제 2 교시

수학 영역(가형&나형)

1,2번 ⇨ 수1
3,4번 ⇨ 확통
5,6번 ⇨ 수2
7,8번 ⇨ 미적분

→ 가형은 전문항 풀기, 나형은 1번~6번까지 풀기

5지선다형	단답형

1. 함수 $f(x)=\log_2 x$에 대하여 $a_1=1$이고 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $f^{-1}(a_{n+1})-f^{-1}(a_n)=2$을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=a_n$의 해를 b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} b_n$의 값을 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

2. $3n-3<x<3n$에서 방정식 $\cos 2x=0$의 해의 개수를 a_n이라 할 때, $a_k=1$이 되도록 하는 자연수 k를 작은 수부터 나열한 것을 k_1, k_2, k_3, $\cdots$라 하자. k_1+k_2의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이고 $\pi \fallingdotseq 3.14$이다.)[4점] [랑데뷰수학]

3. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 함수의 개수를 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

(가) $f(3)$의 값은 짝수이다. (나) $x<3$이면 $f(x)\geq f(3)$이다. (다) $x>3$이면 $f(x)\leq f(3)$이다.

4. 7개의 숫자 0, 1, 2. 3, 4, 5, 6 에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 3의 배수가 아닌 자연수의 개수를 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

5. 실수 전체의 집합에서 증가하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)>0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ $(k>0)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(k)$라 하자.

$$\int_0^x tf(t)dt=-x^3-x^2+xS(x)$$

가 성립할 때, $S(2)$의 값은? [4점] [랑데뷰수학]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

6. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0,\ f(\alpha)=0\ (\alpha>0)$ (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

실수 t에 대하여 함수 $g(x)=\int_t^x f(s)ds$라 하고, 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$의 치역의 모든 원소의 합을 S, 함수 $h(t)$가 $t=k$에서 불연속인 실수 k의 개수를 m이라 할 때, $S\times m$의 값을 구하시오. [4점] [랑데뷰수학]

7. 방정식 $y^2+xy-6x^2-5x=1$이 나타내는 두 개의 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [4점] [랑데뷰수학]

① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

8. 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$에서 정의된 $g(x)=x-\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$의 역함수를 $g^{-1}(x)$라 하자. 닫힌구간 $[0,\,2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\int_0^{2\pi}\left|x-g^{-1}(t)\right|dt$$

일 때, $\int_0^{2\pi}f(x)dx=a\pi^3+b\pi$이다. $9a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)[4점] [랑데뷰수학]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

랑데뷰 쉬사준킬 제165회 해설

1	2	3	4
110	23	992	196
5	6	7	8
③	24	③	20

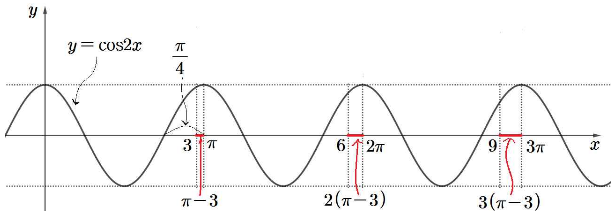
출제
대구 송원학원 황보백 선생님

1) 정답 110
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$f^{-1}(x)=2^x$이므로
$2^{a_{n+1}}-2^{a_n}=2$
이므로
수열 $\{2^{a_n}\}$은 첫째항이 2이고 공차가 2인 등차수열이다.
따라서 $2^{a_n}=2n$
$a_n=\log_2(2n)$
그러므로
$\log_2 x=a_n$의 해는 $b_n=2n$이다.
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}2n=2\times\frac{10\times11}{2}=110$이다.

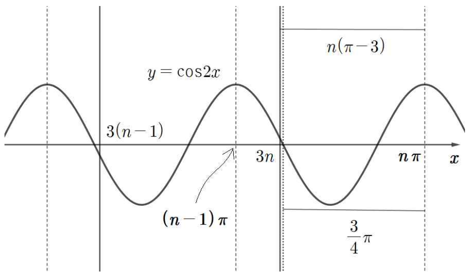
2) 정답 23
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$y=\cos2x$는 주기가 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고 $\cos2x=0$일 때는
$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \cdots$이다.
$a\pi=3b$를 만족하는 정수 a, b는 $a=0, b=0$이 유일하므로
열린구간 $(0, 3)$에서는 $\cos2x=0$의 해가
$x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{3}{4}\pi$로 2개다.
즉, $a_1=2$
또한, 다음 그림과 같이 열린구간 $(3n-3, 3n)$의 구간의 길이인 3과 $y=\cos2x$의 주기인 π의 차이의 n배가 $\frac{\pi}{4}$보다 작을 때 까지는 $(3n-3, 3n)$에서
$y=\cos2x$는 x축과 두 점에서 만난다.



