore\ x\le\frac{1}{2}$

이때 정의역이 $\{x\mid-1\le x<1\}$이므로 $-1\le x\le\frac{1}{2}$

따라서 α의 최댓값 $M=\frac{1}{2}$이므로

$f(M)=f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{-2}$

169) 답 ④

풀이

$f(x)=\ln\{(2-x)^{2-x}(2+x)^{2+x}\}$

$=(2-x)\ln(2-x)+(2+x)\ln(2+x)$

에서

$f'(x)=-\ln(2-x)-1+\ln(2+x)+1$

$=\ln(2+x)-\ln(2-x)$

$f'(x)=0$에서

$\ln(2+x)-\ln(2-x)=0$

$\ln(2+x)=\ln(2-x)$, $2+x=2-x$

$\therefore\ x=0$

이때 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(0)=\ln(2^2\times2^2)=4\ln2$

170) 답 ④

풀이

$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$에서

$f'(x)=\dfrac{-\sin x(\sin x+2)-\cos^2 x}{(\sin x+2)^2}$

$=\dfrac{-2\sin x-1}{(\sin x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $-2\sin x-1=0$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{7}{6}\pi$일 때 최솟값 $f\left(\dfrac{7}{6}\pi\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\dfrac{11}{6}\pi$

일 때 최댓값 $f\left(\dfrac{11}{6}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$을 가지므로

$a-b=\dfrac{11}{6}\pi-\dfrac{7}{6}\pi=\dfrac{2}{3}\pi$

171) 답 19

풀이

점 P$(-1,\ 0)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x+1)$

이므로 직선과 타원의 교점의 x좌표는

$x^2+2m^2(x+1)^2=1$

$(2m^2+1)x^2+4m^2x+2m^2-1=0$

$(x+1)\{(2m^2+1)x+2m^2-1\}=0$

$\therefore\ x=-\dfrac{2m^2-1}{2m^2+1}\quad(\because\ x\neq-1)$

$\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{-2m^2+1}{2m^2+1},\ m\left(\dfrac{-2m^2+1}{2m^2+1}+1\right)\right),\ \mathrm{R}\left(\dfrac{-2m^2+1}{2m^2+1},\ 0\right)$

따라서 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QR}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{-2m^2+1}{2m^2+1}+1\right)\times m\left(\dfrac{-2m^2+1}{2m^2+1}+1\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{2m^2+1}\times m\times\dfrac{2}{2m^2+1}$

$=\dfrac{2m}{(2m^2+1)^2}$

$S'=\dfrac{2(2m^2+1)^2-2m\times2(2m^2+1)\times4m}{(2m^2+1)^4}$

$=\dfrac{-12m^2+2}{(2m^2+1)^3}$

즉, $S'=0$에서 $m^2=\dfrac{1}{6}$이고 $m>0$이므로 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

따라서 S는 $m=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$에서 극대이면서 최대이므로 S의 최댓값은

$S=\dfrac{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{6}}{\left(2\times\dfrac{1}{6}+1\right)^2}=\dfrac{3}{16}\sqrt{6}$

$\therefore\ p+q=16+3=19$

172) 답 ①

풀이

$f(x)=ax+b(a\neq0)$라 하면

$g(x)=(ax+b)e^{-x^2}$이므로

$g'(x)=ae^{-x^2}+(ax+b)(-2x)e^{-x^2}$

$=(-2ax^2-2bx+a)e^{-x^2}$

따라서 $e^{-x^2}>0$이고 방정식 $g'(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 0이므로 방정식 $-2ax^2-2bx+a=0$의 서로 다른 두 실근의 합이 0이 되어야 한다.

$-\dfrac{2b}{2a}=0\qquad\therefore\ b=0$

또한,

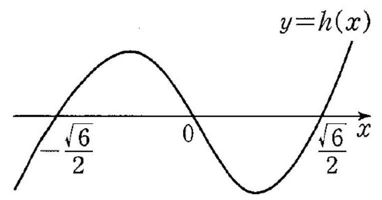
$g''(x)=(-4ax-2b)e^{-x^2}+(-2ax^2-2bx+a)(-2x)e^{-x^2}$

$=(4ax^3+4bx^2-6ax-2b)e^{-x^2}$

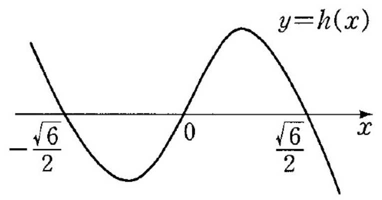
$=2ax(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})e^{-x^2}\quad(\because\ b=0)$

이고 $e^{-x^2}>0$이므로 $h(x)=2ax(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})$이라 하면

$a>0$일 때,



$a<0$일 때,



따라서 $x<-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프가 아래로 볼록하기 위해서는 $a<0$이어야 한다.

또한,

$g'(x)=-a(2x^2-1)e^{-x^2}$

$=-a(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)e^{-x^2}$

$g'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

따라서 $a<0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$에서 극댓값을 가지고

조건 (나)에 의하여

$g\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{a}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore\ a=-4$

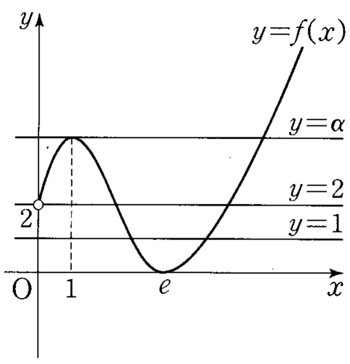
따라서 $f(x)=-4x$이므로

$f(1)=-4$

173) 답 42

풀이

주어진 조건에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 극댓값을 α라 하면 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 그림에서

$k=1,\ k=2,\ k=\alpha$

이다.

$1+2+\alpha=13$

$\therefore\ \alpha=10$

따라서 방정식 $f(x)=m$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 m은 3, 4, 5, $\cdots$, 9이므로 그 합은

$\dfrac{7(3+9)}{2}=42$

174) 답 ③

풀이

$g(x)=e^x(\sin x-\cos x)\ (0\le x\le 2\pi)$라 하면

$g(x)=0$에서 $\sin x=\cos x$이므로

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5}{4}\pi$

또한,

$g'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$

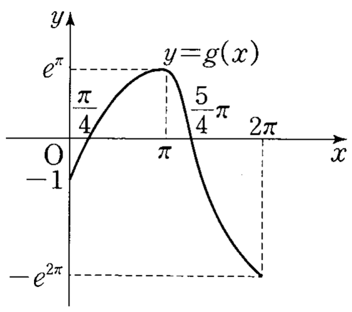
$\quad=2e^x\sin x\ (0<x<2\pi)$

$g'(x)=0$에서 $x=\pi$

즉, 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	e^π	$\searrow$	$-e^{2\pi}$

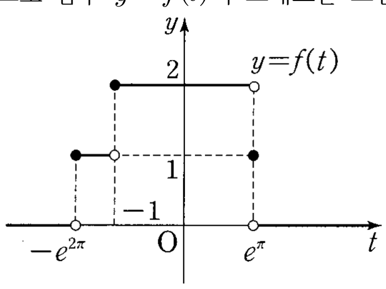
따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 대략 그림과 같다.



따라서

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-e^{2\pi}\ \text{또는}\ e^\pi<t)\\ 1 & (-e^{2\pi}\le t<-1\ \text{또는}\ t=e^\pi)\\ 2 & (-1\le t<e^\pi)\end{cases}$$

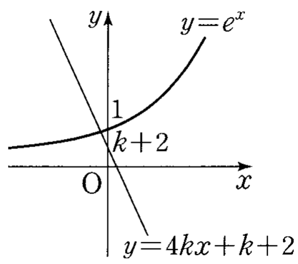
이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(t)$의 불연속인 점의 개수는 3이다.

175) 답 ②

풀이



$f(x)=e^x-(1+2x)(1+kx)$에서

$f(0)=1-1=0$

또한,

$f'(x)$

$\quad=e^x-2(1+kx)-k(1+2x)$

$\quad=e^x-(4kx+k+2)$

이므로

$f'(0)=1-k-2=-1-k$

이때 $f(0)=0$이므로 $f'(0)<0$이면 $x\ge 0$에서 $f(x)\ge 0$에 모순이다.

따라서 $f'(0)\ge 0$이어야 한다.

즉, $-1-k\ge 0$에서 $k\le -1$

그리고 $k+2\le 1$ 에서

$e^x\ge 4kx+k+2$이므로

$f'(x)=e^x-(4kx+k+2)\ge 2$

따라서 k의 최댓값은 -1이다.

