[2013 수능대비 오답노트 05차]

내접원 : 어디다가 선을 그어야 할지 **한줄행렬 : 한줄행렬 분배로 정리하기** **넓이최대 : 삼각형 넓이를 식으로 세우기, 미분 언제 영되지** **조건부 : 0/0+0 유형의 조건부 정리해두기**

[2012.07 메가]

7. 어느 공장에 있는 공기 청정기는 공장 내부의 미세 먼지 농도가 $500\,\mu\text{g/m}^3$ $(1\,\mu\text{g}=10^{-6}\text{g})$가 되면 작동하기 시작한다. 이 공기 청정기가 작동하기 시작하여 t분이 지났을 때의 공장 내부의 미세 먼지 농도를 $P(t)\,\mu\text{g/m}^3$라 하면 다음 등식이 성립한다.

$$P(t)=100+k\log\frac{t+10}{t+1} \quad (\text{단, } k\text{는 양의 상수})$$

이 공기 청정기가 작동하기 시작하여 50분이 지났을 때의 공장 내부의 미세 먼지 농도는? (단, $\log 6=0.778$, $\log 5.1=0.708$로 계산한다.) [3점]

① $118\,\mu\text{g/m}^3$ ② $128\,\mu\text{g/m}^3$ ③ $138\,\mu\text{g/m}^3$ ④ $148\,\mu\text{g/m}^3$ ⑤ $158\,\mu\text{g/m}^3$

7. **로그함수** 답②

$t=0$일 때 미세 먼지 농도가 $500\mu\text{g/m}^3$이므로

$500=100+k\log 10=100+k$

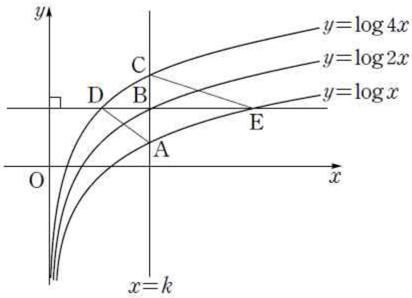
$\therefore k=400$

$\therefore P(t)=100+400\cdot\log\dfrac{t+10}{t+1}$

따라서 공기 청정기가 작동하기 시작하여 50분이 지났을 때의 공장 내부의 미세 먼지 농도는

$$\begin{aligned}P(50)&=100+400\cdot\log\frac{50+10}{50+1}\\&=100+400(\log 60-\log 51)\\&=100+400(\log 6-\log 5.1)\\&=100+400(0.778-0.708)\\&=100+400\cdot 0.07\\&=128(\mu\text{g/m}^3)\end{aligned}$$

8. 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $x=k$ $(k>1)$가 세 곡선 $y=\log x$, $y=\log 2x$, $y=\log 4x$와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 두 곡선 $y=\log 4x$, $y=\log x$와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. 직선 AD의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 직선 CE의 기울기는? [3점]



① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{\log 2}$

④ $-\frac{1}{\log 4}$ ⑤ $-\frac{1}{\log 8}$

8. 로그함수 **답 ①**

세 점 A, B, C의 좌표는

A$(k,\ \log k)$, B$(k,\ \log 2k)$, C$(k,\ \log 4k)$

따라서 $\log 2k=\log 4x$에서 $x=\frac{k}{2}$,

$\log 2k=\log x$에서 $x=2k$이므로

두 점 D, E의 좌표는

D$\left(\frac{k}{2},\ \log 2k\right)$, E$\left(2k,\ \log 2k\right)$

직선 AD의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$\frac{\log k-\log 2k}{k-\frac{k}{2}}=\frac{\log\frac{k}{2k}}{\frac{k}{2}}=-\frac{2\log 2}{k}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore k=4\log 2$

따라서 직선 CE의 기울기는

$$\frac{\log 2k-\log 4k}{2k-k}=\frac{\log\frac{2k}{4k}}{k}=-\frac{\log 2}{k}=-\frac{\log 2}{4\log 2}=-\frac{1}{4}$$

9. 좌표평면에서 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$의 그래프 위의 임의의 점을 P라 하자. 점 A$(4,\ -1)$에서 점 P까지의 거리의 최솟값은? [3점]

① 2　　② $2\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ 4　　⑤ $2\sqrt{5}$

9. 도함수의 활용 　답 ②

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$으로 놓으면 점 P에서의 접선이 두 점 A, P를 지나는 직선과 수직일 때 선분 AP의 길이가 구하는 거리의 최솟값이다.

$y=\frac{1}{4}x^2$에서 $y'=\frac{1}{2}x$이므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}t$이다.

또, 직선 AP의 기울기는 $\dfrac{-1-\frac{1}{4}t^2}{4-t}$이므로

$$\frac{1}{2}t\times\frac{-1-\frac{1}{4}t^2}{4-t}=-1$$

$$\frac{1}{4}t^3+t=8-2t$$

$$t^3+12t-32=0$$

$$(t-2)(t^2+2t+16)=0$$

$\therefore t=2$

즉, $\mathrm{P}(2,\ 1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

다른풀이

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{4}t^2\right)$으로 놓으면

$$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(4-t)^2+\left(-1-\frac{1}{4}t^2\right)^2}$$

$$f(t)=(4-t)^2+\left(-1-\frac{1}{4}t^2\right)^2$$

$$=\frac{1}{16}t^4+\frac{3}{2}t^2-8t+17$$

로 놓으면

$$f'(t)=\frac{1}{4}t^3+3t-8$$

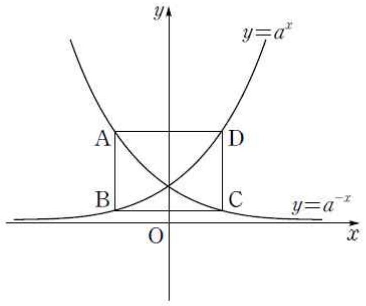
$$=\frac{1}{4}(t-2)(t^2+2t+16)$$

t	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소(최소)	↗

따라서 $t=2$일 때 $f(t)$는 극소이자 최소가 되므로 구하는 거리의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{f(2)}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

11. 좌표평면에서 그림과 같이 두 지수함수 $y=a^x$, $y=a^{-x}$ $(a>1)$의 그래프 위에 네 점 A, B, C, D를 잡아 직사각형 ABCD를 만든다. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:3$이고, 직사각형 ABCD의 둘레의 길이가 20일 때, a^3의 값은? (단, 직사각형의 각 변은 x축 또는 y축과 평행하다.) [3점]



① $1+\sqrt{3}$ ② $1+\sqrt{5}$ ③ $2+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{5}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

11. 지수함수 답 ④

직사각형 ABCD의 가로와 세로의 길이의 비가 $3:2$이고, 직사각형의 둘레의 길이가 20이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$이다.

따라서 $\mathrm{C}(3,\ a^{-3})$, $\mathrm{D}(3,\ a^{3})$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=a^3-a^{-3}=4$

위 식의 양변에 a^3을 곱하면

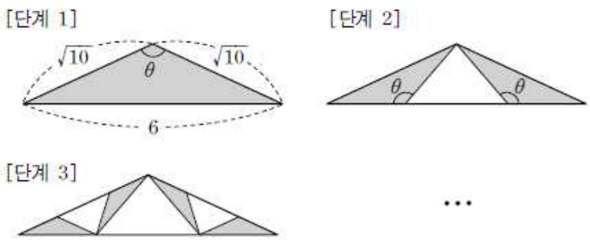
$(a^3)^2-4a^3-1=0$

$\therefore a^3=2+\sqrt{5}$ $(\because a>1)$

15. 다음과 같은 단계로 도형을 만들어 나간다.

> [단계 1] 밑변의 길이가 6, 다른 두 변의 길이가 모두 $\sqrt{10}$인 이등변삼각형을 그리고, 이 삼각형의 넓이를 S_1이라 하자. 이때, 꼭지각의 크기를 θ라 하자.
>
> [단계 2] [단계 1]에서 그려진 이등변삼각형에서 밑변이 아닌 변들을 밑변으로 하고 꼭지각의 크기가 θ인 이등변삼각형을 각각 그린 후 [단계 2]에서 새로 그려진 2개의 이등변삼각형의 넓이의 합을 S_2라 하자.
>
> [단계 3] [단계 2]에서 새로 그려진 이등변삼각형에서 밑변이 아닌 변들을 밑변으로 하고 꼭지각의 크기가 θ인 이등변삼각형을 각각 그린 후 [단계 3]에서 새로 그려진 4개의 이등변삼각형의 넓이의 합을 S_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 [단계 n]에서 새로 그려진 2^{n-1}개의 이등변삼각형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{25}{4}$　② $\frac{13}{2}$　③ $\frac{27}{4}$

④ 7　⑤ $\frac{29}{4}$

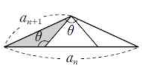
15. 무한등비급수 Ⓜ　답 ③

[단계 1]에서 그려진 이등변삼각형의 높이는

$\sqrt{(\sqrt{10})^2-3^2}=1$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1=3$

[단계 n]에서 그려진 이등변삼각형의 밑변의 길이를 a_n이라 하면 [단계 2]부터 그려지는 이등변삼각형은 [단계 1]에서 그려진 이등변삼각형과 닮음이므로



$a_n : a_{n+1}=6 : \sqrt{10}$

따라서 넓이의 비는

$6^2 : (\sqrt{10})^2=36 : 10=18 : 5$

이고, 삼각형의 개수가 2배씩 증가하므로 수열 $\{S_n\}$의 공비 r는

$r=\frac{5}{18}\cdot 2=\frac{5}{9}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=S_1+S_2+S_3+\cdots$

$=\frac{3}{1-\frac{5}{9}}=\frac{27}{4}$

16. 최고차항의 계수가 $a\,(a>0)$인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
> (나) $x=2$에서 극솟값을 갖고, 극댓값과 극솟값의 합은 0이다.

방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수가 11일 때, a의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{3}{4}$

④ 1　　⑤ $\frac{5}{4}$

16. 도함수의 활용 Ⓜ　　답 ③

조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$는 그래프가 y축에 대하여 대칭인 우함수이므로 $f(x)=ax^4+bx^2+c$로 놓을 수 있다.

$\therefore f'(x)=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)$

$x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=4(8a+b)=0$

$\therefore b=-8a$ ...... ㉠

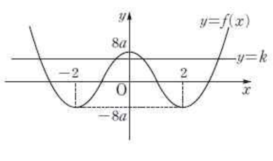
이때, 극댓값은 $f(0)=c$이고, 극댓값과 극솟값의 합이 0이므로

$f(2)+c=0$

즉, $16a+4b+c+c=0$

$16a-32a+2c=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore c=8a$



방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 4개의 실근을 가지려면 그림과 같이 $-8a<k<8a$이어야 한다.

따라서 $-8a<k<8a$를 만족시키는 정수의 개수가 11이어야 하므로

$5<8a\le 6$

$\therefore \frac{5}{8}<a\le\frac{3}{4}$

따라서 a의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이다.

20. 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{5}$
(나) $0<x<1$에서 $f'(x)>0$
(다) $f(0)=0,\ f(1)=2$

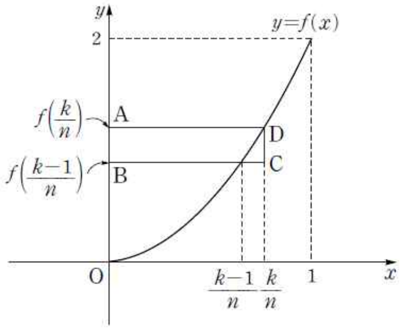
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$의 값은? [4점]

① $\frac{4}{5}$ ② 1 ③ $\frac{6}{5}$

④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{8}{5}$

20. 정적분 Ⓜ 답 ⑤

주어진 조건을 만족하도록 $0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음 그림과 같다.



그림에서 사각형 ABCD의 넓이는

$\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

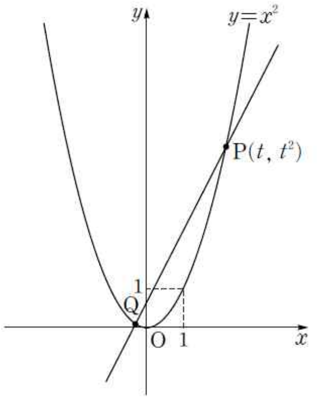
$=\int_0^2 f^{-1}(y)dy$

$=2-\int_0^1 f(x)dx$

$=2-\frac{2}{5}$ ($\because$ (가))

$=\frac{8}{5}$

21. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>1)$을 지나고 기울기가 2인 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\lim_{t\to1+0}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^2-1}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$

21. **함수의 극한** **답 ④**

점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$을 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y-t^2=2(x-t)$

즉, $y=2x-2t+t^2$

곡선 $y=x^2$ 위의 점 Q도 이 직선 위에 있으므로 점 Q의 좌표를 구하기 위해 연립하면

$2x-2t+t^2=x^2$

$x^2-2x-t^2+2t=0$

$(x-t)(x+t-2)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=-t+2$

따라서 $\mathrm{Q}(-t+2,\ (t-2)^2)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(2t-2)^2+(4t-4)^2$$
$$=20t^2-40t+20$$
$$=20(t-1)^2$$

$\therefore \overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{5}(t-1)$ $(\because t>1)$

$$\therefore \lim_{t\to1+0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{t^2-1}=\lim_{t\to1+0}\frac{2\sqrt{5}(t-1)}{t^2-1}$$
$$=\lim_{t\to1+0}\frac{2\sqrt{5}}{t+1}$$
$$=\sqrt{5}$$

26. $5^x=4$, $40^y=16$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여

$$\frac{2x-y}{xy}=\frac{n}{m}$$

이라 할 때, m^2+n^2의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.) [4점]

26. 지수법칙 **답** 13

$$\frac{2x-y}{xy}=\frac{2}{y}-\frac{1}{x}$$

$40^y=16$에서 $40=16^{\frac{1}{y}}$

$40=4^{\frac{2}{y}}$ ······ ㉠

$5^x=4$에서 $5=4^{\frac{1}{x}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 변변 나누면

$$\frac{40}{5}=4^{\frac{2}{y}-\frac{1}{x}}$$

$$2^3=4^{\frac{2}{y}-\frac{1}{x}}$$

$$4^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{2}{y}-\frac{1}{x}}$$

$$\therefore \frac{2}{y}-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore m^2+n^2=4+9=13$$

27. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3+2x^2-x$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(2+\frac{2}{n}\right)-f\left(2-\frac{2}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오. [4점]

27. 미분계수 Ⓜ

답 140

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3+2x^2-x$에서

$f'(x)=2x^3+3x^2+4x-1$

$\frac{2}{n}=t$로 놓으면

$n\to\infty$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(2+\frac{2}{n}\right)-f\left(2-\frac{2}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{t}\{f(2+t)-f(2-t)\}$$

$$=\lim_{t\to 0} 2\cdot\frac{f(2+t)-f(2)+f(2)-f(2-t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0} 2\left\{\frac{f(2+t)-f(2)}{t}+\frac{f(2-t)-f(2)}{-t}\right\}$$

$$=2\cdot 2f'(2)=4f'(2)$$

$$=4\times 35=140$$

28. 자연수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 등식

$$f(x^2)=f(10x)$$

를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수를 구하시오. [4점]

28. 로그 **답** 28

$\log 10x=\log x+1$이므로

$f(10x)=f(x)+1$

$\therefore f(x^2)=f(10x)=f(x)+1$

따라서 주어진 등식을 만족시키는 자연수 x는 $\log x^2$의 지표가 $\log x$의 지표보다 1이 큰 수이다.

즉, 제곱하였을 때 자릿수가 1 증가하는 수이다.

따라서 구하는 자연수 x는

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, …, 31

로 $31-4+1=28$(개)이다.

29. 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2f(x)=xf'(x)-4$ (나) $f(1)=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

29. 도함수 **답** 73

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$으로 놓으면

$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$

이므로 조건 (가)에서

$2a_n=na_n$

$\therefore n=2$

따라서 $f(x)=ax^2+bx+c$로 놓고 조건 (가)에 대입하면

$2ax^2+2bx+2c=2ax^2+bx-4$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$b=0,\ c=-2$

또, 조건 (나)에 의하여

$f(1)=a+b+c=1$

여기서 $b=0,\ c=-2$이므로 $a=3$

$\therefore f(x)=3x^2-2$

$\therefore f(5)=3\times25-2=73$

[2012.07 대성]

4. 2 이상의 자연수 n과 실수 a에 대하여 방정식 $x^n=a$의 실근의 개수를 $N(n,\ a)$라 하자. $N(3,\ 4)+N(4,\ 3)$의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

4. 방정식 $x^3=4$는 1개의 실근 $\sqrt[3]{4}$를 가지므로

$N(3,\ 4)=1$

방정식 $x^4=3$은 2개의 실근 $\pm\sqrt[4]{3}$을 가지므로

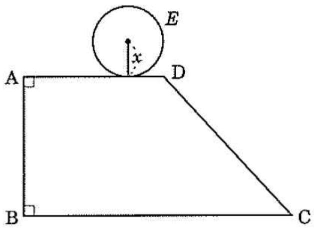
$N(4,\ 3)=2$

$\therefore\ N(3,\ 4)+N(4,\ 3)=1+2=3$

답 ④

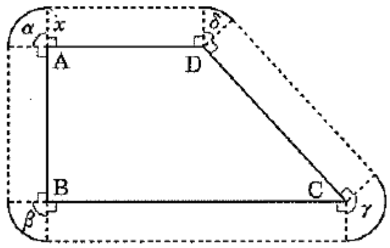
12. 둘레의 길이가 30인 사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 반지름의 길이가 x인 원 E를 사각형 ABCD의 바깥쪽에서 각 변에 외접시키면서 사각형 ABCD의 둘레를 한 바퀴 돌린다. 원 E의 중심이 움직인 거리를 $f(x)$라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$의 값은?

[3점]



① π　　② 2π　　③ 3π
④ $\pi+30$　　⑤ $2\pi+30$

12. 원의 중심이 그리는 도형은 아래 그림의 바깥선이 그리는 도형과 같다.



