제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1
3,4번 ⇨ 확통
5,6번 ⇨ 수2
7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

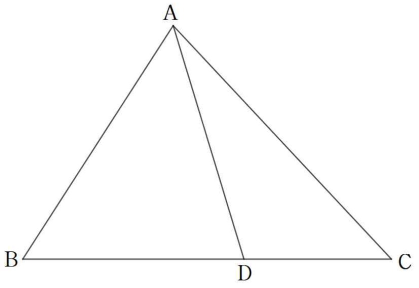
랑데뷰 쉬사준킬은 2020년 3월부터 10월까지 주5일 [월화수목금] 나형 6문항 가형 6문항 또는 8문항 제공되는 수학테스지입니다. 월 20회, 연 160회 제작 계획입니다. 모든 문항은 랑데뷰 수학 연구소에서 그동안 제작해 온 변형 및 자작 문항으로 구성됩니다.

[⇨ 1회~160회 총 1280문항 모두 제작 완료되었습니다.]

5지선다형	단답형

1. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:2$으로 내분하는 점을 D라 하자. 실수 a에 대하여

$\sin(\angle\mathrm{BAD}) : \sin(\angle\mathrm{CAD}) = 1 : a$일 때, $\dfrac{\sin C}{\sin B} = ka$이다. k의 값은? [4점]



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

2. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_n + 2a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ \dfrac{1}{2}a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3 = 1$, $a_6 = 17$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① -8 ② -7 ③ -1 ④ 1 ⑤ 7

3. 원점 O를 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나오면 양의 방향으로 2만큼, 5의 약수가 아닌 눈이 나오면 음의 방향으로 1만큼 점 P를 이동시킨다고 하자. 한 개의 주사위를 10번 던진 후의 점 P의 좌표를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) ab는 짝수이다.

5. 최고차항의 계수가 a인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1-x)=f(1+x)$
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $|f'(x)| \ge -x^2+6x-6$ 이 성립한다.

양수 a의 최솟값은? [4점]

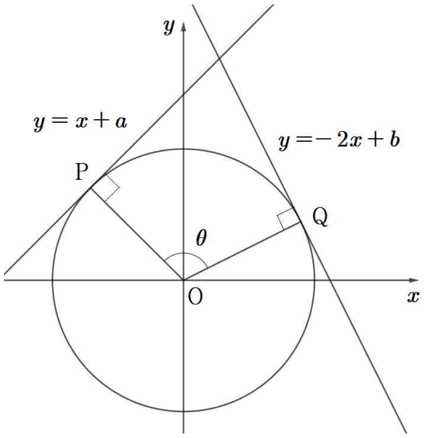
① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

6. $f(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $|f(x)-t|$의 미분가능하지 않은 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=-\sqrt{3}$, $t=\sqrt{3}$에서만 불연속이다.

함수 $|f(x)f(2-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $|f(3)|$의 값을 구하시오. [4점]

7. 두 직선 $y=x+a$, $y=-2x+b$가 원 $x^2+y^2=1$에 접하는 점을 각각 P, Q라 하고, $\angle\mathrm{POQ}=\theta$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, $a>0$, $b>0$) [4점]



① $-\sqrt{3}$ ② -2 ③ $-\sqrt{6}$ ④ -3 ⑤ $-\sqrt{10}$

8. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=0$, $a_{n+1}=a_n+2^n$이다. $x\ge 0$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x)=\frac{1}{3^{n-2}}\sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right)\ (a_n\le x\le a_{n+1})$$

이다.
$0<\alpha<2$인 실수 α에 대하여

$$\int_{\alpha}^{t} f(x)\,dx=0$$

을 만족시키는 $t\ (t>0)$의 값의 개수가 27일 때의 $\ln(1-\cos(\alpha\pi))$의 값은 $p\ln2-q\ln3$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.)[4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제161회 해설

1	2	3	4
④	①	③	210
5	6	7	8
④	27	④	27

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ④
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}=3:2$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=3\mathrm{b}$, $\overline{\mathrm{CD}}=2b$라 할 수 있다.
삼각형 ABD에서 사인법칙을 적용해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 표현하면
$\dfrac{3b}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin B}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{3b\times\sin B}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}$
삼각형 ACD에서 사인법칙을 적용해서 $\overline{\mathrm{AD}}$를 표현하면
$\dfrac{2b}{\sin(\angle \mathrm{CAD})}=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin C}$에서 $\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{2b\times\sin C}{\sin(\angle \mathrm{CAD})}$
따라서
$\dfrac{3b\times\sin B}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}=\dfrac{2b\times\sin C}{\sin(\angle \mathrm{CAD})}$ 에서
$\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sin(\angle \mathrm{CAD})}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}$
$\sin(\angle\mathrm{BAD}):\sin(\angle\mathrm{CAD})=1:a$에서
$\sin(\angle\mathrm{CAD})=\mathrm{a}\sin(\angle\mathrm{BAD})$이므로