즉, $n(\pi-3)>\frac{\pi}{4}$을 만족하는 최소 자연수 n은 6이므로 열린구간 $(15, 18)$에는 $\cos2x=0$의 해의 개수는 처음으로 1개가 된다.
$k_1=6\cdots$㉠

$n(\pi-3)$의 값은 n이 커질수록 커진다. 따라서 다음 그림과 같이 구간 $((n-1)\pi, n\pi)$에서 $x=3n$의 위치가 $n\pi-3n>\frac{3}{4}\pi$이면 구간 $(3(n-1), 3n)$에서 $y=\cos2x$는 x축과 한점에서 만난다.



$n(\pi-3)>\frac{3}{4}\pi$을 만족하는 최소 자연수 n은 17이므로 열린구간 $(48, 51)$에는 $\cos2x=0$의 해의 개수는 두 번째로 1개가 된다.
$k_2=17\cdots$㉡
따라서 $k_1+k_2=23$

3) 정답 992
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

조건 (가)에 의하여
$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 또는 $f(3)=6$
(i) $f(3)=2$인 경우
두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=25$
이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_2\Pi_3=8$
따라서 함수 f의 개수는 $25\times8=200$
(ii) $f(3)=4$인 경우
두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_3\Pi_2=9$
이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=64$
따라서 함수 f의 개수는 $9\times64=576$
(iii) $f(3)=6$인 경우
두 조건 (나), (다)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_1\Pi_2=1$
이고, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는
${}_6\Pi_3=216$
따라서 함수 f의 개수는 $1\times216=216$
(i), (ii), (iii)에서
$200+576+216=992$

4) 정답 196
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

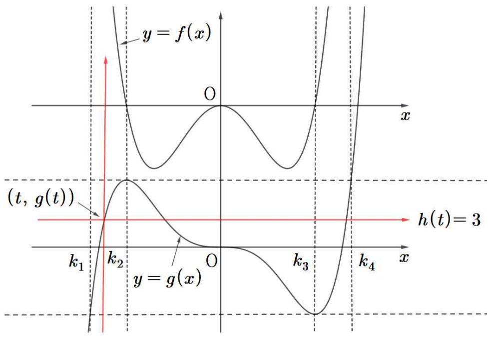
만들 수 있는 전체 세 자리의 자연수의 개수는
$6\times{}_7\Pi_2=6\times49=294$이다.
그 중 3의 배수를 제외하면 된다.
3으로 나눌 때 나머지가 1인 수의 집합 $A=\{1,4\}$
3으로 나눌 때 나머지가 2인 수의 집합 $B=\{2,5\}$
3으로 나눌 때 나머지가 0인 수의 집합 $C=\{0,3,6\}$
3의 배수가 되는 경우는
(i) 각 집합에서 원소 하나씩 뽑아 세 자리 자연수를 만드는 경우
$2\times2\times3\times3!=72$
0이 가장 큰 자리수 인 경우
$2\times2\times2!=8$
따라서
$72-8=64$
(ii) 각 집합에서만 3번 중복해서 수를 뽑아 세 자리 자연수를 만드는 경우
$2^3+2^3+3^3=8+8+27=43$
0이 가장 큰 자리수 인 경우
$3^2=9$
따라서
$43-9=34$
(i), (ii)에서 $294-64-34=196$

5) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$\int_0^k f(x)dx=S(k)$이므로 $f(k)=S'(k)$
$\int_0^x tf(t)dt=-x^3-x^2+xS(x)$를 양변 미분하면
$xf(x)=-3x^2-2x+S(x)+xS'(x)$
$xf(x)=xS'(x)$이므로
$S(x)=3x^2+2x$
$S(2)=12+4=16$

6) 정답 24
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

(가), (나)에서 사차함수 $f(x)$는
$f(x)=ax^2(x^2-\alpha^2)$ $(a>0,\ \alpha>0)$꼴이다.
$g(x)=\int_t^x f(s)ds$에서 양변 미분하면
$g'(x)=f(x)$이고 $g'(x)=0$의 해는 $x=-\alpha$, $x=0$, $x=\alpha$이다.
함수 $g(x)$는 극대값 $g(-\alpha)$, 극솟값 $g(\alpha)$를 갖는다.
$g(x)=\int_t^x f(s)ds$의 양변에 $x=t$를 대입하면
$g(t)=0$이므로 다음 그림과 같이 $y=g(x)$ 그래프 개형에서 점 $(t,\ g(t))$가 원점인 좌표평면을 생각할 수 있다. [그래프 개형 파악하기⇨ 랑데뷰세미나 참조]



$t<k_1$일 때, $h(t)=1$
$t=k_1$일 때, $h(t)=2$
$k_1<t<k_2$일 때, $h(t)=3$
$t=k_2$일 때, $h(t)=2$
$k_2<t<k_3$일 때, $h(t)=3$
$t=k_3$일 때, $h(t)=2$
$k_3<t<k_4$일 때, $h(t)=3$
$t=k_4$일 때, $h(t)=2$
$t>k_4$일 때, $h(t)=1$이다.