이때 이 도형의 둘레의 길이는 사각형 ABCD의 네 변의 길이 l_1과 부채꼴 4개의 호의 길이 l_2를 더하면 된다.

i) 사각형 ABCD의 네 변의 길이의 합은 30이므로

$l_1=30$

ii) 부채꼴 4개의 중심각의 크기를 각각 α, β, γ, δ(rad)라 하고, 부채꼴 4개의 호의 길이의 합을 l_2라 하면

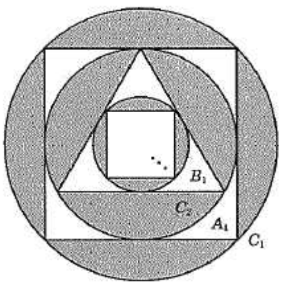
$l_2=\alpha x+\beta x+\gamma x+\delta x=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x$
$=2\pi x$

i), ii)에서 $f(x)=2\pi x+30$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\pi x+30}{x}=2\pi$

답 ②

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 원 C_1에 내접하는 정사각형을 A_1이라 하고, 원 C_1에서 정사각형 A_1을 제외한 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
정사각형 A_1에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2에 내접하는 정삼각형을 B_1이라 할 때, 원 C_2에서 정삼각형 B_1을 제외한 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.
정삼각형 B_1에 내접하는 원을 C_3, 원 C_3에 내접하는 정사각형을 A_2라 할 때, 원 C_3에서 정사각형 A_2를 제외한 어두운 부분의 넓이를 S_3이라 하자.
정사각형 A_2에 내접하는 원을 C_4, 원 C_4에 내접하는 정삼각형을 B_2라 할 때, 원 C_4에서 정삼각형 B_2를 제외한 어두운 부분의 넓이를 S_4라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 얻은 n번째 도형의 넓이 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{8}{7}(a\pi - b - c\sqrt{3})$일 때, 자연수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은? **[4점]**



① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

14 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자.

$r_1=2\sqrt{2}$, $r_2=2$, $r_3=1$, $r_4=\frac{1}{\sqrt{2}}$, …이므로

$$r_{n+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}r_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

이 성립한다.

정사각형 A_1의 한 변의 길이는 $2r_2=2\cdot 2=4$이므로

$$S_1=r_1^2\pi-(A_1\text{의 넓이})=8\pi-4^2=8(\pi-2)$$

정삼각형 B_1의 한 변의 길이는

$\sqrt{3}\,r_2=\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$이므로

$$S_2=r_2^2\pi-(B_1\text{의 넓이})$$
$$=4\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2=4\pi-3\sqrt{3}$$

정사각형 A_2의 한 변의 길이는 $2r_4=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

이므로

$$S_3=r_3^2\pi-(A_2\text{의 넓이})=\pi-(\sqrt{2})^2=\pi-2$$

정삼각형 B_2의 한 변의 길이는

$\sqrt{3}\,r_4=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$이므로

$$S_4=r_4^2\pi-(B_2\text{의 넓이})=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

⋮

$$\therefore\ S_{n+2}=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 S_n=\frac{1}{8}S_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}$$
$$=\frac{8(\pi-2)}{1-\frac{1}{8}}+\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{1-\frac{1}{8}}$$
$$=\frac{64}{7}(\pi-2)+\frac{8}{7}(4\pi-3\sqrt{3})$$
$$=\frac{8}{7}(12\pi-16-3\sqrt{3})$$

$\therefore\ a=12,\ b=16,\ c=3$

$\therefore\ a+b+c=31$

답 ④

15. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B가

$$(A+B)^2=O,\ (A-B)^2=O$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, n은 자연수이다.) [4점]

〈보기〉

ㄱ. $A^2B=BA^2$

ㄴ. $A^{2n}B=BA^{2n}$

ㄷ. $A^{2n+1}B=BA^{2n+1}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. $(A+B)^2=A^2+B^2+AB+BA=O$이고, $(A-B)^2=A^2+B^2-AB-BA=O$이므로 두 식으로부터

$AB+BA=O \quad \therefore AB=-BA$

ㄱ. $A^2B=AAB=A(AB)=A(-BA)$
$=-ABA=-(AB)A$
$=-(-BA)A=BA^2$ (참)

ㄴ. $n=1$인 경우 ㄱ에 의하여 참이다.

자연수 k에 대하여 $A^{2k}B=BA^{2k}$이 성립한다고 가정하면

$A^{2(k+1)}B=A^{2k+2}B=A^2(A^{2k}B)$
$=A^2(BA^{2k})=(A^2B)A^{2k}$
$=(BA^2)A^{2k}=BA^{2(k+1)}$

이므로 주어진 식은 자연수 $k+1$에 대하여 성립한다.

즉, 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다. (참)

ㄷ. $A^{2n+1}B=AA^{2n}B=A(A^{2n}B)$
$=A(BA^{2n})=(AB)A^{2n}$
$=-BAA^{2n}=-BA^{2n+1}$

($\because$ $AB=-BA$, ㄴ에 의하여) (거짓)

답 ③

16. 어느 옥수수 농장의 $1\,\text{m}^2$의 면적에서 수확하는 옥수수의 무게는 평균이 m kg이고 표준편차가 1.5 kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장의 $36\,\text{m}^2$의 면적에서 수확한 옥수수의 무게는 1260 kg이었다. 이 농장의 $1\,\text{m}^2$의 면적에서 수확할 수 있는 옥수수의 무게의 평균 m을 신뢰도 95 %로 추정할 때, 신뢰구간은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\text{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.) **[4점]**

① [33.06, 37.94]　② [34.15, 35.85]

③ [34.49, 35.51]　④ [34.51, 35.49]

⑤ [35.49, 36.51]

16. $36\,\text{m}^2$의 면적에서 수확한 옥수수의 무게가 1260 kg이므로 $1\,\text{m}^2$의 면적에서 수확한 옥수수의 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$$\overline{X} = \frac{1260}{36} = 35$$

또, $\sigma = 1.5$, $n = 36$이므로 신뢰도 95 %로 추정한 모평균 m의 신뢰구간은

$$\left[35 - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}},\ 35 + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}}\right]$$

$\therefore$ [34.51, 35.49]

답 ④

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$, $f(0)=0$을 만족시킨다. 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수가 4일 때, $f(3)$의 값은? **[4점]**

① 81 ② 63 ③ 54 ④ 45 ⑤ 36

21. 사차함수 $f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이고 원점을 지나므로 x축에 접하는 형태이다.
즉, $f(x)=x^2(x-a)(x+a)$ $(a>0)$로 놓을 수 있다.
이때 방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면 $f(x)$의 극솟값이 -4가 되어야 한다.
$f'(x)=4x^3-2a^2x=2x(2x^2-a^2)=0$에서

$$x=-\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{a}{\sqrt{2}}$$

이때 함수 $f(x)$는 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$에서 극소이고, 극솟값은 $f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=-4$이므로

$$f\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{a^4}{4}-\frac{a^4}{2}=-\frac{a^4}{4}=-4$$

$\therefore a=2$ $(\because a>0)$

따라서 함수 $f(x)=x^4-4x^2$이므로

$f(3)=81-36=45$

답 ④

26. 삼차함수 $f(x)=2x^3-6x$의 그래프의 두 극점에서 그은 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 접점이 아닌 점들의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 할 때, $x_1^2+x_2^2$의 값을 구하시오. **[4점]**

26. 단답형 $f(x)=2x^3-6x$를 미분하면

$f'(x)=6x^2-6$

$f'(x)=6(x+1)(x-1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 4, $x=1$에서 극솟값 -4, 두 극점에서 그은 접선은

$y=f(x)=4$, $y=f(x)=-4$

i) $f(x)=4$인 경우

$2x^3-6x-4=0$

$2(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=2$

ii) $f(x)=-4$인 경우

$2x^3-6x+4=0$

$2(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=-2$

i), ii)에서

$x_1^2+x_2^2=2^2+(-2)^2=8$

답 8

29. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A^2+A+E=O$
(나) $(A+E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

연립방정식 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $x=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값을 구하시오. (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)

[4점]

29. **단답형** $A^2+A+E=O$에서

$A(A+E)=-E \qquad \therefore\ A^{-1}=-(A+E)$

이때 $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$의 해가 $x=\alpha$, $y=\beta$이므로

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}=-(A+E)\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$=(A+E)\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2(A+E)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \alpha\beta=4\cdot 2$

답 8

[2012.08 종로]

10. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $(xA+yE)^2=A$을 만족하는 두 실수 x, y가 있다. x^2+y^2의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$

④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

10. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=2A$

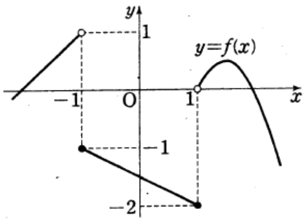
$(xA+yE)^2=x^2A^2+2xyA+y^2E$

$=(2x^2+2xy)A+y^2E=A$

$2x^2+2xy=1$, $y^2=0$

$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=0$　　$\therefore x^2+y^2=\frac{1}{2}$

11. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to+0} f(x-1) + \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

11. $x \to +0$일 때 $x-1 \to -1+0$이므로

$$\lim_{x\to+0} f(x-1) = \lim_{t\to-1+0} f(t) = -1$$

$x \to \infty$일 때 $\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x} \to 1+0$이므로

$$\lim_{x\to\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{t\to1+0} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to+0} f(x-1) + \lim_{x\to\infty} f\left(\frac{x+1}{x}\right) = -1+0 = -1$$

15. 다음은 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4^n}\ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

이 성립할 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4^n}$의 양변에 2^{n+1}을 곱하면
>
> $2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+2^{\boxed{(가)}}$
>
> 이때 $b_n=2^n a_n$이라고 하면 $b_{n+1}-b_n=2^{\boxed{(가)}}$이다.
>
> 따라서, $n\geq 2$일 때 $b_n-b_1=2-2^{\boxed{(나)}}$이고,
>
> 이때 $b_1=2^1 a_1=2$이므로
>
> $b_n=4-2^{\boxed{(나)}}$ ...... ㉠
>
> 그런데, ㉠은 $n=1$일 때도 성립하므로
>
> $b_n=4-2^{\boxed{(나)}}\ (n\geq 1)$
>
> $\therefore a_n=\frac{b_n}{2^n}=\frac{4-2^{\boxed{(나)}}}{2^n}=2^{-n+2}-2^{\boxed{}}$

위의 과정에서 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(2)+g(3)$의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

15. $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{4^n}$의 양변에 2^{n+1}을 곱하면

$2^{n+1}a_{n+1}=2^n a_n+2^{\boxed{-n+1}}$

이때 $b_n=2^n a_n$이라고 하면 $b_{n+1}-b_n=2^{-n+1}$이다.

따라서, $n\geq 2$일 때

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=1}^{n-1}2^{-k+1}=\sum_{k=1}^{n-1}2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$b_n-b_1=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=2-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-2^{\boxed{-n+2}}$$

이때 $b_1=2^1 a_1=2$이므로

$b_n=4-2^{-n+2}$ ...... ㉠

㉠은 $n=1$일 때도 성립하므로 $b_n=4-2^{-n+2}\ (n\geq 1)$

$$\therefore a_n=\frac{b_n}{2^n}=\frac{4-2^{-n+2}}{2^n}=2^{-n+2}-2^{-2n+2}$$

$f(n)=-n+1$, $g(n)=-n+2$이므로

$f(2)+g(3)=-1+(-1)=-2$

16. 두 양수 x, y의 상용로그의 가수를 각각 α, β라 하자. 다음 두 조건을 만족하는 100보다 큰 양수 x의 최솟값은? [4점]

(가) $\alpha+\beta=1$ (나) $xy^3=1$

① $10^{\frac{7}{2}}$ ② 10^4 ③ $10^{\frac{9}{2}}$

④ 10^5 ⑤ $10^{\frac{11}{2}}$

16. $\log x=a+\alpha$ (a는 2 이상인 정수, $0\le\alpha<1$)

$\log y=b+\beta$ (b는 정수, $0\le\beta<1$)라 하면

$$\begin{aligned}\log xy^3&=\log x+3\log y\\&=(a+\alpha)+3(b+\beta)\\&=a+3b+2\beta+\alpha+\beta\\&=a+3b+1+2\beta=0\end{aligned} \quad \cdots\cdots ㉠$$

따라서, $2\beta=-(a+3b+1)=$(정수)이고 $0\le2\beta<2$이므로 $2\beta=0$ 또는 $2\beta=1$이다.

$\therefore\ \beta=0$ 또는 $\beta=\frac{1}{2}$

그런데, $\beta=0$이면 $\alpha=1$이므로 모순이다.

$\therefore\ \alpha=\beta=\frac{1}{2}$

㉠에서 $a+3b=-2$이고 2 이상인 a가 최소가 되기 위해서는 $a=4$ 이어야 한다.

$\log x=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore\ x=10^{\frac{9}{2}}$

17. 상자에 1, 2, 3, 4가 각각 한 개씩 적힌 네 장의 카드가 있다. A, B 두 사람이 A부터 시작하여 A → B → A → B → ⋯와 같이 서로 교대로 카드를 한 장씩 뽑는데, 1이 적힌 카드를 먼저 뽑는 사람이 이기는 것으로 하였다. 이 시합에서 A, B 중 누구도 카드를 세 번 이상 뽑지 않은 상태에서 승부가 결정되었을 때, A가 이겼을 확률은? (단, 매번 뽑은 카드는 상자에 다시 넣는다.) [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{4}{7}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

17. A가 한 번 또는 두 번 뽑아서 이기는 사건을 A라 하고, B가 한 번 또는 두 번 뽑아서 이기는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|A\cup B)$이다.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\cdot\mathrm{P}(A)$$

이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A|A\cup B)=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)}$$

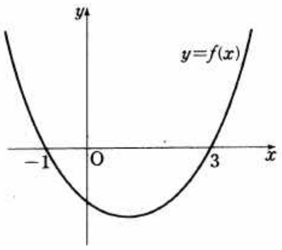
$$=\frac{\mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(A)}+\frac{3}{4}\mathrm{P(A)}}=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}=\frac{4}{7}$$

18. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 각각

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$h(x)=f(x)g(x)$$

로 정의하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $g(-1)>0$

ㄴ. $\int_0^3 g(x)dx<0$

ㄷ. $h'(1)>0$

① ㄴ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ

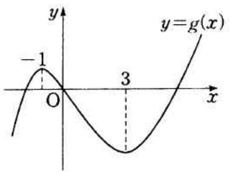
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. ㄱ. $g(-1)=\int_0^{-1} f(t)dt=-\int_{-1}^0 f(t)dt>0$

$\left(\because \int_{-1}^0 f(t)dt<0\right)$　$\therefore$ 참

ㄴ. $g'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$이고, $g(0)=0$이므로

삼차함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore \int_0^3 g(x)dx<0$　$\therefore$ 참

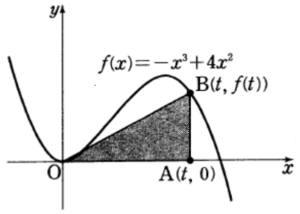
ㄷ. $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)>0$

$(\because f'(1)=0,\ g(1)<0,\ f(1)<0,\ g'(1)<0)$　$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

19. 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2$이 있다. $0<t<4$인 실수 t에 대하여 원점 O와 두 점 $\mathrm{A}(t,\ 0)$, $\mathrm{B}(t,\ f(t))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값은? [4점]



① $\frac{25}{2}$ ② $\frac{27}{2}$ ③ $\frac{29}{2}$

④ $\frac{31}{2}$ ⑤ $\frac{33}{2}$

19. 삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}\times t\times(-t^3+4t^2)=-\frac{1}{2}(t^4-4t^3)$$

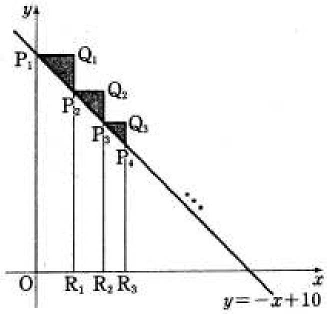
$$\therefore S'(t)=-2t^2(t-3)$$

함수 $S(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{27}{2}$	↘	

따라서, 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값 $S(3)=\frac{27}{2}$이다.

21. 그림과 같이 직선 $y=-x+10$이 y축과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 x축의 방향으로 $\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_1}}{10}$만큼 평행이동한 점을 Q_1이라 하자. 점 Q_1을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 $y=-x+10$, x축과 만나는 점을 각각 P_2, R_1이라 하고, 점 P_2를 x축의 방향으로 $\dfrac{\overline{\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2}}{10}$만큼 평행이동한 점을 Q_2라 하자. 이와 같은 방법으로 점 P_n, Q_n, R_n($n=2$, 3, 4, …)를 계속하여 만들어 나간다. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\dfrac{42}{17}$ ② $\dfrac{44}{17}$ ③ $\dfrac{46}{19}$
④ $\dfrac{48}{19}$ ⑤ $\dfrac{50}{19}$

21. 점 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$이라 하면 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$은 직각이등변삼각형이므로

$\mathrm{Q}_n\left(x_n+\dfrac{y_n}{10}, y_n\right)$

$\mathrm{P}_{n+1}\left(x_n+\dfrac{y_n}{10}, \dfrac{9}{10}y_n\right)$

즉, $x_{n+1}=x_n+\dfrac{y_n}{10}$, $y_{n+1}=\dfrac{9}{10}y_n$이고 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\dfrac{y_n}{10}$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{{y_n}^2}{100}$$
$$=\frac{{y_n}^2}{200}$$

이때 $S_{n+1}=\dfrac{{y_{n+1}}^2}{200}=\dfrac{\frac{81}{100}{y_n}^2}{200}=\dfrac{81}{100}S_n$이고

$S_1=\dfrac{{y_1}^2}{200}=\dfrac{10^2}{200}=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{81}{100}}=\frac{50}{19}$$

25. 수직선 위를 움직이는 점 P가 원점을 출발하여 t초가 지난 순간의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=-3t^2+12t$$

이다. 점 P가 원점을 출발한 후 가속도가 0이 되는 순간까지 점 P가 실제로 움직인 거리를 구하시오. [3점]

25. $v'(t)=-6t+12=0$에서 $t=2$이므로 점 P가 원점을 출발한 후 가속도가 0이 되는 순간은 $t=2$일 때이다.

따라서, 구하는 거리는

$$\int_0^2 |v(t)|dt=\int_0^2 (-3t^2+12t)dt$$

$$=\left[-t^3+6t^2\right]_0^2=-8+24=16$$

30. 공차가 1이고 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 x에 대한 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 두 근의 차를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1})=\frac{1}{3}$이다. 이때 a_1의 값을 구하시오.

