직접 대입하기

20210910가

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

2022예시문항(공통)15

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

20210921나

21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

Case 나누어 중복조합

20201028가

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

빵과 우유를 중복조합으로 나누어주는 전형적인 상황인데, 조건이 생겨서 전형적인 풀이(공식)가 먹히지 않습니다. 경우의 수/확률에서는 언제든 “직접 세어보기”, “Case 나누어 세어보기”를 할 마음의 준비를 하셔야합니다. 특히, 빵의 개수와 우유의 개수가 상당히 적습니다. 경우를 직접 나누라는 강력한 힌트입니다.

Case 나누어 중복조합

20210928가/나

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

이 문제가 9평 29번에 배치되었는데, 정답률이 가형 31%, 나형 13%였다고 합니다. 경우의 수, 확률에서는 언제든 Case 나누기할 마음의 준비하셔야 하구요. 사실 이 문제는 수특 확통 26p 2번에 유사 문항이 있었습니다. 확통은 EBS 풀고 틀린 것/체크해둔 것 시험 전에 한 번 더 보시는게 좋겠죠? 안 푸셨다면 선별된 문제들만이라도요!

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20210926가/20210927나

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y=aX+b$로 놓을 줄 아셔야 합니다.

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20201015나

15. 이산확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고 이산확률변수 Y가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k^2)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이다. $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=1$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y=aX+b$로 놓을 줄 아셔야 합니다.
(이 문항은 오류가 있지만, 그와 무관하게 챙길 것은 챙겨가야겠죠?)

기본적으로 알아야 할 테크닉 4가지

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$

① $x=a$ 대입해서 그래프에서 $f(a)$, $g(a)$의 대소 비교하여 x_1, a의 대소 따지기

② $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$은 두 점 사이의 기울기로 해석

③ x_1y_1이나 $(x_2-x_1)(y_2-y_1)$은 사각형의 넓이

④ 직접 대입 $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$하여 연산해보기

#팁: ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기

ㄴ에서 챙길 테크닉

2021 사관(나) 21번

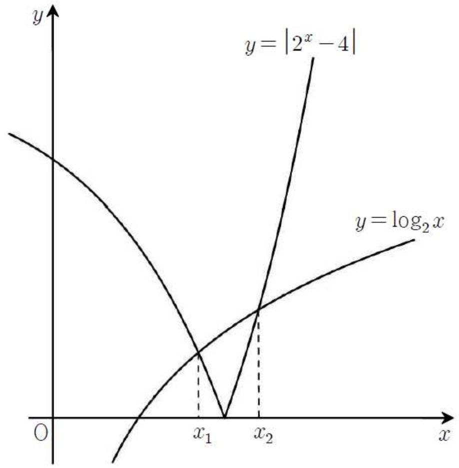
21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1}) < 3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2} > 8+\log_2(\log_3 6)$



$a<b<c<d$이면 $b-c<d-a$입니다.

수직선을 그려보면 쉽게 이해할 수 있습니다.

ㄴ이 핵심. 새로운 수를 놓을 줄 아셔야 합니다.

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2}<x_1<\frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2}<x_2<\sqrt{2}$

ㄷ. $y_1-y_2<\frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

수의 대소 관계를 비교할 때, 새로운 적당한 수를 놓는 센스가 필요합니다. 이때,

① 지수의 밑이 같아야 대소 비교가 쉽다는 점

② 보기의 숫자

이 두 가지는 큰 힌트입니다.

삼차함수의 대칭성과 비율 관계

2021 사관(나) 30번

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

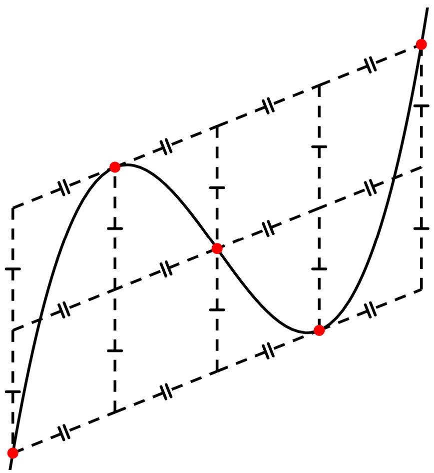
이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

① 삼차함수는 점대칭입니다.

② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.



공통 접선 관찰하기

20210930(가)

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \leq ax+b \leq e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$\left|M \times m^3\right| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

#Tip! 곡선 두 개가 나왔을 때, 공통 접선에서 답이 되는 상황이나 집중해서 관찰해야 할 상황이 자주 나옵니다. 특히 교점의 개수를 셀 때!

공통 접선 관찰하기

2022 예시문항(미적분) 30번

30. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

> $\lim_{m\to\alpha-} g(m) - \lim_{m\to\alpha+} g(m) = 1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b, f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

합성함수 돌려 그리기

20200321(나)

21. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
> (나) 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

#Tip! $f(g(x))$ 그래프 그릴 때 $g(x)$의 치역$=f(x)$의 정의역이 되도록 그래프를 돌려 그리면 편해요!

합성함수 돌려 그리기

2021 사관(가) 30번

30. 두 함수 $f(x)=x^2-ax+b\ (a>0)$, $g(x)=x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x)=(f\circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $h(0)<h(4)$
> (나) 방정식 $|h(x)|=k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.

$f(1)=-\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+16b$의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2}<e<3$이고, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이다.) [4점]

절댓값과 미분가능성

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$ (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

#Tip! $f(a)=0$이고 $y=|f(x)|$가 $x=a$에서 미분가능

$\Rightarrow$ 다항식 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

$\Rightarrow$ $f'(a)=0$

정적분의 부등식

2022 예시문항(공통) 12번

12. $0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$$\int_{a}^{b}(x^3 - 3x + k)\,dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

#Tip! 적분가능한 $f(x)$에 대하여 $[a, b]$ 에서

① $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq \int_{a}^{b} g(x)dx$

③ $m \leq f(x) \leq M$ 이면 $m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b-a)$

정적분의 부등식

20210918(가)

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0)\end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a)\ge 1$인 실수 a가 존재한다.