176) 답 ③

풀이

$f(x)=\tan x+2\sin x-3x$라 하면

$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3$

$\quad=\dfrac{\boxed{1}+2\cos^3 x-3\cos^2 x}{\cos^2 x}$

이때 $g(x)=2\cos^3 x-3\cos^2 x+\boxed{1}$이라 하면

$g'(x)=6\cos^2 x(-\sin x)-6\cos x(-\sin x)$

$\quad=6\sin x\cos x\left(\boxed{-\cos x+1}\right)$

그런데 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $g'(x)>0$이고 $g(0)=\boxed{0}$이므로

$g(x)>\boxed{0}$

즉, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(x)>0$이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)>0$

$\therefore\ \tan x+2\sin x>3x$

$\therefore\ a=1,\ b=0,\ h(x)=-\cos x+1$

$\therefore\ h\left(\dfrac{a+b}{3}\pi\right)=h\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\quad=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$

177) 답 ⑤

풀이

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{2^x+3^x}{a}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln a}{x}=b$ ⋯⋯㉠

㉠에서 $x\to 0$ 일 때, (분모) → 0 이고 극한값을 가지므로 (분자) →0이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\{\ln(2^x+3^x)-\ln a\}=\ln 2-\ln a=0$에서 $a=2$

또한 $f(x)=\ln(2^x+3^x)$이라 하면 $f(0)=\ln 2$이고

$f'(x)=\dfrac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{2^x+3^x}$에서 $f'(0)=\dfrac{\ln 2+\ln 3}{1+1}=\dfrac{\ln 6}{2}$

$\therefore\ b=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2^x+3^x)-\ln 2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$\quad=f'(0)=\dfrac{\ln 6}{2}$

$\therefore\ ab=2\times\dfrac{\ln 6}{2}=\ln 6$

178) 답 ④

풀이

$y=\sin^2 x$에서 $y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$ 이므로
두 점 A, B에서의 접선의 기울기는 각각 $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$이고 두 접선이 서로 수직으로 만나므로

$\sin 2\alpha \sin 2\beta=-1$

그런데 $0<2\alpha<\pi<2\beta<2\pi$이므로

$\sin 2\alpha=1$, $\sin 2\beta=-1$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore\ \sin\alpha\sin\beta=\sin\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

179) 답 ⑤

풀이

$x>0$일 때, $f(x)=2x^2\ln x-5x^2$에서

$f'(x)=4x(\ln x-2)$, $f''(x)=4(\ln x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=e$

$x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 달라지므로 점 $(e,\ -3e^2)$은 변곡점이다.

이때, 변곡점$(e,\ -3e^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=-4e$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3e^2)=-4e(x-e)$

$\therefore\ y=-4ex+e^2$

$x<0$일 때, $f(x)=2x^2\ln(-x)-5x^2$에서

$f'(x)=4x\{\ln(-x)-2\}$, $f''(x)=4\{\ln(-x)-1\}$

$f''(x)=0$에서 $x=-e$

$x=-e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 달라지므로 점 $(-e,\ -3e^2)$은 변곡점이다.

이때, 변곡점$(-e,\ -3e^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-e)=4e$이므로 접선의 방정식은

$y-(-3e^2)=4e(x+e)$

$\therefore\ y=4ex+e^2$

따라서 두 접선의 교점은 $\mathrm{A}(0,\ e^2)$이므로 점 A의 y좌표는 e^2이다.

180) 답 ④

풀이

$g(x)=f(x)e^{-x}$에서

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

한편, $f(x+y)=f(x)e^y+f(y)e^x$에

$x=y=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$이므로 $f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to o}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)e^h+f(h)e^x-f(x)}{h}$$
$$=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}+e^x\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

에서

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1,\ \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$$

이므로

$f'(x)=f(x)+e^x$

따라서 $g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}=e^x\cdot e^{-x}=1$이므로

$g(x)=x+C$ (C는 적분상수)임을 알 수 있다.

그런데 $g(0)=f(0)e^0=0$이므로

$g(x)=x$, $f(x)=g(x)e^x=xe^x$

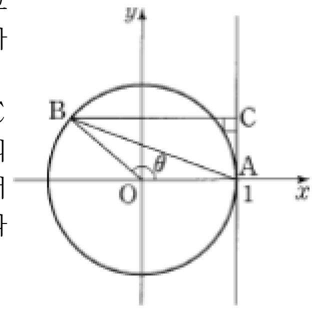
이다.

$\therefore\ f(1)+g'(2)=e+1$

181) 답 ⑤

풀이

점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(1,\ 0)$이라 하면 점 A에서 원에 그은 접선의 방정식은 $x=1$이고 $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 $\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{C}(1,\ \sin\theta)$이므로 선분 AC의 길이는 $\sin\theta$, 선분 BC의 길이는 $1-\cos\theta$이다. 따라서 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 하면



$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta(1-\cos\theta)$

$$\therefore\ \frac{dS(\theta)}{d\theta}=\frac{1}{2}\{\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin\theta\cdot\sin\theta\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta\}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)$$
$$=-\frac{1}{2}(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)$$

$\frac{dS(\theta)}{d\theta}=0$에서 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$($\because\ 0<\theta<\pi$)이므로 $\theta=\frac{2}{3}\pi$

넓이 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	(π)
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{2}{3}\pi$에서 극대이면서 최대이고, 이때

$\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

182) 답 ③

풀이

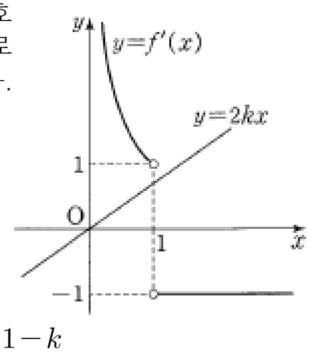
$h(x)=f(x)-kx^2$이라 하면

$h'(x)=f(x)-2kx$

함수 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$과 함수 k의 값의 범위에 따라 그림과 같다.

(i) $0<k\le\frac{1}{2}$인 경우

$x=1$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로 $h(x)$는 $x=1$에서 극대가 된다.



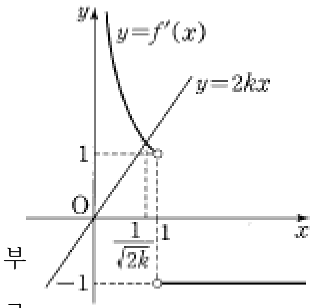
$\therefore\ g(k)=h(1)=f(1)-k=1-k$

(i) $k\ge\frac{1}{2}$인 경우

$h'(x)=f'(x)-2kx$

$=\frac{1}{x}-2kx=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$



$x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양수에서 음수로 변하므로

$h(x)$는 $x=\frac{1}{\sqrt{2k}}$에서 극대가 된다.

$\therefore\ g(k)=h\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)-k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)^2=\frac{1}{2}(1-\ln 2k)$

(i), (ii)에서 $g(k)=\begin{cases}1-k & \left(0<k\le\frac{1}{2}\right)\\ \frac{1}{2}(1-\ln 2k) & \left(k>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

따라서 $g\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{1-\ln\left(2\cdot\frac{e}{2}\right)\right\}=0$이므로

$\lim_{k\to\frac{e}{2}}\frac{g(k)}{2k-e}=\lim_{k\to\frac{e}{2}}\frac{g(k)-g\left(\frac{e}{2}\right)}{2\left(k-\frac{e}{2}\right)}=\frac{1}{2}g'\left(\frac{e}{2}\right)$

$k>\frac{1}{2}$일 때, $g'(k)=\frac{d}{dk}\left\{\frac{1}{2}(1-\ln 2k)\right\}=-\frac{1}{2k}$이므로

$g'\left(\frac{e}{2}\right)=-\frac{1}{e}$

$\therefore\ \lim_{k\to\frac{e}{2}}\frac{g(k)}{2k-e}=\frac{1}{2}g'\left(\frac{e}{2}\right)=-\frac{1}{2e}$

183) **정답** ②

$g(x)=\ln(2x-1), h(x)=f(g(x))$라 하면 $g(1)=\ln 1=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(\ln(2x-1))-f(0)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-f(g(1))}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=10$

즉, $h'(1)=10$ $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이고 $g'(x)=\frac{2}{2x-1}$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(0)g'(1)=2f'(0)=10$ 따라서 $f'(0)=5$

184) **정답** 5

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고, $f(a)=b$이므로 $g(b)=a$......㉠

$f'(a)=\frac{1}{g'(b)}=\frac{1}{b}$......㉡ $g(b)=4f'(a)$에 ㉠, ㉡을 대입하면

$a=\frac{4}{b}, ab=4$ 두 수 a,b는 자연수이고 $a<b$이므로

$a=1, b=4$ 따라서 $a+b=5$

185) **정답** ②

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 OH는 선분 AB를 수직이등분한다. 이때 $\angle OPH=\theta$(맞꼭지각)이고 $\overline{OP}=1$이므로 직각삼각형 OHP에서 $\overline{OH}=\overline{OP}\sin\theta=\sin\theta$ 이고,

$\overline{AB}=2\overline{AH}=2\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OH}^2}=2\sqrt{4-\sin^2\theta}$