[4점]

30. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로

$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$, $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$

따라서, 주어진 이차방정식에서

$a_nx^2+(a_n+a_{n+2})x+a_{n+2}=0$, $(x+1)(a_nx+a_{n+2})=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-\frac{a_{n+2}}{a_n}$

이때 두 근의 차가 b_n이므로

$$b_n=\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}-1\right|=\left|\frac{a_{n+2}-a_n}{a_n}\right|=\left|\frac{2}{a_n}\right|=\frac{2}{a_n}$$

$(\because a_{n+1}-a_n=1,\ a_n>0)$

$$\therefore b_nb_{n+1}=\frac{2}{a_n}\times\frac{2}{a_{n+1}}$$
$$=\frac{4}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=4\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_nb_{n+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}4\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+n}\right)\ (\because a_{n+1}=a_1+n\cdot1=a_1+n)$$
$$=\frac{4}{a_1}=\frac{1}{3}$$
$\therefore a_1=12$

[오답노트 05차 ~]

2012.07 메가	7 8 9 11 15
	16 20 21 26 27
	28 29
2012.07 대성	4 12 14 15 16
	21 26 29
2012.08 종로	10 11 15 16 17
	18 19 21 25 30

[2013 수능대비 오답노트 06차]

n 무한대 갈 때 : 100 넣어서 파악하는 경우가 있음
로그 표만들기 : 정수 개수 묻는경우
정규분포 : 분포표에서 정수가 아닌 경우, z=(궁금-평균)/편차
거리의 최소 : 접선기울기와 좌표 연결한 기울기가 수직

[2012.08 대성]

9. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = x^2\int_0^1 f(t)dt + ax - 1$$

이 성립할 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. $\int_1^x f(t)dt = x^2\int_0^1 f(t)dt + ax - 1$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = 2x\int_0^1 f(t)dt + a$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = \int_0^1 f(t)dt + a - 1$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_1^0 f(t)dt = -1$ $\therefore \int_0^1 f(t)dt = 1$

즉, ㉢에서 $a=0$이므로 ㉡에서

$f(x) = 2x$

$\therefore f(2) = 2\cdot 2 = 4$

답 ④

12. 좌표평면에서 곡선 $y=\sqrt{2x+3}$ 위의 두 점 P, Q의 x좌표가 각각 t, $t+1$이다. 점 A(1, 0)에 대하여 $\lim_{t \to \infty}(\overline{\mathrm{QA}}-\overline{\mathrm{PA}})$의 값은? **[3점]**

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ 0

12. 곡선 $y=\sqrt{2x+3}$ 위의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 P$(t,\ \sqrt{2t+3})$, Q$(t+1,\ \sqrt{2t+5})$이고 점 A(1, 0)이므로

$\overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{t^2+(2t+5)}=\sqrt{t^2+2t+5}$

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{(t-1)^2+(2t+3)}=\sqrt{t^2+4}$

$\therefore \lim_{t \to \infty}(\overline{\mathrm{QA}}-\overline{\mathrm{PA}})$

$=\lim_{t \to \infty}(\sqrt{t^2+2t+5}-\sqrt{t^2+4})$

$=\lim_{t \to \infty}\frac{2t+1}{\sqrt{t^2+2t+5}+\sqrt{t^2+4}}$

$=\lim_{t \to \infty}\frac{2+\frac{1}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{5}{t^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}}$

$=\frac{2+0}{1+1}=1$

답 ①

13. 상자 A에는 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적힌 공 5개가 들어 있고, 상자 B에는 숫자 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적힌 공 5개가 들어 있다. 상자 A와 B에서 임의로 공을 1개씩 꺼냈더니 숫자 4가 적힌 공 1개와 4보다 작은 숫자가 적힌 공 1개가 나왔다. 이때 숫자 4가 적힌 공이 상자 A에서 나왔을 확률은? **[3점]**

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

13. 두 상자 A, B에서 꺼낸 공의 숫자를 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내면

i) $a=4$, $a>b$인 경우

$(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$

의 2가지

ii) $b=4$, $a<b$인 경우

$(1,\ 4)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 4)$

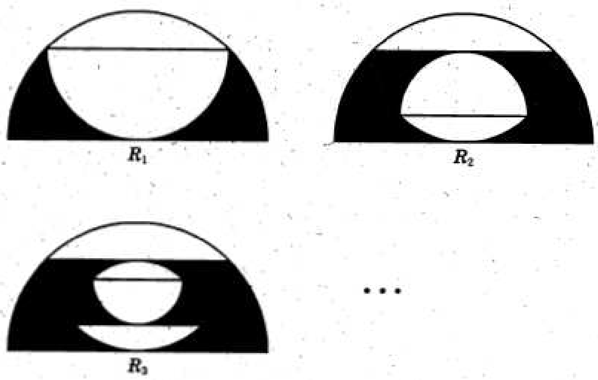
의 3가지

따라서 구하는 확률은

$\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5}$

답 ②

14. 지름의 길이가 2인 반원이 있다. 이 반원의 중심에 호가 접하고 지름의 양 끝이 이 반원의 호에 있도록 더 작은 반원을 그려 넣고 그림 R_1과 같이 색칠하였다.
그림 R_1에서 새로 그려진 반원에 접하는 더 작은 반원을 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 새로 그려진 반원에 접하는 더 작은 반원을 그림 R_2를 얻는 것과 같은 방법으로 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? **[4점]**

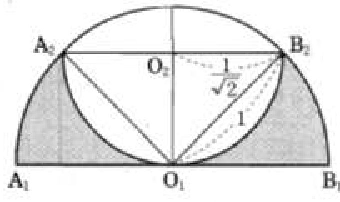


① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ 1
④ $\frac{\pi+1}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

14. 아래 그림과 같이 그림 R_1에서 큰 반원의 지름의 양 끝점을 각각 A_1, B_1, $\overline{A_1B_1}$의 중점을 O_1이라 하고, 작은 반원의 지름의 양 끝점을 각각 A_2, B_2, $\overline{A_2B_2}$의 중점을 O_2라 하자.
이때 큰 반원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{O_1B_2}=1$이고, $\angle O_1B_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로 작은 반원의 반지름의 길이 $\overline{O_2B_2}$는

$$\overline{O_2B_2}=\overline{O_1B_2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$



위의 그림에서 색칠된 부분의 넓이는

$$S_1=(\text{부채꼴 } O_1A_1A_2+\text{부채꼴 } O_1B_1B_2)$$
$$-(\text{작은 반원의 넓이}-\text{삼각형 } O_1A_2B_2)$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2-\left\{\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 그림 R_n에서 색칠된 부분의 넓이 S_n은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 부분합이므로

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

답 ③

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2B+AB^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) **[4점]**

〈보기〉

ㄱ. 행렬 A의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. 행렬 $A+B$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. $AB=A+B$이면 $AB(A+B)=E$이다.

① ㄴ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. ㄱ. $A^2B+AB^2=E$에서 $A(AB+B^2)=E$ 이므로

$A^{-1}=AB+B^2$

즉, 행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 존재한다. (참)

ㄴ. $A^2B+AB^2=E$에서

$A(A+B)B=E$

즉, 행렬 B의 역행렬은 $A(A+B)$이므로

$BA(A+B)=E$

$\therefore (A+B)^{-1}=BA$

따라서 행렬 $A+B$의 역행렬 $(A+B)^{-1}$가 존재한다. (참)

ㄷ. $AB=A+B$이면

$AB-A-B=O$

$\therefore (A-E)(B-E)=E$

즉, 행렬 $A-E$의 역행렬이 $B-E$이므로

$(A-E)(B-E)=(B-E)(A-E)$

$\therefore AB=BA$

또, ㄴ에서 $BA(A+B)=E$이므로

$AB(A+B)=E$ (참)

답 ⑤

16. 어떤 자격증 시험의 점수는 평균이 m이고, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 시험 응시자 중 88.49%가 50점 이상이라 할 때, 응시자 중에서 임의추출한 4명의 평균이 50점 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? **[4점]**

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.1	0.3643
1.2	0.3849
2.4	0.4918
2.5	0.4938

① 0.7698 ② 0.8643 ③ 0.8849
④ 0.9918 ⑤ 0.9938

16. 시험 점수를 확률변수 X라 하면 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X \ge 50) &= 0.8849 = 0.5 + 0.3849 \\ &= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2) \\ &= \mathrm{P}(Z \ge -1.2)\end{aligned}$$

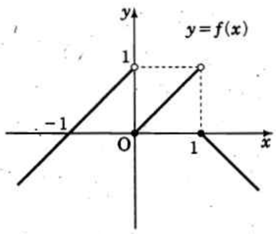
$$\therefore\ \frac{50-m}{\sigma} = -1.2$$

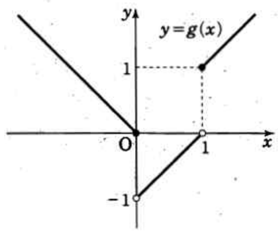
이때 임의추출한 4명의 점수의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\overline{X} \ge 50) &= \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{50-m}{\frac{\sigma}{2}}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(Z \ge 2 \times \frac{50-m}{\sigma}\right) \\ &= \mathrm{P}(Z \ge -2.4) \\ &= 0.5 + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2.4) \\ &= 0.5 + 0.4918 \\ &= 0.9918\end{aligned}$$

답 ④

18. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? **[4점]**





〈보기〉

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1-n}{n+2}\right)=1$

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. ㄱ. $n\to\infty$일 때 $\frac{1-n}{n+2}\to -1+0$이므로

$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1-n}{n+2}\right)=\lim_{x\to -1+0} f(x)=0$ (거짓)

ㄴ. $f(1)+g(1)=0+1=1$이고,

$\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+g(x)\}=0+1=1$

$\lim_{x\to 1-0}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$

$\therefore f(1)+g(1)=\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(참)

ㄷ. $f(0)g(0)=0\cdot 0=0$이고,

$\lim_{x\to +0} f(x)g(x)=0\cdot(-1)=0$

$\lim_{x\to -0} f(x)g(x)=1\cdot 0=0$

$\therefore f(0)g(0)=\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$

즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(참)

답 ④

20. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는? (단, $1 \le n < 100$) **[4점]**

(가) $f(n)=f(2n+10)$ (나) $g(n)>g(321)$

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

20. 조건 (가)에서 $f(n)=f(2n+10)$이므로 n은 2배하여 10을 더하여도 자릿수의 변화는 없고 n은 한 자리의 자연수가 될 수 없으므로 두 자리의 자연수이다.

즉, $2n+10<100$이므로 $n<45$

$\therefore\ 10 \le n < 45$

또, 조건 (나)에서 $g(n)>g(321)=\log 3.21$이므로

$\log n = f(n)+g(n) > 1+\log 3.21 = \log 32.1$

$\therefore\ 33 \le n < 45$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$45-33=12$(개)

답 ③

21. 양수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^2(x-6a)$가 $x=6b$에서 극솟값을 가질 때, 다음 중 가장 작은 값은? **[4점]**

① $f(-3b)$ ② $f(-b)$ ③ $f(3b)$
④ $f(5b)$ ⑤ $f(7b)$

21. $f(x)=x^3-6ax^2$에서

$f'(x)=3x^2-12ax=3x(x-4a)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=4a$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=4a$에서 극소이므로

$4a=6b \quad \therefore\ 2a=3b$

$\therefore\ f(x)=x^2(x-9b)$

이때

$f(-3b)=-108b^3$, $f(-b)=-10b^3$

$f(3b)=-54b^3$, $f(5b)=-100b^3$

$f(7b)=-98b^3$

따라서 $f(-3b)$의 값이 가장 작다.

답 ①

26. 좌표평면 위의 점 P(0, 6)에서 곡선 $y=3-x^4$에 그은 두 접선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오. **[4점]**

26. **단답형** $f(x)=3-x^4$으로 놓으면

$f'(x)=-4x^3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ 3-t^4)$에서의 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$이므로

$y=-4t^3(x-t)+3-t^4$

$\therefore\ y=-4t^3x+3t^4+3$ …… ㉠

이때 접선이 점 P(0, 6)을 지나므로 ㉠에 대입하면

$6=3t^4+3,\ t^4=1$

$\therefore\ t=\pm1$

즉, 접선의 방정식은

$y=\pm4x+6$

x축과 위의 두 접선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 $A\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $B\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$이므로 원점 O에 대하여

$\overline{AB}=3,\ \overline{OP}=6$

따라서 구하는 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot6=9$

답 9

28. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=4^n$에 접하고 기울기가 -1인 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a_n,\ 0)$ $(a_n>0)$이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, n은 자연수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) **[4점]**

28. **단답형** 기울기가 -1이고, 점 $(a_n,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-(x-a_n)$

$\therefore\ x+y-a_n=0$ ······ ㉠

원 $x^2+y^2=4^n$이 직선 ㉠과 접하므로 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같다. 즉,

$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2^n$ $\quad\therefore\ a_n=\sqrt{2}\cdot 2^n$ $(\because\ a_n>0)$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{a_n}^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ p^2+q^2=36+1=37$

답 37

29. 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킨다. (단, E는 단위행렬이다.)

> ㈎ $A+AB=E$
>
> ㈏ $A\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

행렬 B의 모든 성분의 합을 구하시오. **[4점]**

29. **단답형** 조건 ㈎에서 $A(E+B)=E$이므로

$A^{-1}=E+B$이고, 조건 ㈏의 $A\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(E+B)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}+B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

이때 $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

이므로

$a+b=6$, $c+d=7$

$\therefore a+b+c+d=13$

따라서 구하는 행렬 B의 모든 성분의 합은 13이다.

답 13

[2012.08 비상]

9. $5^x = 4$, $3^y = 6$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $3^{\frac{y-1}{x}}$의 값은? [3점]

① 2　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{6}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $2\sqrt{2}$

9. 이해 능력 - 지수와 지수함수　**정답** ②

$5^x = 4$에서 $5^x = 2^2$, $5^{\frac{x}{2}} = 2$

$3^y = 6$에서 $3^y = 2 \times 3$, $3^{y-1} = 2$

$3^{y-1} = 5^{\frac{x}{2}}$

$\therefore 3^{\frac{y-1}{x}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

12. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$을 지난다. 함수 $g(x)=xf(x)$가 열린 구간 $(\alpha,\ \beta)$에서 감소한다고 할 때, β의 최댓값은? [3점]

① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

12. 이해 능력 - 다항함수의 미분법 정답 ②

$f(x)=a(x-2)(x+2)=a(x^2-4)\ (a>0)$

라 하면 $g(x)=xf(x)=ax^3-4ax$

함수 $g(x)$가 감소하려면 $g'(x)<0$이어야 하므로

$g'(x)=3ax^2-4a<0$에서 $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

즉, 함수 $g(x)$는 열린 구간 $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$에서

감소한다.

따라서 β의 최댓값은 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

13. 어떤 게임기를 한 번 작동시키면 1부터 9까지의 자연수 중에서 하나의 숫자가 화면에 나타난다고 한다. 이 게임기를 두 번 작동시켜 화면에 각각 나타난 두 숫자의 합이 12 이상일 때, 이 두 숫자의 곱이 짝수이었을 확률은? (단, 각각의 자연수가 나올 확률은 모두 같다.) **[4점]**

① $\frac{9}{14}$ ② $\frac{19}{28}$ ③ $\frac{5}{7}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

13. 수학 외적 문제 해결 능력 - 확률 정답 ①

게임기를 두 번 작동시켰을 때 나올 수 있는 모든 숫자의 경우의 수는 $9\times9=81$(가지)이다.

이때, 두 수의 합이 12 이상인 경우의 수는

(3, 9)
(4, 8), (4, 9)
(5, 7), (5, 8), (5, 9)
(6, 6), (6, 7), (6, 8), (6, 9)
(7, 5), (7, 6), (7, 7), (7, 8), (7, 9)
(8, 4), (8, 5), (8, 6), (8, 7), (8, 8), (8, 9)
(9, 3), (9, 4), (9, 5), (9, 6), (9, 7), (9, 8), (9, 9)

의 28(가지)이다.

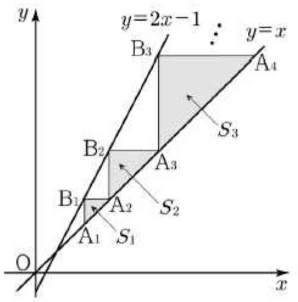
두 수의 합이 12 이상인 사건을 A, 두 수의 곱이 짝수인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{28}{81}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{81}=\frac{2}{9}$

$$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{28}{81}}=\frac{9}{14}$$

14. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 점 A_n, B_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 A_1의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.
> (나) 점 B_n은 점 A_n을 지나고 y축에 평행한 직선과 직선 $y=2x-1$의 교점이다.
> (다) 점 A_{n+1}은 점 B_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 직선 $y=x$의 교점이다.



삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값은? [4점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

14. 발견적 추론 능력(추측) - 수열의 극한 $\boxed{\text{정답}}$ ③

닮음인 두 삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$, $A_{n+1}B_{n+1}A_{n+2}$에서 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=2\overline{A_nB_n}$이므로 $S_{n+1}=4S_n$이다.