수열의 귀납적 정의

직접 대입하기

20210910가

10. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} + a_n = (-1)^{n+1} \times n$$

을 만족시킨다. $a_k > a_1$인 자연수 k의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

* 수열의 귀납적 정의

① 등차·등비를 제외하고 일반항 찾는 것은 교과서에서 다루지 않는다.

② 따라서 직접 대입하여 찾는다.

③ 직접 대입할 때 사칙 연산을 마무리 짓지 말고 그대로 표현하는 게 유리할 때가 있다.

$a_2 + a_1 = 1$ $\quad$ $a_2 = 1 - 12$

$a_3 + a_2 = -2$ $\quad$ $a_3 = -1 - 2 + 12$

$a_4 + a_3 = 3$ $\quad$ $a_4 = 1 + 2 + 3 - 12$

$a_5 + a_4 = -4$ $\quad$ $a_5 = -1 - 2 - 3 - 4 + 12$

$a_6 + a_5 = 5$ $\quad$ $a_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 - 12$

$a_7 + a_6 = -6$ $\quad$ $a_7 = -1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 12$

$a_8 + a_7 = 7$ $\quad$ $a_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 12$

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

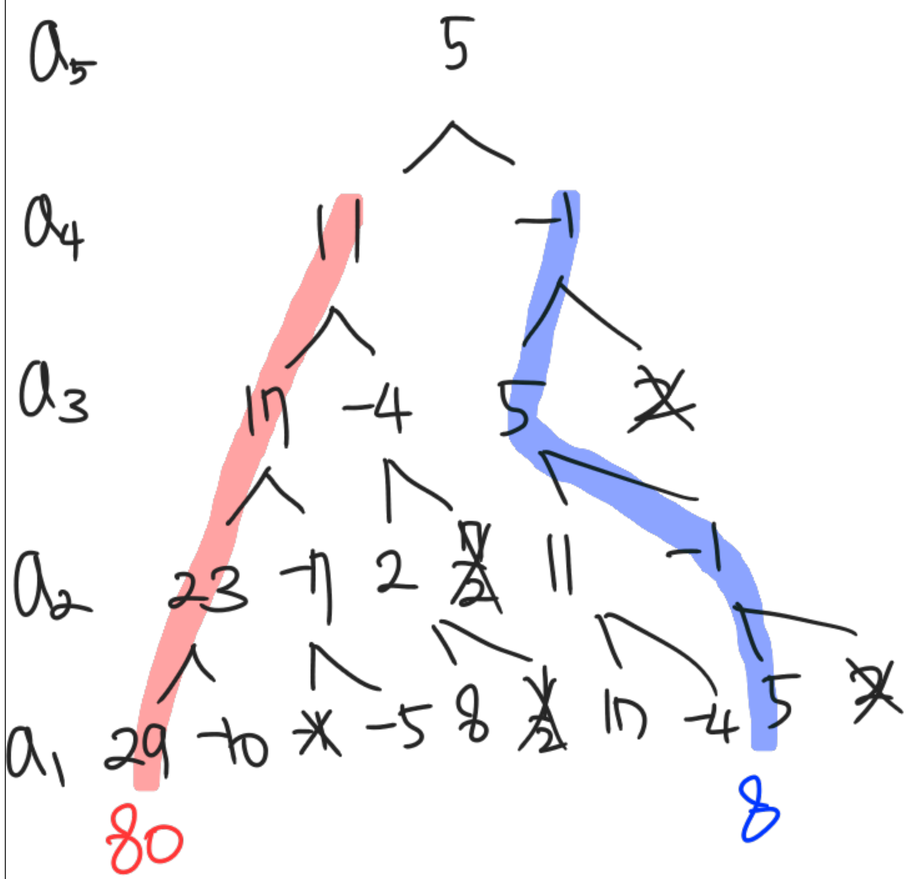
2022예시문항(공통)15

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은? [4점]

> (가) $a_5 = 5$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

* 수열 경우 나눌때 강력한 도구는 가지치기(수형도)
→ 대입할때 경우가 나누어지면 가지치기(수형도)가 강력한 도구이다



$M = 80 + (a_5 + a_6 + \cdots + a_{100})$

$m = 8 + (a_5 + a_6 + \cdots + a_{100})$

수형도(가지치기)를 이용한 경우 나누기

20210921나

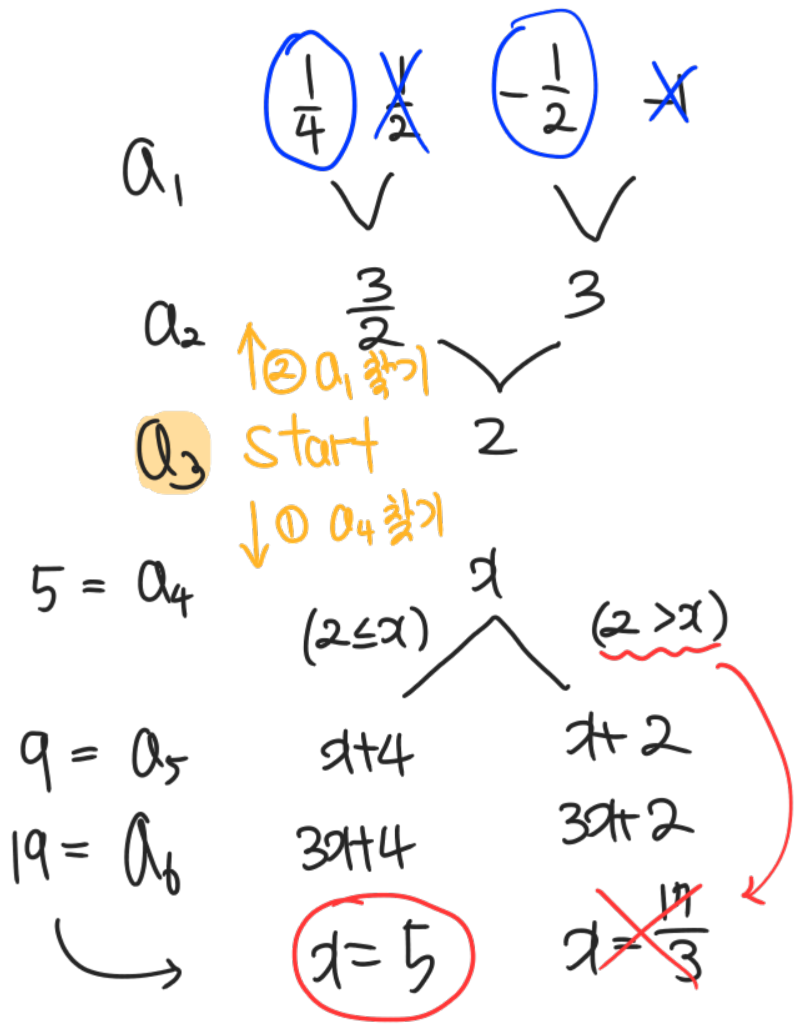
21. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} 2a_n+a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n+a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

