수학 1

수열을 다루는 기본적 태도

이번 칼럼에서는 수열 문제를 분석하는 방법에 대해 알아보겠습니다. 교육과정이 개정된 이후로 수열 문제는 종종 가장 어려운 문제 중 하나로 모의고사에 등장하곤 합니다. 우리가 수열 문제를 어렵게 느끼는 이유는, 문제에 정해진 형식이 없기 때문입니다. 실제로 수열은 말 그대로 '수의 나열' 일 뿐, 어떤 규칙성을 가져야 하는 것은 아닙니다. 또한 규칙성을 가진 수열이라도 그 규칙성을 굉장히 다양한 방법으로 정의할 수 있기 때문에 상황을 파악하는 것이 어렵습니다. 그러나 이렇게 형식이 정해지지 않은 수열 문제라도, 문제 상황을 보았을 때 반드시 해보아야 할 몇 가지 행동들이 있습니다.

1. 대입과 계산

수열 문제를 보았을 때 가장 먼저 해볼 것은 대입과 계산입니다. 수열의 값을 계산하는 것을 좋지 못하게 여기거나 두려워하는 분들이 있는데, 사실은 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 등 작은 수에 대한 수열의 값부터 직접 계산해보는 것이 좋습니다. 우리가 이러한 작업을 하는 이유는 크게 두 가지입니다.

① 계산해야 할 값의 범위가 작은 경우에는 대입을 통해 문제 해결이 가능하다.
② 일반항이나 규칙성을 찾을 때 단서로 활용할 수 있다.

예를 들어, 몇 개의 초항과 수열의 점화식이 주어진 상황에서 $a_6, a_7, \cdots$ 등 직접 계산할 수 있을 만한 값을 물어본다면 머리 아프게 규칙성을 찾을 필요가 없습니다. 식에 초항을 대입하고 값을 계산하여 문제를 풀면 되기 때문입니다. 주어진 점화식이 수의 범위를 쉽게 키울 수 있게 주어진다면 (예를 들어 $a_{2n} = 2a_n + 1$등) 두 자릿수까지도 직접 계산하여 구해볼 만합니다. 수열의 규칙성이 식으로 주어지지 않은 상황이더라도, n의 값이 작다면 우리가 직접 값을 구하는 것이 어렵지 않을 것이므로 직접 계산해보면 됩니다.

그러나 우리가 직접 계산하여 구하기 힘든 값을 물어보더라도 작은 수의 값을 계산하는 작업은 반드시 필요합니다. 주어진 수열의 규칙성과 일반항이 바로 보인다면 필요 없을지도 모르겠으나, 이러한 상황이 벌어질 확률은 굉장히 희박합니다. 따라서 작은 숫자부터 대입해보면서 수열의 값을 써보고, 이를 통해 규칙성이나 일반항을 예측하는 과정이 필요합니다. 규칙성을 발견한다면 그 규칙성이 맞는지를 검증하는 것은 비교적 수월하기 때문입니다. 또한 작은 숫자에 대한 값을 계산하는 과정에서 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 간의 규칙성 뿐만 아니라 a_n 자체에 숨어있는 규칙성 역시 발견할 수 있습니다. 예를 들자면, a_n이 특정 조건을 만족하는 경우의 수로 주어진 경우, a_1, a_2, a_3 등 작은 숫자의 경우의 수를 구하는 과정에서 임의의 n에 대한 경우의 수를 구하는 방법을 발견할 수도 있습니다. 이에 관한 내용은 아래에서 더 자세히 알아보도록 합시다.

2. 규칙성과 일반항

위에서 말했듯이 직접 계산할만한 수를 묻는다면 문제를 쉽게 해결할 수 있겠지만, 그렇지 않은 경우라면 일반항을 직접 구해야 합니다. 즉 a_n을 n에 관하여 나타낼 수 있도록 노력해야 합니다. 교과서에도 나온 몇몇 특수한 경우는 일반항을 쉽게 구할 수 있습니다.

① $a_{n+1} = a_n + g(n) \Rightarrow a_n = a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g(i)$

② $a_{n+1} = a_n \times g(n) \Rightarrow a_n = a_1 \times \prod_{i=1}^{n-1} g(i)$

위와 같이 합과 곱에 대한 점화식이 주어진 경우 일반항을 쉽게 구할 수 있습니다. 이때 $g(i)$들을 정리하기 위해서는 주로 합이나 곱에서 소거되는 꼴이 존재하는지를 관찰하게 됩니다.

그러나 점화식이 위보다 더 복잡하게 주어진 경우, 또는 점화식이 주어지지 않고 수열이 정의된 경우는 어떻게 접근해야 할까요? 이 경우 위에서 했던 것처럼 작은 수를 대입해보았던 것을 바탕으로 수열의 규칙성을 추측해보아야 합니다. 예를 들어, 수열의 값을 계산했더니 1, 2, 4, 8, ... 과 같은 값이 나온다면 일반항이 2^{n-1}임을 쉽게 추측해볼 수 있습니다. 주기성에 초점을 맞추는 것도 좋습니다. 특정 주기를 기준으로 일정한 규칙이 반복되는 수열(1, 2, 3, 1, 2, 3, ... 또는 1, 2, 3, 2, 4, 6, 3, 6, 9, ... 등)이라면 일반항을 쉽게 추측할 수 있습니다. 어떤 경우는 주기에도 주기성이 있을 수 있습니다. 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ... 와 같은 수열이 대표적입니다. 이렇게 일반항을 추측하는 것이 중요한 이유는 주어진 규칙만을 갖고 바로 일반항을 구해내는 것보다, 일반항의 꼴을 추측한 후 수열이 이 일반항을 만족함을 보이는 것이 훨씬 쉽기 때문입니다.

일반항을 직접적으로 추측하지 않더라도 작은 수를 대입해보는 것은 일반항을 구하는 데 도움이 됩니다. 작은 수에서의 값을 구할 때 사용했던 방법을 확장시켜 임의의 n에 대한 값을 방법을 알아낼 수 있기 때문입니다. 예를 들어 a_1을 구할 때 한 가지, a_2를 구할 때 두 가지, a_3를 구할 때 세 가지로 케이스를 나누어서 값을 구했다면, 직관적으로 a_n은 n가지로 케이스를 나누어 값을 구하면 편리할 것이라 추측할 수 있습니다.

지금까지 수열 문제를 봤을 때 가져야 할 몇 가지 태도에 대해 알아보았습니다. 모든 수열 문제가 위의 방법만으로 풀린다고 할 수는 없으나, 위에서 설명한 내용은 많은 수열 문제에서 문제에 접근하는 좋은 출발점이 됩니다. 앞으로 수열 문제를 마주했을 때 위에서 설명한 기본적인 태도를 기억하고 문제 해결의 시작점으로 삼는다면 문제를 더 쉽게 해결할 수 있을 것입니다.