조건 (나)와 (다)에서

삼각형 $A_nB_nA_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은

직각삼각형이므로 삼각형 $A_1B_1A_2$의 넓이 S_1은

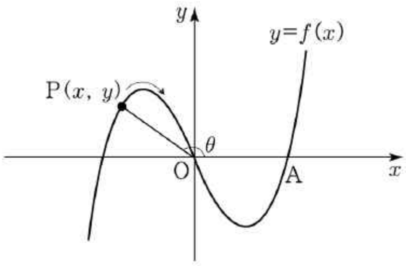
$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{B_1A_2}=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$이고 공비가 4인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times4^{n-1}\ (\text{단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4^{n-1}}=\frac{2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{8}{3}$$

16. 그림과 같이 함수 $f(x)=x^3-2x$의 그래프가 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 제 2 사분면에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 하자. 점 P가 곡선을 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\tan\theta$는 α에 한없이 가까워진다. α의 값은? [4점]



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{9}{4}$ ③ -2 ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

16. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속 정답 ③

점 P는 함수 $f(x)=x^3-2x$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(x,\ x^3-2x)$ (단, $x<0$)

$\therefore\ \tan\theta=\dfrac{x^3-2x}{x}$

점 P가 원점에 한없이 가까워질 때, $x\to-0$이므로

$$\lim_{x\to-0}\tan\theta=\lim_{x\to-0}\frac{x^3-2x}{x}=\lim_{x\to-0}(x^2-2)=-2$$

$\therefore\ \alpha=-2$

17. 세 이차정사각행렬 A, B, P가

$$P^2=E, \quad PAP=B$$

를 만족시킨다. 항상 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) **[4점]**

〈보 기〉

ㄱ. $AP=PB$
ㄴ. $AP=PA$이면 $A=B$이다.
ㄷ. $BP=PB$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 연역적 추론 능력(증명) - 행렬과 그래프 정답 ③

ㄱ. (참) $PAP=B$의 양변의 왼쪽에 행렬 P를 곱하면
$PPAP=PB$, $EAP=PB$ ($\because P^2=E$)
$\therefore AP=PB$

ㄴ. (참) ㄱ에서 $AP=PB$이므로
$AP=PA$이면 $PA=PB$가 성립한다.
그러므로 $PA=PB$의 양변의 왼쪽에 행렬 P를 곱하면
$PPA=PPB$, $EA=EB$ ($\because P^2=E$)
$\therefore A=B$

ㄷ. (거짓) 【반례】 $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$
이라 하면

$$P^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

$$PAP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$이므로 BP와 PB를 각각 구해 보면

$$BP=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$PB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$\therefore BP\neq PB$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[참고] ㄷ. $BP=PB$이면 ㄴ에서 $A=B$가 성립한다. 그러나 $PAP=B$를 만족시키는 두 행렬 A, B가 반드시 $A=B$일 필요는 없다.

18. 어느 농장에서 수확하는 사과의 무게는 평균이 300 g, 표준편차가 50 g인 정규분포를 따르고, 사과의 당도는 평균이 12 brix, 표준편차가 2 brix인 정규분포를 따른다고 한다. 이 농장의 사과 중 무게가 236 g 이상이고, 당도가 10.32 brix 이상 15.28 brix 이하인 사과는 상품으로 출하하고, 나머지는 주스 공장에 납품한다고 한다. 이 농장에서 수확한 사과 중에서 임의로 1000개를 뽑았을 때, 상품으로 출하될 수 있는 사과의 개수를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 사과의 무게와 당도는 서로 독립이다.) **[4점]**

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.84	0.30
1.28	0.40
1.48	0.43
1.64	0.45

① 675 ② 700 ③ 725 ④ 750 ⑤ 775

18. 수학 외적 문제 해결 능력 - 통계 정답 ①

사과의 무게와 당도를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X와 Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 50^2)$과 $\mathrm{N}(12,\ 2^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \ge 236) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{236-300}{50}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \ge -1.28) = 0.5 + 0.4 = 0.9$$

$$\mathrm{P}(10.32 \le Y \le 15.28)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{10.32-12}{2} \le Z \le \frac{15.28-12}{2}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-0.84 \le Z \le 1.64) = 0.3 + 0.45 = 0.75$$

그러므로 임의로 뽑은 사과가 상품으로 출하될 확률은 $0.9 \times 0.75 = 0.675$이다.

따라서 1000개의 사과를 수확할 때, 상품으로 출하될 수 있는 사과의 개수는 $1000 \times 0.675 = 675$이다.

19. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자.
$\frac{1}{2} < f(a) < \frac{3}{4}$을 만족시키는 a에 대하여 $f\left(\frac{a^2}{\sqrt{10}}\right)+2f\left(\frac{\sqrt{10}}{a}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $\frac{5}{2}$

19. 이해 능력 - 로그와 로그함수　　정답 ⑤

$\log a = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)라 하면
$f(a)$는 $\log a$ 의 가수이므로
$f(a)=\alpha$, $\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$ 이다.

(i) $\log\frac{a^2}{\sqrt{10}} = 2\log a - \frac{1}{2}\log 10 = 2(n+\alpha)-\frac{1}{2}$
$= 2n+2\alpha-\frac{1}{2}$

$1<2\alpha<\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}<2\alpha-\frac{1}{2}<1$이므로

$f\left(\frac{a^2}{\sqrt{10}}\right)=2\alpha-\frac{1}{2}$

(ii) $\log\frac{\sqrt{10}}{a} = \frac{1}{2}\log 10 - \log a = \frac{1}{2}-(n+\alpha)$
$= -n+\frac{1}{2}-\alpha = (-n-1)+\frac{3}{2}-\alpha$

$-\frac{3}{4}<-\alpha<-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}<\frac{3}{2}-\alpha<1$이므로

$f\left(\frac{\sqrt{10}}{a}\right)=\frac{3}{2}-\alpha$

$\therefore f\left(\frac{a^2}{\sqrt{10}}\right)+2f\left(\frac{\sqrt{10}}{a}\right)$
$=2\alpha-\frac{1}{2}+2\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)=2\alpha-\frac{1}{2}+3-2\alpha=\frac{5}{2}$

28. 함수 $f(x)=\int_0^x (t^3-t^2)\,dt$가 $x=\alpha$에서 최솟값 β를 가진다. $\alpha+\beta=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 적분법 정답 23

$f(x)=\int_0^x (t^3-t^2)\,dt$에서

$f'(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	극소	↗

위의 표에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 $\alpha=1$이다.

$f(x)=\int_0^x (t^3-t^2)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3\right]_0^x$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3$

$\beta=f(1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}$

$\therefore\ \alpha+\beta=1+\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{11}{12}$

$\therefore\ p=12,\ q=11,\ p+q=12+11=23$

29. 닫힌 구간 $[-3,\ 3]$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-3 \le x \le 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$ (나) $\int_0^3 x^2 f(x)\,dx = \frac{27}{10}$

확률변수 X의 분산이 k일 때, $5k$의 값을 구하시오. [4점]

29. 수학 내적 문제 해결 능력 - 통계 $\boxed{\text{정답}}$ 27

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=(-x)f(-x)=-xf(x)=-g(x)$

이므로

$$\mathrm{E}(X)=\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=0$$

$h(x)=x^2 f(x)$라 하면

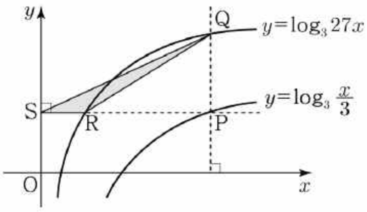
$h(-x)=(-x)^2 f(-x)=x^2 f(x)=h(x)$이므로

$$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)\,dx = 2\int_0^3 x^2 f(x)\,dx = 2\times\frac{27}{10}=\frac{27}{5}$$

$$\mathrm{V}(X)=\int_{-3}^{3} x^2 f(x)\,dx - \{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{27}{5}$$

$$\therefore\ k=\frac{27}{5},\ 5k=5\times\frac{27}{5}=27$$

30. 그림과 같이 곡선 $y=\log_3 \frac{x}{3}$ 위에 한 점 P가 있다. 점 P를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 27x$와 만나는 점을 Q라 하고, 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3 27x$, y축과 만나는 점을 각각 R, S라 하자. 직선 SQ의 기울기가 $\frac{4}{9}$일 때, 삼각형 QSR의 넓이는 k이다. $90k$의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) **[4점]**



30. 이해 능력 - 로그와 로그함수 정답 20

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(a,\ \log_3\frac{a}{3}\right)$라 하면

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(a,\ \log_3 27a)$이므로

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\log_3 27a-\log_3\frac{a}{3}=\log_3\frac{27a}{\frac{a}{3}}=\log_3 81=4$$

한편, 직선 SQ의 기울기가 $\frac{4}{9}$이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{SP}}}=\frac{4}{\overline{\mathrm{SP}}}=\frac{4}{9},\ \overline{\mathrm{SP}}=9=a$$

$\therefore\ \mathrm{P}(9,\ 1),\ \mathrm{Q}(9,\ 5),\ \mathrm{R}\left(\frac{1}{9},\ 1\right),\ \mathrm{S}(0,\ 1)$

$$(\text{삼각형 QSR 의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{SR}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times 4=\frac{2}{9}$$

$\therefore\ k=\frac{2}{9},\ 90k=90\times\frac{2}{9}=20$

[2012.08 중앙]

7. 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2-n}$의 정수 부분을 a_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-a_n)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$

③ 1 ④ 2

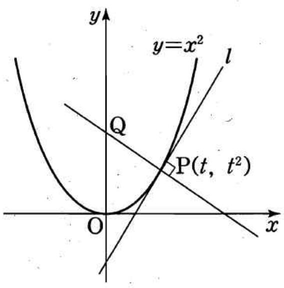
⑤ 4

7. 이해력 - 수열의 극한 [3점] **정답** ②

$n-1\le\sqrt{n^2-n}<n$이므로 $a_n=n-1$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n}-a_n)&=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2-n}-(n-1)\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\sqrt{n^2-n}+(n-1)}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$에서의 접선을 l이라 하자. 또한, 점 P를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 y좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to+0} f(t)$의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]



① $\frac{1}{4}$

② $\frac{\sqrt{2}}{4}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

⑤ 1

8. 이해력 – 다항함수의 미분법 [3점] **정답** ③

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$에서의 접선의 기울기는 $2t$이다.

따라서, 점 P를 지나면서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$$

$$y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

$$\therefore f(t)=t^2+\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{t\to+0} f(t)=\lim_{t\to+0}\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

9. 이차정사각행렬 A에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬, O는 영행렬이다.) [3점]

〈보 기〉

ㄱ. $A^2+A+E=O$이면 A의 역행렬은 $-A-E$이다.

ㄴ. $A^2-2A+E=O$이면 $A-E$의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄷ. A^2의 역행렬이 존재하지 않으면 A^3의 역행렬도 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ
③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 이해력 - 행렬과 그래프 [3점] **정답** ⑤

ㄱ. (참) $A^2+A+E=O$에서 $A(-A-E)=E$이므로 A의 역행렬은 $-A-E$이다.

ㄴ. (참) $A-E$의 역행렬이 존재한다고 가정하면

$A^2-2A+E=O$에서

$(A-E)^2=O$

$(A-E)^2(A-E)^{-1}=O(A-E)^{-1}$

$A-E=O$

따라서, $A-E$는 역행렬을 갖지 않으므로 모순이다.

따라서, $A-E$의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄷ. (참) A^3의 역행렬 B가 존재한다고 가정하면

$A^3B=E$이므로

$A^2(AB)=E$

따라서, A^2의 역행렬은 AB로 존재한다.

따라서, 주어진 명제의 대우가 참이므로 명제도 참이다.

10. 다음과 같이 빨간색 공과 파란색 공을 합하여 20개의 공이 각각 들어 있는 주머니가 20개 있다.

> 첫 번째 주머니에는 빨간색 공이 1개, 파란색 공이 19개 들어 있고, 두 번째 주머니에는 빨간색 공이 2개, 파란색 공이 18개 들어 있다. n번째 주머니에는 빨간색 공이 n개, 파란색 공이 $(20-n)$개 들어 있다. (단, $n=1, 2, 3, \cdots, 20$)

이 20개의 주머니에서 임의로 한 개의 주머니를 택하여 한 개의 공을 꺼냈더니 빨간색 공이 나왔을 때, 이 빨간색 공이 여섯 번째 주머니에서 나왔을 확률은? (단, 각 주머니를 택할 확률은 모두 같다.) [3점]

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{1}{60}$ ③ $\frac{1}{40}$ ④ $\frac{1}{35}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

10. 이해력 - 확률 [3점] **정답** ④

n번째 주머니에서 빨간색 공이 나올 확률은 $\frac{n}{20}$이므로 빨간색 공이 나올 확률은

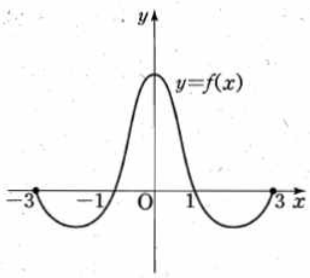
$$\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{20}\cdot\frac{2}{20}+\cdots+\frac{1}{20}\cdot\frac{20}{20}=\frac{1}{400}\sum_{k=1}^{20}k$$

$$=\frac{1}{400}\times\frac{20\times21}{2}=\frac{21}{40}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{6}{400}}{\frac{21}{40}}=\frac{1}{35}$$

14. 정의역이 $\{x \mid -3 \le x \le 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\lim_{h \to 0} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=0$

ㄴ. 함수 $g(x)$는 $x=-1$에서 극솟값, $x=1$에서 극댓값을 가진다.

ㄷ. $g(3)=0$이면 $g(-1)=\int_{3}^{-1} f(t)dt$이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 추론 능력(추측) - 다항함수의 적분법 [4점] **정답** ⑤

$g(x)=\int_{-3}^{x} f(t)dt$에서 $g'(x)=f(x)$

ㄱ. (참) $\lim_{h \to 0} \frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$

$=g'(-1)=f(-1)=0$

ㄴ. (참) $g'(x)=f(x)$이므로

$g'(x)=0$에서 $f(x)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	

위의 증감표에서 $g(x)$는 $x=-1$에서 극솟값, $x=1$에서 극댓값을 가진다.

ㄷ. (참) $g(3)=0$에서

$\int_{-3}^{3} f(t)dt=0$

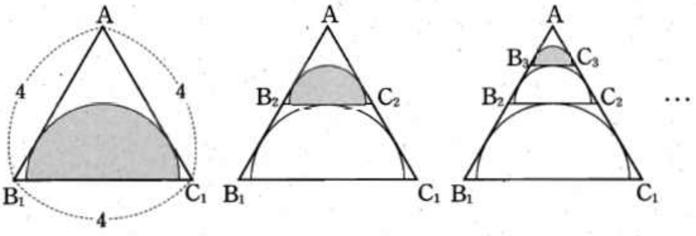
$\int_{-3}^{-1} f(t)dt+\int_{-1}^{3} f(t)dt=0$

$g(-1)+\int_{-1}^{3} f(t)dt=0$

$g(-1)=-\int_{-1}^{3} f(t)dt$

$\therefore g(-1)=\int_{3}^{-1} f(t)dt$

15. [그림 1]과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 AB_1C_1 안에 지름이 선분 B_1C_1 위에 있고 선분 AB_1과 선분 AC_1에 접하는 반원을 그리고, 이 반원을 O_1이라 하자. [그림 2]와 같이 선분 B_1C_1에 평행하고 반원 O_1에 접하는 직선이 선분 AB_1, 선분 AC_1과 만나는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 정삼각형 AB_2C_2 안에 지름이 선분 B_2C_2 위에 있고 선분 AB_2와 선분 AC_2에 접하는 반원을 그리고, 이 반원을 O_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 그려진 반원 O_n의 넓이를 $S_n(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$

③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$

⑤ 3π

15. 추론 능력(추측) - 수열의 극한 [4점] **정답** ③

n번째 그려진 반원의 반지름의 길이를 r_n, 중심을 O_n이라 하자.

$\overline{AO_n}=\overline{AB_n}\sin 60^\circ$

$r_n=\overline{AO_n}\sin 30^\circ=\overline{AB_n}\sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$

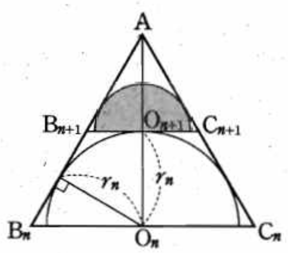
$=\overline{AB_n}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB_n}$

$\overline{AO_{n+1}}=\overline{AO_n}-r_n$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB_n}-\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB_n}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB_n}$

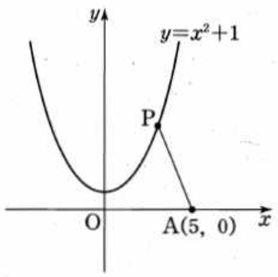
$$\therefore \frac{\overline{AO_{n+1}}}{\overline{AO_n}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB_n}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB_n}}=\frac{1}{2}$$



따라서, 수열 $\{S_n\}$은 공비가 $\frac{1}{4}$, 첫째항이 $\frac{1}{2}\times\pi\times(\sqrt{3})^2=\frac{3}{2}\pi$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{3}{2}\pi}{1-\frac{1}{4}}=2\pi$$

17. 그림과 같이 곡선 $y=x^2+1$ 위의 동점 P와 점 A(5, 0)이 있다. 이때, $\overline{PA}^2$의 최솟값은? [4점]



① 20
② 22
③ 24
④ 26
⑤ 28

17. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법

[4점] **정답** ①

점 P의 x좌표를 t라 하면 $P(t, t^2+1)$

$\overline{PA}^2=(t-5)^2+(t^2+1)^2$

$=t^4+3t^2-10t+26$

$\overline{PA}^2=f(t)$라 하면

$f(t)=t^4+3t^2-10t+26$

$f'(t)=4t^3+6t-10$

$f'(t)=0$에서

$4t^3+6t-10=0$

$2(t-1)(2t^2+2t+5)=0$

$\therefore t=1$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

위의 증감표에서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값 20을 가진다.

따라서, $\overline{PA}^2$의 최솟값은 20이다.

19. 빨간색 깃발 4개와 파란색 깃발 3개가 있다. 이 7개의 깃발을 A, B, C 세 사람에게 모두 나누어 줄 때, 한 사람만 깃발을 받지 못하게 나누어 주는 방법의 수는? (단, 같은 색의 깃발은 구별하지 않는다.)