* 가지치기로 경우 나눌 때 시작점을 잘잡는 센스가 있으면 좋다.



Case 나누어 중복조합

20201028가

28. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

빵과 우유를 중복조합으로 나누어주는 전형적인 상황인데, 조건이 생겨서 전형적인 풀이(공식)가 먹히지 않습니다. 경우의 수/확률에서는 언제든 “직접 세어보기”, “Case 나누어 세어보기”를 할 마음의 준비를 하셔야합니다. 특히, 빵의 개수와 우유의 개수가 상당히 적습니다. 경우를 직접 나누라는 강력한 힌트입니다.

빵	A	B	C	우유
	3			${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$
	2	1		$2 \times {}_3H_2 = 2 \times {}_4C_2 = 12$
	1	2		$2 \times {}_3H_2 = 2 \times {}_4C_2 = 12$
	1	1	1	${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$

$\boxed{37}$

Case 나누어 중복조합

20210928가/나

29. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

이 문제가 9평 29번에 배치되었는데, 정답률이 가형 31%, 나형 13%였다고 합니다. 경우의 수, 확률에서는 언제든 Case 나누기할 마음의 준비 하셔야 하구요. 사실 이 문제는 수특 확통 26p 2번에 유사 문항이 있었습니다. 확통은 EBS 풀고 틀린 것/체크해둔 것 시험 전에 한 번 더 보시는게 좋겠죠? 안 푸셨다면 선별된 문제들만이라도요!

흰 A	B	C	검
4			$3 \times {}_3H_2 = 18$
3	1		$6 \times {}_3H_3 = 60$
2	2		$3 \times {}_3H_4 = 45$
2	1	1	$3 \times {}_3H_4 = 45$

$\boxed{168}$

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20210926가/20210927나

26. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	d	1

같다

Y	11	21	31	41	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	a	b	c	d	1

$\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{E}(X^2)=5$일 때, $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오.

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y=aX+b$로 놓을 줄 아셔야 합니다.

"$Y=10X+1$"을 보는 눈썰미 중요!
$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ 이용.

$E(Y)=E(10X+1)$
$=10E(X)+1$
$=10\times2+1$
$=21$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=5-2^2=1$
$V(Y)=V(10X+1)=10^2V(X)=100$

$\boxed{121}$

확률변수의 관계를 파악하는 눈썰미!

20201015나

15. 이산확률변수 X가 가지는 값은 1, 2, 3, 4이고

이산확률변수 Y가 가지는 값은 1, 4, 9, 16이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=k^2)\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$ 같다

이다. $\mathrm{E}(X)=6$, $\mathrm{V}(X)=1$일 때, $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점]

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$로 계산하는 것뿐 아니라 직접 $Y=aX+b$로 놓을 줄 아셔야 합니다.
(이 문항은 오류가 있지만, 그와 무관하게 챙길 것은 챙겨가야겠죠?)

$Y=X^2$, $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(X^2)\\&=V(X)+E(X)^2\\&=1+36\\&=37\end{aligned}$$

$\boxed{37}$

$E(X)$, $V(X)$ 알 때

$V(X)+E(X)^2$

$E(\underbrace{aX^2+bX+c}_{\text{이차식까지 간단히 구할 수 있다.}})=aE(X^2)+bE(X)+c$

기본적으로 알아야 할 테크닉 4가지

20210618가/20210621나

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1 = 2^0$

$\parallel$ $2^{-\frac{1}{2}}$

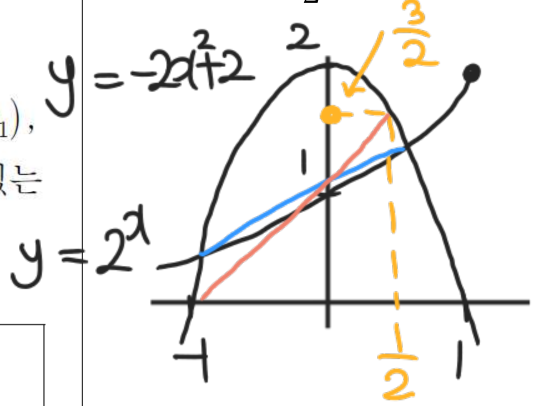
① $x=a$ 대입해서 그래프에서 $f(a)$, $g(a)$의 대소 비교하여 x_1, a의 대소 따지기

② $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$은 두 점 사이의 기울기로 해석

③ $x_1 y_1$이나 $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$은 사각형의 넓이

④ 직접 대입 $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$하여 연산해보기

#팁: ㄱ의 $\frac{1}{2}$ 같은 값들은 그래프에 대입하여 표시해두기



ㄱ $x = \frac{1}{2}$ 대입

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ ∧

$-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{3}{2}$

ㄴ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 1$ ← $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 있는 기울기

기울기

ㄷ $y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2}$

$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$

← 이차함수 모양

$-1 < x_1$, $\frac{1}{2} < x_2$

ㄴ에서 챙길 테크닉

2021 사관(나) 21번

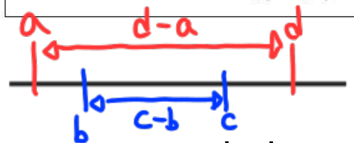
21. 두 곡선 $y=|2^x-4|$, $y=\log_2 x$가 만나는 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 ($x_1<x_2$)라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