따라서 $h(t)$의 값은 1 또는 2 또는 3이고 함수 $h(t)$가 불연속인 k는 k_1, k_2, k_3, k_4로 개수는 4이다.
따라서 $S=1+2+3=6$, $m=4$이므로 $S\times m=24$

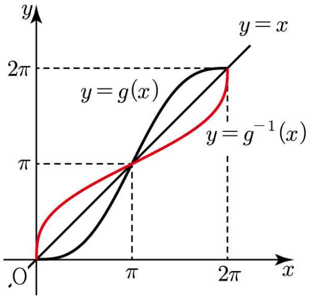
7) 정답 ③
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$y^2+xy-(6x^2+5x+1)$
$=y^2+xy-(3x+1)(2x+1)$
$=(y+3x+1)(y-2x-1)=0$
이므로 방정식이 나타내는 두 직선은
$y=-3x-1$, $y=2x+1$이다.

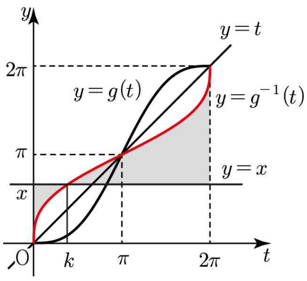
두 직선의 기울기가 각각 -3, 2이므로 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha=-3$, $\tan\beta=2$이다.
두 직선이 이루는 각의 크기가 θ이므로
$\theta=\alpha-\beta$이다.
$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$이다.
$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-3-2}{1+(-6)}=1$
에서
$\tan\theta=1$

8) 정답 20
[출제자 : 황보백 대구 송원학원 010-5673-8601]

$g(x)=x-\sin x$
$g'(x)=1-\cos x$, $g''(x)=\sin x$
곡선 $y=g(x)$는 변곡점의 좌표는 (π, π)이다.
따라서 $y=g(x)$와 $y=g^{-1}(x)$의 그래프는 다음과 같다.

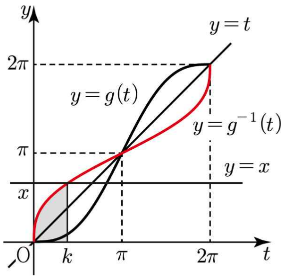


$[0, 2\pi]$에서 $g(x)=x-\sin x$는 변곡점에 대칭이므로
$\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,dt=2\pi^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} g^{-1}(t)\,dt=2\pi^2$이다.
다음 그림과 같이 $t-y$평면에서 $y=g^{-1}(t)$와 상수함수 $y=x$의 교점의 t좌표를 k라 두면



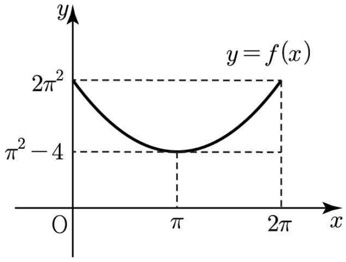
$f(x)=\displaystyle\int_0^k\{x-g^{-1}(t)\}dt+\int_k^{2\pi}\{g^{-1}(t)-x\}dt$
$=\displaystyle\int_0^k(x)\,dt+\int_k^{2\pi}(-x)dt+\int_0^k(-g^{-1}(t))dt+\int_k^{2\pi}(g^{-1}(t))dt$
$=[xt]_0^k+[-xt]_k^{2\pi}+\displaystyle\int_0^{2\pi}(g^{-1}(t))dt-2\int_0^k(g^{-1}(t))dt$
$=(2k-2\pi)x+2\pi^2-2\displaystyle\int_0^k(g^{-1}(t))dt \cdots$ ㉠