〔4점〕

① 48　　② 50

③ 52　　④ 54

⑤ 56

19. 수학 외적 문제 해결 능력 - 확률 〔4점〕 **정답** ④

깃발을 받는 두 사람을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_2=3$

뽑힌 두 사람에게 7개의 깃발을 모두 나누어 주는 방법의 수에서 한 사람이 7개의 깃발을 모두 받는 경우인 2가지를 빼면 되므로

$${}_{2+4-1}C_4 \times {}_{2+3-1}C_3 - 2 = {}_5C_4 \times {}_4C_3 - 2$$
$$= 5 \times 4 - 2 = 18$$

따라서, 구하는 방법의 수는

$3 \times 18 = 54$

21. 가격이 2000만 원인 자가용을 2012년 1월 초에 할부로 구입하였다. 2012년 1월 말부터 36회에 걸쳐 매월 말에 일정한 금액을 나누어 갚기로 하였다. 월이율 0.5%로 한 달마다 복리로 계산할 때, 매월 말에 갚아야 할 일정한 금액은? (단, $1.005^{36}=1.2$로 계산한다.) [4점]

① 50만 원　　② 55만 원

③ 60만 원　　④ 65만 원

⑤ 70만 원

21. 수학 외적 문제 해결 능력 - 수열 [4점] **정답** ③

매월 말에 a만 원씩 갚는다고 하면 원리합계의 총합은

$a+a(1+0.005)+\cdots+a(1+0.005)^{35}$

$=\dfrac{a(1.005^{36}-1)}{(1+0.005)-1}=200a(1.2-1)=40a$

2000만 원에 대한 36개월 후의 원리합계는

$2000(1+0.005)^{36}=2000\times1.2=2400$

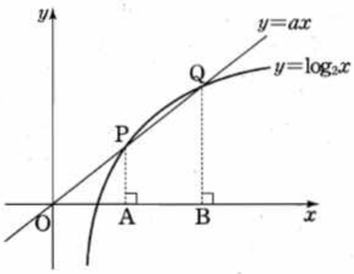
$\therefore 40a=2400$

$\therefore a=60$

25. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $y=ax(a>0)$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.

$$\frac{(\text{사각형 PABQ의 넓이})}{(\text{삼각형 OAP의 넓이})}=3$$

이 되도록 상수 a의 값을 정할 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표보다 작다.) [3점]



25. 이해력 – 지수함수와 로그함수 [3점] **정답** 50

$$\frac{(\text{사각형 PABQ의 넓이})}{(\text{삼각형 OAP의 넓이})}=3\text{이므로}$$

$$\frac{(\text{삼각형 OBQ의 넓이})}{(\text{삼각형 OAP의 넓이})}=4$$

삼각형 OAP와 삼각형 OBQ가 닮음이므로

$\overline{OA} : \overline{OB}=1 : 2$

$\overline{AP} : \overline{BQ}=1 : 2$

따라서, 점 A의 x좌표를 α라 하면 점 B의 x좌표는 2α이므로

$\log_2 \alpha : \log_2 2\alpha=1 : 2$

$\log_2 \alpha=1$

$\therefore \alpha=2$

점 P의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$y=ax$에서 $1=2a$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore 100a=100\times\frac{1}{2}=50$

26. 삼차함수 $f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(a)=f(b)=f(c)$ (나) $f'(4)=f'(8)=0$

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 다항함수의 미분법

[4점] **정답** 18

$f(a)=f(b)=f(c)=k$라 하면

$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ (단, $p\neq 0$)

$f(x)-k=g(x)$라 하면

$g(x)=f(x)-k=px^3+qx^2+rx+s-k$ ………… ㉠

$g(a)=g(b)=g(c)=0$이므로

$g(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)$

$=p\{x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\}$

… ㉡

㉠, ㉡에서

$a+b+c=-\dfrac{q}{p}$

또한, $f'(x)=g'(x)=3px^2+2qx+r$

$f'(x)=0$의 두 근이 4, 8이므로

$4+8=-\dfrac{2q}{3p}$

$\therefore -\dfrac{q}{p}=18$

$\therefore a+b+c=-\dfrac{q}{p}=18$

27. x에 대한 방정식 $4^x-k\cdot2^{x-1}+k=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가지기 위한 정수 k의 최솟값을 구하시오. [4점]

27. 이해력 - 지수함수와 로그함수 [4점] **정답** 17

$4^x-k\cdot2^{x-1}+k=0$에서

$(2^x)^2-\dfrac{k}{2}\cdot2^x+k=0$

$2(2^x)^2-k\cdot2^x+2k=0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$2t^2-kt+2k=0$

$x>0$이므로 $t>1$

따라서, 이차방정식 $2t^2-kt+2k=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^2-kt+2k$라 하면

$f(1)=2-k+2k>0$

$\therefore k>-2$ ⋯⋯ ㉠

$f(t)=2\left(t-\dfrac{k}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}k^2+2k$에서 대칭축은 $t=\dfrac{k}{4}$이므로

$\dfrac{k}{4}>1$

$\therefore k>4$ ⋯⋯ ㉡

$2t^2-kt+2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot2\cdot2k>0$

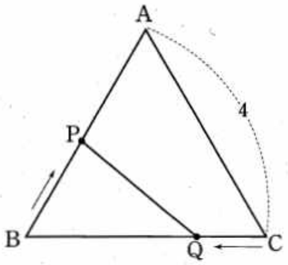
$k^2-16k>0$, $k(k-16)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>16$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $k>16$

따라서, 정수 k의 최솟값은 17이다.

28. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC에서 점 P는 점 B에서 출발하여 선분 AB를 따라 점 A까지 매초 2씩 움직이고, 점 Q는 점 C에서 출발하여 선분 BC를 따라 선분 BC의 중점까지 매초 1씩 움직인다. 점 P와 점 Q가 동시에 출발했을 때, 삼각형 PBQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{3}{8}$이 되는 순간, 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은 a이다. 이때, a^2의 값을 구하시오.



〔4점〕

28. 수학 내적 문제 해결 능력 – 다항함수의 미분법

〔4점〕 **정답** 3

두 점이 출발한 지 t초 후에 $\overline{BP}=2t$,
$\overline{BQ}=4-t(0\le t\le 2)$이므로 삼각형 PBQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{BQ}\cdot\overline{BP}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\cdot(4-t)\cdot 2t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}t(t-4)$$

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4^2=4\sqrt{3}$이고, 삼각형 PBQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{3}{8}$이 될 때의 t를 구해 보면

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}t(t-4)=\frac{3}{8}\cdot 4\sqrt{3}$$
$$t^2-4t+3=0$$
$$(t-3)(t-1)=0$$
$$\therefore t=1(\because 0\le t\le 2)$$

따라서, 삼각형 PBQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{3}{8}$이 될 때 $t=1$이다.

$$f'(t)=-\sqrt{3}t+2\sqrt{3}$$
$$f'(1)=\sqrt{3}$$
$$\therefore a=\sqrt{3}$$
$$\therefore a^2=3$$

29. A 공장에서 생산되는 구슬 한 개의 무게는 평균이 10g이고, 표준편차가 1g인 정규분포를 따른다고 한다. A 공장에서는 생산되는 구슬 중에서 임의로 추출된 구슬 25개의 무게의 평균이 ag 미만이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다. A 공장에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률이 $\frac{3}{100}$일 때, $100a$의 값을 구하시오.

(단, $P(0 \le Z \le 1.9) = 0.47$로 계산한다.) [4점]

29. 수학 외적 문제 해결 능력 – 통계 [4점] **정답** 962

구슬 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(10, 1^2)$을 따르고, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10, \left(\frac{1}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$, 즉 $N\left(10, \left(\frac{1}{5}\right)^2\right)$을 따르므로

$P(\overline{X} < a) = 0.03$

$P\left(Z < \frac{a-10}{\frac{1}{5}}\right) = 0.03$

$P\left(Z > \frac{10-a}{\frac{1}{5}}\right) = 0.03$

$P(0 \le Z \le 50-5a) = 0.47$

$\therefore 50 - 5a = 1.9$

$a = 9.62$

$\therefore 100a = 962$

30. 주머니에 1, 2, 3, 4가 각각 1개씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 꺼내어 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 실시할 때, 나온 공에 적힌 수 중 최소인 수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 수학 외적 문제 해결 능력 - 확률 [4점] **정답** 83

나온 공에 적힌 수 중 최소인 수가 k일 확률을 $P(X=k)$라 하자.

확률 $P(X \ge k)$는 3번 중 한 번도 k보다 작은 수가 나오지 않을 확률이다.

그런데 한 번의 시행에서 k보다 작은 수가 나올 확률이 $\frac{k-1}{4}$이므로 그 여사건의 확률은

$$1-\frac{k-1}{4}=\frac{5-k}{4}$$

$$\therefore P(X \ge k)=\left(\frac{5-k}{4}\right)^3 \ (k=1, 2, 3, 4)$$

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X \ge k)-P(X \ge k+1) \\ &= \left(\frac{5-k}{4}\right)^3-\left\{\frac{5-(k+1)}{4}\right\}^3 \\ &= \left(\frac{5-k}{4}\right)^3-\left(\frac{4-k}{4}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X=2) &= \left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{2}{4}\right)^3 \\ &= \frac{3^3-2^3}{4^3} \\ &= \frac{19}{64} \end{aligned}$$

$\therefore p+q=83$

[다른 풀이]

전체 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4=64$

나온 공에 적힌 수 중 최소인 수가 2인 경우를 생각해 보면

(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 4, 4)
(3, 2, 3), (3, 2, 4), (4, 2, 3), (4, 2, 4)
(3, 3, 2), (3, 4, 2), (4, 3, 2), (4, 4, 2)
(2, 2, 3), (2, 2, 4), (2, 3, 2), (2, 4, 2)
(3, 2, 2), (4, 2, 2), (2, 2, 2)

따라서, 경우의 수는 19이다.

따라서, 구하는 확률은 $\frac{19}{64}$이다.

$\therefore p+q=83$

[오답노트 06차 ~]

2012.08 대성	9 12 13 14 15
	16 18 20 21 26
	28 29
2012.08 비상	9 12 13 14 16
	17 18 19 28 29
	30
2012.08 중앙	7 8 9 10 14
	15 17 19 21 25
	26 27 28 29 30

[2013 수능대비 오답노트 07차]

행렬 ㄱ ㄴ ㄷ : 시키는 대로 해보기 **조건부 : 동전, 주사위 상황 파악하고 조건부** **속도 : 속도를 넓이 구하면 간거리** **넓이비 : 넓이비 구하고 합 구하기**

[2011.06 평가원]

9. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 두 행렬 A, B를 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

<보 기>

ㄱ. $(A-B)^2=abE$

ㄴ. $A^{-1}=2E-A$

ㄷ. $A+A^{-1}=B+B^{-1}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

9.

출제의도 : 역행렬의 뜻을 알고 계산할 수 있는가?

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}$이므로

$A-B=\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}$

$(A-B)^2=\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\-b & 0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-ab & 0\\0 & -ab\end{pmatrix}=-abE$ (거짓)

ㄴ. $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}$

$2E-A=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=2E-A$ (참)

ㄷ. ㄴ에서 $A^{-1}=2E-A$이므로

$A+A^{-1}=2E$

또 $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\-b & 1\end{pmatrix}$ 이므로

$B+B^{-1}=2E$

$\therefore A+A^{-1}=B+B^{-1}$ (참)

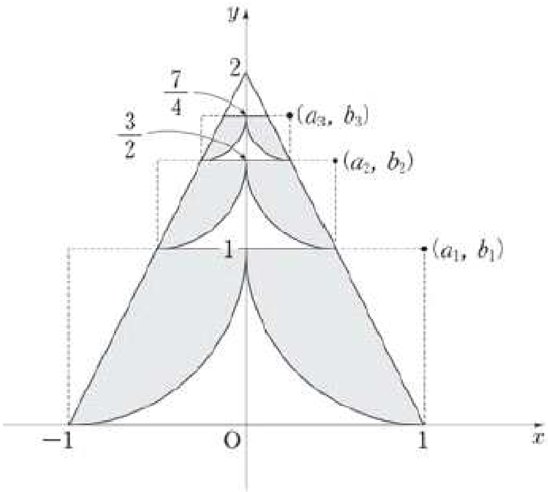
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

14. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 각각

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

이다. 좌표평면에서 중심이 (a_n, b_n)이고 y축에 접하는 원의 내부와 연립부등식 $\begin{cases} y \le b_n \\ 2x+y-2 \le 0 \end{cases}$ 이 나타내는 영역의 공통부분을 P_n이라 하고, y축에 대하여 P_n과 대칭인 영역을 Q_n이라 하자. P_n의 넓이와 Q_n의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{5(\pi-1)}{9}$ ② $\frac{11(\pi-1)}{18}$ ③ $\frac{2(\pi-1)}{3}$

④ $\frac{13(\pi-1)}{18}$ ⑤ $\frac{7(\pi-1)}{9}$

14.
출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?
중심의 좌표가 (a_n, b_n)인 원의 반지름의 길이를 r_n 이라고 하고
중심의 좌표가 (a_{n+1}, b_{n+1})인 원의 반지름의 길이를 r_{n+1} 이라고 하면 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$

따라서

$S_n=2\times\left(\frac{\pi r_n^2}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times r_n^2\right)=\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$

이고

$S_{n+1}=\frac{r_{n+1}^2}{2}(\pi-1)=\frac{1}{4}\times\frac{r_n^2}{2}(\pi-1)$

$=\frac{1}{4}S_n$

이므로

$\{S_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$이고 첫째항이 $\frac{\pi-1}{2}$인 등비수열이다.

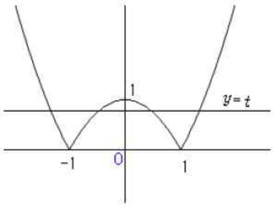
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi-1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2(\pi-1)}{3}$

<답> ③

18. 실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1-0} f(t)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

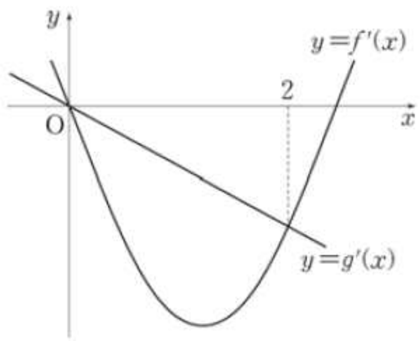
18.
출제의도 : 그래프를 이용하여 함수의 좌극한을 구할 수 있는가?
그림과 같이 $t \to 1-0$일 때 함수 $y=|x^2-1|$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 네 점에서 만난다.



$\therefore \lim_{t \to 1-0} f(t)=4$

<답> ④

19. **삼차함수 $f(x)$의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. $f(0)=g(0)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]**



<보 기>

ㄱ. $0<x<2$ 에서 $h(x)$는 감소한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

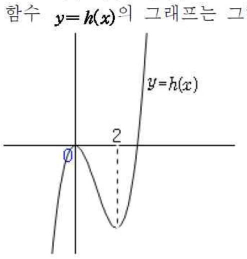
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19.
출제의도 : 미분을 이용하여 함수의 그래프를 추론할 수 있는가?

ㄱ. $0<x<2$일 때 $f'(x)<g'(x)$이므로
$h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$이다.
따라서 $0<x<2$에서 $h(x)$는 감소한다. (참)

ㄴ. $x>2$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로
$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.
따라서 $x>2$에서 $h(x)$는 증가한다.
따라서 $x=2$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (참)

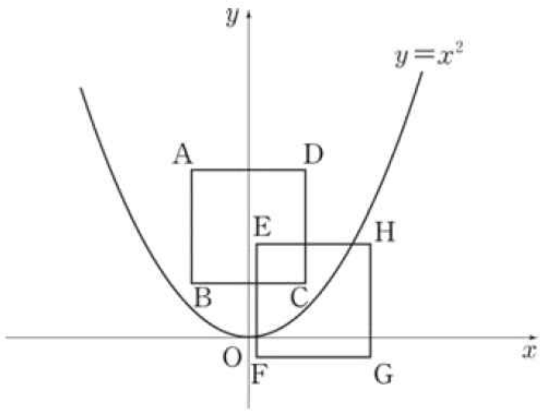
ㄷ. $x<0$일 때 $f'(x)>g'(x)$이므로
$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이다.
따라서 $x<0$에서 $h(x)$는 증가한다.
따라서 $x=0$에서 증가상태에서 감소상태로 바뀌므로 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
이때, $h(0)=f(0)-g(0)=0$이므로
함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 방정식 $h(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(0, 1)$이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? (단, 정사각형의 모든 변은 x축 또는 y축에 평행하다.) [4점]



① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

21.
출제의도 : 미분을 이용하여 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?
정사각형 $EFGH$의 두 대각선의 교점의 좌표를 $(x,\ x^2)$이라 하자.
곡선 $y=x^2$과 정사각형 ABCD는 y축에 대하여 각각 대칭이므로 $0<x<1$인 경우만 생각해도 일반성을 잃지 않는다.
이때, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$이므로 구하는 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\left\{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$
$$=(1-x)x^2=x^2-x^3$$

이다.
$\therefore\ S'(x)=-3x^2+2x=x(-3x+2)$
이때, $S'(x)=0$에서
$$x=\frac{2}{3}\ (\because\ 0<x<1)$$
따라서 함수 $S(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이자 최대이므로 구하는 넓이의 최댓값은
$$S\left(\frac{2}{3}\right)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}$$

<답> ①

26. 역행렬이 존재하는 이차정사각행렬 A가

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix}$$

을 만족시킬 때, 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [4점]

26.
출제의도 : 역행렬의 성질을 이용할 수 있는가?

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} A^{-1} = -E$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} A^{-1}A = -EA$에서

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} E = -A$

$\therefore\ A = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix}$ 즉, $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 3 \end{pmatrix}$에서

$-6+2=b$이고 $-3-2a=3$이다.

$\therefore\ a=-3,\ b=-4$

$\therefore\ ab=12$

<답> 12

28. 자연수 n에 대하여 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=p$이다. $60p$의 값을 구하시오. [4점]

28.
출제의도 : 직선의 교점을 구하고 무한등비수열의 극한을 구할 수 있는가?
두 일차방정식 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$을 연립하여 풀면

$$x=\frac{2\cdot4^n+2^n}{5},\quad y=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

이때, 두 직선의 교점의 좌표가 (a_n, b_n)이므로

$$a_n=\frac{2\cdot4^n+2^n}{5},\quad b_n=\frac{4^n-2^{n+1}}{5}$$

$$\therefore\ p=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^{n+1}}{2\cdot4^n+2^n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 60p=30$$

<답> 30

[2011.09 평가원]

12. 주사위를 1개 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수이면 동전을 3개 동시에 던지고, 6의 약수가 아니면 동전을 2개 동시에 던진다. 1개의 주사위를 1번 던진 후 그 결과에 따라 동전을 던질 때, 앞면이 나오는 동전의 개수가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{11}{24}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12) [정답] ③
[출제의도] 확률의 성질을 활용하여 확률을 구할 수 있는가 ?
주사위 1개를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 경우는 1, 2, 3, 6 이므로 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
또 동전 3개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{3}{8}$ 이고 동전 2개를 동시에 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{2}{4}$ 이다.

따라서 구하는 확률은
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$

14. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}$와 이차정사각행렬 B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+B$의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 1)$성분의 합은? [4점]

(가) $B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이다.
(나) $AB=2A$이고, $BA=4B$이다.

