절댓값이 포함된 수열의 합

띵수학 연구실 / 수학 칼럼

고3, n수생, 그리고 예비 고3 여러분들 안녕하세요! <띵수학 연구실>입니다.

3월 13일 저녁 8시에는 올해부터 <띵수학 연구실>과 함께하게 된
"2021년 3월 학력평가 대비 MC THE MATH 모의고사"가 시행될 예정인데요.
그전에 가볍게 챙겨가실 수 있는 내용 하나를 칼럼으로 소개해드리려 해요.

먼저 평가원과 작년 MC THE MATH 모의고사의 비슷한 두 문항을 살펴보실까요?

#평가원 / [2022학년도 대학수학능력시험 예시문항 공통과목 20번]

1. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + a_5 = 0, \quad \sum_{k=1}^{6} \left(|a_k| + a_k\right) = 30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

#MCTHEMATH / [2021학년도 6월 MC THE MATH 모의고사 (가)형 18번]

2. 첫째항이 -12인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_3| > |a_7|$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \left(a_k + |a_k|\right) = 4\sum_{k=m}^{m+1} a_k$

자연수 m에 대하여 $\dfrac{a_m}{m}$의 최솟값을 구하시오. [4점]

위의 문제들처럼 합의 기호 $\sum$ 안에 절댓값이 포함된 경우, 등차/등비수열이라고 하더라도 일반적인 수열의 합 공식을 바로 적용할 수는 없어요. 그렇다면 이런 경우에는 어떤 접근을 해야 할까요?

위의 문제들은 등차수열에 관한 문제이므로 먼저 등차수열 $\{a_n\}$에 대한 $\sum_{k=1}^{n}|a_k|$을 살펴볼게요.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 네 가지 경우로 나눠볼 수 있겠네요.

(ⅰ) $a>0$, $d>0$일 때

$1 \le k \le n$인 모든 정수 k에 대하여 $a_k>0$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = \sum_{k=1}^{n}a_k$$

입니다.

(ⅱ) $a<0$, $d<0$일 때

$1 \le k \le n$인 모든 정수 k에 대하여 $a_k<0$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k| = -\sum_{k=1}^{n}a_k$$

입니다.

(ⅰ), (ⅱ)의 경우는 부호가 고정되어 있어 절댓값이 포함되어 있더라도 이를 처리하기가 간편하겠죠. 하지만 다음 두 경우는 어떨까요?

(ⅲ) $a>0$, $d<0$일 때　　　　(ⅳ) $a<0$, $d>0$일 때

위 경우들에서는 a, d의 관계에 따라 특정 항을 기준으로 부호가 바뀔 우려가 있어 절댓값을 처리할 때 신경 써주어야 할 부분이 존재해요. 이번 칼럼의 주된 내용은 이 경우들이 되겠네요.

* 위 두 경우에서도 만약 $1 \le k \le n$인 모든 k에 대하여 a_k의 부호가 같다면 (ⅲ), (ⅳ)의 경우는 각각 위의 (ⅰ), (ⅱ)의 경우와 같은 결과가 나옵니다. (다만 4점 문항에 절댓값이 등장했다면 부호가 바뀌는 부분이 존재할 가능성이 크겠죠?)

여러분들은 절댓값이 포함된 함수를 마주쳤을 때 지금까지 어떻게 대처하셨나요?

$$y = |f(x)|$$

라는 함수가 주어진 경우, 습관적으로

$$f(x) \geq 0, \; f(x) < 0$$

으로 경우를 두 가지로 나누어 절댓값 기호를 없애려 하셨을 겁니다.

EX) 함수 $f(x) = |2x-3|$가 주어졌을 때,

$2x-3 \geq 0$일 때, $f(x) = 2x-3$

$2x-3 < 0$일 때, $f(x) = -(2x-3)$

이므로

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3 & \left(x < \dfrac{3}{2}\right) \\ 2x-3 & \left(x \geq \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

절댓값이 포함된 함수를 처리할 때, 위의 예시처럼 구간을 나누어 함수를 정의해주고 이후에 함수를 해석하거나 그래프를 그리는 등의 작업을 하게 되는데요.

비슷하게 수열의 합에 절댓값 기호가 포함된 경우도 위의 함수의 경우와 같이 절댓값 기호를 없애주며 조건을 해석해야 합니다.

이제 앞선 (iii), (iv)의 경우를 살펴볼게요.

(절댓값 기호를 없애줄 때, 등호는 어느 쪽에 포함하든 상관없지만, 바로 위의 함수의 경우처럼 이 칼럼에서는 등호는 양수 쪽에 포함 시키겠습니다.)

(iii) $a>0$, $d<0$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n > a_{n+1}$이므로

$a_i \geq 0 > a_{i+1}$을 만족하는 $1 \leq i \leq n$인 정수 i가 존재할 경우

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{k=1}^{i} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k$$

입니다.