따라서 삼각형 OAB의 넓이 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OH}=\sin\theta\times\sqrt{4-\sin^2\theta}$ 이므로

$S'(\theta)=\cos\theta\times\sqrt{4-\sin^2\theta}+\sin\theta\times\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{4-\sin^2\theta}}$

$=\cos\theta\times\sqrt{4-\sin^2\theta}-\frac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sqrt{4-\sin^2\theta}}$

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\times\sqrt{4-\sin^2\frac{\pi}{4}}-\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{4-\sin^2\frac{\pi}{4}}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{4-\frac{1}{2}}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

186) **정답** ③

$f(x)=\ln(x^2+2x)$에서 $f'(x)=\frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x}=\frac{2x+2}{x^2+2x}$이므로

$f'(n)=\frac{2n+2}{n^2+2n}$ 따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f'(n)}{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{2n+2}{n^2+2n}}{2n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{(\frac{1}{1}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots\right.$

$\left.\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})\right\}$

$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$

187) **정답** ①

$f(x)=e^x+e^{2x}$에서 $f'(x)=e^x+2e^{2x}$ 함수 $f(2x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(2x))=x$......㉠ ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $g'(f(2x))f'(2x)\times2=1$......㉡

이때 $g'(2)$의 값은 방정식 $f(2x)=2$의 해를 ㉡에 대입하여 구할 수 있다. $f(2x)=2$에서

$e^{2x}+e^{4x}=2$ $(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)=0$

$e^{2x}+2>2$이므로 $e^{2x}-1=0, x=0$

따라서 ㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면

$g'(f(0))f'(0)\times2=1$

이때 $f(0)=2, f'(0)=3$이므로

$g'(2)=\frac{1}{2f'(0)}=\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$

188) **정답** ①

$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2f(x)}{f(x)+g(x)}+2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$=\frac{2f'(x)\{f(x)+g(x)\}-2f(x)\{f'(x)+g'(x)\}}{\{f(x)+g(x)\}^2}$

$=\frac{2f'(x)g(x)-2f(x)g'(x)}{\{f(x)+g(x)\}^2}$ 이므로

$\frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2}+2\times\frac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)+g(x)\}^2}=0$

$\{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\}\left[\frac{1}{\{f(x)\}^2}+\frac{2}{\{f(x)+g(x)\}^2}\right]=0$

이때 $\frac{1}{\{f(x)\}^2}+\frac{2}{\{f(x)+g(x)\}^2}>0$ 이므로 모든 실수 x에 대하

여 $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)=0$ ......㉠ 이 성립한다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2\ln2$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$에서 $f(1)=2$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로 $f'(1)=2\ln2$ ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)g'(1)-f'(1)g(1)=0$ $2g'(1)-(2\ln2)g(1)=0$ 따라서 $\frac{g'(1)}{g(1)}=\ln2$

189) **정답** 15

조건 (가)에서 $f'(f(x))f'(x)=\{f(f(x))\}'$ 이므로

$\{f(f(x))\}'=ax^3+bx^2+12x+c$ ......㉠

이때 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가 n차 다항함수이면 합성함수 $f(f(x))$는 n^2차 다항함수이고 그 도함수 $\{f(f(x))\}'$은 (n^2-1)차 다항함수이다. ㉠에서 $a=b, b\neq0$이면 $\{f(f(x))\}'$은 이차함수이므로 $n^2-1=2$ 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다. 또한 $a=0, b=0$이면 $\{f(f(x))\}'$은 일차함수이므로 $n^2-1=1$ 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다. 즉, $a\neq0$이다. 따라서 $n^2-1=3$이고, n은 자연수이므로 $n=2$이다. 다항함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+px+q$ (p, q는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+p$ 조건 (나)에서 $f'(0)=1$이므로 $p=1$이다. 따라서 $f(x)=x^2+x+q$이므로

$f(f(x))=f(x^2+x+q)=(x^2+x+q)^2+(x^2+x+q)+q$

$=x^4+2x^3+2(q+1)x^2+(2q+1)x+q^2+2q$

양변을 x에 미분하면

$\{f(f(x))\}'=4x^3+6x^2+4(q+1)+2q+1$ 이므로 ㉠에서

$a=4, b=6, 12=4(q+1), c=2q+1$

따라서 $q=2, c=5$이므로 $a+b+c=4+5+6=15$

190) **정답** ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x)+f(1+x)=0$을 만족시키므로 $x=0$을 대입하면 $f(1)+f(1)=0$ $f(1)=0$ 또한 함수 $f(1-x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(1-x))=x$ ......㉠

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(f(1))=g(0)=0$ (참)

ㄴ. $f(1-x)+f(1+x)=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(1-x)(1-x)'+f'(1+x)(1+x)'=0$

$-f'(1-x)+f'(1+x)=0$......㉡ ㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면 $-f''(1-x)(1-x)'+f''(1+x)(1+x)'=0$

$f''(1-x)+f''(1+x)=0$......㉢ ㉢에 $x=0$을 대입하면

$f''(1)+f''(1)=0$ $f''(1)=0$ (참)

ㄷ. ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(f(1-x))f'(1-x)\times(1-x)'=1$ $g'(f(1-x))f'(1-x)=-1$

이때 ㉡에서 $f'(1-x)=f'(1+x)$이므로

$g'(f(1-x))f'(1+x)=-1$ ......㉣ ㉣에 $x=1$을 대입하면

$g'(f(0))f'(2)=-1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

191) **정답** ①

$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=1$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to0}x=0$ 이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$이어야 한다. 즉, $f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}=\frac{1}{f'(0)}=1$

에서

$f'(0)=1$..............㉠

또 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=2$에서 0이 아닌 극한값이 존재하고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$이어야 한다.

즉, $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{1}{f'(1)}=2$

에서

$f'(1)=\frac{1}{2}$...................㉡

$g(x)=f(f(x))$라 하면 $g(1)=f(f(1))=f(0)=0$이고

$g'(x)=f'(f(x))f'(x)$이므로 ㉠, ㉡에 의해

$g'(1) = f'(f(1))f'(1) = f'(0)f'(1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

따라서

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1}\frac{g(x)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \to 1}\left\{\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{2x+1}\right\}$$

$= g'(1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

192) **정답** 16

$\lim_{h \to 0}\frac{4g(8h) - \pi}{h} = 4\lim_{h \to 0}\frac{g(8h) - \frac{\pi}{4}}{h}$ ......㉠ 이때

$g(a) = \frac{\pi}{4}$라 하면

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a$이고 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0$ 이므로 $a = 0$,

즉 $g(0) = \frac{\pi}{4}$

따라서 $\lim_{h \to 0}\frac{g(8h) - \frac{\pi}{4}}{h} = 8\lim_{h \to 0}\frac{g(8h) - g(0)}{8h} = 8g'(0)$...... ㉡

그런데 $f'(x) = \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sin x \cos x}$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2$

따라서 $g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$이므로 ㉠, ㉡에서

$\lim_{h \to 0}\frac{4g(8h) - \pi}{h} = 4 \times 8 \times g'(0) = 32 \times \frac{1}{2} = 16$

193) **정답** ④

곡선 $y = -\frac{1}{x}(x < 0)$ 위의 점 A의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{t}\right)(t < 0)$ 이라 하면 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = -\ln x$와 만나는 점의 x좌표는 $-\frac{1}{t} = -\ln x$ $x = e^{\frac{1}{t}}$

즉, 점 B의 좌표는 $\left(e^{\frac{1}{t}}, -\frac{1}{t}\right)$이다. 따라서 선분 AB의 길이는 $e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}$이고, 선분$AA'$의 길이는 $-\frac{1}{t}$이므로 직사각형 $AA'B'B$의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t) = (e^{\frac{1}{t}} - t) \times \left(-\frac{1}{t}\right) = 1 - \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t}$

$S'(t) = -\frac{(e^{\frac{1}{t}})'t - e^{\frac{1}{t}}(t)'}{t^2} = -\frac{(-e^{\frac{1}{t}}t^{-2})t - e^{\frac{1}{t}}}{t^2} = \frac{\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} + e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

$= \frac{e^{\frac{1}{t}}(1+t)}{t^3}$

$S'(t) = 0$에서 $t = -1$ $t < 0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	(0)
$S'(t)$	$+$	0	$-$	
$S(t)$	↗	극대	↘	

함수 $S(t)$는 $t = -1$에서 극대이면서 최대이다. 따라서 직사각형 $AA'B'B$의 넓이의 최댓값은

$S(-1) = 1 - \frac{e^{-1}}{-1} = 1 + \frac{1}{e}$

194) **정답** ③

$f(x) = e^{\sin x + \cos x}, g(x) = k$라 하면

$f'(x) = e^{\sin x + \cos x}(\cos x - \sin x)$ $f'(x) = 0$에서

$\cos x - \sin x = 0, \cos x = \sin x, \tan x = 1$

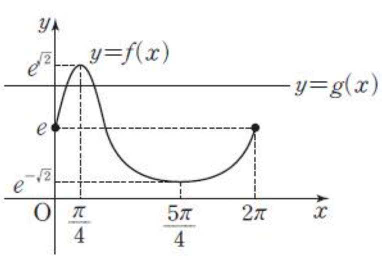
이때 $0 \le x \le 2\pi$이므로 $x = \frac{\pi}{4}$또는 $x = \frac{5\pi}{4}$

