

T.O.P - EBS Calculation (For A) - 1

T.O.P EBS Calculation

I. EBS 수능특강 우수 및 추천문항 선정

선정기준 : A형 시험에 어려운 [3점] 혹은 [4점] 문항으로 반영될 수 있는 문항들을 선정하기 위하여 주로 고등수학의 내용과 결합된 내용의 문제나 역대 수능, 평가원 모의고사에 기출되었던 문항과 맥이 같은 문제, 그리고 기출문제에서 찾아볼 수 없었던 신유형의 문항을 선정하였다. 또, 문항 자체의 아이디어가 참신한 문항도 수록하였다.

수능특강 수학1 - A형

CHAPTER 1. 행렬과 그래프

8쪽 발전유제 2번
11쪽 예제 4번
11쪽 발전유제 7번
15쪽 실력완성 2번
22쪽 발전유제 6번
24쪽 발전유제 9번
29쪽 실력완성 3번

CHAPTER 2. 지수와 로그

47쪽 실력완성 4번
52쪽 발전유제 2번
57쪽 기초연습 2번
58쪽 기본연습 2번
66쪽 발전유제 6번
67쪽 발전유제 8번
70쪽 기본연습 5번
71쪽 실력완성 2번
71쪽 실력완성 4번
81쪽 기초연습 1번
83쪽 실력완성 2번

3. 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여

$$A+B=2E, \quad AB=O$$

가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

—————<보 기>—————

㉠. $BA=O$

㉡. $A^2=2A$

㉢. 행렬 $(A^4+E)(B^4+E)$ 의 모든 성분의 합은 34이다.

① ㉡

② ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

4. $(A-E)^2=O$ 를 만족시키는 이차정사각행렬 A 가 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ 를 만족시킬 때, 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 의 해를 $x=a, y=b$ 라 하자. $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, E 는 단위행렬, O 는 영행렬이다.) [4점]

5. 역행렬을 갖는 두 이차정사각행렬 A, B 에 대하여

$$3B^2 + B = E, \quad 2AB - A^2 = B$$

가 성립할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

—————
〈보기〉
—————

ㄱ. 행렬 $3B + E$ 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. 행렬 $3B - A$ 의 역행렬이 존재한다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 생물학자가 생태계의 파괴를 확인하기 위하여 동물들의 개체량(마리)를 조사하였다. 동물 A 의 개체량을 W_0 , 개체량을 조사한 달로부터 경과된 달의 수를 t 라 할 때, 개체량 W 는 $W = W_0 \left(\frac{2}{3}\right)^{kt}$ 인 관계가 있다고 한다. 동물 A 를 1월 달에 조사한 개체수는 300(마리)이고 그 해 4월에 조사한 개체량은 200(마리)일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 어떤 곤충이 태어나서 x 일이 경과한 후의 몸의 길이를 $l(x)$ 라 할 때, 다음 관계식이 성립한다.

$$l(x) = \frac{12}{1 + 3 \times (0.8)^x}$$

이 곤충의 몸의 길이가 태어날 당시의 2배 이상이 되기 위해서 최소 a 일이 지나야 한다. 이 때, 자연수 a 의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.) [4점]

8. 자연수 n , x 에 대하여 집합 $A = \left\{ x \mid x = \sqrt[2n]{\frac{2^{15}(3^4 + 3^2 + 1)}{3^6 - 1}} \right\}$ 의 모든 원소들의 합을 구하시오. [4점]

[9 ~ 10] 소리의 세기가 $I(\text{W}/\text{cm}^2)$ 인 음원으로부터 $d(\text{cm})$ 만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기를 $P(\text{데시벨})$ 이라 하면, 관계식

$$P = 12 + \log \frac{I}{d^2}$$

가 성립한다고 한다.

9. 어떤 음원으로부터 1000(cm)만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기가 15.6(데시벨)일 때, 이 음원의 소리의 세기 $I(\text{W}/\text{cm}^2)$ 는 n 자리 수이다. n 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

10. 음원 A로부터 2000(cm)만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기가 $P_1(\text{데시벨})$ 이고, 음원 A로부터 8000(cm)만큼 떨어진 지점에서 측정된 소리의 세기가 $P_2(\text{데시벨})$ 일 때, $P_1 - P_2$ 의 값은? [3점] (단, $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.48$ 로 계산한다.)

- ① 0.6 ② 0.96 ③ 1.08 ④ 1.2 ⑤ 1.48

III. 추가문항 해설

1	⑤	2	⑤	3	⑤	4	10	5	⑤	6	④	7	5
8	86	9	④	10	④								

1.

ㄱ. $ABAB = A$, $BABA = B$ 에서

$ABABA = A^2$, $BABAB = B^2$

$AB = A^2$, $BA = B^2$ 이다.

또한, $(AB)^2 = A^4 = A$, $(BA)^2 = B^4 = B$ 가 성립한다.

ㄴ. $A^2B^2 = AAB B = AA^2B = AAAB = AAA^2 = AAAA = A^4$ (참)

또한, 같은 방법으로 $B^2A^2 = B^4$ 이다.