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

14) [정답] ③

[출제의도] 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p-q\\r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\therefore\ p=q,\ r=s$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이때, (나)에서

$AB=\begin{pmatrix}p+r&p+r\\a(p+r)&a(p+r)\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}$

이므로 $p+r=2$이다.

또,

$BA=\begin{pmatrix}p(1+a)&p(1+a)\\r(1+a)&r(1+a)\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$

이므로 $1+a=4$ 즉, $a=3$이다.

($\because$ $1+a\neq4$이면 $p=0,\ r=0$이므로 모순이다.)

따라서 $A+B=\begin{pmatrix}1+p&1+p\\a+r&a+r\end{pmatrix}$의 $(1,\ 2)$성분과 $(2,\ 1)$성분의 합은

$1+p+a+r=1+a+(p+r)=1+3+2=6$

16. 어느 공장에서 생산되는 제품 A의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1)$을 따르고, 제품 B의 무게는 정규분포 $\mathrm{N}(2m,\ 4)$를 따른다. 이 공장에서 생산된 제품 A와 제품 B에서 임의로 제품을 1개씩 선택할 때, 선택된 제품 A의 무게가 k 이상일 확률과 선택된 제품 B의 무게가 k 이하일 확률이 같다. $\frac{k}{m}$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{9}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{23}{18}$ ④ $\frac{47}{36}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

16) [정답] ⑤

[출제의도] 정규분포에서의 확률을 구할 수 있는가 ?

제품 A의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(m, 1)$을 따르고, 제품 B의 무게를 Y라 하면 확률변수 Y는 정규분포 $N(2m, 2^2)$을 따른다.

이때,

$$P(X \geq k) = P\left(\frac{X-m}{1} \geq \frac{k-m}{1}\right) = P(Z \geq k-m)$$

이고,

$$P(Y \leq k) = P\left(\frac{Y-2m}{2} \leq \frac{k-2m}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{k-2m}{2}\right) = P\left(Z \geq -\frac{k-2m}{2}\right)$$

이므로 두 확률이 같으려면

$$k-m = -\frac{k-2m}{2}$$

이 성립해야 한다.

이때, $2k-2m = -k+2m$ 즉, $3k = 4m$이므로 $\frac{k}{m} = \frac{4}{3}$이다.

17. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은? [4점]

(가) $f(x)+3g(x)$의 값은 정수이다. (나) $f(x)+f(x^2)=6$

① 10^4 ② $10^{\frac{13}{3}}$ ③ $10^{\frac{14}{3}}$ ④ 10^5 ⑤ $10^{\frac{16}{3}}$

17) [정답] ②

[출제의도] 상용로그의 지표와 가수를 이해할 수 있는가 ?

$\log x = n+\alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)이라 하면

$f(x)=n$, $g(x)=\alpha$이다.

(가)에서 $3g(x)=3\alpha$의 값이 정수이어야 하므로 $\alpha=0$ 또는 $\alpha=\frac{1}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{2}{3}$이다.

(i) $\alpha=0$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+0$이므로

$x=10^2$

(ii) $\alpha=\frac{1}{3}$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n+\frac{2}{3}$이므로 $f(x^2)=2n$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n=6$

$\therefore\ n=2$

따라서 $\log x=2+\frac{1}{3}$이므로

$x=10^{2+\frac{1}{3}}$

(iii) $\alpha=\frac{2}{3}$일 때,

$\log x^2=2\log x=2n+\frac{4}{3}=2n+1+\frac{1}{3}$이므로

$f(x^2)=2n+1$이다.

따라서 (나)에서

$f(x)+f(x^2)=n+2n+1=6$

$\therefore\ n=\frac{5}{3}$

이때, n은 정수가 아니므로 모순이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 모든 x의 값의 곱은

$10^2\times 10^{2+\frac{1}{3}}=10^{4+\frac{1}{3}}=10^{\frac{13}{3}}$

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$a_{n+1}=\frac{3a_n-1}{4a_n-1}\ (n\geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$4a_{n+1}-1=4\times\frac{3a_n-1}{4a_n-1}-1=2-\frac{1}{4a_n-1}$$
>
> 이다. 수열 $\{b_n\}$을
>
> $$b_1=1,\ b_{n+1}=(4a_n-1)b_n\ (n\geq 1)\cdots\cdots(*)$$
>
> 이라 하면,
>
> ⋮
>
> $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$이다.
>
> 즉, $\{b_n\}$은 등차수열이므로 $(*)$에 의하여
>
> $b_n=$ (가) 이고,
>
> $a_n=$ (나) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(14)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 15　② 16　③ 17　④ 18　⑤ 19

19) [정답] ①

[출제의도] 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_2=(4a_1-1)b_1=3$이므로

$b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n=\cdots=b_2-b_1=2$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$b_n=2n-1$

따라서 $b_{n+1}=2n+1$이므로 $(*)$에서

$2n+1=(4a_n-1)(2n-1)$

$$\therefore\ a_n=\frac{1}{4}\left(\frac{2n+1}{2n-1}+1\right)=\frac{n}{2n-1}$$

따라서 $f(n)=2n-1$, $g(n)=\dfrac{n}{2n-1}$이므로

$$f(14)\times g(5)=27\times\frac{5}{9}=15$$

20. 함수 $f(x)=x^2-x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x+1) & (x \le 0) \\ f(x-1) & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

20) [정답] ②

[출제의도] 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가 ?

함수 $y=\{g(x)\}^2$이 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -0}\{g(x)\}^2=\lim_{x \to +0}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$

이 성립해야 한다.

이때 이차함수 $f(x)$는 연속함수이므로

$\lim_{x \to -0}\{g(x)\}^2=\lim_{x \to -0}\{f(x+1)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$,

$\lim_{x \to +0}\{g(x)\}^2$

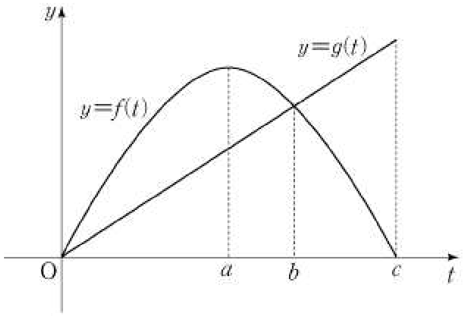
$=\lim_{x \to -0}\{f(x-1)\}^2=\{f(-1)\}^2=(2+a)^2$,

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=a^2$

이므로 $a^2=(2+a)^2$ 즉, $4a+4=0$이어야 한다.

$\therefore\ a=-1$

21. 같은 높이의 지면에서 동시에 출발하여 지면과 수직인 방향으로 올라가는 두 물체 A, B가 있다. 그림은 시각 $t\,(0 \le t \le c)$에서 물체 A의 속도 $f(t)$와 물체 B의 속도 $g(t)$를 나타낸 것이다.



$\int_0^c f(t)\,dt = \int_0^c g(t)\,dt$이고 $0 \le t \le c$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.
ㄴ. $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.
ㄷ. $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21) [정답] ⑤
[출제의도] 속도와 거리의 관계를 추론할 수 있는가 ?
ㄱ. $t=a$일 때, 물체 A의 높이는 $\int_0^a f(t)dt$이고, 물체 B의 높이는 $\int_0^a g(t)dt$이다.
이때, 주어진 그림에서
$\int_0^a f(t)dt > \int_0^a g(t)dt$
이므로 A가 B보다 높은 위치에 있다. (참)

ㄴ. $0 \le t \le b$일 때 $f(t)-g(t) \ge 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 커진다.
또, $b < t \le c$일 때 $f(t)-g(t) < 0$이므로 시각 t에서의 두 물체 A, B의 높이의 차는 점점 줄어든다.
따라서 $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다. (참)

ㄷ. $\int_0^c f(t)dt = \int_0^c g(t)dt$이므로 $t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25. 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=2,\ \lim_{n\to\infty}(n^2+1)b_n=7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}$의 값을 구하시오.
(단, $a_n\neq 0$) [3점]

25) [정답] 35
[출제의도] 무한수열의 극한을 구할 수 있는가?

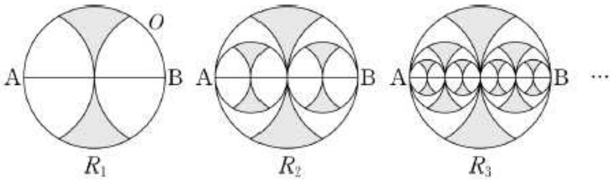
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10n+1)b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}$$

$$=\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{11}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{7}{2}\times 10=35$$

[2012.09 평가원]

9. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ⧖ 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 ⧖ 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



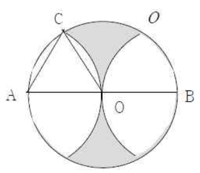
① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

9)

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

아래 그림과 같이 원 O의 중심을 O, 원 O와 중심이 A인 원이 만나는 점을 C라 하자.



이때, 삼각형 AOC는 정삼각형이므로

$S_1 = 1^2\times\pi - 4\times\{2\times(\text{부채꼴 OAC}) - \triangle\text{AOC}\}$

$= 1^2\times\pi - 4\times\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right\}$

$= \pi - \left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)$

$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

한편, 도형 R_n에서 가장 작은 원은 개수가 2^{n-1}, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_n = S_1 + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times S_1 + \cdots + 2^{n-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1}S_1$

$= S_1 + \frac{1}{2}S_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_1 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}S_1$

따라서

$\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{S_1}{1-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}}$

$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$

<답> ②

12. 주머니 안에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4장의 카드가 있다. 주머니에서 갑이 2장의 카드를 임의로 뽑고 을이 남은 2장의 카드 중에서 1장의 카드를 임의로 뽑을 때, 갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 을이 뽑은 카드에 적힌 수보다 작을 확률은? [3점]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

12)

출제의도 : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

나올 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 12$**(가지)**

을이 뽑은 1**장의 카드에 적힌 수를** a**라 하고**
갑이 뽑은 2**장의 카드에 적힌 두 수의 곱을** b**라 할 때**
가능한 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $a=3$**일 때,** $b=2(=1\times 2)$

∴ 1**가지**

(ⅱ) $a=4$**일 때,** $b=2(=1\times 2)$

$b=3(=1\times 3)$

∴ 2**가지**

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+2}{{}_4C_2 \times {}_2C_1} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

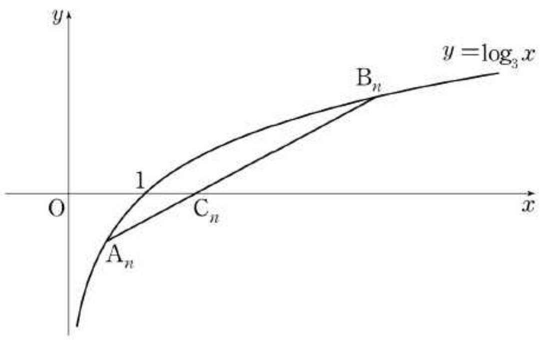
<답> ③

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 A_n이라 하자. 그래프 위의 점 B_n과 x축 위의 점 C_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$과 x축의 교점이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n} : \overline{\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n} = 1 : 2$

점 C_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1



15)

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있고 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

A_n의 x좌표가 $\frac{1}{n}$이므로

$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$

한편, B_n의 좌표를 $(b_n,\ \log_3 b_n)$이라 하면 점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+2\times\frac{1}{n}}{1+2},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{1+2}\right)$

즉,

$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}\right)$

이때, 점 C_n의 y좌표가 0이므로

$\log_3 b_n + 2\log_3\frac{1}{n} = 0$

$\log_3 b_n = \log_3 n^2$

$\therefore\ b_n = n^2$

따라서,

$x_n = \frac{b_n+\frac{2}{n}}{3} = \frac{n^2+\frac{2}{n}}{3} = \frac{n^3+2}{3n}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^3}}{3} = \frac{1}{3}$$

<답> ①

16. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

$$(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$$

를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16)

출제의도 : 역행렬에 관련된 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서

$(A+B)\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})=E$

이므로

$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})$

즉, $A+B$의 역행렬이 존재한다. <참>

ㄴ. $A=E$이면 $A^{-1}=E$이므로 주어진 식에서

$(E+B)(E+B^{-1})=4E$

$E+B+B^{-1}+E=4E$

$B+B^{-1}=2E$

양변에 B를 곱하면

$B^2+E=2B$

$(B-E)^2=O$

이때, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$으로 놓으면

$(B-E)^2=O$이지만 $B\neq E$이다.

<거짓>

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$에서 $2AB=2BA=E$이므로

$A^{-1}=2B$, $B^{-1}=2A$

주어진 식에 대입하면

$(A+B)(2A+2B)=4E$

$(A+B)^2=2E$

$A^2+2AB+B^2=2E$

$A^2+B^2=E$ <참>

<답> ③

18. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx,\quad f(x)g(x)=-2x^4+8x^3$$

을 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

18)

출제의도 : 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$**가 이차함수이므로**

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$**라 하자.**

$$\begin{aligned}g(x)&=\int\{x^2+f(x)\}dx\\&=\int\{x^2+ax^2+bx+c\}dx\\&=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx\\&=\frac{1}{3}(1+a)x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C\ \cdots ㉠\end{aligned}$$

(C**는 적분상수)**

한편, $f(x)g(x)=(ax^2+bx+c)g(x)$

$=-2x^4+8x^3\ \cdots ㉡$

이므로 $g(x)$**는 이차함수이다.**

$\therefore\ a=-1$

㉠, ㉡에서

$(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)=-2x^4+8x^3$

$-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(-C+bc+\frac{bc}{2}\right)x^2$

$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3$

에서

$-\frac{b}{2}=-2,\ \frac{b^2}{2}-c=8,$

$-C+bc+\frac{bc}{2}=0,\ cC=0$

$\therefore\ b=4,\ c=0,\ C=0$

$\therefore\ g(x)=2x^2$

$\therefore\ g(1)=2$

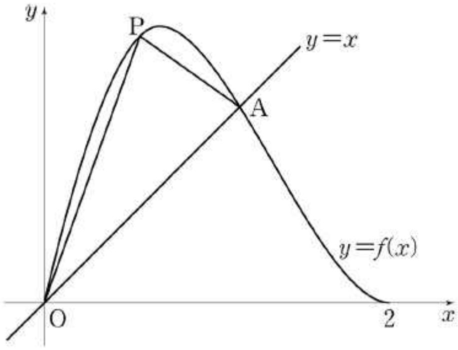
<답> ②

19. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수

$$f(x)=ax(x-2)^2 \quad \left(a>\frac{1}{2}\right)$$

에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점 중 원점 O가 아닌 점을 A라 하자. 점 P가 원점으로부터 점 A까지 곡선 $y=f(x)$ 위를 움직일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되는 점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이다. 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}$　　② $\frac{4}{3}$　　③ $\frac{17}{12}$　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ $\frac{19}{12}$



19)

출제의도 : 도형의 넓이 미분법을 이용하여 접선의 접점을 구할 수 있는가?

삼각형 OAP**의 넓이가 최대가 되려면**
점 P**에서 직선** $y=x$**까지의 거리가 최대이어야 한다.**
이때, 점 P**에서 접선은 직선** $y=x$**와 평행이므로** $f'(x)=1$**에서**

$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$

$3ax^2-8ax+4a-1=0$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$**이므로**

$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$

$\frac{3}{4}a-1=0$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

<답> ②

20. 어느 공장에서 생산하는 제품의 무게는 모평균이 m, 모표준편차가 $\frac{1}{2}$인 정규분포를 따른다고 한다.
이 공장에서 생산한 제품 중에서 25개를 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰구간이 $[a,\ b]$일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq c) = 0.95$를 만족시키는 c를 a, b로 나타낸 것은?
(단, 확률변수 Z는 표준정규분포를 따른다.) [4점]

① $3(b-a)$　　② $\frac{7}{2}(b-a)$　　③ $4(b-a)$

④ $\frac{9}{2}(b-a)$　　⑤ $5(b-a)$

20)
출제의도 : 정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$**을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기** $n=25$**인 표본의 표본평균을** $\overline{X}$**라 할 때, 모평균** m**에 대한 신뢰도** 95%**의 신뢰구간은**

$$\left[\overline{X} - c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}},\ \overline{X} + c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}}\right]$$

(단, $\mathrm{P}(|Z| \leq c) = 0.95$**)**

즉, $\left[\overline{X} - \frac{c}{10},\ \overline{X} + \frac{c}{10}\right]$

$\therefore\ a = \overline{X} - \frac{c}{10},\ b = \overline{X} + \frac{c}{10}$

$b - a = 2 \times \frac{c}{10} = \frac{c}{5}$

$\therefore\ c = 5(b-a)$

<답> ⑤

21. 좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\quad g(x)=|x-a|$$

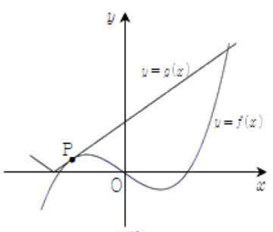
의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

21)

출제의도 : 미분법을 이용하여 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



< 그림1 >

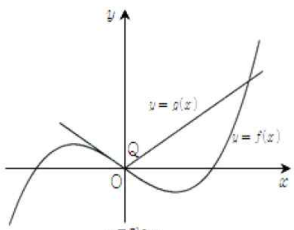
< 그림1 >**에서 직선** $g(x)=x-a$**가 곡선** $f(x)=6x^3-x$ **위의 점** P**에서 접하므로**

$f'(x)=1$**에서** $18x^2-1=1$, $x^2=\frac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\frac{1}{3}\ (x<0)$

이때, 접점 P**의 좌표는** $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$**이므로**

$\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}-a \quad \therefore\ a=-\frac{4}{9}$



< 그림2 >

< 그림2 >**에서 직선** $g(x)=-x+a$**가 곡선** $f(x)=6x^3-x$ **위의 점** Q**에서 접하므로** $f'(x)=-1$**에서**

$18x^2-1=-1$, $18x^2=0 \quad \therefore\ x=0$

이때, 접점 Q**의 좌표는** $(0,\ 0)$**이므로**

$0=0+a \quad \therefore\ a=0$

따라서 구하는 모든 실수 a**의 값의 합은** $-\frac{4}{9}+0=-\frac{4}{9}$

<답> ④

28. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

28)

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$$\begin{aligned}(a_{n+1}-a_n)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2\\ &= 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right) - 2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)\\ &= \frac{16}{9^n}\ (n \geq 2)\end{aligned}$$