(iv) $a>0$, $d<0$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이므로

$a_i < 0 \leq a_{i+1}$을 만족하는 $1 \leq i \leq n$인 정수 i가 존재할 경우

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = -\sum_{k=1}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k$$

입니다.

이렇게 절댓값 기호를 없애준 것이 어떤 의미가 있는지 첫 장에 제시된 문제에 포함된

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + a_k)$$

꼴을 생각해보죠. (i), (ii)의 경우는 생략하겠습니다.

(iii) $a > 0$, $d < 0$일 때

$a_i \geq 0 > a_{i+1}$을 만족하는 $1 \leq i \leq n$인 정수 i가 존재한다고 하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+a_k) &= \sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}a_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{i}a_k-\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right)+\sum_{k=1}^{n}a_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{i}a_k-\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{i}a_k+\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{i}a_k\end{aligned}$$

임을 알 수 있네요. 같은 방식으로

(iv) $a > 0$, $d < 0$일 때

$a_i < 0 \leq a_{i+1}$을 만족하는 $1 \leq i \leq n$인 정수 i가 존재한다고 하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+a_k) &= \sum_{k=1}^{n}|a_k|+\sum_{k=1}^{n}a_k \\ &= \left(-\sum_{k=1}^{i}a_k+\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right)+\sum_{k=1}^{n}a_k \\ &= \left(-\sum_{k=1}^{i}a_k+\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{i}a_k+\sum_{k=i+1}^{n}a_k\right) \\ &= 2\sum_{k=i+1}^{n}a_k\end{aligned}$$

입니다.

이제 다음장에서 위의 내용을 이용하여 첫 번째 장에서 제시했던 두 문제를 해결해보겠습니다.

#평가원 / [2022학년도 대학수학능력시험 예시문항 공통과목 20번]

1. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0, \quad \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오. [4점]

해설 : 등차중항에 의해 $a_3+a_5=2a_4=0$ 이므로 $a_4=0$이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_4=a+3d=0$이므로 $a=-3d$이다.

이 때 $\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)\neq 0$이므로 $d\neq 0$이고, 따라서 $d>0$, $d<0$의 두 경우가 존재한다.

(i) $d>0$일 때

첫째항 $a<0$이고, $a_3<0\leq a_4$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=1}^{6}|a_k|+\sum_{k=1}^{6}a_k=\left(-\sum_{k=1}^{3}a_k+\sum_{k=4}^{6}a_k\right)+\sum_{k=1}^{6}a_k$$

$$=2\sum_{k=4}^{6}a_k=2(a_4+a_5+a_6)=2(a_5+a_6)\ \ (\because a_4=0)$$

$$=2\{(a+4d)+(a+5d)\}=2\times(d+2d)=6d=30$$

따라서 $d=5$이다.

(ii) $d<0$일 때

첫째항 $a>0$이고, $a_4\geq 0>a_5$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=2\sum_{k=1}^{4}a_k=2(a_1+a_2+a_3)=2\times(3a+3d)=-12d=30$$

이고 $d=-\frac{5}{2}$이므로 공차가 정수라는 조건에 모순이다.

따라서 $d=5$, $a=-15$이고, $a_9=a+8d=-15+40=25$이다.

정답 : 25

#MCTHEMATH / [2021학년도 6월 MC THE MATH 모의고사 (가)형 18번]

2. 첫째항이 -12인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_3| > |a_7|$

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k + |a_k|) = 4\sum_{k=m}^{m+1} a_k$

자연수 m에 대하여 $\dfrac{a_m}{m}$의 최솟값을 구하시오. [4점]

해설 : 등차수열의 공차가 음수거나 0이면 (가) 조건을 만족시키지 못하므로 공차는 양수이다.

공차를 d라 할 때, (가) 조건의 $|a_3| > |a_7|$에서 $(a_3)^2 > (a_7)^2$이고

$(a_3 - a_7)(a_3 + a_7) = -4d(2a_5) > 0$이다. 이 때, $d > 0$이므로 $a_5 < 0$이다.

$a_k \geq 0$을 만족시키는 k의 최솟값을 l이라 할 때,

$5 < l < 10$이어야 (가), (나) 조건을 만족시키고

(나) 조건에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(a_k + |a_k|) = 2\sum_{k=l}^{10} a_k = 4\sum_{k=m}^{m+1} a_k$이다. 즉, $\displaystyle\sum_{k=l}^{10} a_k = 2\sum_{k=m}^{m+1} a_k$이고

이를 만족시키는 자연수 l은 6 또는 7이고 m은 8이다.

(ⅰ) $l = 6$인 경우 (나) 조건을 만족시키기 위해 $a_6 = 0$이다.

이 때, $a_n = \dfrac{12}{5}n - \dfrac{72}{5}$이고, $\dfrac{a_8}{8} = \dfrac{3}{5}$이다.