$\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sin(\angle \mathrm{CAD})}{\sin(\angle \mathrm{BAD})}=\dfrac{3}{2}a$이다.
그러므로 $k=\dfrac{3}{2}$

2) 정답 ①
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$a_4<a_5<a_6=17$이므로 $a_6=a_4+2a_5=17$이다.
a_3와 a_4의 크기는 알 수 없다.
(i) $1=a_3>a_4$일 때.
$a_5=\dfrac{1}{2}+a_4$
$a_4+2a_5=17$
연립방정식을 풀면
$3a_5=\dfrac{35}{2}$
$a_5=\dfrac{35}{6}$
$a_4=\dfrac{16}{3}$
$1<\dfrac{16}{3}$으로 $a_3<a_4$이므로 모순
(ii) $1=a_3\le a_4$일 때.
$a_5=1+2a_4$
$a_4+2a_5=17$
연립방정식을 풀면
$a_4+2+4a_4=17$
$a_4=3$
따라서 $a_3=1$, $a_4=3$, $a_5=7$, $a_6=17$이다.

(iii) $a_2\le a_3=1$일 때,
$a_4=a_2+2a_3$이고
$3=a_2+2$에서 $a_2=1$
① $a_2=1$, $a_3=1$
$a_1\le a_2$일 때, $a_3=a_1+2a_2$가 성립한다.
$1=a_1+2$
$a_1=-1\cdots$㉠

② $a_2=1$, $a_3=1$
$a_1>a_2$일 때, $a_3=\dfrac{1}{2}a_1+a_2$가 성립한다.
$1=\dfrac{1}{2}a_1+1$
$a_1=0$으로 모순

(iv) $a_2>a_3=1$일 때,
$a_4=\dfrac{1}{2}a_2+a_3$이고
$3=\dfrac{1}{2}a_2+1$에서 $a_2=4$
① $a_2=4$, $a_3=1$
$a_1\le a_2$일 때, $a_3=a_1+2a_2$가 성립한다.
$1=a_1+8$
$a_1=-7\cdots$㉡

② $a_2=4$, $a_3=1$
$a_1>a_2$일 때, $a_3=\dfrac{1}{2}a_1+a_2$가 성립한다.
$1=\dfrac{1}{2}a_1+4$
$a_1=-6$으로 모순

따라서
㉠, ㉡에서 가능한 a_1의 값은 -1, -7이다.
따라서 합은 -8

3) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

6이하의 자연수 중 5의 약수는 1과5로 2개다. 따라서 한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이다. 주사위를 10번 던져 5의 약수가 나오는 횟수를 Y라 하면
$X=2Y-(10-Y)$이다.
따라서 $X=3Y-10$
$\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y-10)=3\mathrm{E}(Y)-10$
한편, 확률변수 Y는 $\mathrm{B}\left(10, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.
따라서 $\mathrm{E}(Y)=\frac{10}{3}$
$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{10}{3}-10=0$

[랑데뷰팁]

5의 약수가 나올 확률이 $\frac{1}{3}$이고 그때 $+2$만큼이동하고 5의 약수가 아닌 수가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이고 그때 -1만큼 이동하므로 주사위를 한 번 던질 때의 점 P의 좌표의 평균은 $2\times\frac{1}{3}-1\times\frac{2}{3}=0$이다.
즉, 주사위를 던지는 횟수에 관계없이 점 P의 좌표의 평균은 0이다.

4) 정답 210
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

여사건을 이용하자.
전체 경우의 수는
$a'+b'+c'+d'+e'=7$에서 ${}_5\mathrm{H}_7={}_{11}\mathrm{C}_4=330$이다.
ab가 홀수인 경우는 (a, b)가
$(1, 1)$일 때, $c+d+e=10$이므로
$c'+d'+e'=7$에서 ${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$
$(1, 3)$, $(3, 1)$일 때, $c+d+e=8$이므로
$c'+d'+e'=5$에서 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
따라서 $2\times21=42$
$(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$일 때, $c+d+e=6$이므로
$c'+d'+e'=3$에서 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$
따라서 $3\times10=30$
$(1, 7)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(7, 1)$일 때,
$c+d+e=4$이므로 $c'+d'+e'=1$에서 ${}_3\mathrm{H}_1=3$
따라서 $4\times3=12$