$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{4}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	극대	↘	극소	↗	$f(2\pi)$

이때 $f(0) = e^{0+1} = e, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{\sqrt{2}}$,

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = e^{-\sqrt{2}}, f(2\pi) = e^{0+1} = e$ 이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$의 그래프의 교점의 개수가 2이어야 하므로 이를 만족시키는 모



든 실수 k의 범위는 $e^{-\sqrt{2}} < k < e$또는 $e < k < e^{\sqrt{2}}$

따라서 $\alpha = e^{-\sqrt{2}}, \beta = e, \gamma = e^{\sqrt{2}}$이므로

$\alpha\beta\gamma = e^{-\sqrt{2}} \times e \times e^{\sqrt{2}} = e$

195) **정답** ⑤

모든 양수 x에 대하여 $-1 \le \cos x \le 1$이므로

$-2 \le 2\cos x \le 2, 1 \le 2\cos x + 3 \le 5$

$e^1 \le e^{2\cos x+3} \le e^5$, 즉 $e \le g(x) \le e^5$ ......㉠

$f(x)=x(\ln x-3)$에서

$f'(x)=1\times(\ln x-3)+x\times\frac{1}{x}=\ln x-2$ $f'(x)=0$에서

$x=e^2$ $x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

$g(x)=t$라 하면 ㉠에서 $e \le t \le e^5$이고

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)=t(\ln t-3)$

이때 함수 $f(t)$는 $t=e^2$에서 극소이고

$f(e)=e(\ln e-3)=-2e$, $f(e^2)=e^2(\ln e^2-3)=-e^2$,

$f(e^5)=e^5(\ln e^5-3)=-2e^5$ 이므로 $e\le t\le e^5$에서 $f(t)$, 즉 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값은

$M=2e^5$, 최솟값은 $m=-e^2$ 따라서 $\frac{M}{m}=\frac{2e^5}{-e^2}=-2e^3$

196) **정답** ⑤

$g_n(x)=x^ne^{-x}$이라 하면 $n=1$일 때

$g_1{}'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=-e^{-x}(x-1)$

이므로 $g_1{}'(x)=0$에서 $x=1$ $n\ge 2$일 때

$g_n{}'(x)=nx^{n-1}e^{-x}+x^n(-e^{-x})=-x^{n-1}e^{-x}(x-n)$ 이므로

$g_n{}'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=n$

(i)$n=1$일 때, 함수 $g_1(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g_1{}'(x)$	$+$	0	$-$
$g_1(x)$	↗	극대	↘

(ii) n이 1이 아닌 홀수일 때, 함수 $g_n(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g_n{}'(x)$	$+$	0	$+$	0	
$g_n(x)$	↗		↗	극대	↘

(iii) n이 짝수 일 때, 함수 $g_n(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g_n{}'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g_n(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $g_n(x)$는 n의 값에 관계없이 $x=n$에서 극댓값 $g_n(x)$을 갖는다.

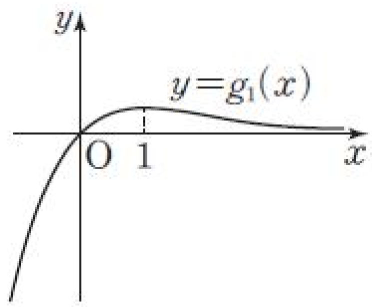
이때 $\lim_{x\to\infty}g_n(x)=\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$이고,

$\lim_{x\to-\infty}g_n(x)=\lim_{x\to-\infty}x^ne^{-x}$에서 $x=-t$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

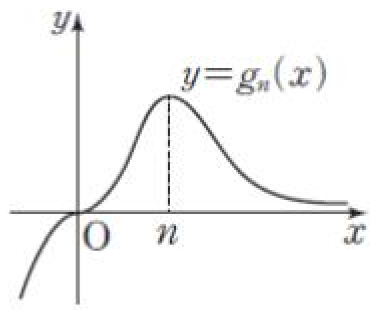
$\lim_{x\to-\infty}x^ne^{-x}=\lim_{t\to\infty}(-t)^ne^t$

따라서 n이 홀수이면 $\lim_{x\to-\infty}g_n(x)=-\infty$이고 n이 짝수이면 $\lim_{x\to-\infty}g_n(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=g_n(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

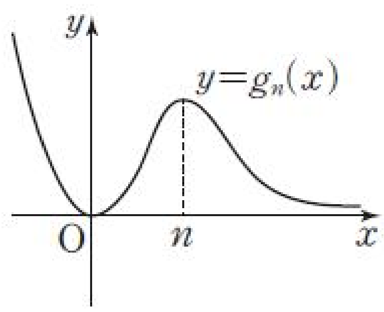
(i) $n=1$일 때



(ii) n이 1이 아닌 홀수일 때



(iii) n이 짝수 일 때



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 n의 값에 따라 다음과 같다.

$n=1$일 때, $g_1(1)=1^1e^{-1}=\frac{1}{e}$이고 $2<e<3$이므로 $g_1(1)<1$이다. 따라서 $f(1)=0$이다.

$n=2$일 때, $g_2(2)=2^2e^{-2}=\frac{4}{e^2}$이고 $4<e^2<9$이므로 $g_2(2)<1$이다. 따라서 $f(2)=1$이다.

$n=3$일 때, $g_3(3)=3^3e^{-3}=\frac{27}{e^3}$이고 $8<e^3<27$이므로 $g_3(3)<1$이다. 따라서 $f(3)=2$이다.

$n=4$일 때, $g_4(4)=4^4e^{-4}=\frac{256}{e^4}$이고 $16<e^4<81$이므

로

$g_4(4) < 1$이다. 따라서 $f(4) = 3$이다.

마찬가지 방법으로 $f(5) = f(7) = f(9) = 2, f(6) = f(8) = f(10) = 3$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) = 0+1+2+3+2+3+2+3+2+3 = 21$$

197) **정답** ②

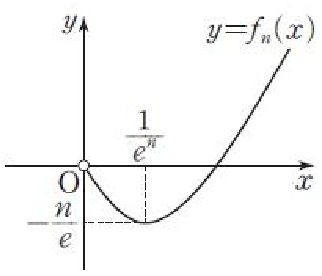
$f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} \ln x$라 하면

$$f_n{}'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\ln x + x^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{x} = x^{\frac{1}{n}-1}\left(\frac{1}{n}\ln x + 1\right)$$

$f_n{}'(x) = 0$에서 $x > 0$이므로 $\frac{1}{n}\ln x + 1 = 0$ $\quad x = \frac{1}{e^n}$

$x > 0$에서 함수 $f_n(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^n}$	$\cdots$
$f_n{}'(x)$		$-$	0	$+$
$f_n(x)$		↘	극소	↗



함수 $f_n(x)$는 $x = \frac{1}{e^n}$에서 극소이면서 최소이고 $f_n\left(\frac{1}{e^n}\right) = -\frac{n}{e}$이므로 $x^{\frac{1}{n}}\ln x \geq -\frac{n}{e}$ 즉, 실수 p의 최댓값은 $-\frac{n}{e}$이므로 $a_n = -\frac{n}{e}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(-\frac{n}{e}\right) = -\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{10} n = -\frac{1}{e} \times \frac{10 \times 11}{2} = -\frac{55}{e}$$

198) 120

[해설]

{출제 의도}

삼각함수의 도함수를 구한 후 방정식이 실근을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

{풀이}

$f(x) = ax + n\cos x$에서

$f'(x) = a - n\sin x$

$f'(x) = 0$, 즉 $a - n\sin x = 0$에서

$\sin x = \frac{a}{n}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$이므로 $-1 \leq \frac{a}{n} \leq 1$

즉, $-n \leq a \leq n$이므로 정수 a의 개수는 $2n+1$이다.

따라서 $g(n) = 2n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} g(n) = \sum_{n=1}^{10}(2n+1) = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 = 120$$

199) ③

[해설]

$f(x) = x\cos x - \sin x$에서

$f'(x) = \cos x + x(-\sin x) - \cos x = -x\sin x$이므로

$\lim_{h \to 0}\frac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0}\frac{f(\pi+h) - f(\pi) - f(\pi-h) + f(\pi)}{h}$

$= \lim_{h \to 0}\left\{\frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} + \frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h}\right\}$

$= \lim_{h \to 0}\frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} + \lim_{h \to 0}\frac{f(\pi-h) - f(\pi)}{-h}$

$= f'(\pi) + f'(\pi) = 2f'(\pi)$

$= 2 \times (-\pi) \times \sin\pi$

$= -2\pi \times 0 = 0$

{참고}

미분계수의 정의를 이용하지 않고, 다음과 같이 삼각함수의 성질과 극한의 성질을 이용하여 풀 수도 있다.