(ⅱ) $l = 7$인 경우 $\dfrac{a_8}{8}$이 최소이려면 공차가 가장 작아야 하고

$a_7 = 0$일 때, 공차가 가장 작다. 이 때, $a_n = 2n - 14$이고, $\dfrac{a_8}{8} = \dfrac{1}{4}$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 $\dfrac{a_8}{8} = \dfrac{1}{4}$가 최솟값이다.

정답 : $\dfrac{1}{4}$

위와 같은 방식을 등비수열에도 비슷하게 적용할 수 있는데요.

첫째항이 $a\ (a>0)$, 공비가 $r\ (r>0)$인 등비수열 $\{a_n\}$은 모든 정수 k에 대하여 ,

$$a_{2k-1}>0,\ a_{2k}>0$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}|a_k| &= \sum_{k=1}^{n}|a_{2k-1}|+\sum_{k=1}^{n}|a_{2k}| \\ &= \sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\end{aligned}$$

임을 알 수 있네요.

다음 문제를 풀어보면서 적용해볼게요.

#교육청 / [2019학년도 고3 3월 학력평가 (나)형 16번]

3. 첫째항이 양수이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{9}\left(|a_k|+a_k\right)=66$$

일 때, a_1의 값은? [4점]

① $\frac{3}{31}$ ② $\frac{5}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$ ④ $\frac{9}{31}$ ⑤ $\frac{11}{31}$

해설 : $a_1 > 0$이고 공비가 -2이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항

$$a_n = a_1 \times (-2)^{n-1}$$

과 임의의 정수 k에 대하여

$$a_{2k-1} > 0,\ a_{2k} < 0$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{9}(|a_k| + a_k) &= \sum_{k=1}^{9}|a_k| + \sum_{k=1}^{9}a_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{4}a_{2k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{4}a_{2k}\right) = 2\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1} = 66\end{aligned}$$

이고, $a_{2n-1} = a_1 \times 4^{n-1}$이므로

$$\frac{a_1 \times (4^5 - 1)}{4-1} = 33,\ a_1 = \frac{33 \times 3}{1023} = \frac{3}{31}$$

이다.

정답 : ①

다음 장에 나올 두 문제는 위 칼럼을 적용하는 연습을 해볼 수 있는 교육청/평가원 기출입니다!

한 번 풀어보시고 댓글에 정답을 남겨주세요!

#교육청 / [2020학년도 고3 7월 모의고사 (나)형 17번]

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = a_6 + a_8$

(나) 6 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $S_n + T_n = 84$이다.

T_{15}의 값은? [4점]

① 96 ② 102 ③ 108 ④ 114 ⑤ 120

#평가원 / [2019학년도 대학수학능력시험 (나)형 29번]

5. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a_7 + b_7$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{5} (a_n + b_n) = 27$

(나) $\sum_{n=1}^{5} (a_n + |b_n|) = 67$

(다) $\sum_{n=1}^{5} (|a_n| + |b_n|) = 81$

누구나 아는 내용을 길게 써놓았을 뿐이다?

먼저, 긴 글 읽어주셔서 감사합니다.

저희 <띵수학 연구실>은 고3, n수생, 예비고3 여러분들이 모두 수학이라는 과목에 흥미와 자신감을 가질 수 있게 올 한해, 그리고 앞으로도 노력하겠습니다.

몇몇 분들은 "당연한 내용 아니야?" 라고 생각하실 수도 있는데, 맞습니다. 이번 칼럼의 주제는 지극히 교과서 내적이고, 개념에 대한 이해가 충분한 학생이라면 누구나 얻어 낼 수 있는 결론을 정리한 것입니다.

다만, 하나의 개념을 '알고 있다.' 와 '이해하고 있다.'는 큰 차이가 있다고 생각합니다. 당연한 내용도 한 번 더 정리하며 완벽히 본인의 것으로 만드는 과정, 그것이 수능을 위한 대비가 아닐까 생각합니다.

약 20일 뒤인 3월 25일에는 2021년의 첫 전국연합학력평가가 예정되어 있습니다. 평가원에서 출제하는 모의고사도 아니고, 선택과목의 범위가 전 범위가 아니기 때문에 3월 모의고사의 성적이 수능 성적으로 직결된다는 말은 하지 못합니다. 다만, '모의고사' 라는 말 그대로 수능까지 달려가기 위한 연습이므로, 챙겨갈 필요는 있습니다.

<띵수학 연구실>에서 준비한

<u>3월 13일 토요일 저녁 8시, 3월 전국연합학력평가 대비 MC THE MATH 모의고사</u>

로 겨울방학 기간 동안 달려왔던 자신을 한 번 돌아보는 시간을 가지며, 올 한 해의 공부 방향을 잘 설정하였으면 좋겠습니다. OrbiQ에서 실시간 시행하며 시행이 끝난 저녁 10시에 문제지와 해설지 파일이 올라갈 예정입니다. 더욱 양질의 콘텐츠로 찾아뵙겠습니다. 감사합니다.

- 띵수학 연구실 일동 -