제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ➪ 수1
3,4번 ➪ 확통
5,6번 ➪ 수2
7,8번 ➪ 미적분
→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

랑데뷰 쉬사준킬은 2020년 3월부터 10월까지 주5일 [월화수목금] 나형 6문항 가형 6문항 또는 8문항 제공되는 수학테스지입니다. 월 20회, 연 160회 제작 계획입니다. 모든 문항은 랑데뷰 수학 연구소에서 그동안 제작해 온 변형 및 자작 문항으로 구성됩니다.

5지선다형	단답형

1. 다음은 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n\ \ n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족할 때, 모든 자연수 m에 대하여 a_{4m}은 12의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명하는 과정이다.

(i) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5,\ \ a_4=12$
이므로 a_4는 12의 배수이다.
(ii) $m=k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면
$a_{4(k+1)}=a_{4k+4}$
$\quad=2a_{\boxed{(가)}}+a_{\boxed{(나)}}$
$\quad=12a_{4k+1}+\boxed{(다)}a_{4k}$
따라서, $m=k+1$일 때, $a_{4(k+1)}$도 12의 배수이다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 m에 대하여 a_{4m}은 12의 배수이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 이라 하고 (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $f(a)+g(a)$ 의 값은? [4점] **[랑데뷰수학]**

① 41 ② 43 ③ 45 ④ 47 ⑤ 49

2. 닫힌구간 $[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin\left(kx-\frac{1}{2}k\right)-1,\ \ g(x)=2\cos(24x-12)$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 합은? [4점] **[랑데뷰수학]**

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면
$\{x\,|\,f(x)=a\}\subset\{x\,|\,g(x)=a\}$
이다.

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤

3. 두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(2m-10,\ 4^2)$을 따르고

$$2\mathrm{P}(m \le X \le 18)=\mathrm{P}(5 \le Y \le 4m-25)$$

일 때, 상수 m에 대하여 $10m$의 값을 구하시오. (단, $m<18$) [4점] **[랑데뷰수학]**

4. 전체집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합이 아닌 모든 부분집합 15개가 각각 적힌 크기와 모양이 같은 카드 15장이 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 카드를 한 장씩 두 번 꺼낼 때, 첫 번째 카드에 적힌 집합을 A, 두 번째, 카드에 적힌 집합을 B라고 하자. $A \not\subset B$이고, $B \not\subset A$일 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 카드는 다시 넣고 p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] **[랑데뷰수학]**

5. 함수 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

가 실수 전체의 집합에서 $g(x) \geq 0$일 때, a^2의 값을 구하시오. (단, a는 실수이다.)[4점] **[랑데뷰수학]**

6. 도함수가 $f'(x)=x^2-5x+6$인 함수 $f(x)$와 양수 k에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq k \text{ 또는 } x \geq 2k) \\ \dfrac{f(2k)-f(k)}{k}(x-k)+f(k) & (k < x < 2k) \end{cases}$$

의 역함수가 존재하도록 하는 k값의 범위가 $\alpha < k \leq \beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은? [4점] **[랑데뷰수학]**

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{4}{7}$

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 상수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x \le 1$일 때, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)+a$이다.

$\displaystyle\int_0^{10a} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점] **[랑데뷰수학]**

8. 함수 $f(x)=\cos(\pi\sqrt{x})$에 대하여 함수 $g(x)=\displaystyle\int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt\ (x \ge 0)$이고 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\dfrac{1}{2}g''(x)-xf(x)$이 $x=a$에서 극값을 가지는 모든 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$의 값을 구하시오. [4점] **[랑데뷰수학]**

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제163회 해설

1	2	3	4
③	③	117	67
5	6	7	8
1	②	200	2

출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(i) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=12$
이므로 a_4는 12의 배수이다.
(ii) $m=k$일 때, a_{4k}가 12의 배수라고 가정하면

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)} &= a_{4k+4} \\ &= 2a_{\boxed{4k+3}} + a_{\boxed{4k+2}} \\ &= 2(2a_{4k+2}+a_{4k+1})+a_{4k+2} \\ &= 5a_{4k+2}+2a_{4k+1} \\ &= 5(2a_{4k+1}+a_{4k})+2a_{4k+1} \\ &= 12a_{4k+1}+\boxed{5}a_{4k} \end{aligned}$$

따라서, $m=k+1$일 때, $a_{4(k+1)}$도 12의 배수이다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 m에 대하여 a_{4m}은 12의 배수이다.