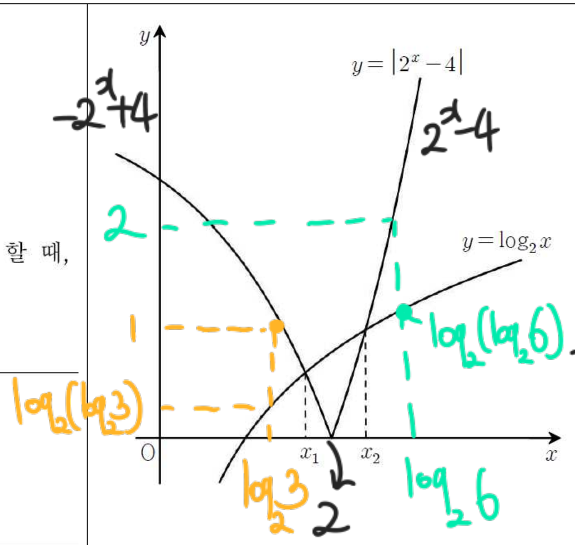
ㄱ. $\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6$

ㄴ. $(x_2-x_1)(2^{x_2}-2^{x_1})<3$

ㄷ. $2^{x_1}+2^{x_2}>8+\log_2(\log_3 6)$



$a<b<c<d$이면 $b-c<d-a$입니다.
수직선을 그려보면 쉽게 이해할 수 있습니다.



$* \ y_1=-2^{x_1}+4$
$y_2=2^{x_2}-4$

ㄱ. $x=\log_2 3$ 대입

$-2^{\log_2 3}+4=1 > \log_2(\log_2 3)$ ↙ 2

$x=\log_2 6$ 대입

$2^{\log_2 6}-4=2 > \log_2(\log_2 6)$ ↗ 2

ㄴ. $\boxed{\text{주의}}$ $2^{x_2}-2^{x_1} \neq y_2-y_1$ 이므로 직사각형 넓이로 해석 No.

$\log_2 3 < x_1 < x_2 < \log_2 6 \Rightarrow x_2-x_1 < \log_2 6-\log_2 3 = 1$

$2^{x_2}-2^{x_1} = y_2+y_1 < 2+1 = 3$

~~ㄷ~~ $\Leftrightarrow 2^{x_1}+2^{x_2}-8 > \log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow y_2-y_1 \quad > \log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{x_2}{x_1} > \log_2(\log_3 6)$

$\Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} > \log_3 6$

$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x_2}{x_1}} > \boxed{\frac{\log_2 6}{\log_2 3}}$

문제 상황에서 로그의 밑이 2

ㄴ이 핵심. 새로운 수를 놓을 줄 아셔야 합니다.

20201021나

21. 두 곡선 $y=2^{-x}$과 $y=|\log_2 x|$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{1}{2} < x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄴ. $\sqrt[3]{2} < x_2 < \sqrt{2}$

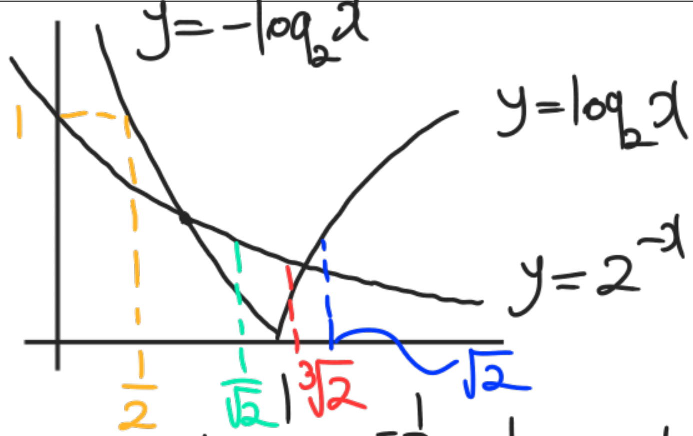
ㄷ. $y_1 - y_2 < \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

수의 대소 관계를 비교할 때, 새로운 적당한 수를 놓는 센스가 필요합니다. 이때,

① 지수의 밑이 같아야 대소 비교가 쉽다는 점

② 보기의 숫자

이 두 가지는 큰 힌트입니다.



ㄱ) $x=\frac{1}{2}$: $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < \left|\log_2 \frac{1}{2}\right| = 1$

$x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$: $2^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} > \left|\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

ㄴ) $x=\sqrt{2}$: $2^{-\sqrt{2}} < \left|\log_2 \sqrt{2}\right| = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$x=\sqrt[3]{2}$: $2^{-\sqrt[3]{2}} > \left|\log_2 \sqrt[3]{2}\right| = \frac{1}{3} = 3^{-1}$

$2^{\sqrt[3]{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 3^1$ 핵심

ㄷ) 역함수

$y_1 = x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt[3]{2} < x_2 \Rightarrow \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} < y_2$

$\rightarrow y_1 - y_2 < \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{2}-2}{6}$

삼차함수의 대칭성과 비율 관계

2021 사관(나) 30번 원점 대칭

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

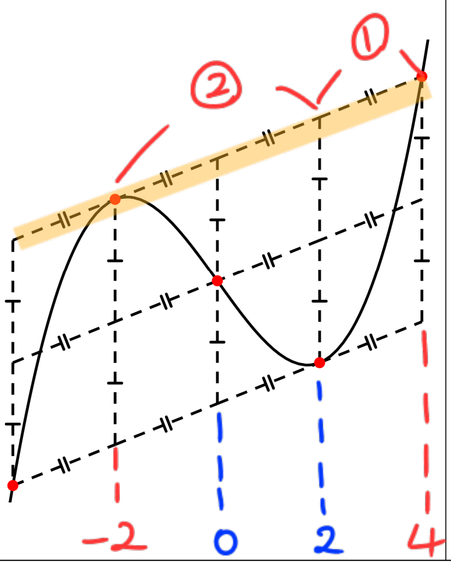
이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