$f(\pi+h) - f(\pi-h)$

$= (\pi+h)\cos(\pi+h) - \sin(\pi+h)$

$\quad - \{(\pi-h)\cos(\pi-h) - \sin(\pi-h)\}$

$= -(\pi+h)\cos h + \sin h - \{-(\pi-h)\cos h - \sin h\}$

$= -(\pi+h)\cos h + \sin h + (\pi-h)\cos h + \sin h$

$= -2h\cos h + 2\sin h$

이므로

$\lim_{h \to 0}\frac{f(\pi+h) - f(\pi-h)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{-2h\cosh + 2\sinh}{h}$

$= \lim_{h \to 0}\left(-2\cosh + \frac{2\sinh}{h}\right)$

$= -2\lim_{h \to 0} cosh + 2\lim_{h \to 0}\frac{\sinh}{h}$

$= -2 \times 1 + 2 \times 1 = 0$

200) 110

[해설]

$f(x) = n(x - \sin x)$, $g(x) = n(1 - \cos x)$에서

$f'(x) = n(1 - \cos x)$, $g'(x) = n\sin x$이므로

$h(x) = \sqrt{\{f'(x)\}^2 + \{g'(x)\}^2}$

$= \sqrt{n^2(1-\cos x)^2 + n^2\sin^2 x}$

$= n\sqrt{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}$

$= n\sqrt{2 - 2\cos x}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$에서 $0 \leq n\sqrt{2-2\cos x} \leq 2n$이므로

$0 \leq h(x) \leq 2n$

함수 $h(x)$의 최댓값은 $2n$이므로 $a_n = 2n$

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} 2n = 2 \times \frac{10 \times 11}{2} = 110$

201) ②

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하다.

함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하면 $x = 0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} f(x) = f(0)$

$\lim_{x \to 0-}(b\cos x - 1) = 1$

$b - 1 = 1$

즉, $b = 2$이므로 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & (x \geq 0) \\ 2\cos x - 1 & (x < 0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x = 0$에서 미분가능하므로 $f'(0)$의 값이 존재한다

$\lim_{x \to 0-}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0-}\frac{2\cosh - 1 - 1}{h}$

$= \lim_{x \to 0-}\frac{2\cosh - 2}{h}$

$= -\lim_{x \to 0-}\frac{2(1 - \cosh)}{h}$

$$=-\lim_{x\to 0-}\frac{2(1-\cos^2 h)}{h(1+\cosh)}$$
$$=-\lim_{x\to 0-}\frac{2\sin^2 h}{h(1+\cosh)}$$
$$=-2\lim_{x\to 0-}\frac{\sinh}{h}\times\lim_{x\to 0-}\frac{\sinh}{1+\cosh}$$
$$=-2\times 1\times\frac{0}{1+1}$$
$$=0$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{x\to 0+}\frac{h^2+ah+1-1}{h}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{h^2+ah}{h}$$
$$=\lim_{x\to 0+}(h+a)$$
$$=a$$
이므로$a=0$
따라서 $a=0,\ b=2$이므로
$a+b=0+2=2$
202) ④
[해설]
{출제 의도}
함수의 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$라 하면
조건 (가)에 의하여 $h(1)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{4}{1}=4$
함수의 몫의 미분법에 의하여
$h'(x)=\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$이므로
함수 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 $x=1$에서의 미분계수는
$$h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(1)}{g(1)}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1)$$
이고 $f(1)=4,\ g(1)=1,\ f'(1)=12,\ g'(1)=2$이므로
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-4}{x-1}=h'(1)=\frac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{\{g(1)\}^2}$$
$$=\frac{12\times 1-4\times 2}{1^2}=4$$
{다른 풀이}
$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-4g(x)}{g(x)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-4-4(g(x)-1)}{g(x)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{f(x)-4}{x-1}-4\times\frac{g(x)-1}{x-1}\right\}\right]$$
$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-4\times\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\right\}\right]$$
$$=\frac{1}{g(1)}\{f'(1)-4g'(1)\}$$
$$=12-4\times 2=4$$
203) ③
[해설]
$g(x)=\dfrac{1}{1+f(x)}$에서
$$g'(x)=\frac{f'(x)}{\{1+f(x)\}^2}$$
따라서 함수 $g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는
$$g'(1)=-\frac{f'(1)}{\{1+f(1)\}^2}=-\frac{12}{(1+1)^2}=-3$$
204) ①
[해설]
$\dfrac{f(x)}{3-f(x)}=e^{7(x-1)}$에서 $f(x)=e^{7(x-1)}\{3-f(x)\}$
$\{1+e^{7(x-1)}\}f(x)=3e^{7(x-1)}$
$$f(x)=\frac{3e^{7(x-1)}}{1+e^{7(x-1)}}$$
$f(x)=\dfrac{3}{e^{-7(x-1)}+1}$이므로
$$f'(x)=\frac{3e^{-7(x-1)}\times(-7)}{\{e^{-7(x-1)}+1\}^2}=\frac{21e^{-7(x-1)}}{\{e^{-7(x-1)}+1\}^2}$$
따라서 $f'(1)=\dfrac{21e^{-7(1-1)}}{\{e^{-7(1-1)}+1\}^2}=\dfrac{21\times 1}{(1+1)^2}=\dfrac{21}{4}$
{다른 풀이}
$\dfrac{f(x)}{3-f(x)}=e^{7(x-1)}$ ……㉠
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\dfrac{f'(x)\{3-f(x)\}-f(x)\{-f'(x)\}}{\{3-f(x)\}^2}=7e^{7(x-1)}$
……㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\dfrac{f'(1)\{3-f(1)\}-f(1)\{-f'(1)\}}{\{3-f(1)\}^2}=7e^{7(1-1)}$에서
$\dfrac{3f'(1)}{\{\ 3-f(1)\}^2=7}$
$$f'(1)=\frac{7}{3}\left\{3-f(1)\right\}^2$$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\dfrac{f(1)}{3-f(1)}=e^0=1$에서
$$f(1)=\frac{3}{2}$$
따라서 $f'(1)=\dfrac{7}{3}\left(3-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{21}{4}$
{다른 풀이 2}
$\dfrac{f(x)}{3-f(x)}=e^{7(x-1)}$ ……㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\dfrac{f(1)}{3-f(x)}=e^0=1$에서 $f(1)=\dfrac{3}{2}$
㉠의 양변에 자연로그를 취하면
$\ln\left|\dfrac{f(x)}{3-f(x)}\right|=7(x-1)$에서
$\ln|f(x)|-\ln|3-f(x)|=7(x-1)$ ……㉡
㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\dfrac{-f'(x)}{3-f(x)}=7$에서
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}+\dfrac{f'(x)}{3-f(x)}=7$ ……㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면
$\dfrac{f'(1)}{f(1)}+\dfrac{f'(1)}{3-f(1)}=7$에서
$$\frac{2}{3}f'(1)+\frac{2}{3}f'(1)=7$$
$$\frac{4}{3}f'(1)=7$$
따라서 $f'(1)=\dfrac{21}{4}$
{다른 풀이 3}
$\dfrac{f(x)}{3-f(x)}=e^{7(x-1)}$ ……㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\dfrac{f(1)}{3-f(x)}=e^0=1$에서 $f(1)=\dfrac{3}{2}$

$e^{7(x-1)}>0$이므로 $f(x)\neq 0$

㉠에서

$\dfrac{3-f(x)}{f(x)}=e^{-7(x-1)}$

$\dfrac{3}{f(x)}-1=e^{-7(x-1)}$ ……㉡

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\dfrac{3f'(x)}{\{f(x)\}^2}=7e^{-7(x-1)}$에서

$\dfrac{3f'(x)}{\{f(x)\}^2}=7e^{-7(x-1)}$ ……㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\dfrac{3f'(1)}{\{f(1)\}^2}=7e^{-7(1-1)}$에서

$\dfrac{3f'(1)}{\{f(1)\}^2}=7$

따라서 $f'(1)=\dfrac{7}{3}\{f(1)\}^2=\dfrac{7}{3}\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{21}{4}$

205) ②

[해설]

$g(x)=\dfrac{f(x)}{(\ln x)^2}$에서

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times(\ln x)^2-f(x)\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^4}$$

$$=\frac{(\ln x)^2 f'(x)-\dfrac{2f(x)\ln x}{x}}{(\ln x)^4}$$

이므로

$$g'(e)=\frac{(\ln e)^2 f'(e)-\dfrac{2f(e)\ln e}{e}}{(\ln e)^4}=f'(e)-\frac{2f(e)}{e}$$