그러므로 $f(k)=4k+3$, $g(k)=4k+2$이고 $a=5$이므로
$f(a)+g(a)=f(5)+g(5)=23+22=45$

2) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f(x)=\sin\left\{k\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}-1$, $g(x)=2\cos\left\{24\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}$이므로
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 $y=\sin kx-1$와 $y=2\cos 24x$를 x축으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프이다. 따라서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 교점의 y좌표는 $y=\sin kx-1$와 $y=2\cos 24x$의 그래프의 교점의 y좌표와 일치한다.

$y=2\cos 24x$는 주기가 $\frac{2\pi}{24}=\frac{\pi}{12}$이므로 정수 a에 대하여 극대는 $x=\frac{2a}{24}\pi$에서, 극소는 $x=\frac{2a+1}{24}\pi$에서 나타난다. 따라서 $x=\frac{m\pi}{24}$ (m은 정수)에 대칭인 그래프이다.
$y=\sin kx-1$는 $x=\frac{(2n+1)\pi}{2k}$ (n은 정수)에 대칭인 그래프이다.
조건을 만족하기 위해서는 함수 $f(x)$의 주기가 $g(x)$보다 크지 않고 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$가 대칭축이 같으면 된다.
따라서 $2k$는 24의 약수이면 된다.
$2k=1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$이다.
따라서 k가 자연수이므로 $k=1, 2, 3, 4, 6, 12$
그러므로 k의 합은 $1+2+3+4+6+12=28$이다.

3) 정답 117
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\mathrm{P}(5 \le Y \le 4m-25)$에서 $\frac{5+(4m-25)}{2}=2m-10$이므로
표준화 화면
$\mathrm{P}(m \le X \le 18)=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{18-m}{3}\right)$와
$\mathrm{P}(5 \le Y \le 4m-25)=\mathrm{P}\left(-\frac{2m-15}{4} \le Z \le \frac{2m-15}{4}\right)$
에서
$\frac{18-m}{3}=\frac{(4m-25)-(2m-10)}{4}=\frac{(2m-10)-5}{4}$ 이 성립한다.
$\frac{18-m}{3}=\frac{2m-15}{4}$
$72-4m=6m-45$
$\therefore\ 10m=117$

4) 정답 67
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

복원추출 문제이다. 전체 경우의 수는 $15\times15=225$
$n(A)=a$, $n(B)=b$라 하면
a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여
(i) $a=1$일 때,
㉠ $(1, 1)$일 때, $4\times3=12$
㉡ $(1, 2)$일 때, $4\times3=12$
⇨$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$중의 한 개 선택 : 4,
그 중 $\{1\}$을 선택했다면
$\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ 중 한 개 선택 : 3
이면 $A\not\subset B$이고, $B\not\subset A$을 만족한다.

㉢ $(1, 3)$일 때, $4\times1=4$
따라서 $12+12+4=28$

(ii) $a=2$일 때 : 집합 X의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이다.
㉠ $(2, 1)$일 때, ${}_6\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=6\times2=12$
㉡ $(2, 2)$일 때, ${}_6\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=6\times5=30$
⇨$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$중의 한 개 선택 : 6,
그 중 $\{1, 2\}$을 선택했다면
$\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ 중 한 개 선택 : 5

이면 $A \not\subset B$이고, $B \not\subset A$을 만족한다.

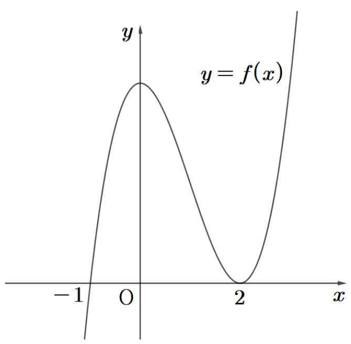
㉢ $(2, 3)$일 때, $6 \times 2 = 12$
원소의 개수가 2인 집합이 $\{1, 2\}$일 때,
원소의 개수가 3인 집합 $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ 중 하나를 선택하는 경우이다.
따라서 $12 + 30 + 12 = 54$