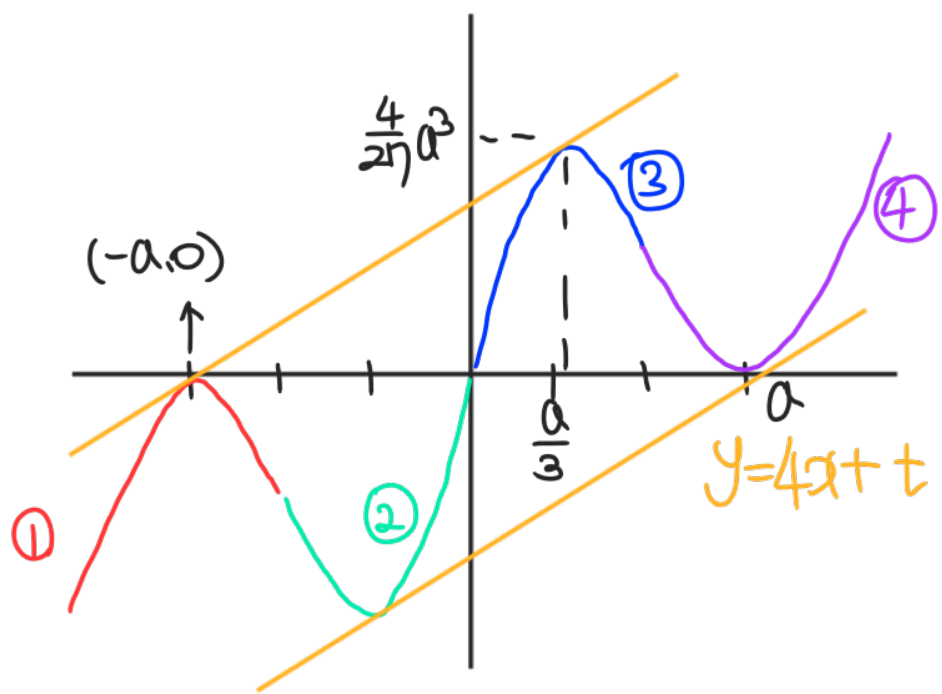
(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

① 삼차함수는 점대칭입니다.

② 접점, 대칭점, 교점 사이의 비율 관계를 알아두면 계산이 아주 편해지는 경우가 있습니다.





① ② 점대칭, ③ ④ 점대칭 → ① ③ 합동

(①+②) (③+④) 점대칭

따라서 (접점 이은 기울기) = (극점 이은 기울기) = 4

$$\frac{\frac{4}{27}a^3}{\frac{a}{3}-(-a)} = \frac{1}{9}a^2 = 4,\quad a^2=36.$$

공통 접선 관찰하기

20210930(가)

30. 다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

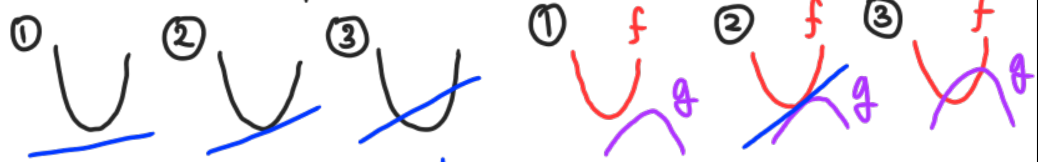
> 모든 실수 x에 대하여 부등식
>
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
>
> 이 성립한다.

$\left|M \times m^3\right| = \dfrac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

#Tip! 곡선 두 개가 나왔을 때, 공통 접선에서 답이 되는 상황이나 집중해서 관찰해야 할 상황이 자주 나옵니다. 특히 교점의 개수를 셀 때!

* 나형 학생들은 공통 접선 상황이 되는 것만 확인하시고, 가형 학생들은 직접 미분해서 풀어보세요

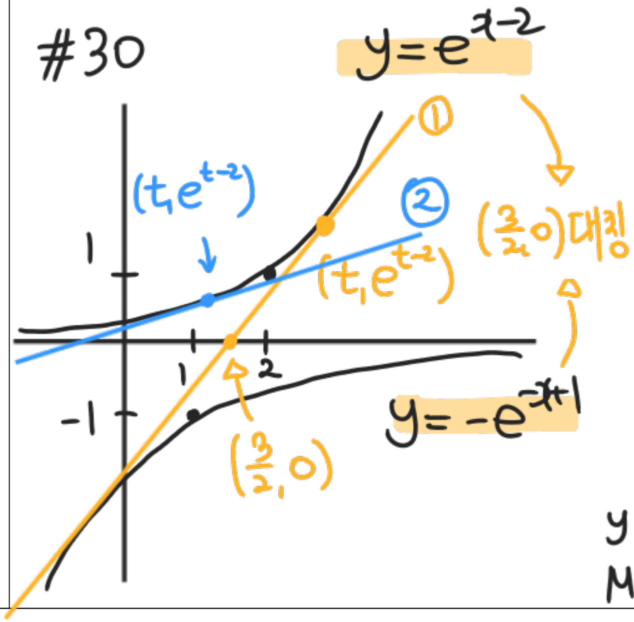
* 교점의 개수   * $f(x)$, $g(x)$의 대소 관계



0개   1개   2개 $f(x)>g(x)$ $f(x)\ge g(x)$ ✕

→ 접선 기준으로 상황이 바뀌는 것을 알 수 있다.

#30



① $m = \overset{\oplus}{a}\overset{\ominus}{b}$

$e^{t-2} = \dfrac{e^{t-2}}{t-\frac{3}{2}}$, $t=\dfrac{5}{2}$

$y = e^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)+e^{\frac{1}{2}}$

$m = -\dfrac{3}{2}e$

② $M = \overset{\oplus}{a}\overset{\oplus}{b}$

$y = e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$M = (1-t)e^{2t-4}$ 의 최댓값

$M = \dfrac{1}{2}e^{-3}$

공통 접선 관찰하기

* 나형은 공통 접선인 것만 확인

2022 예시문항(미적분) 30번

30. 두 양수 a, $b\,(b<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{\ln(x+b)}{x} & (x>0) \end{cases}$$

$-x(x-a)$

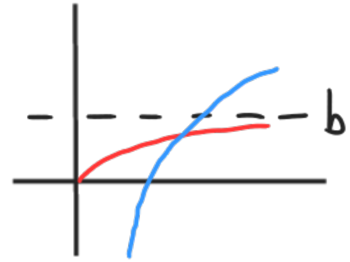
이라 하자. 양수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $g(m)$이라 할 때, 함수 $g(m)$은 다음 조건을 만족시킨다.

