

01 다음 물음에 답하시오. [2004 서강대학교]

1. 함수 $f(x)$ 가 폐구간 $[-1, 1]$ 위의 모든 x 에 대하여 $|f(x)| \leq |x|^2$ 을 만족할 때

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값을 구하시오.

② $f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 미분가능함을 설명하고 $f'(0)$ 을 구하시오.

③ 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 으로 주어질 때 $f'(x)$ 를 구하시오.

2. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + \cos(\pi x) - 3$ 에 대해서

① 중간값의 정리를 설명하시오.

② 방정식 $f(x) = 0$ 은 구간 $(2, 3)$ 에서 실근을 가짐을 증명하시오.

③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-5h) - f(1)}{h}$ 을 구하시오.

02 다음과 같이 주어진 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 아래물음에 답하시오. (단, m 과 n 은 자연수이다.)

[2006 서울대학교 정시]

$$f(x) = \begin{cases} x^m \sin \frac{1}{x^n} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

① $f'(0)$ 이 존재하고 $x = 0$ 에서 도함수 $f'(x)$ 가 연속이 되기 위한 m 과 n 에 관한 조건을 구하시오.

② $n = 1$ 임을 가정하자. 이때, 함수 $f(x)$ 의 k 계도함수 $f^{(k)}(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$ 이 되는 k 의 범위를 구하시오.

03 제시문을 읽고 지시에 따라 논술하시오. [2010 한양대학교 모의논술]

(가) 실수 a 를 포함하는 열린 구간에서 정의되는 함수 f 의 $x = a$ 에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(나) 실수 a 를 포함하는 열린 구간에서 정의되는 함수 f 의 $x = a$ 에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(다) 함수 f 는 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하다.

① $x \in (a, b)$ 이고 $f'(x) = 0$ 인 x 들의 $f(x)$ 값들.

② $f(a)$ 와 $f(b)$.

③ 위의 ①, ②의 값들 중 제일 큰 것.

① 제시문 (가)와 (나)의 미분계수의 정의는 동일한 것인지 아닌지 답하고 설명하시오.

② 제시문 (다)-③의 값이 $[a, b]$ 에서 f 의 최댓값임을 미분계수의 정의를 고려하여 설명하시오.

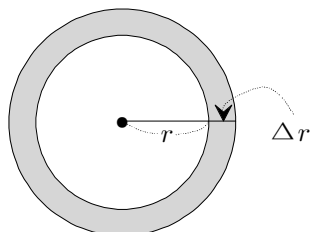
③ 제시문 (다)를 이용해 함수의 최댓값을 계산하고자 할 때 어떤 어려움이 있을 수 있겠는가? (단, 계산에 필요한 시간은 충분히 주어졌다고 하자.)

04 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ 과 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ 을 만족하고, $x = 1$ 그리고 $x = 2$ 에서만 미분이 불가능하고 모든

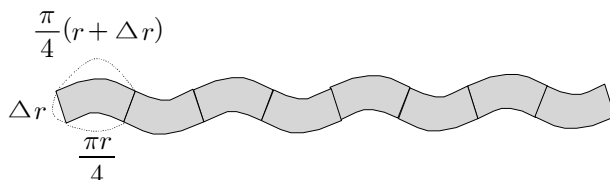
실수에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 예를 찾아 간단한 수식으로 표현하시오. [2006 서강대학교]

05 제시문을 읽고 물음에 답하시오. [2008 한양대학교 정시]

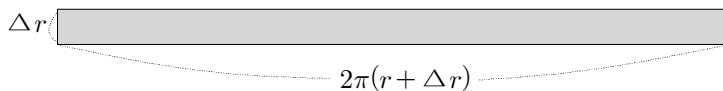
(가) 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이는 $f(r)=\pi r^2$ 으로 주어진다. r 의 함수인 $f(r)$ 를 미분하면 $2\pi r$ 가 되는데 이는 원의 둘레의 길이와 같다. 이 사실은 다음과 같이 그림을 이용하여 설명할 수 있다. 미분의 정의에 의하여 $f'(r)=\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta r}$ 이고, $f(r+\Delta r)-f(r)$ 는 고리 모양 도형의 넓이와 같다.