(iii) $a = 3$일 때,
㉠ $(3, 1)$일 때, $4 \times 1 = 4$
㉡ $(3, 2)$일 때, $4 \times 3 = 12$
㉢ $(3, 3)$일 때, $4 \times 3 = 12$
따라서 $4 + 12 + 12 = 28$

$\frac{28+54+28}{15\times15} = \frac{110}{225} = \frac{22}{45}$
따라서 $p = 45$, $q = 22$
$p + q = 67$

5) 정답 1
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

삼차함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$x \geq -1$일 때, $f(x) \geq 0$이므로 $\int_{-1}^{x} f(x)dx \geq 0$을 만족한다.
$x \leq -1$일 때, $f(x) \leq 0$이므로 $\int_{x}^{-1} f(x)dx \leq 0$이고
$\int_{-1}^{x} f(x)dx \geq 0$을 만족한다.
따라서 $a = -1$이면 모든 실수 x에 대하여
함수 $g(x) = \int_{-1}^{x} f(x)dx \geq 0$을 만족한다.
그러므로 $a = -1$
$a^2 = 1$이다.

6) 정답 ②
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f'(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ 의 해는
$x = 2$ 또는 $x = 3$이므로
삼차함수 $f(x)$는 $x < 2$, $x > 3$ 에서 증가
$2 < x < 3$에서 감소한다.

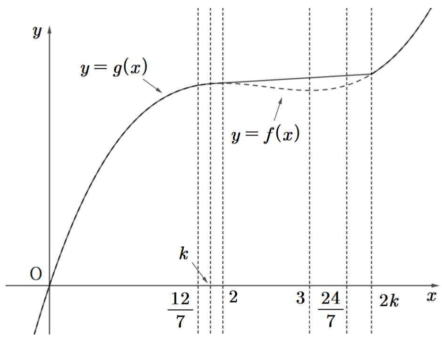
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq k \text{ 또는 } x \geq 2k) \\ \frac{f(2k)-f(k)}{k}(x-k) + f(k) & (k < x < 2k) \end{cases}$$

$k < x < 2k$에서 $g(x) = \frac{f(2k)-f(k)}{2k-k}(x-k) + f(k)$는
두 점 $(k, f(k))$와 $(2k, f(2k))$을 지나는 직선을 의미한다.
함수 $g(x)$가 역함수가 존재하기 위해서는 $g(x)$가 증가함수가 되어야 한다.
$k \leq 2$이고 $2k \geq 3$이어야 한다.
따라서 $\frac{3}{2} \leq k \leq 2 \cdots$㉠이고 $f(k) < f(2k)$가 성립하면 된다.

$f'(x) = x^2 - 5x + 6$에서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$이고

$f(2k) = \frac{8}{3}k^3 - 10k^2 + 12k + C$

$f(k) = \frac{1}{3}k^3 - \frac{5}{2}k^2 + 6k + C$



$f(2k) - f(k)$
$= \frac{7}{3}k^3 - \frac{15}{2}k^2 + 6k > 0$
$k > 0$이므로 양변에 $\times \frac{6}{k}$
$14k^2 - 45k + 36 > 0$
$(7k-12)(2k-3) > 0$
$k < \frac{3}{2}$ 또는 $k > \frac{12}{7} \cdots$㉡
따라서 ㉠, ㉡에서
$\frac{12}{7} < k \leq 2$
따라서 $\alpha = \frac{12}{7}$, $\beta = 2$이므로
$\beta - \alpha = \frac{2}{7}$

7) 정답 200
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가)에서 구간 $[-1, 1]$에서 주어진 함수를

$f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ 라 하면 (나)에서

$f(x+2) = f_1(x) + a \quad (-1 \le x \le 1)$

양변에 $x \to x-2$를 대입하면

$f(x) = f_1(x-2) + a \ (-1 \le x-2 \le 1)$

$= \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2+1} + a \ (1 \le x \le 3)$

$f_2(x) = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2+1} + a \ (1 \le x \le 3)$ 라 하자.

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 정의되기 위해서는 $x=1$에서도 정의되어야 한다.