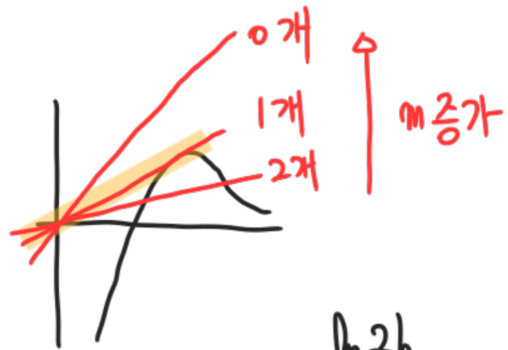
> $\lim\limits_{m\to\alpha-} g(m) - \lim\limits_{m\to\alpha+} g(m) = 1$을 만족시키는 양수 α가 오직 하나 존재하고, 이 α에 대하여 점 $(b,\ f(b))$는 직선 $y=\alpha x$와 곡선 $y=f(x)$의 교점이다.

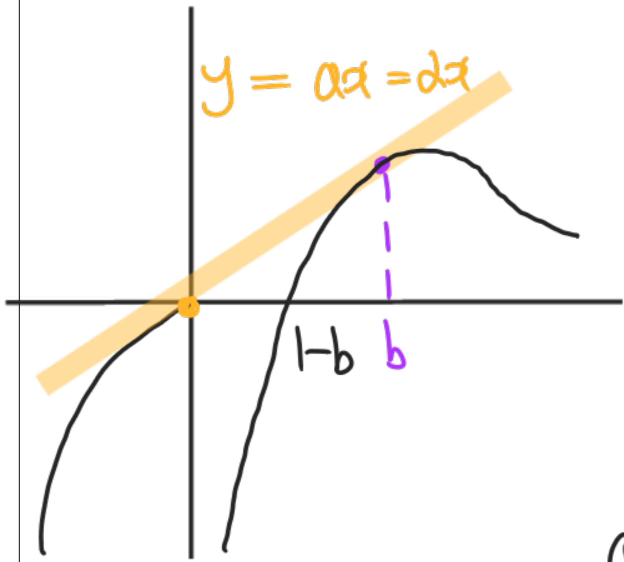
$ab^2=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$이다.) [4점]

$$\left(\frac{\ln(x+b)}{x}\right)' = \frac{\frac{x}{x+b} - \ln(x+b)}{x^2}$$







$\alpha b = \dfrac{\ln 2b}{b}$

$\alpha = \dfrac{\frac{1}{2} - \ln 2b}{b^2} = \dfrac{\ln 2b}{b^2}$

$\ln 2b = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$

$a = \alpha = \frac{1}{4} \times 4e^{-\frac{1}{2}}$

$= e^{-\frac{1}{2}}$

$ab^2 = \frac{1}{4}$

합성함수 돌려 그리기

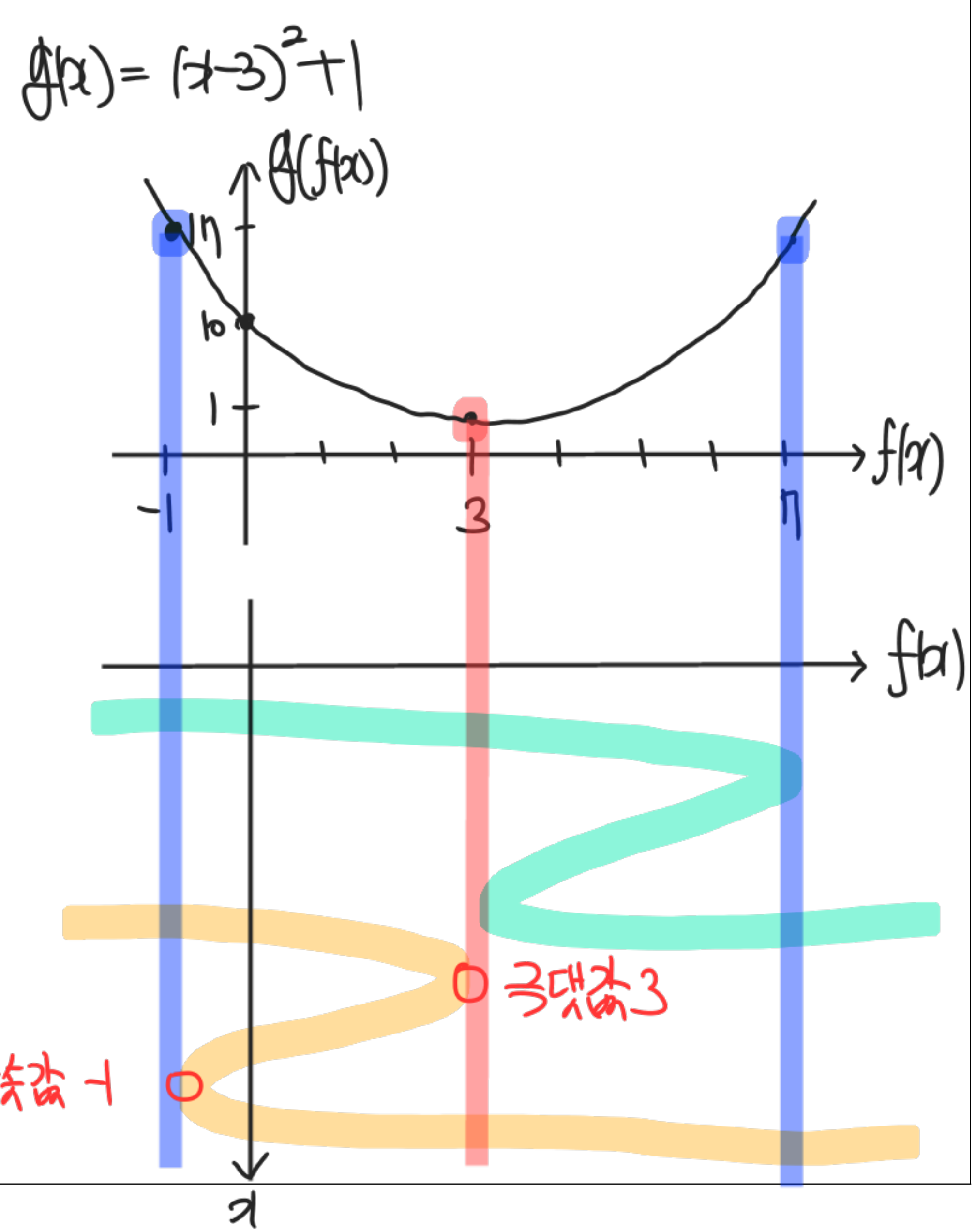
20200321(나)