그러므로 $f'(e)-g'(e)=\dfrac{2f(e)}{e}$

$g(e)=\dfrac{f(e)}{(\ln e)^2}=\dfrac{f(e)}{1^2}=f(e)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-g(e+h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)-\{g(e+h)-f(e)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)-\{g(e+h)-g(e)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(e+h)-f(e)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}$$

$$\equiv f'(e)-g'(e)=\frac{2f(e)}{e}=4$$

따라서 $f(e)=2e$

206) ③

[해설]

$f(x)=\{\ln(x+1)+3\}^4$에서

$f'(x)=4\{\ln(x+1)+3\}^3\times\{\ln(x+1)+3\}'$

$=4\{\ln(x+1)+3\}^3\times\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{4\{\ln(x+1)+3\}^3}{x+1}$

이므로

$f'(0)=\dfrac{4\{\ln(0+1)+3\}^3}{0+1}=\dfrac{4\times 3^3}{1}=108$

207) 18

[해설]

$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1}=\sqrt{x^2+1}$ 이므로

$g(x)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^3=(\sqrt{x^2+1})^3=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

따라서 함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=\dfrac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'=3x\sqrt{x^2+1}$ 이므로

$g'(1)=3\times 1\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 $p=3\sqrt{2}$ 이므로

$p^2=(3\sqrt{2})^2=18$

{다른 풀이}

$f(x)=\sqrt{4x^2+1}$ 에서 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$

$f'(x)=\dfrac{(4x^2+1)'}{2\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}=\dfrac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}$ 이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$g(x)=\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^3$에서

$g'(x)=3\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2\times\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}'$

$=3\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2\times\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\left\{f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right\}^2 f'\left(\dfrac{x}{2}\right)$

이므로

$g'(1)=\dfrac{3}{2}\{f(1voer2)\}^2 f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 $p=3\sqrt{2}$ 이므로

$p^2=(3\sqrt{2})^2=18$

208) 90

[해설]

조건 (나)에서 $g(f(x))=\dfrac{1}{2}x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$g(f(2))=1$

조건 (가)에서 $g(1)=1$이고, 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$g(x)$는 일대일 대응이므로 $f(2)=1$

점 $(2,a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $a=1$

조건 (나)에서 $g(f(x))=\dfrac{1}{2}x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

합성함수의 미분법에 의하여

$g'(f(x))f'(x)=\dfrac{1}{2}$에서

$f'(x)=\dfrac{1}{2g'(f(x))}$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=\dfrac{1}{2g'(f(2))}$

$f(2)=1$이고 $g'(1)=\dfrac{1}{4}$이므로

$f'(2)=\dfrac{1}{2g'(f(2))}=\dfrac{1}{2g'(1)}=\dfrac{1}{2\times\dfrac{1}{4}}=2$

곡선 $y=f(x)$위의 점 (2, 1)에서의 접선의 기울기 b는

$b=f'(2)=2$

따라서 $a=1$, $b=2$이므로

$30(a+b)=30\times 3=90$

209) 50

[해설]

$f(x)=e^{\tan x}$에서

$f'(x)=e^{\tan x}\times(\tan x)'=e^{\tan x}\sec^2 x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)e^{\tan\frac{\pi}{4}}\times\sec^2\dfrac{\pi}{4}=e\times(\sqrt{2})^2=2e$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=e^{\tan\frac{\pi}{4}}=e$

역함수의 정의에 의하여 $g(e)=\frac{\pi}{4}$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(e)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2e}$$

따라서

$$\begin{aligned}e\times\lim_{h\to 0}\frac{100g(e+h)-25\pi}{h}&=100e\times\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-\frac{\pi}{4}}{h}\\&=100e\times\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}\\&=100e\times g'(e)\\&=100e\times\frac{1}{2e}\\&=50\end{aligned}$$

210) ②

[해설]

$h(x)=g\left(\frac{x-1}{3}\right)$로 놓으면 $h(4)=g(1)=2$이고,

함수 $f(x)$의 역함수는 $h(x)$이므로 $f(2)=4$

역함수의 미분법에 의하여

$$h'(4)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{1}=1$$

$h'(x)=\frac{1}{3}g'\left(\frac{x-1}{3}\right)$이므로

$h'(4)=\frac{1}{3}g'(1)$에서

$g'(1)=3h'(4)=3\times1=3$

따라서 $f(2)+g'(1)=4+3=7$

{다른 풀이}

함수 $f(x)$의 역함수가 $g\left(\frac{x-1}{3}\right)$이므로

$f\left(g\left(\frac{x-1}{3}\right)\right)=x$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$f(g(1))=4$

$g(1)=2$이므로 $f(2)=4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여

$$f'\left(g\left(\frac{x-1}{3}\right)\right)\times g'\left(\frac{x-1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=1$$

$g'\left(\frac{x-1}{3}\right)=\frac{3}{f'\left(g\left(\frac{x-1}{3}\right)\right)}$ ······㉡

㉡의 양변에 $x=4$를 대입하면

$$g'(1)=\frac{3}{f'(g(1))}=\frac{3}{f'(2)}=\frac{3}{1}=3$$

따라서 $f(2)+g'(1)=4+3=7$

211) ①

[해설]

조건 (가)에서$x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+7}{x+1}$의 값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)+7\}=0$

함수 $f(x)$는 연속함수이므로$f(-1)+7=0$에서 $f(-1)=-7$

조건 (가)에서

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)+7}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)=11$$

조건 (나)에서 $f(x)+f(-x)=0$에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+f(-1)=0$이므로

$f(1)=-f(-1)=-(-7)=7$

조건 (나)에서 $f(x)+f(-x)=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'(-x)=0$에서

$f'(x)=f'(-x)$ ······㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=f'(-1)=11$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고, $f(1)=7$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to7}\frac{x-7}{g(x)-g(7)}&=\frac{1}{g'(7)}\\&=f'(1)\\&=11\end{aligned}$$

212) 19

[해설]

$f(x)=xe^{ax+1}$에서

$f'(x)=e^{ax+1}+axe^{ax+1}=(1+ax)e^{ax+1}$

$f''(x)=ae^{ax+1}+a(1+ax)e^{ax+1}=a(2+ax)e^{ax+1}$

$f''(0)=2ae=38e$에서 $a=19$

213) ③

[해설]

$f(x)=(\ln kx)^2$에서

$$f'(x)=2\ln kx\times\frac{k}{kx}=\frac{2\ln kx}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln kx\times1}{x^2}=\frac{2(1-\ln kx)}{x^2}$$

$f''(x)=0$에서 $1-\ln kx=0$, 즉 $x=\frac{e}{k}$이므로 $\alpha=\frac{e}{k}$

$$f(\alpha)=f\left(\frac{e}{k}\right)=\left\{\ln\left(k\times\frac{e}{k}\right)\right\}^2=(\ln e)^2=1$$

점$(\alpha,\ f(\alpha))$, 즉 $\left(\frac{e}{k},\ 1\right)$이 직선 $y=\frac{3}{e}x$ 위에 있으므로

$1=\frac{3}{e}\times\frac{e}{k}$에서 $k=3$

214) ③

[해설]

$g(x)=\ln f'(x)$에서 $g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}$

조건 (가)에서

$f''(x)=2f(x)f'(x)$이고,

$f'(x)>0$이므로 $g'(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{2f(x)f'(x)}{f'(x)}=2f(x)$

따라서 $g'\left(\frac{1}{3}\right)=2f\left(\frac{1}{3}\right)=2\times k=2k$

215) ①

[해설]

$f(x)=x+\cos x+a$라 하면 점 (0, 3)은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$3=1+a$에서 $a=2$

즉,$f(x)=x+\cos x+2$이므로 $f'(x)=1-\sin x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (0, 3)에서의 접선의 기울기는 $1-\sin0=1$이므로 $b=1$

따라서 $a+b=2+1=3$

216) ④

[해설]

$y=\frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}$에서 $y'=\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}=\frac{1}{49}e^{\frac{x}{7}}$

곡선 $y=\frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}$ 위의 점$\left(0,\ \frac{1}{7}\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{49}e^0=\frac{1}{49}$이므로 곡선 $y=\frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}$위의 점 $\left(0,\ \frac{1}{7}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{49}x+\frac{1}{7}$$

따라서 곡선 $y=\frac{1}{7}e^{\frac{x}{7}}$위의 $\left(0,\ \frac{1}{7}\right)$점에서의 접선의 x절편은

$0=\frac{1}{49}x+\frac{1}{7}$에서 $x=-7$

217) ④

[해설]

$f(x)=\ln x$로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$, 즉 $y=\frac{1}{t}x+\ \ \ln t-1$ 　이다.

이 접선이 원점을 지나면

$\ln t-1=0$에서 $t=\quad e\quad$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{e}x$이다.

곡선 $y=\ln x$ 위의 두 점 $(e,\ 1)$, $(\pi,\ \ln\pi)$에 대하여

원점과 점 $(e,1\ )$을 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 $(\pi,\ \ln\pi)$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$\frac{1}{e}>\frac{\ln\pi}{\pi}$ 이다.