이때, $n=1$이면

$(a_2-a_1)^2 = 2(1-\frac{1}{9}) = \frac{16}{9}$

이므로

$(a_{n+1}-a_n)^2 = \frac{16}{9^n}\ \ (n \geq 1)$

한편, $a_{n+1} > a_n$이므로

$a_{n+1}-a_n = \frac{4}{3^n}$

$\therefore\ a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$

이때, $a_1 = 10$이므로

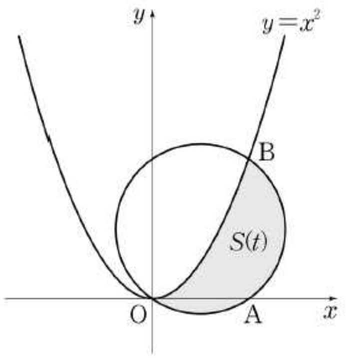
$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}\\ &= 10 + \frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}\\ &= 10 + 2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n \geq 2)\end{aligned}$$

따라서,

$\lim_{n\to\infty} a_n = 12$

<답> 12

29. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$과 양수 t에 대하여 세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t^2)을 지나는 원 C가 있다. 원 C의 내부와 부등식 $y \le x^2$이 나타내는 영역의 공통부분의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $S'(1)=\frac{p\pi+q}{4}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

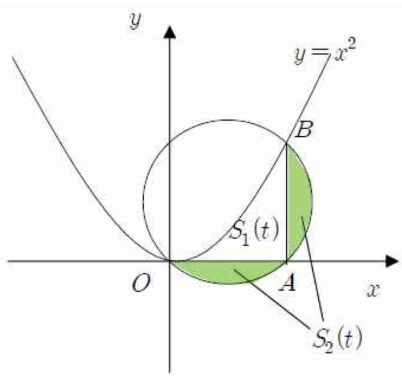


29)

출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

세 점 O(0, 0), A(t, 0), B(t, t^2)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$



위의 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2(t)=$ **(반원의 넓이)**

$-$**(직각삼각형 OAB의 넓이)**

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3$$

위의 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$S_1(t)=\int_0^t x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$는

$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$

$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$

$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$

$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$

$\therefore\ S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}$

$=\frac{3\pi-2}{4}$

$\therefore\ p=3,\ q=-2$

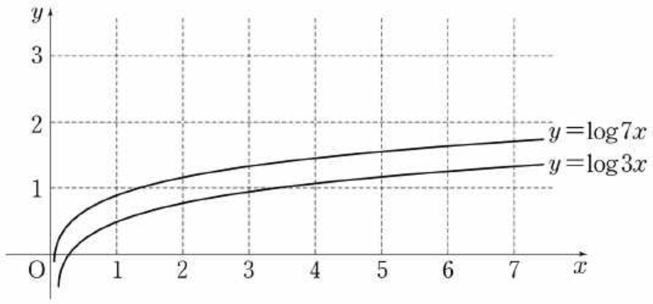
$\therefore\ p^2+q^2=9+4=13$

...

<답> 13

30. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y=\log 3x$, $y=\log 7x$의 그래프와 모두 만나는 것의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 자연수이고 한 변의 길이가 1이다.
> (나) 꼭짓점의 x좌표는 모두 100 이하이다.



30)

출제의도 : 로그부등식을 활용하여 정사각형의 개수를 구할 수 있는가?

두 자연수 n, k에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $A_1(n,k)$, $A_2(n+1,k)$, $A_3(n+1,k+1)$, $A_4(n,k+1)$으로 하는 정사각형이 두 함수 $y=\log 7x$, $y=\log 3x$와 모두 만나기 위해서는

$\log 7n \le k+1$ 이고 $\log 3(n+1) \ge k$

이어야 한다.

즉,

$n \le \dfrac{10^{k+1}}{7}$ 이고 $n \ge \dfrac{10^k}{3}-1$

(i) $k=1$일 때,

$\dfrac{10}{3}-1 \le n \le \dfrac{100}{7}$

그러므로 자연수 n은 3, 4, ⋯, 14로 12개다.

(ii) $k=2$일 때,

$\dfrac{100}{3}-1 \le n \le \dfrac{1000}{7}$

그리고 꼭지점의 x좌표는 모두 100이하이므로 $n+1 \le 100$이다.

그러므로 99이하의 자연수 n은

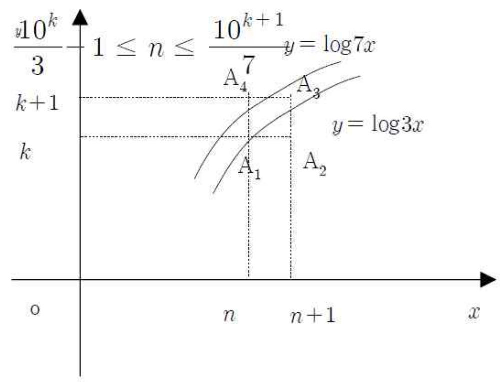
33, 34, ⋯, 99로 67개다.

따라서 모든 정사각형의 개수는

$12+67=79$

<답> 79

$\therefore \dfrac{10^k}{3}-1 \le n \le \dfrac{10^{k+1}}{7}$



[오답노트 07차 ~]

2011.06 평가원	9 14 18 19 21
	26 28
2011.09 평가원	12 14 16 17 19
	20 21 25
2012.09 평가원	9 12 15 16 18
	19 20 21 28 29
	30

[2013 수능대비 오답노트 08차]

연속확률변수 : 밑넓이1, 평균계산, 분산계산 방법
그래프행렬 : 작년미출제, 어렵게 참거짓판별, 최소비용거리
적분 시그마 : 기본0~1, p칸, a+p칸 변형 차이 이해하기
적분 시그마 : 최고 어려운 멱급수처럼 펼쳐서 알아보기

[2012.10 교육청]

11. 미분가능한 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<0) \\ a(x-1)^2+b & (x\geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

11. [출제의도] 미분가능성을 이해한다.

함수 $f(x)$가 연속이므로 $f(0)=a+b=1$ ⋯ ㉠

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$$f'(0)=\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

그런데 $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$,

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=2a(0-1)=-2a$ 이므로

$-1=-2a$ ⋯ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 $b=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $f(1)=b=\frac{1}{2}$ 이다.

14. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + n + 1$$

을 만족시킬 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $n \ge 1$일 때,
>
> $a_{n+1} = 2a_n + n + 1$ …… ㉠
>
> $a_{n+2} = 2a_{n+1} + \boxed{\text{(가)}}$ …… ㉡
>
> 이고, ㉡에서 ㉠을 뺀 식으로부터
>
> $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1$
>
> 을 얻는다. $b_n = a_{n+1} - a_n$이라 하면
>
> $b_{n+1} = 2b_n + 1$
>
> 이므로
>
> $b_n = 2^{n+1} - 1$
>
> $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1} - 1)\ \ (n \ge 2)$
>
> $= 2^{n+1} + \boxed{\text{(나)}}$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(5) - g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

14. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 수열의 일반항을 구하는 과정을 설명한다.

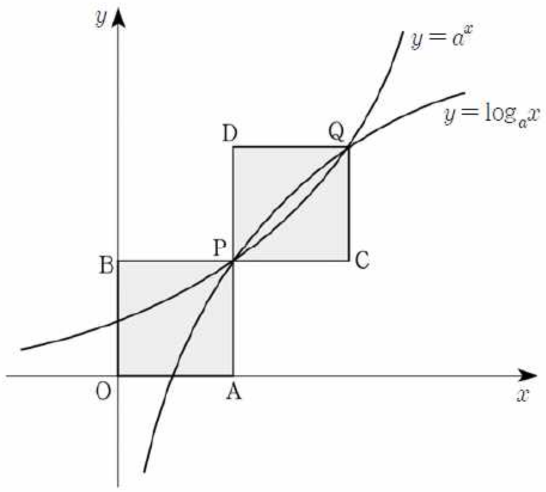
$a_{n+1} = 2a_n + n + 1$에서 n에 $n+1$을 대입하면

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 1 + 1$이므로 $f(n) = n + 2$

$a_n = 1 + \dfrac{4(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n-1) = 2^{n+1} - n - 2$이므로

$g(n) = -n - 2\ \ \therefore\ f(5) - g(5) = 7 - (-7) = 14$

16. 그림과 같이 지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$가 두 점 P, Q에서 만날 때, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.
점 Q를 지나고 x축과 평행한 직선이 직선 AP와 만나는 점을 D, 점 Q를 지나고 y축과 평행한 직선이 직선 BP와 만나는 점을 C라 할 때, 두 사각형 OAPB와 PCQD는 합동이다. a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ 2

16. **[출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 도형과 관련된 문제를 해결한다.**
두 사각형이 합동이고 두 점 P, Q가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(k,\ k)$, $\mathrm{Q}(2k,\ 2k)$이다.
따라서 $a^k=k$, $a^{2k}=2k$이므로 $2k=a^{2k}=(a^k)^2=k^2$에서 $k=2$이다. $a^2=2$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2B+AB^2=E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $(A+B)^{-1}$이 존재한다.

ㄴ. $A+B=E$이면 $A^3=E$이다.

ㄷ. $A^2B=BA^2$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

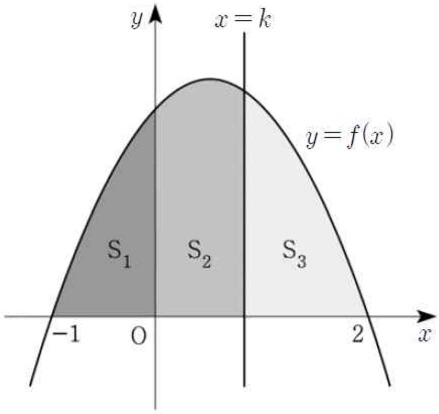
17. [출제의도] 행렬의 성질을 추론한다.

ㄱ. $A^2B+AB^2=A(A+B)B=E$에서 $B^{-1}=A(A+B)$
이므로 $BA(A+B)=E$
따라서 $(A+B)^{-1}=BA$로 존재한다. (참)

ㄴ. $A+B=E$이므로 $A(A+B)B=E$에서 $AB=E$
$A(E-A)=E$, $A^2=A-E$
$A^3=AA^2=A(A-E)=A^2-A=-E$ (거짓)

ㄷ. $BA(A+B)=E$에서 $BA^2+BAB=E$이므로
$BA^2+BAB=A^2B+AB^2$, $BAB=AB^2$
양변의 오른쪽에 B^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

19. 함수 $f(x)=-x^2+x+2$에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축과 직선 $x=k$ $(0<k<2)$로 나눈 세 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, S_2의 값은? [4점]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

19. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 추론한다.

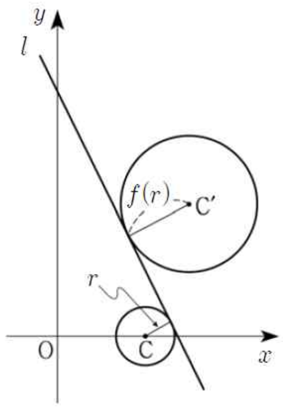
S_1, S_2, S_3이 등차수열을 이루므로 $2S_2=S_1+S_3$이다.

$$3S_2=S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}f(x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2} \qquad \therefore\ S_2=\frac{3}{2}$$

20. 그림과 같이 중심이 C$(2, 0)$이고 반지름의 길이가 r $(r < \sqrt{5})$ 인 원 C가 있다. 기울기가 -2이고 원 C에 접하는 직선을 l이라 하자. 직선 l에 접하고 중심이 C$'(3, 3)$인 원 C$'$의 반지름을 $f(r)$라 할 때, $\lim_{r \to +0} f(r)$의 값은? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

20. **[출제의도] 도형에서 함수의 극한을 이해한다.**

기울기가 -2인 직선 l의 y절편을 b라 하면

직선 l의 방정식은 $2x+y-b=0$

점 C$(2,\ 0)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리

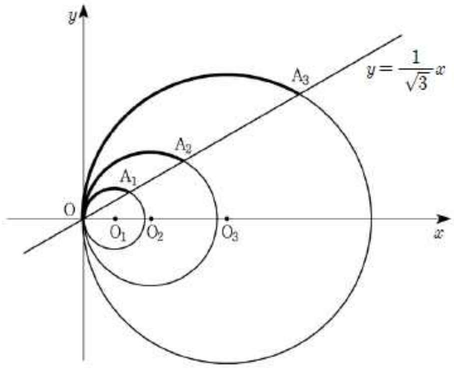
$r = \frac{|2 \cdot 2 - b|}{\sqrt{5}} = \frac{|4-b|}{\sqrt{5}}$에서 $b = 4 \pm \sqrt{5}r$ ⋯ ㉠

점 C$'(3,3)$에서 직선 l : $2x+y-b=0$에 이르는 거리

$f(r) = \frac{|9-b|}{\sqrt{5}}$에 ㉠을 대입하여 극한을 취하면

$$\lim_{r \to +0} f(r) = \lim_{r \to +0} \frac{|5 \pm \sqrt{5}r|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

21. 그림과 같이 중심이 $(1, 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다. 원 O_1이 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_1이라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_1의 길이를 l_1이라 하자.
중심이 $(l_1, 0)$이고 반지름의 길이가 l_1인 원 O_2를 그린다. 원 O_2가 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A_2라 하고 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$의 윗 쪽에 있는 호 OA_2의 길이를 l_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{\pi-3}$ ② $\frac{2}{\pi-3}$ ③ $\frac{1}{2\pi-3}$
④ $\frac{2}{2\pi-3}$ ⑤ $\frac{3}{2\pi-3}$

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 이해한다.

직선 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$와 x축이 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다. $\triangle \mathrm{OO_1A_1}$은 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{OO_1A_1}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_1=\frac{2}{3}\pi$

$\triangle \mathrm{OO}_n\mathrm{A}_n$은 이등변삼각형이므로 $\angle \mathrm{OO}_n\mathrm{A}_n=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $l_n=\frac{2}{3}\pi\cdot l_{n-1}$ $(n\geq 2)$

수열 $\left\{\frac{1}{l_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{3}{2\pi}$이고 공비가 $\frac{3}{2\pi}$인 등비수열이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l_n}=\frac{\frac{3}{2\pi}}{1-\frac{3}{2\pi}}=\frac{3}{2\pi-3}$

25. $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [3점]

25. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수열의 합에 관한 문제를 해결한다.

$64=2^6$ 이므로 $[\log_2 64]=6$

$3^3=27<64<3^4=81$ 이므로 $[\log_3 64]=3$

$4^3=64$이므로 $[\log_4 64]=3$

$5^2=25<64<5^3=125$ 이므로 $[\log_5 64]=2$

$6^2=36<64<6^3=216$ 이므로 $[\log_6 64]=2$

그러므로 $\sum_{n=2}^{6}[\log_n 64]=16$

26. $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. **[출제의도] 정적분의 성질을 이해한다.**

$F(x)=\int_2^x (t^2+3t-2)\,dt$ 라 하면 $F'(x)=x^2+3x-2$

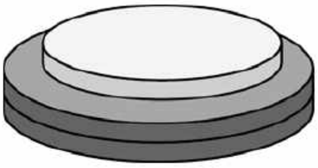
$$(\text{준식})=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}\cdot\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$$

$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}(2^2+3\cdot 2-2)=2$$

27. 반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다. (나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다. (다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같이 쌓는 방법의 수를 구하시오. [4점]

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 규칙을 추론한다.

쌓는 순서가 정해져 있으므로 세 개의 원판을 택하면 쌓는 방법은 한가지로 정해진다. 그러므로 구하는 방법의 수는 서로 다른 6개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$

29. 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다. (나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

29. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 극값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가)에 의하여 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $a=0$

따라서 $f'(x)=3x^2+b$이고, 조건 (나)에서 $f'(1)=0$이고 $f(1)=0$이므로 $b=-3$, $c=2$

따라서 $f(x)$의 극댓값 $f(-1)=4$

[2011.10 서울]

10. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

< 보 기 >

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=BA^2$이다.

ㄴ. $AB=O$이면 $AB=BA$이다.

ㄷ. $A^2B=E$이면 $AB=BA$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10) 정답 ③

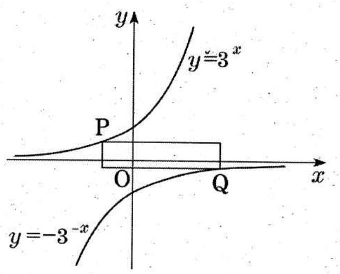
[출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=ABA=BA^2$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A(AB)=(AB)A=E$이므로 $AAB=ABA$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

15. 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ 3^{\alpha})$과 함수 $y=-3^{-x}$의 그래프 위의 점 $\mathrm{Q}(\beta,\ -3^{-\beta})$에 대하여 $\beta-\alpha=4$가 성립한다. 그림과 같이 두 점 P, Q를 지나고 x축, y축과 평행한 직선을 그려 만들어지는 직사각형의 넓이의 최솟값은? [4점]



① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

15) 정답 ⑤

[출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^{\alpha}-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

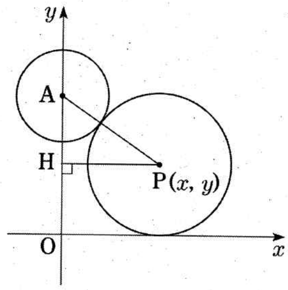
$$S=(\beta-\alpha)(3^{\alpha}+3^{-\beta})=4(3^{\alpha}+3^{-\alpha-4})$$

$$\geq 4\times 2\sqrt{3^{\alpha}\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$$

(단, 등호는 $\alpha=-2$, $\beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

16. 그림과 같이 중심이 A(0, 3)이고 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 x축에 접하는 원의 중심을 P(x, y)라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}$의 값은? [4점]



① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

16) 정답 ④

[출제의도] 도형에서 함수의 극한값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

중심이 P(x, y)이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y이다. 두 원이 외접하므로 $\overline{\mathrm{PA}}=y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2}=y+1$이다.

$x^2+(y-3)^2=(y+1)^2$에서 $x^2=8y-8$

이때, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{y+1}=\lim_{y\to\infty}\frac{8y-8}{y+1}=8$$

17. 삼차함수 $f(x)=3x^3+4x^2-2x-1$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)$$

의 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

17) 정답 ⑤

[출제의도] 무한급수와 정적분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(-1+\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x^3+4x^2-2x-1)dx$$

$$=\int_{0}^{1}(4x^2-1)dx=\frac{1}{3}$$

18. 다음은 6개의 꼭짓점 A, B, C, D, E, F로 이루어진 그래프를 나타내는 행렬이다.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

이 그래프에 대한 옳은 설명만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. 두 꼭짓점 A와 F를 연결하는 변이 존재한다.