고리 모양 도형은 폭이 Δr 이고, 길이가 $2\pi r$ 와 $2\pi(r+\Delta r)$ 사이라 할 수 있으므로 Δr 가 충분히 작으면 이 도형의 넓이는 대략 $2\pi\Delta r$ 라 할 수 있다. 이를 좀 더 자세히 살펴보자. 고리 모양 도형을 $n(=8)$ 등분하여 다음과 같이 배열할 수 있고,



n 을 무한히 크게 하면 위 그림은 아래의 띠 모양으로 수렴한다.



따라서 원의 넓이 함수 $f(r)$ 의 평균변화율 $\frac{f(r+\Delta r)-f(r)}{\Delta r}$ 는 Δr 가 0으로 수렴할 때 원의 둘레의 길이 $2\pi r$ 로 수렴한다.

(나) 한 변의 길이가 x 인 정삼각형의 넓이를 x 의 함수로 표현하면 $g(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ 이다. 이때,

$g'(x)=\frac{x}{2\sqrt{3}}$ 로 놓으면 정삼각형의 넓이는 $h(y)=3\sqrt{3}y^2$ 이 되고, 이의 도함수 $h'(y)=6\sqrt{3}y$ 는

정삼각형의 둘레의 길이와 같아진다. 여기서 y 는 한 변의 길이가 x 인 정삼각형에 내접하는 원의 반지름을 의미한다.

- 제시문 (가)에서처럼 도형을 사용해서 제시문 (나)에서 $g'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ 는 정삼각형의 한 변의 길이인 x 의 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 배가 되는 이유를 설명하시오.
- 제시문 (나)에서처럼 도형을 사용해서 제시문 (나)에서 $h'(y)=\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{h(y+\Delta y)-h(y)}{\Delta y}$ 는 정삼각형의 둘레의 길이인 $6\sqrt{3}y=3x$ 가 되는 이유를 설명하시오.

06 제시문을 읽고 물음에 답하시오. [2011 한양대학교 모의논술]

(가) 함수 $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 1$ 의 그래프 위의 임의의 점 $(a, f(a))$ 에서 그래프의 접선의 x 절편을 a_1 이라 하고 a_n 을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자.

함수의 그래프 위의 점 $(a_k, f(a_k))$ 에서 그래프의 접선의 x 절편을 a_{k+1} 이라 하자.

(나) 충분히 큰 모든 자연수 n 에 대하여 a_n 이 어떤 실수 c 에 충분히 가까이 있을 때 수열 $\{a_n\}$ 은 수렴한다고 한다. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하면 수렴하는 값은 유일하다. 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않을 때 발산한다고 한다.

(다) 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq a_{n+1}$ 이거나 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq a_{n+1}$ 이면, 수열 $\{a_n\}$ 을 단조수열이라고 한다.

(라) 어떤 실수 $b, d (b < d)$ 가 있어서, 단조수열 $\{a_n\}$ 이 항상 $b \leq a_n \leq d$ 를 만족하면 $\{a_n\}$ 은 수렴한다.

① 방정식 $f(x) = 0$ 의 해를 구하고, $a = 1$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산에 대하여 논하고 $a = -2$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산에 대하여 설명하시오.

② 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 x 성분을 구하시오. 그리고 그래프의 접선의 x 절편이 $\frac{1}{2}$ 인 접선의 식을 구하고, 이를 참고하여 $a = -\frac{10^9 + 1}{10^9}$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산에 대하여 설명하시오.

③ 함수 $y = f(x)$ 의 변곡점의 x 성분을 구하고, $a = 0$ 일 때 수열 $\{a_n\}$ 의 수렴, 발산에 대하여 설명하시오.

07 타원 $x^2 + 2y^2 = 1$ 과 이차곡선 $ax^2 - 2by^2 = 1$ 과 만나고, 각 교점에서 두 곡선에 대한 접선이 직각을 이루고 있다. ($a \neq 1, b \neq -2, ab \neq 0$) [2005 고려대학교 수시]

① $ab > 0$ 임을 보이시오.

② a 와 b 의 관계식을 구하시오.