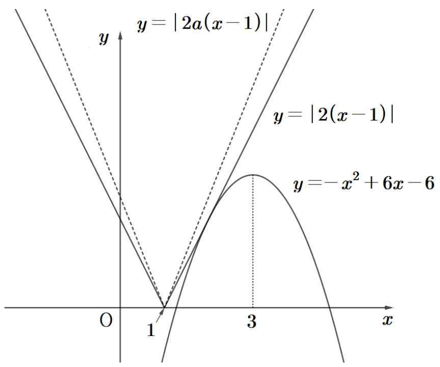
$\therefore\ 36+42+30+12=120$

그러므로 $330-120=210$

5) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

이차함수 $f(x)$는 (가) 조건에 의해 $x=1$에 대칭이므로
$f(x)=a(x-1)^2+q$꼴이다.
따라서 $f'(x)=2a(x-1)\ (a>0)$
$y=-x^2+6x-6=-(x-3)^2+3$
(나) 조건을 만족하기 위해서는 다음 그림과 같이 $y=2a(x-1)$의 기울기 $2a$가 $(1, 0)$에서 $y=-(x-3)^2+1$에 그은 접선의 기울기(㉠)보다 크거나 같아야 한다.



㉠을 구해보자.
접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+6t-8)$이라 하면
$\frac{-t^2+6t-6}{t-1}=-2t+6$
$-t^2+6t-6=-2t^2+8t-6$
$t^2-2t=0$
$t(t-2)=0$
$t=2\ (\because t>1)$
따라서 접선의 기울기는 2이다.
그러므로 $2a\ \geq\ 2$
에서 $a\ \geq\ 1$

6) 정답 27
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

조건에서 삼차함수 $f(x)$는 $f(a)=0$을 만족하는 a에 대하여 $(a, 0)$에 대칭인 그래프이며 극댓값이 $\sqrt{3}$, 극솟값이 $-\sqrt{3}$임을 알 수 있다.
$f(2-x)$는 함수 $f(x)$를 $x=1$에 대칭이동한 그래프이므로 함수 $|f(x)f(2-x)|$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f(x)=kx(x-1)(x-2)$꼴이야 한다.
$f(x)=kx(x-1)(x-2)$
$f'(x)=k(x^2-3x+2)+k(x^2-2x)+k(x^2-x)$
$\quad=k(3x^2-6x+2)$
$f'(x)=0$의 해는 $3x^2-6x+2=0$에서 $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$
따라서 $f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=|\sqrt{3}|$이다.

$f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)=k\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right)$

$\qquad\qquad =k\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$

$|k|\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)=\sqrt{3}$에서 $k=\pm\frac{9}{2}$

$f(x)=\pm\frac{9}{2}x(x-1)(x-2)$

$f(3)=\pm\frac{9}{2}\times3\times2\times1=\pm27$

$|f(3)|=27$

7) 정답 ④

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

두 직선 $y=x+a$, $y=-2x+b$의 교점을 R이라 할 때, $\angle PRQ=\pi-\theta$이다.

직선 $y=x+a$이 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\tan\alpha=1$

직선 $y=-2x+b$이 x축과 이루는 각을 β라 하면 $\tan\beta=-2$이다.

한편, $\alpha+(\pi-\theta)=\beta$에서

$\pi-\theta=\beta-\alpha$이다.

따라서

$\tan(\pi-\theta)=\tan(\beta-\alpha)$

$\qquad=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\qquad=\frac{-2-1}{1+(-2\times1)}=3$

$-\tan\theta=3$이므로

$\tan\theta=-3$이다.

8) 정답 27

[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=\frac{1}{3^{n-2}}\sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right)$ $(a_n\le x\le a_{n+1})$에서

$f(x)$는 주기가 $\frac{2^{n-1}\times2\pi}{\pi}=2^n$인 함수다.

(i) $n=1\to0\le x\le2$, $f(x)=3\sin(\pi x)$

(ii) $n=2\to2\le x\le6$, $f(x)=\sin\left(\frac{\pi(x-2)}{2}\right)$

(iii) $n=3\to6\le x\le14$, $f(x)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{\pi(x-6)}{2^2}\right)$

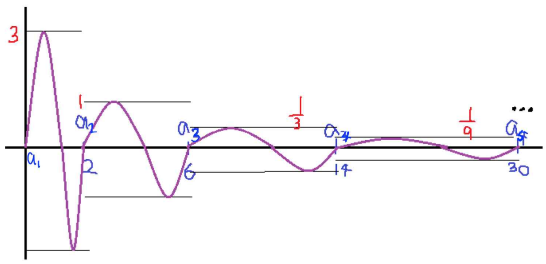
… … …

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$\int_\alpha^t f(x)\,dx=\int_0^t f(x)\,dx-\int_0^\alpha f(x)\,dx=0$에서