21. 이차함수 $g(x)=x^2-6x+10$에 대하여 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $(g \circ f)(x)$의 최솟값을 m이라 할 때, 방정식 $g(f(x))=m$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $g(f(x))=17$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

#Tip! $f(g(x))$ 그래프 그릴 때 $g(x)$의 치역$=f(x)$의 정의역이 되도록 그래프를 돌려 그리면 편해요!



합성함수 돌려 그리기

* 나형 학생은 g(x) 그래프 문제에서 줬다 치고 생각해보기

2021 사관(가) 30번

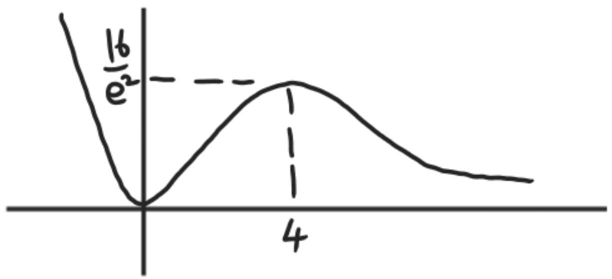
30. 두 함수 $f(x) = x^2 - ax + b\ (a > 0)$, $g(x) = x^2e^{-\frac{x}{2}}$에 대하여 상수 k와 함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

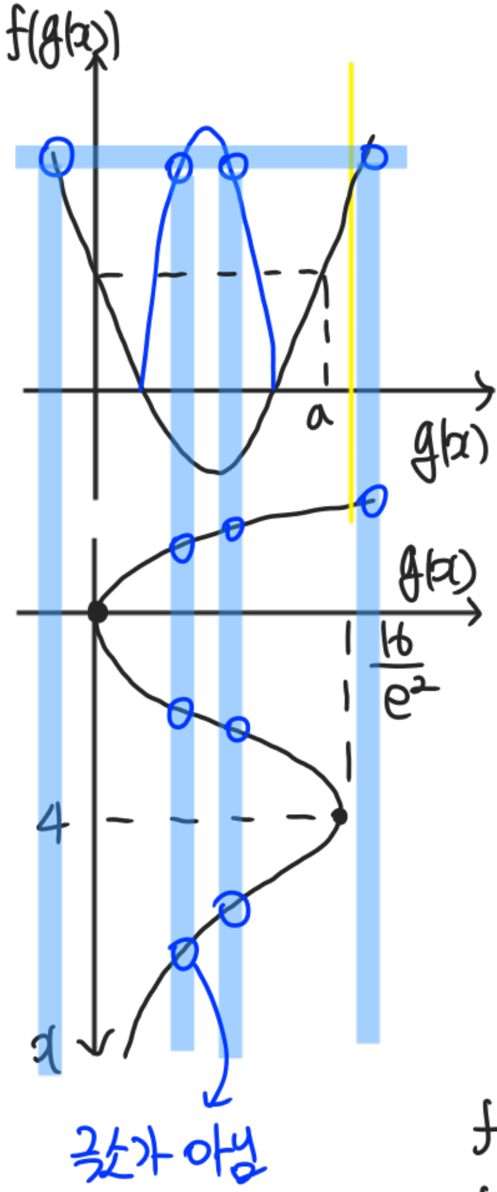
(가) $h(0) < h(4)$ (나) 방정식 $\lvert h(x) \rvert = k$의 서로 다른 실근의 개수는 7이고, 그중 가장 큰 실근을 α라 할 때 함수 $h(x)$는 $x = \alpha$에서 극소이다.

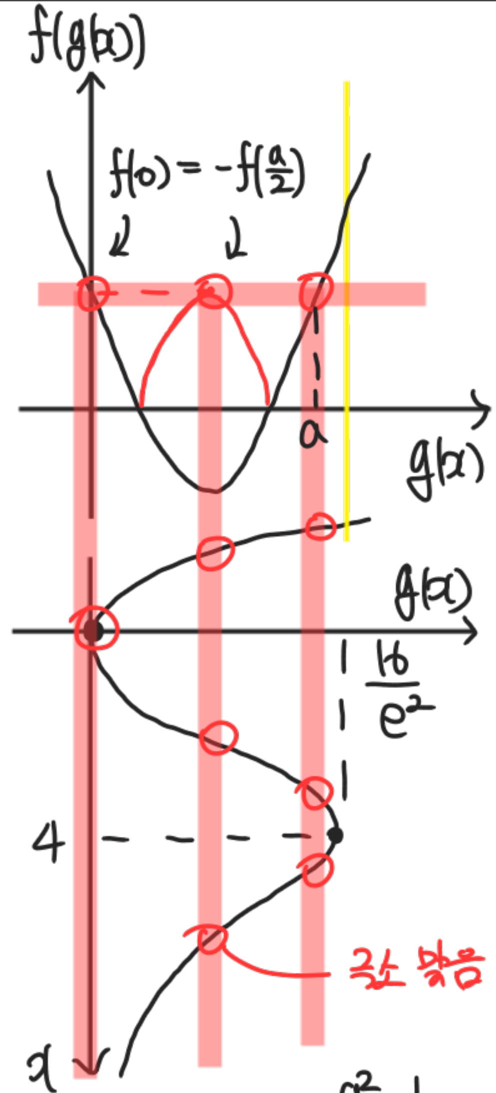
$f(1) = -\frac{7}{32}$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a + 16b$의 값을 구하시오.