ㄴ. 모든 꼭짓점에는 3개 이상의 변이 연결되어 있다.

ㄷ. 꼭짓점 B에서 출발하여 두 개의 변을 지나 꼭짓점 E로 가는 경로가 존재한다.

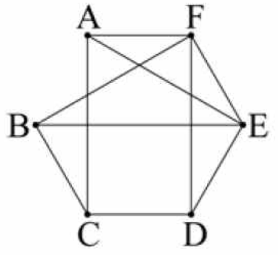
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18) 정답 ⑤

[출제의도] 그래프의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 그림과 같다.



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

19. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P는 점 A(5)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 $3t^2-2$이고, 점 Q는 점 B(k)를 출발하여 시각 t에서의 속도가 1이다. 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 2번 만나도록 하는 정수 k의 값은? (단, $k \neq 5$) [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19) 정답 ②

[출제의도] 속도와 거리의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라 하면

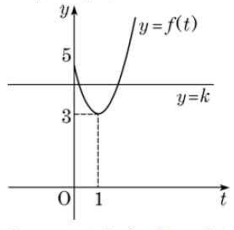
$x_{\mathrm{P}} = 5 + \int_0^t (3t^2-2)\,dt = t^3-2t+5$,

$x_{\mathrm{Q}} = k + \int_0^t 1\,dt = t+k$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5=t+k$ 즉, $t^3-3t+5=k$이어야 한다.

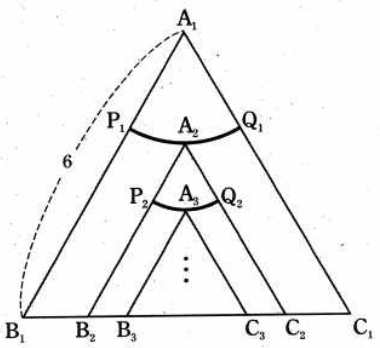
$f(t)=t^3-3t+5$라 하면

$f'(t)=3t^2-3=3(t-1)(t+1)$이므로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



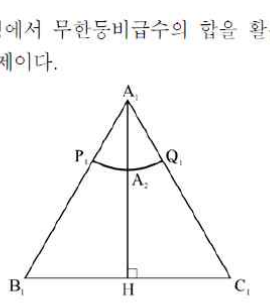
직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 $3<k<5$이므로 정수 k는 4이다.

21. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 꼭짓점 A_1을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_1B_1}$인 원이 삼각형 $A_1B_1C_1$과 만나는 점을 각각 P_1, Q_1이라 하고 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내부에 있는 호 P_1Q_1을 이등분하는 점을 A_2라 하자. 점 A_2를 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_2, C_2가 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다.
꼭짓점 A_2를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}\overline{A_2B_2}$인 원이 삼각형 $A_2B_2C_2$와 만나는 점을 각각 P_2, Q_2라 하고 삼각형 $A_2B_2C_2$의 내부에 있는 호 P_2Q_2를 이등분하는 점을 A_3이라 하자. 점 A_3을 꼭짓점으로 하고 나머지 두 꼭짓점 B_3, C_3이 변 B_1C_1 위에 있는 정삼각형 $A_3B_3C_3$을 그린다.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 P_nQ_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ ③ $2\sqrt{3}\pi$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}\pi$

21) 정답 ①
[출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{A_1P_1} = \overline{A_1A_2} = 2$이므로 $l_1 = \frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{A_1H} = 3\sqrt{3}$
$\overline{A_2H} = \overline{A_1H} - \overline{A_1A_2} = 3\sqrt{3} - 2$
그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1 - \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\pi$$

26. x에 대한 로그방정식

$$(\log x+\log 2)(\log x+\log 4)=-(\log k)^2$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k의 값의 범위가 $\alpha<k<\beta$일 때, $10(\alpha^2+\beta^2)$의 값을 구하시오. [4점]

26) 정답 25

[출제의도] 로그방정식을 이용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+(\log 2+\log 4)X+(\log 2)(\log 4)+(\log k)^2=0$

주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

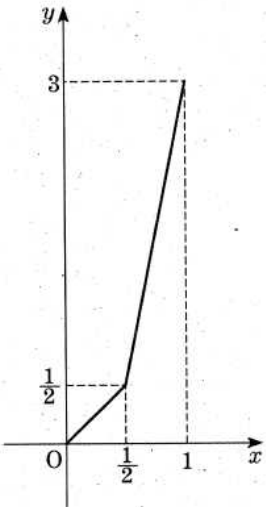
$D=(\log 2+\log 4)^2-4(\log 2)(\log 4)-4(\log k)^2>0$

$-\frac{1}{2}\log 2<\log k<\frac{1}{2}\log 2$

$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}<k<\sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2)=10\left(\frac{1}{2}+2\right)=25$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 1$이고 확률밀도 함수의 그래프는 그림과 같다. 확률변수 X의 평균이 $\mathrm{E}(X) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



28) 정답 7

[출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (5x^2 - 2x)\,dx = \frac{3}{4}$$

$\therefore\ p+q=7$

30. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=3,\ a_n=8n-4\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30) 정답 31

[출제의도] 수열의 합을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(8k-4)-1=4n^2-1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

$\therefore\ p+q=31$

[2011.10 대전]

8. 두 무한수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n - b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $0 < a_n < b_n$이고 수열 $\{b_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_n\}$도 수렴한다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, $a_n - b_n = c_n$이라 하면

$b_n = a_n - c_n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(a_n - c_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} c_n$

$= \alpha - \beta$ (참)

ㄴ. (반례) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, $b_n = 2^n$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$이지만

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty$으로 발산한다. (거짓)

ㄷ. (반례) $a_n = (-1)^n + 2$, $b_n = 4$ 이면,

$0 < a_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 4$(수렴) 이지만

a_n은 발산한다. (거짓)

13. $n \geq 2$인 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 세 로그함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_4 x$, $h(x)=\log_{16} x$와 만나는 세 점을 각각 A, B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=a_n$, $\overline{\mathrm{BC}}=b_n$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}(a_n+2b_n)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}\log_2 10!$ ② $\frac{3}{4}\log_2 10!$ ③ $\log_2 10!$

④ $2\log_2 10!$ ⑤ $\frac{5}{2}\log_2 10!$

$$a_n = \log_2 n - \log_4 n = \frac{1}{2} log_2 n$$

$$b_n = \log_4 n - \log_{16} n = \frac{1}{2} log_4 n = \frac{1}{4} log_2 n$$

$$\therefore \ a_n = 2b_n$$

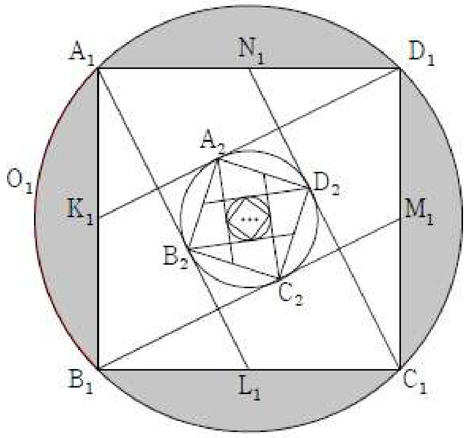
$$\therefore \ \sum_{n=2}^{10}(a_n+2b_n) = 4\sum_{n=2}^{10} b_n = \log_2 2\cdot 3\cdots\ 10 = \log_2 10!$$

14. 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 있다.

그림과 같이 원 O_1과 원 O_1에 내접하는 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.

선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1B_1의 각각의 중점 L_1, M_1, N_1, K_1에 대하여, 네 개의 선분 A_1L_1, B_1M_1, C_1N_1, D_1K_1의 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형에 내접하는 원을 O_2라 하자.

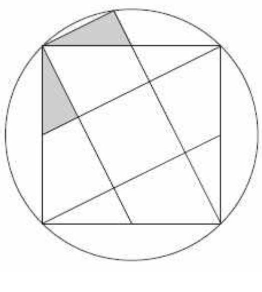
원 O_2와 원 O_2에 내접하는 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{3(\pi-2)}{2}$　② $\frac{4(\pi-2)}{3}$　③ $\frac{5(\pi-2)}{4}$

④ $\frac{7(\pi-2)}{6}$　⑤ $\frac{10(\pi-2)}{9}$

원 O_1에 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.
원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이는 2이다.
그림에서 두 삼각형의 넓이는 같으므로 원 O_2에 외접하는 정사각형의 넓이는 원 O_1에 내접하는 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{5}$이다. 원 O_2에 외접하는 정사각형의 넓이는 $\frac{2}{5}$이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{\frac{2}{5}}$이다. 길이의 비는 $\frac{1}{\sqrt{10}}$이므로 공비인 넓이의 비는 $\frac{1}{10}$이다. 따라서, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10\pi-20}{9}$이다.



15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(x)$의 극댓값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(2+x)=f'(2-x)$이다.
(나) $f(3)=-12$는 함수 $f(x)$의 극솟값이다.

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

15. [출제의도] 도함수를 활용하여 극값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x=3$에서 극소이므로 $f'(3)=0$이다.

또한, $f'(2+x)=f'(2-x)$에서 $x=1$을 대입하면

$f'(3)=f'(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1, 3$에서 극값을 갖는다. 따라서, $f'(x)=3(x-1)(x-3)$이고,

적분하여 (나) 조건으로 적분 상수를 결정하면

$f(x)=x^3-6x^2+9x+12$이다. 따라서, $f(1)=-8$이다.

(수정) $f(x)=x^3-6x^2+9x-12$

19. 직선 $x=2$ 와 두 곡선 $y=3\log_2 x$, $y=2^{3-x}$ 과의 교점을 각각 A, B라 할 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단, O 는 원점이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ 3

19. [출제의도] 지수와 로그의 간단한 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$x=2$ 일 때 $y=3\log_2 2=3$ 이므로 $\mathrm{A}=(2,3)$

$$y=2^{3-2}=2^1=2 \text{ 이므로 } \mathrm{B}=(2,2)$$

따라서 삼각형 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(2,2)$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$ 이다.

20. 실수 x에 대한 3차 방정식 $x^3-3x=t-2$의 실수 t의 값에 따른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 실수 t에 대한 방정식 $f(t)=a^t$이 실근을 갖게 하는 양의 실수 a의 최솟값은? (단, $a\neq 1$) [4점]

① $2^{\frac{1}{4}}$ ② $3^{\frac{1}{4}}$ ③ $2^{\frac{1}{2}}$ ④ $3^{\frac{1}{2}}$ ⑤ 3

20. **[출제의도] 삼차함수와 지수함수의 그래프의 개형을 그려 실근의 개수를 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.**

방정식 $x^3-3x=t-2$ 의 실근의 개수는

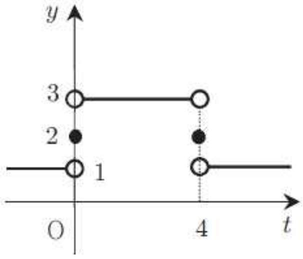
삼차함수 $y=x^3-3x+2$ 의 그래프와 $y=t$ 와의 교점의 개수가 되므로

$t<0, t>4$ 일 때, 실근의 개수=1

$0<t<4$ 일 때, 실근의 개수 = 3

$t=0, 4$ 일 때, 실근의 개수 = 2개 이므로

함수 $y=f(t)$ 그래프는 다음과 같다.



지수함수 $y=a^t$ 는 $(0,1)$ 을 지나므로

i) $0<a<1$ 이면 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다.

ii) $a>1$ 이면 $(4, 2)$ 지날 때 주어진 방정식은 처음으로 실근을 가진다.

따라서 a 의 최솟값은 $2^{\frac{1}{4}}$ 이다.

21. 어느 놀이 공원에서는 입장객에게 A, B, C 세 종류의 사은품을 다음과 같은 방법으로 지급한다.

> (가) 1회 입장할 때마다 A, B, C를 각각 1개의 면, 2개의 면, 3개의 면에 적은 정육면체 모양의 상자를 던졌을 때, 상자의 윗면에 적힌 문자에 해당하는 사은품 쿠폰 한 장을 준다.
> (나) 같은 종류의 사은품 쿠폰이 3장 모이면 해당 사은품을 즉시 지급한다.

어떤 사람이 5회 입장하고 사은품을 받았을 때, 사은품 A를 받았을 확률은? [4점]

① $\frac{7}{132}$ ② $\frac{2}{33}$ ③ $\frac{17}{273}$ ④ $\frac{25}{396}$ ⑤ $\frac{11}{128}$

5회 입장 후 A,B,C 사은품을 받을 확률을 각각 P(A),P(B),P(C)라고 하면

$$P(A) = {}_4C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{6} = \frac{25}{6^4}$$

$$P(B) = {}_4C_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^2\frac{2}{6} = \frac{128}{6^4}$$

$$P(C) = {}_4C_2\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2\frac{3}{6} = \frac{243}{6^4}$$

따라서

$$P(A|A\cup B\cup C) = \frac{\frac{25}{6^4}}{\frac{25}{6^4}+\frac{128}{6^4}+\frac{243}{6^4}} = \frac{25}{396}$$

23. 세 수 2, 3, 5에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 선택하고, 이들 선택된 다섯 개의 수를 곱하여 만들어지는 수 중에서 9의 배수가 아닌 것의 개수를 구하시오. [3점]

3이 0개 1개 포함되는 경우이므로

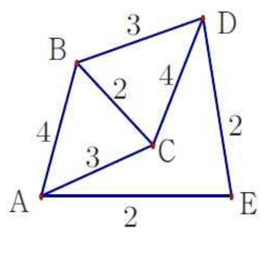
${}_2H_5 + {}_2H_4 = {}_6C_5 + {}_5C_4 = 11$이다.

26. 아래의 표는 5개의 도시 A, B, C, D, E 사이의 비행기 요금표이다. 도시 A에서 출발하여 모든 도시를 한 번씩만 관광하고 돌아오는 여행 계획을 세우려고 한다. 도시 사이를 비행기로만 이동할 때, 소요되는 비행기 요금의 최솟값은 $a\times10^5$(원)이다. a의 값을 구하시오. (단, *는 항공 노선이 없음을 나타낸다.) [3점]

(단위: 10만 원)

출발＼도착	A	B	C	D	E
A		4	3	*	2
B	4		2	3	*
C	3	2		4	*
D	*	3	4		2
E	2	*	*	2	

아래 그림과 같이 그래프로 나타내고 요금을 표시하면 최소비용이 소요되는 회로 중 하나는 ACBDEA이며, 비용은 $3+2+3+2+2=12$ (10만원)



$\therefore$ 12×10^5에서 $a=12$

27. p가 소수일 때, $\left(x+\dfrac{p}{x}\right)^n$의 x에 대한 전개식에서 상수항이 160이다. 두 수 n, p의 곱 np의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점]

$${}_n\mathrm{C}_r(x)^n\left(\frac{p}{x}\right)^{n-r} = {}_n\mathrm{C}_r p^{n-r}x^{2r-n}$$ 에서 $n=2r$

$${}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\mathrm{p}^{\frac{n}{2}} = 160 = 2^5\cdot 5$$

n은 짝수이므로 n대신에 2, 4를 대입하여 계산하면 성립하지 않고, $n=6$일 때,

${}_6\mathrm{C}_3p^3 = 5\cdot 2^2p^3 = 2^5\cdot 5$ 이므로 $p=3$이다.

(수정) p=2

$\therefore np = 6\cdot 2 = 12$

28. 한 변의 길이가 1cm 인 정육면체의 각 모서리의 길이가 2(cm/초)의 일정한 속력으로 증가할 때, 정육면체의 한 면의 넓이가 25(cm^2)가 되는 순간의 시간에 대한 부피의 변화율(cm^3/초)을 구하시오. [4점]

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 넓이의 시간에 대한 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

한 변의 길이를 l, 한 면의 넓이를 S, 직육면체의 부피를 V라 하면

$$\frac{dl}{dt}=2(cm/초),\ S=l^2,\ V=l^3,$$

$$S=l^2=25,\ \therefore l=5$$

$$\frac{dV}{dt}=3l^2\cdot\frac{dl}{dt}=3\cdot5^2\cdot2=150$$

29. 11개의 연속하는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열한 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{6} {a_k}^2 = \sum_{k=7}^{11} {a_k}^2$$

을 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오. [4점]

$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_6^2 = a_7^2 + a_8^2 + \cdots + a_{11}^2$

$a_6 = x$라 놓고 연속하는 자연수를 Σ로 표시하면

$$\sum_{k=1}^{5}(x-k)^2 + x^2 = \sum_{k=1}^{5}(x+k)^2$$

$$x^2 = \sum_{k-1}^{5}(x+k)^2 - \sum_{k=1}^{5}(x-k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{5} 4kx = 4x\sum_{k=1}^{5} = 4x\frac{5 \cdot 6}{2} = 60x$$

따라서 $x = 60$이고 a_1은 60에서 5만큼 작은 수이므로 $60 - 5 = 55$이다.

<참고> $55^2 + 56^2 + \cdots + 60^2 = 61^2 + 62^2 + \cdots + 65^2$

30. 함수 $f(x)=ax+2\,(a>0)$ 가 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k-1}{n}=5$$

을 만족시킬 때, $10a$ 의 값을 구하시오. [4점]

30. [출제의도] 구분구적법을 이해하고 정적분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a\frac{k}{n}+2\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left((a\frac{k}{n}+2)-(a\frac{k-1}{n}+2)\right)\frac{k-1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a\frac{k}{n}+2\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{n}\right)\frac{k-1}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n}=x_k$ 로 놓으면 $a=0,\ b=1,\ \Delta x=\frac{1}{n}$

준식$=\int_0^1 (ax+2)\,dx+\int_0^1 ax\,dx$

$$=\int_0^1 (2ax+2)\,dx=\left[ax^2+2x\right]_0^1=a+2=5$$

$a=3$ 따라서 $10a=30$

[오답노트 08차 ~]

2012.10 교육청	11 14 16 17 19
	20 21 25 26 27
	29
2011.10 서울	10 15 16 17 18
	19 21 26 28 30
2011.10 대전	8 13 14 15 19
	20 21 23 26 27
	28 29 30