ㄷ. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = 2(A^2 + B^2)$ 이므로

$$(A+B)^4 = 4(A^2 + B^2)(A^2 + B^2) \Rightarrow (A+B)^4 = 4(A^2 + B^2)(A^2 + B^2) = 4(A^4 + A^2B^2 + B^2A^2 + B^4)$$

$$\Rightarrow 4(A^4 + A^2B^2 + B^2A^2 + B^4) = 4(2A^4 + 2B^4) = 8(A^4 + B^4) = 8(A+B) \text{ (참)}$$

2.

ㄱ. $AB = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = BA$ (참)

ㄴ. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 이므로 $a+d=1$, $ad=bc$ 이다.

또한, $B^2 = \begin{pmatrix} d^2+bc & -b(a+d) \\ -c(a+d) & bc+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad+d^2 & -b \\ -c & ad+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d(a+d) & -b \\ -c & a(a+d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ (참)

별해) 케일리 헤밀턴 정리를 이용하여도 좋다.

ㄷ. ㄴ에 의해서 $B^3 - E = B - E = \begin{pmatrix} d-1 & -b \\ -c & a-1 \end{pmatrix}$ 인데, ㄴ에 의해 $a+d=1$, $ad-bc=0$ 임을 알고 있다. 따라

$$\text{서 } (d-1)(a-1) - bc = ad - a - d + 1 - bc = ad - bc - a - d + 1 = 0 \text{ (참)}$$

3.

ㄱ. $B = 2E - A$ 이므로 $AB = BA = O$ (참)

ㄴ. $B = 2E - A$ 이므로 $A(2E - A) = O \Rightarrow A^2 = 2A$

마찬가지 방법으로 $B^2 = 2B$ 이다.

ㄷ. $A^4 = 4A^2 = 8A$, $B^4 = 4B^2 = 8B$ 이므로 $(A^4 + E)(B^4 + E) = A^4B^4 + A^4 + B^4 + E = 8A + 8B + E = 8(2E) + E = 17E$ (참)

4.

$(A - E)^2 = O$ 이므로 $A(2E - A) = E \therefore A^{-1} = 2E - A$

연립방정식 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 의 해는

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2E - A) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a = 5, b = 5 \rightarrow a + b = 10$$

5.

ㄱ. $B(3B + E) = E$ 이므로 $3B + E$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄴ. $2AB - A^2 = B$ 의 양변의 뒤에 B^{-1} 을 각각 곱하면 $A(2E - AB^{-1}) = E$ 이므로 역행렬의 정의에 의하여 $A(2E - AB^{-1}) = (2E - AB^{-1})A = E$ 이다. 따라서 $-A^2B^{-1} = -AB^{-1}A$ 이고, 양변의 앞에 A^{-1} 을 곱해주면, $AB^{-1} = B^{-1}A$ 이고, 정리하면, $BA = AB$ 가 된다. (참)

ㄷ. $B = E - 3B^2$ 이므로, $2AB - A^2 = E - 3B^2 \Rightarrow A^2 - 2AB - 3B^2 = -E$ 에서 $AB = BA$ 이므로 $(A - 3B)(A + B) = -E$ 이다. 즉, $(3B - A)(A + B) = E$ 이므로 행렬 $3B - A$ 의 역행렬이 존재한다. (참)

6.

$$1\text{월의 개체수} = 300 = W_0 \left(\frac{2}{3} \right)^{kt}$$

$$4\text{월의 개체수} = 200 = W_0 \left(\frac{2}{3} \right)^{k(t+3)} = W_0 \left(\frac{2}{3} \right)^{kt} \times \left(\frac{2}{3} \right)^{3k} = 300 \times \left(\frac{2}{3} \right)^{3k}$$

$$\therefore 200 = 300 \left(\frac{2}{3} \right)^{3k} \Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} \right)^{3k} \therefore k = \frac{1}{3}$$

7.

이 곤충이 태어났을 때, 몸의 길이는 $l(0) = 3$ 몸의 길이가 태어날 당시의 2배 이상이 되기 위해서는 $\frac{12}{1 + 3 \times (0.8)^x} \geq 3 \times 2$ 에서 $(0.8)^x \leq \frac{1}{3}$ 이 식의 양변에 상용로그를 취하면 $x \geq 4.8$ 임을 알 수 있다. 따라서 $a = 5$

8.

$$x = \left\{ \frac{2^{15}(3^4 + 3^2 + 1)}{(3^2 - 1)(3^4 + 3^2 + 1)} \right\}^{\frac{1}{2n}} \\ = \left(\frac{2^{15}}{3^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2n}} = 2^{\frac{6}{n}}$$

\therefore 자연수 n 에 대하여 x 가 자연수가 되기 위한 n 은 1, 2, 3, 6이다.

따라서, $A = \{2, 4, 16, 64\}$

그러므로 집합 A 의 모든 원소의 합은 $2 + 4 + 16 + 64 = 86$

9.

$$15.6 = 12 + \log \frac{I}{1000^2} \text{ 이므로 } 3.6 = \log I - 2 \log 1000 = \log I - 6$$

$$\therefore \log I = 9.6 = 9 + 0.6$$

$\log I$ 의 지표가 9이므로 I 는 10자리 수이다.

10.

$$P_1 = 12 + \log \frac{I}{2000^2}$$

$$P_2 = 12 + \log \frac{I}{8000^2}$$

$$P_1 - P_2 = \log \frac{8000^2}{2000^2} = \log \left(\frac{8000}{2000} \right)^2 = 4 \log 2 = 1.2$$