(단, $\frac{5}{2} < e < 3$이고, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$이다.) [4점]

$$g'(x) = 2xe^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}x^2e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}(4-x)$$







$f(0) = -f(\frac{a}{2}) \Rightarrow b = \frac{a^2}{4} - b.$

$f(1) = -\frac{7}{32} = 1 - a + b$

$a = \frac{3}{2}$, $\cancel{\frac{1}{2}}$, $b = \frac{9}{32}$

*(가) $\Rightarrow a < \frac{16}{e^2}$
$= 2.xx$

절댓값과 미분가능성

20210930(나)

30. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

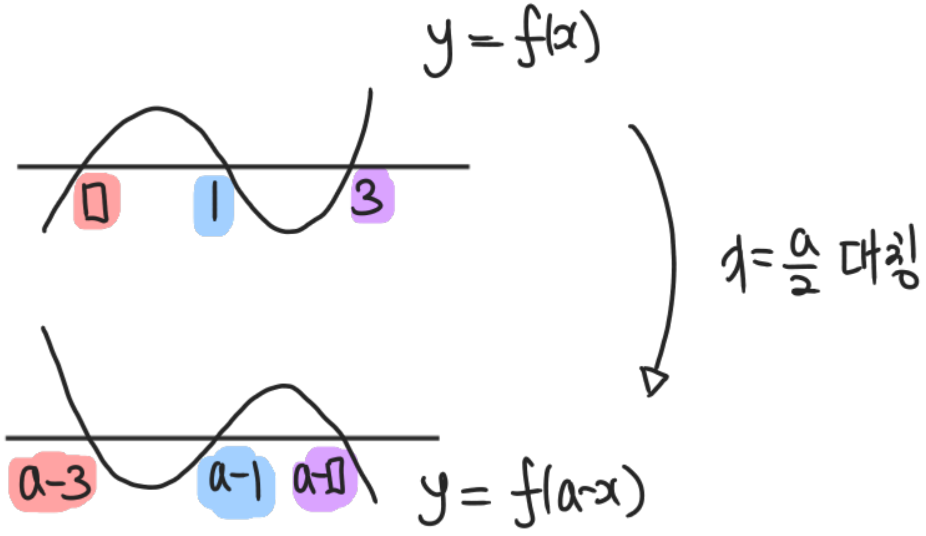
> (가) $f(1) = f(3) = 0$
>
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x) = 0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

#Tip! $f(a) = 0$이고 $y = |f(x)|$가 $x = a$에서 미분가능

$\Rightarrow$ 다항식 $f(x)$는 $(x-a)^2$을 인수로 갖는다.

$\Rightarrow$ $f'(a) = 0$



$a-3 = □$, $a-1 = 1$, $a-□ = 3$

$a = 2$, $□ = -1$,

$f(x) = k(x+1)(x-1)(x-3)$

$$\frac{g(4a)}{f(0)f(4a)} = \frac{(9\cdot7\cdot5k)(9\cdot7\cdot5k)}{(3k)(9\cdot7\cdot5k)} = 105$$

정적분의 부등식

2022 예시문항(공통) 12번

12. $0 < a < b$인 모든 실수 a, b에 대하여

$f(x)$

$$\int_a^b (x^3 - 3x + k)\,dx > 0$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은? [4점]

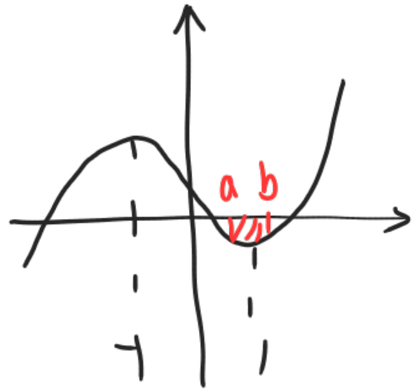
#Tip! 적분가능한 $f(x)$에 대하여 $[a,\ b]$에서

① $f(x) \geq 0$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

② $f(x) \geq g(x)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

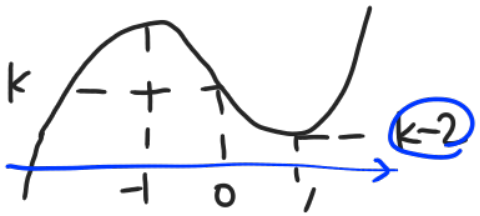
③ $m \leq f(x) \leq M$ 이면 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$



$\int_a^b f(x)\,dx < 0$

$x > 0$ 에서 $f(x) \geq 0$



$k-2 \geq 0$

$\boxed{k \geq 2}$

정적분의 부등식

* 나형 학생들은 그냥 로그 함수로 생각.

20210918(가)

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ \{\ln(1+x^4)\}^{10} & (x>0) \end{cases}$$

에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)\,dt$$

t=½ 대칭

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x \le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=0$이다.

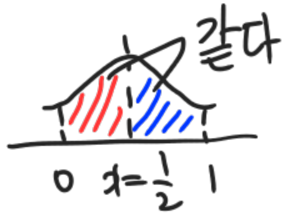
ㄴ. $g(1)=2g\left(\frac{1}{2}\right)$

ㄷ. $g(a) \ge 1$인 실수 a가 존재한다.

㉠ $\int_0^{\overset{\le 0}{x}} \underbrace{f(t)}_{=0} f(1-t)\,dt = 0$

㉡ $y=f(x)f(1-x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$에 대칭이므로

$$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)\,dt = 2g\left(\tfrac{1}{2}\right)$$



~~㉢~~. $x \le 0$ 또는 $x \ge 1$ 이면 $g(x)=0$

[0, 1]에서 $(\ln(1+x^4))^{10} \le (\ln 2)^{10}$ 이므로

$f(x)f(1-x) \le (\ln 2)^{20}$ 이다.

[0.1]에서 $g(x) \le (\ln 2)^{20} \times (1-0) < (\ln e)^{20} = 1$