$\pi>e\ln\pi$이므로 $\pi>\ln\pi^e$에서 $e^\pi>\pi^e$이다.

따라서 $g(t)=\ln t-1$1이고, $p=e$이므로

$g(e)+\ln p=\ln e-1+\ln e=1-1+1=1$

218) ④

[해설]

$y=\ln\frac{x}{2}+1$에서 $y'=\frac{1}{x}$

곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$ 위의 점의 좌표를 $\left(t,\ \ln\frac{t}{2}+1\right)$이라 하면

곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$ 위의 점 $\left(t,\ \ln\frac{t}{2}+1\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{t}$이므로 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$

위의 점 $\left(t,\ \ln\frac{t}{2}+1\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln\frac{t}{2}+1$

이 접선이 원점 O를 지나므로

$0=\frac{1}{t}\times(-t)+\ln\frac{t}{2}+1$

$\ln\frac{t}{2}=0$이므로 $\frac{t}{2}=1$

즉, $t=2$

따라서 원점 O에서 곡선 $y=\ln\frac{x}{2}+1$에 그은 접선의 기울기는

$\frac{1}{2}$이다.

219) ③

[해설]

$y=2x^2-x+2\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=4x-1+\frac{1}{\sqrt{x}}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점의 좌표를 $(t,\ 2t^2-t+2\sqrt{t})$라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(t)=4t-1+\frac{1}{\sqrt{t}}=2$

$4t\sqrt{t}-3\sqrt{t}+1=0$

$z=\sqrt{t}\ \ (t>0)$이라 하면

$4z^3-3z+1=0$

$(z+1)(2z-1)^2=0$

$z>0$이므로 $z=\frac{1}{2}$

즉, $t=z^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{4},\ \frac{7}{8}\right)$이고 접선의 방정식은

$y-\frac{7}{8}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 즉 $y=2x+\frac{3}{8}$이다.

따라서 구하는 직선의 y절편은 $\frac{3}{8}$이다.

-1	4	0	-3	1
		-4	4	-1
	4	-4	1	0

220) 75

[해설]

$y=xe^{x+1}$에서 $y'=e^{x+1}+xe^{x+1}=e^{x+1}(x+1)$이므로

곡선 $y=xe^{x+1}$ 위의 점 $(t,\ te^{t+1})$에서의 접선의 방정식은

$y-te^{t+1}=e^{t+1}(t+1)(x-t)$

이 접선이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로

$-te^{t+1}=e^{t+1}(t+1)(n-t)$

$e^{t+1}(t^2-nt-n)=0$

$e^{t+1}>0$이므로 $t^2-nt-n=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=-n$

두 접선의 기울기의 곱 m_1, m_2는

$m_1m_2=e^{\alpha+1}(\alpha+1)\times e^{\beta+1}(\beta+1)=e^{\alpha+\beta+2}\{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1\}$

$=e^{n+2}$

이므로 $\ln m_1m_2=n+2$

따라서 $f(n)=n+2$이므로

$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}(n+2)=\frac{10\times11}{2}+20=75$

221) ④

[해설]

$f(x)=4\sin x+ax+2018$에서

$f'(x)=4\cos x+a$

함수 $f(x)=4\sin x+ax+2018$이 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $4\cos x+a\ge0$이어야 한다.

$4\cos x\ge-4$이므로 $a\ge4$

따라서 실수 a의 최솟값은 4이다

222) ⑤

[해설]

$f(x)=(3x+k)e^{x^2}$에서

$f'(x)=3e^{x^2}+(3x+k)e^{x^2}\times2x=e^{x^2}(6x^2+2kx+3)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$에서 $e^{x^2}>0$이므로 $6x^2+2kx+3\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $6x^2+2kx+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-6\times3\le0$

즉, $k^2\le18$

따라서 정수 k의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4로 조건을 만족시키는 정수 k의 개수는 9이다.

223) ②

[해설]

$f(x)=\ln x-\frac{a}{x}-x$에서

$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}-1=-\frac{x^2-x-a}{x^2}$

함수 $f(x)=\ln x-\frac{a}{x}-x$가 양의 실수 전체의 집합에서 감소하도록 하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$f'(x)\le0$이어야 한다.

즉, 모든 양의 실수 x에 대하여 $-\frac{x^2-a-a}{x^2}\le0$에서 모든 양의 실수 x에 대하여 $x^2-x-a\ge0$이다.

$g(x)=x^2-x-a$라 하면

$g(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-a-\frac{1}{4}$

$x>0$일 때 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-a-\frac{1}{4}$을 갖는다.

모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)\ge0$이므로

$g\left(\frac{1}{2}\right)=-a-\frac{1}{4}\ge0$

따라서 $a \le -\dfrac{1}{4}$이므로 실수 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{4}$이다.
224) ③
[해설]
$f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$에서
$f'(x)=\dfrac{6x^2(x^2-1)-2x^3\times 2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$
$f'(x)=0$에서 $x>1$이므로 $x=\sqrt{3}$
구간 $(1, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(1)	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값 $f(\sqrt{3})=\dfrac{6\sqrt{3}}{3-1}=3\sqrt{3}$ 을 갖는다.
따라서 $a=\sqrt{3}$이므로
$\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3$
225) ③
[해설]
$f(x)=(x^2-2x-2)e^{-x+2}$에서
$f'(x)=(2x-2)e^{-x+2}-(x^2-2x-2)e^{-x+2}$
$=-(x^2-4x)e^{-x+2}$
$=-(x-4)e^{-x+2}$
$f'(x)=0$에서 $e^{-x+2}>0$이므로 $x=0$또는 $x=4$
$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=4$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이다.
따라서 $a=0,\ b=4$이고, $f(a)=f(0)=-2e^2,\ f(b)=f(4)=6e^{-2}$이므로
$\dfrac{f(a)\times f(b)}{a-b}=\dfrac{-2e^2\times 6e^{-2}}{0-4}=\dfrac{-12}{-4}=3$
226) 55
[해설]
$f(x)=\ln(x^2+n^2)+kx$에서
$f'(X)=\dfrac{2x}{x^2+n^2}+k=\dfrac{kx^2+2x+n^2k}{x^2+n^2}$
$k>0$이므로 함수 $f(x)$의 극값이 존재하지 않도록 하려면 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 증가해야 한다.
즉,$f'(x)\ge 0$에서 $\dfrac{kx^2+2x+n^2k}{x^2+n^2}\ge 0$
$x^2+n^2>0$이므로 $kx^2+2x+n^{2k}\ge 0$
이차방정식 $kx^2+2x+n^{2k}=0$의 판별식을 D라 하면 $k>0$이므로
$\dfrac{D}{4}=1-k\times n^2k=1-n^2k^2\le 0$
$n^2k^2-1\ge 0$
$(nk+1)(nk-1)\ge 0$
자연수 n과 양의 실수 k에 대하여 $nk+1>0$이므로 $nk-1\ge 0$
즉, $nk\ge 1$에서 $k\ge\dfrac{1}{n}$
k의 최솟값이 $\dfrac{1}{n}$이므로 $g(n)=\dfrac{1}{n}$
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{g(n)}=\sum_{n=1}^{10}n=\frac{10\times 11}{2}=55$
227) ①
[해설]
{출제 의도}
주어진 조건을 이용하여 함수 $f(x)$에 대한 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는지를 묻는 문제이다.
{풀이}
ㄱ. 조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne 1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne -1$이다. (참)
ㄴ. 조건 (나), (다)에 의하여
$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}$이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이며 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ne 1,\ f(x)\ne -1$이므로 $-1<f(x)<1$이다.
즉, $1+f(x)>0,\ 1-f(x)>0$이므로
$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}>0$이다.
그러므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다. (거짓)
ㄷ.$f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=1-\{f(x)\}^2$이므로
양변을 x에 대하여 미분하면 $f''(x)=-2f(x)f'(x)$
$f''(x)=0$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)=0$
조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f(0)+f(0)=0$에서 $f(0)=0$이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 (0, 0)으로 하나뿐이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.
228) ②
[해설]
$f(x)=\ln(x^2-2x+2)$에서
$f'(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$
$f''(x)=\dfrac{2(x^2-2x+2)-(2x-2)\times(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$
$=\dfrac{2x^2-4x+4-(4x^2-8x+4)}{(x^2-2x+2)^2}$
$=\dfrac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}$
$=-\dfrac{2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$
$f''(x)=0$에서 $x(x-2)=0$
$x>0$이므로 $x=2$
$x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(2,\ f(2))$, 즉 점 $(2,\ \ln 2)$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.
곡선 $y=f(x)$의 변곡점 $(2,\ \ln 2)$에서의 접선의 기울기는
$\dfrac{2\times 2-2}{2^2-2\times 2+2}=1$이므로 접선의 방정식은
$y-\ln 2=x-2$, 즉 $y=x-2+\ln 2$
따라서 $a=1,\ b=-2+\ln 2$이므로
$a+b=1+(-2+\ln 2)=-1+\ln 2$
229) 45
[해설]
$f(x)=e^{2x}\cos x$에서
$f'(x)=(e^{2x})'\cos x+e^{2x}(\cos x)'=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$
$f(x)=(e^{2x})'(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(2\cos x-\sin x)'$
$=e^{2x}(4\cos x-2\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)$
$=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$
곡선 $f(x)=e^{2x}\cos x$의 변곡점의 좌표가 $(a,\ f(a))$이므로 $f''(a)=0$이다.
$f''(a)=e^{2a}(3\cos a-4\sin a)=0$에서
$e^{2a}>0$이므로 $3\cos a-4\sin a=0$
따라서 $\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{3}{4}$
$\tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{3}{4}$이므로
$60\tan a=60\times\dfrac{3}{4}=45$
230) ④
[해설]
$f(x)=x^2-3x+\ln x$에서
$f'(x)=2x-3+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-3x+1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$f''(x)=2-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}=\dfrac{(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x>0$이므로 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