한편, $S=\displaystyle\int_0^k(g^{-1}(t))dt$라 두면 다음 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$S=kx-\displaystyle\int_0^x(g(t))dt$
$=kx-\left[\dfrac{1}{2}t^2+\cos t\right]_0^x$
$=kx-\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+1$ 을 ㉠에 대입하면
$f(x)=(2k-2\pi)x+2\pi^2-2\left(kx-\dfrac{1}{2}x^2-\cos x+1\right)$
$=x^2-2\pi x+2\pi^2+2\cos x-2$
$=(x-\pi)^2+2\cos x+\pi^2-2 \quad (0 \le x \le 2\pi)$
그러므로
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$
$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\{(x-\pi)^2+2\cos x+(\pi^2-2)x\}dx$
$=\left[\dfrac{1}{3}(x-\pi)^3+2\sin x+(\pi^2-2)x\right]_0^{2\pi}$
$=\dfrac{1}{3}\pi^3+2\pi^3-4\pi+\dfrac{1}{3}\pi^3$
$=\dfrac{8}{3}\pi^3-4\pi$
따라서
$a=\dfrac{8}{3}$, $b=-4$
$9a+b=24-4=20$

[랑데뷰세미나참고] - $y=(x-\pi)^2$와 $y=2\cos x$는 모두 $x=\pi$에 대칭인 함수이므로 $f(x)$도 $x=\pi$에 대칭이다.
$f'(x)=2(x-\pi)-2\sin x$이고 $[0, 2\pi]$에서 $f'(\pi)=0$ $x=\pi$좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $-$ → $+$로 변하므로 $x=\pi$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$는 다음 그림과 같은 개형이며
$f(\pi)=\pi^2-4$인 극솟값을 갖고
$f(0)=f(2\pi)=2\pi^2$인 $x=\pi$에 대칭인 함수이다.



(i) 최솟값 $m(t)$에 대해 알아보자.
① $0 \le t < \pi$일 때, $m(t)=\pi^2+4$
② $\pi \le t \le 2\pi$일 때, $m(t)=f(t)$

〔다른 풀이〕
$t-y$좌표평면에서 $y=g^{-1}(t)$와 $y=x$(상수함수)의 교점의 t좌표를 α라 하면
$g^{-1}(\alpha)=x$에서 $g(x)=\alpha$이다.
따라서
$f(x)$
$=\int_0^{2\pi}\left|x-g^{-1}(t)\right|dt$
$=\int_0^{\alpha}\{x-g^{-1}(t)\}dt+\int_{\alpha}^{2\pi}\{g^{-1}(t)-x\}dt$
$=\int_0^{g(x)}\{x-g^{-1}(t)\}dt+\int_{g(x)}^{2\pi}\{g^{-1}(t)-x\}dt$이다.
$=\left[xt-G^{-1}(t)\right]_0^{g(x)}+\left[G^{-1}(t)-xt\right]_{g(x)}^{2\pi}$
$=xg(x)-G^{-1}(g(x))+G^{-1}(0)$
$\quad+G^{-1}(2\pi)-2\pi x-G^{-1}(g(x))+xg(x)$
양변 x에 관해 미분하면
$f'(x)=g(x)+xg'(x)-g^{-1}(g(x))g'(x)$
$\quad-2\pi-g^{-1}(g(x))g'(x)+g(x)+xg'(x)$
$=g(x)+xg'(x)-xg'(x)$
$\quad-2\pi-xg'(x)+g(x)+xg'(x)$
$=2g(x)-2\pi$
$=2x-2\sin x-2\pi$
$f(x)=2\int(x-\sin x-\pi)dx=2\left(\frac{1}{2}x^2+\cos x-\pi x\right)+C$ ⋯㉠
한편
$f(0)=\int_0^{2\pi}\left|g^{-1}(t)\right|dt$
$=4\pi^2-\int_0^{2\pi}g(t)dt$
$=4\pi^2-\left[\frac{1}{2}x^2-\cos x\right]_0^{2\pi}$
$=4\pi^2-\left(2\pi^2-1+1\right)=2\pi^2$
㉠에서 $f(0)=2+C=2\pi^2$
그러므로 $C=2\pi^2-2$이다.
$=2\left(\frac{1}{2}x^2+\cos x-\pi x\right)+C$
$\therefore\ f(x)=x^2+2\cos x-2\pi x+2\pi^2-2$
따라서
$\int_0^{2\pi}f(x)dx$
$=\int_0^{2\pi}\left(x^3+2\cos x-2\pi x+2\pi^2-2\right)dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3+2\sin x-\pi x^2+\left(2\pi^2-2\right)x\right]_0^{2\pi}$
$=\frac{8}{3}\pi^3-4\pi^3+4\pi^3-4\pi$
$=\frac{8}{3}\pi^3-4\pi$

〔랑데뷰팁〕
☆에서 $f(0)=\int_0^{2\pi}\left|g^{-1}(t)\right|dt$의 값은 한 변의 길이가 2π인 정사각형 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(0)=\frac{1}{2}\times(2\pi)^2=2\pi^2$