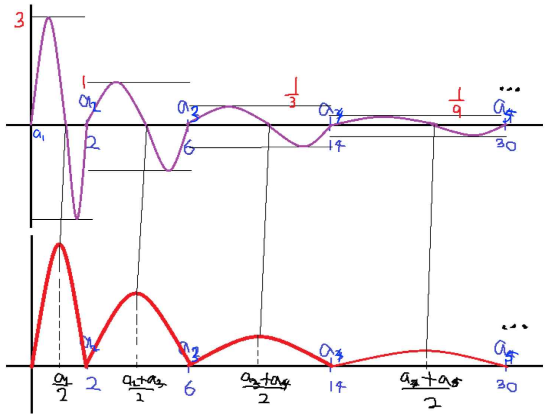
$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^\alpha f(x)\,dx\cdots$㉠

㉠의 좌변은 t에 대한 함수이고 우변은 상수이다.



따라서 $y=\int_0^t f(x)\,dx$와 $y=\int_0^\alpha f(x)\,dx$의 교점의 개수가 27개가 되는 상황이다.

$y=\int_0^t f(x)\,dx$의 그래프는 다음과 같다.



상수인 $\int_0^\alpha f(x)\,dx$의 값을 구해보면

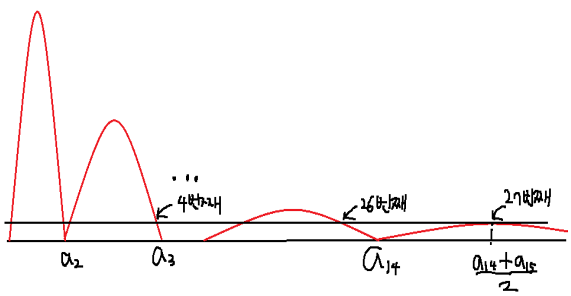
$0<\alpha<2$이므로 $f(x)$은 $n=1$일 때이다. 따라서

$\int_0^\alpha f(x)\,dx=\int_0^\alpha 3\sin(\pi x)\,dx=\left[-\frac{3}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^\alpha=-\frac{3}{\pi}(\cos(\alpha\pi)-1)$

한편, $y=\int_0^t f(x)\,dx$와 $y=\int_0^\alpha f(x)\,dx$ 그래프의 교점의 개수가 27개가 되는 상황은 다음 그림과 같다.

[랑데뷰팁: 극댓값이 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열임]

⇨ **카발리에리의 원리에 의해** 높이가 $\times\frac{1}{3}$, 가로축이 $\times2$ 씩 변하므로 공비가 $\frac{2}{3}$이 된다.



따라서 $n=14$일 때 $a_{14} \le x \le a_{15}$,

$$f(x)=\frac{1}{3^{12}}\sin\left(\frac{\pi(x-a_{14})}{2^{13}}\right)$$

$$\int_0^t f(x)\,dx=\int_0^{a_{14}} f(x)\,dx+\int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}} f(x)\,dx$$

$$=\int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}} f(x)\,dx=\int_{a_{14}}^{\frac{a_{14}+a_{15}}{2}}\left\{\frac{1}{3^{12}}\sin\left(\frac{\pi(x-a_{14})}{2^{13}}\right)\right\}dx$$

($s=x-a_{14}$라 두면 $\frac{a_{15}-a_{14}}{2}=\frac{2^{14}}{2}=2^{13}$)

$$=\int_0^{\frac{a_{15}-a_{14}}{2}}\frac{1}{3^{12}}\sin\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right)ds=\int_0^{2^{13}}\frac{1}{3^{12}}\sin\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right)ds$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}\times\left[\cos\left(\frac{\pi s}{2^{13}}\right)\right]_0^{2^{13}}$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}(-1-1)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$$

[다른 풀이]-카발리에리의 원리 적용

$a_1=\frac{6}{\pi},\ r=\frac{2}{3}\quad \therefore t_{27}=\frac{6}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{13}=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$

⇨ 랑데뷰팁

따라서 $-\frac{3}{\pi}(\cos(\alpha\pi)-1)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$이므로

$1-\cos(\alpha\pi)=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{12}=\frac{2^{14}}{3^{13}}$

$\ln(1-\cos(\alpha\pi))=\ln\frac{2^{14}}{3^{13}}=14\ln2-13\ln3$

$p=14,\ q=13$이므로 $p+q=27$