ㄱ. $f'(1)=0$이고 $f''(1)=2-1=1>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 $f(1)=1-3+\ln 1=-2$를 갖는다. (거짓)

ㄴ. $f''\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$이고, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (참)

ㄷ. 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 열린 구간 $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

231) ⑤

[해설]

$f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$에서

$f'(x)=-xe^{\frac{-1}{2}x^2}$

$f'(x)=0$에서 $e^{-\frac{1}{2}x^2}>0$이므로 $x=0$

$f'(x)=-xe^{\frac{-1}{2}x^2}$에서

$f''(x)=-e^{-\frac{1}{2}x^2}+x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$=(x^2-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$=(x+1)(x-1)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	⤴	변곡점	↗	극대	↘	변곡점	⤵

ㄱ. $x>0$에서 $f'(x)<0$이므로 함수$f(x)$는 구간 $(0,\ \infty)$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}>0$이고, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값이면서 최댓값 $f(0)=1$을 갖는다. (참)

ㄷ. $f''(-1)=0$이고, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(-1,\ f(-1))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이고, $f''(1)=0$이고, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 점 $(1,\ f(1))$은 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

232) ④

[해설]

ㄱ. $f(x)=|x-1|\sqrt{x}=\begin{cases}-1(x-1)\sqrt{x} & (0\le x<1)\\ (x-1) & (x\ge 1)\end{cases}$에 대하여

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{-h\sqrt{1+h}}{h}=-\lim\limits_{h\to 0-}\sqrt{1+h}=-1$

이고,

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{h\sqrt{1+h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}\sqrt{1+h}=1$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

ㄴ. $0<x<2$ $(x\ne 1)$에서 $f(x)>0$이고, $f(1)=0$이다.

따라서 $x=1$을 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$x\ge 1$일 때 $f(x)=(x-1)\sqrt{x}$이므로 $x>1$일 때

$f'(x)=\sqrt{x}+(x-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}>0$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ \infty)$에서 증가한다.

$0\le x<1$일 때 $f(x)=-(x-1)\sqrt{x}$이므로

$0<x<1$일 때

$f'(x)=-\sqrt{x}-(x-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$=-\dfrac{2x+x-1}{2\sqrt{x}}$

$=-\dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$에서 $3x-1=0$이므로 $x=\dfrac{1}{3}$

$x=\dfrac{1}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

그러므로 함수 $f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다. (참)

ㄷ. $0<x<1$일 때

$f''(x)=-\dfrac{3\times 2\sqrt{x}-(3x-1)\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$

$=\dfrac{6x-(3x-1)}{4x\sqrt{x}}$

$=-\dfrac{3x+1}{4x\sqrt{x}}<0$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

따라서 열린 구간 (0, 1)에서 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

233) ③

[해설]

$f(x)=(x-4)^2e^{x-2}$에서

$f'(x)=2(x-4)e^{x-2}+(x-4)^2e^{x-2}$

$=(x-2)(x-4)e^{x-2}$

$f'(x)=0$에서 $e^{x-2}>0$이므로

$x=2$ 또는 $x=4$

닫힌 구간 [0, 5]에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\dfrac{16}{e^2}$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗	e^3

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 4를 가지고, $x=4$에서 극솟값 0을 갖는다.

또한 $f(0)=\dfrac{16}{e^2}$, $f(5)=e^3$이므로

$M=e^3$, $m=0$

따라서 $M+m=e^3+0=e^3$

234) 27

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin x}$에서

$f'(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\dfrac{2\sqrt{2}\cos x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{\sin^3 x - 2\sqrt{2}cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^3 x(\tan^3 x - 2\sqrt{2})}{\sin^2 x \cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^3 x(\tan x - \sqrt{2})(\tan^2 x + \sqrt{2}tan x + 2)}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$에서 $f'(x)=0$일 때, $\cos x > 0$,
$\tan^2 x + \sqrt{2}tan x + 2 > 0$이므로
$\tan x = \sqrt{2}$
$3\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \le \sqrt{2} \le \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로
$\tan x = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$를 만족시키는 x의 값을 $\alpha\left(\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{3}\right)$라 하면
$\tan\alpha = \sqrt{2}$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{2}$, $\sin\alpha = \sqrt{2}cos\alpha$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 3\cos^2\alpha = 1$
$\cos\alpha > 0$이므로 $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin\alpha = \sqrt{2}cos\alpha$
$$= \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$
닫힌 구간 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 최솟값
$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{2\sqrt{2}}{\sin\alpha} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ 을 갖는다.
따라서 $m = 3\sqrt{3}$ 이므로 $m^2 = 27$
235) 43
[해설]
$f(x) = (x+n)\sqrt{n^2 - x^2}$ 에서 $n^2 - x^2 \ge 0$이므로
$(x+n)(x-n) \le 0$
즉, $-n \le x \le n$이므로 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x | -n \le x \le n\}$이다.
$-n < x < n$일 때
$f(x) = (x+n)\sqrt{n^2 - x^2}$ 에서
$$f'(x) = \sqrt{n^2 - x^2} + (x+n) \times \frac{-2x}{2\sqrt{n^2 - x^2}}$$
$$= \frac{2(n^2 - x^2) - 2x(x+n)}{2\sqrt{n^2 - x^2}}$$
$$= \frac{-4x^2 - 2nx + 2n^2}{2\sqrt{n^2 - x^2}}$$
$$= \frac{-(2x^2 + nx - n^2)}{\sqrt{n^2 - x^2}}$$
$$= \frac{-(x+n)(2x-n)}{\sqrt{n^2 - x^2}}$$

$f'(x) = 0$에서 $x = \frac{n}{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-n$	$\cdots$	$\frac{n}{2}$	$\cdots$	n
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x = \frac{n}{2}$에서 극대이면서 최대이다.
즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은
$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} + n\right)\sqrt{n^2 - \left(\frac{n}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{3}{2}n \times \sqrt{\frac{3}{4}n^2}$$
$$= \frac{3}{2}n \times \frac{\sqrt{3}}{2}n$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2$$
따라서 $g(n) = \frac{3\sqrt{3}}{4}n^2$이므로
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\{g(n)\}^2}{(n^2+2018)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}n^2\right)^2}{(n^2+2018)^2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\left(1 + \frac{2018}{n^2}\right)^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}{(1+0)^2}$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2$$
$$= \frac{27}{16}$$
따라서 $p = 16$, $q = 27$이므로
$p + q = 16 + 27 = 43$
236) ③
[해설]
$f(x) = e^x - e^2 x + k$라 하면
$f'(x) = e^x - e^2$
$f'(x) = 0$에서 $x = 2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 극소이면서 최소이다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x = 2$에서 최솟값 $f(2) = e^2 - 2e^2 + k = -e^2 + k$를 갖는다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge 0$이 성립하려면 $-e^2 + k \ge 0$이어야 한다.
즉, $k \ge e^2$이므로 실수 k의 최솟값은 e^2이다.
237) ①
[해설]
$\ln x = \frac{1}{3}x - n + 6$이라 하면
$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} = 0$에서 $x = 3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x = 3$에서 극댓값
$f(3) = \ln 3 - 1 + n - 6 = n - 7 + \ln 3$을 가지고,
$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$이고, $x > 3$일 때 $f'(x) < 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
함수 $y = f(x)$의 그래프가 $x > 0$에서 x축과 서로 다른 두 점에

서 만나도록 하려면 $n-7+\ln 3>0$, 즉 $n>7-\ln 3$이어야 한다.

따라서 10 이하의 자연수 n의 값은 6, 7, 8, 9, 10이므로 구하는 모든 n의 값의 합은

$6+7+8+9+10=40$

{참고}

$e \fallingdotseq 2.7$이므로

$1=\ln e<\ln 3<\ln e^2=2$가 되어$5<7-\ln 3<6$이 성립한다.