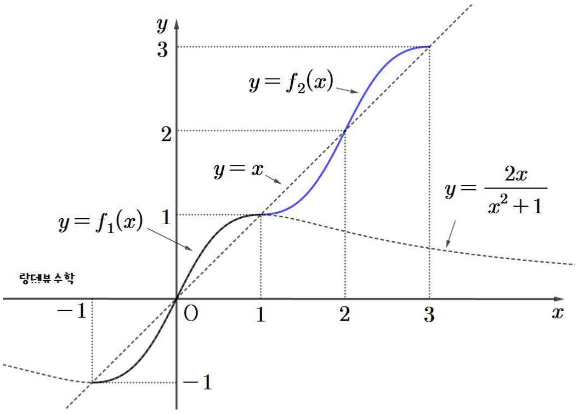
따라서 $f_1(1) = f_2(1)$이 성립해야 한다.

$f_1(1) = 1,\ f_2(1) = \dfrac{-2}{2} + a = -1 + a$

$1 = -1 + a$에서 $a = 2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} & (-1 \le x \le 1) \\ f_2(x) = f_1(x-2) + 2 & (1 \le x \le 3) \\ f_3(x) = f_2(x-2) + 3 & (3 \le x \le 5) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



함수 $f_1(x)$가 $f_1(-x) = -f_1(x)$가 성립하므로 $(0, 0)$에 대칭이다.

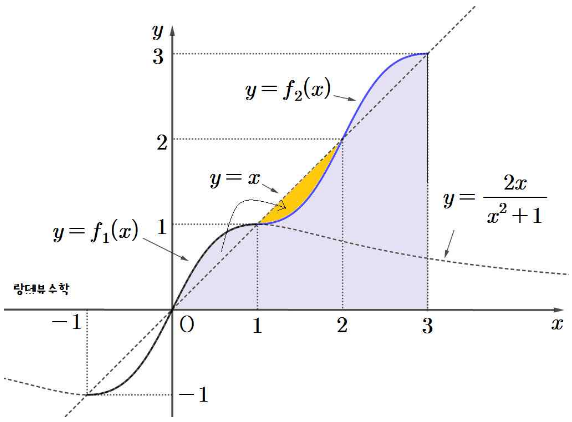
따라서 함수 $f_2(x)$는 $(2, 2)$에 대칭이다.

그러므로 함수 $f(x)$의 정적분 값은 다음 그림과 같이 $y=x$을 기준으로 이동시켜 직각이등변 삼각형의 넓이로 계산할 수 있다.

따라서

$\displaystyle\int_0^{10a} f(x)dx$

$= \displaystyle\int_0^{20} f(x)dx = \dfrac{1}{2} \times 20 \times 20 = 200$



8) 정답 2
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$g(x) = \displaystyle\int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt$

우변의 $x - t = s$라 두면

$t : 0 \to x,\ s : x \to 0$이고

$-dt = ds$이므로

$\displaystyle\int_0^x t(2x-t)f(x-t)dt$

$= \displaystyle\int_x^0 (x-s)(x+s)f(s)(-ds)$

$= \displaystyle\int_0^x x^2 f(s)ds - \int_0^x s^2 f(s)ds$

$g(x) = x^2 \displaystyle\int_0^x f(s)ds - \int_0^x s^2 f(s)ds$의 양변 미분하면

$g'(x) = 2x\displaystyle\int_0^x f(s)ds + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x\int_0^x f(s)ds$

$g''(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(s)ds + 2xf(x)$

$g''(x) - 2xf(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(s)ds$

따라서

$h(x) = \dfrac{1}{2}g''(x) - xf(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds$이다.

$h'(x) = f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$

$h'(x) = \cos(\pi\sqrt{x}) = 0$의 해가

$x \ge 0$에서 $x = \dfrac{1}{4},\ \dfrac{9}{4},\ \dfrac{25}{4},\ \cdots$이므로

자연수 n에 대하여 $a_n = \dfrac{(2n-1)^2}{4}$이다.

따라서 $a_{n+1}=\frac{(2n+1)^2}{4}$ 이므로

$a_n a_{n+1}=\left\{\frac{(2n-1)(2n+1)}{4}\right\}^2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a_n a_{n+1}}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$

$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=2\times 1=2$