연속성과 미분가능성 : 다항함수의 사칙연산

MENTOR X 띵수학 연구소 / 수학 칼럼

0. 소개말

안녕하세요! 수능을 준비하시는 수험생분들을 위해 무료 수학 모의고사, 수학 칼럼 등 양질의 공부 자료들을 수험생 커뮤니티에 무료로 배포하고 있는 <띵수학 연구실>입니다. 이번에 여러분들을 위해 어떤 주제로 수학 칼럼을 쓸지 고민하던 도중 MENTOR 팀에서 먼저 저희 연구실에 같이 콜라보해서 칼럼을 써보자는 제의를 주셨고 그 결과로 이렇게 함께 콜라보해서 칼럼을 작성하게 되었습니다.

칼럼 주제는 일주일 전에 한번 수험생 커뮤니티에서 따로 요청을 받았었는데, 그중 연속성과 미분가능성에 관하여 칼럼을 써달라는 요청이 다수 있어서 주제를

"연속성과 미분가능성 : 다항함수의 사칙연산"

로 결정하게 되었습니다. 칼럼 형식은 저희 띵수학 연구소가 1편에서 내용적인 부분을 설명하고, 2편에서 MENTOR 팀이 이를 실제로 문제에 적용하는 모습을 보여드리는 방식으로 진행됩니다. 1편에서는 이해를 위해 최소한의 예시 정도를 들어서 설명할 예정이고, 2편은 기출문제와 저희 MC THE MATH 모의고사, MENTOR 팀의 주멘 모의고사에 출제되었던 자작문항들을 풀이할 계획입니다.

주제를 약간 부연설명하자면 다항함수를 사칙연산해서 만들 수 있는 함수들의 연속성, 그리고 미분가능성에 관해 다뤄보려고 합니다. 다만 여기서 '함수'는 초월함수를 제외하고 다항함수를 이용해 만들 수 있는 함수들로 한정합니다. 이유는 칼럼의 타겟을 미적분을 응시하는 학생들뿐만 아니라 공통 과목을 응시하는 모든 수험생들로 넓게 가져가기 위함입니다. 아마 하고 싶은 말이 많은 칼럼이 될 것 같아 중요한 결론 부분에는 제가 밑줄을 쳐 놓도록 하겠습니다. 밑줄 부분을 중심으로 칼럼을 이해해주시면 좀 더 칼럼에서 많은 것을 얻어 가실 수 있을 것 같습니다. 약간 아쉬운 점은 세세한 증명을 다 담았다가는 칼럼에서 전달하고 싶은 내용보다 증명이 차지하는 비중이 커질 것 같아 증명을 생략한 부분이 한 두 군데 있습니다. 혹시 세세하고 엄밀한 증명이 필요하신 분들은 댓글로 질문주시기 바랍니다.

그럼 지금부터 칼럼 시작해보도록 하겠습니다!

1. 사칙연산한 함수의 연속성과 미분가능성

(1) 기본적인 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$의 연속성과 미분가능성

일단 연속성과 미분가능성을 다루기 전에 함수의 연속, 함수의 미분가능이 어떤 정의를 가지고 있는지 먼저 살펴보아야 합니다.

함수의 연속은 함수 $f(x)$에 대하여

1. $x=a$에서 함숫값 $f(a)$가 정의되고, 2. 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 정의되고, 3. $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

일 때, "함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다." 라 표현합니다.

함수의 미분가능도 똑같이 알아보면

1. 함수 $f(x)$의 미분계수 $f'(a)=\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재할 때,

"함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다." 라 표현합니다.

이제 두 정의에서 최대한 여러분들이 시험장에서 사용할 수 있는 수준으로의 스킬들을 뽑아내보려 합니다. 이를 위해 필요한 것은 함수의 극한에 관한 성질로, 수학Ⅱ 함수의 극한 단원에서 배웠던

"$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$일 때,

1. $\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\}=\alpha \pm \beta$, 2. $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$, 3. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}\ (\beta \neq 0)$이다."

라는 성질입니다.

이를 통해 우리가 알 수 있는 부분은 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ 모두 연속이라는 것입니다. 또, 이는 미분계수에 대해서도 성립하므로 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$ 모두 미분가능합니다.

(2) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 연속성과 극한 존재성

위에서 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 빠져있는데, 이는 $g(a)=0$인 a에 대하여 $\dfrac{f(a)}{g(a)}$가 정의되지 않기 때문입니다. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 미분가능성은 미적분의 '몫의 미분법'을 데려와야 하므로 스킵하고, 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$이 연속이 되기 위해서는 모든 실수 x에서 $g(x)\neq 0$여야 합니다.

위 내용의 예시를 들어보면 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$같은 함수는 $x=1$에서 극한은 존재하지만, 불연속입니다. 가끔 헷갈리셔서 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$도 약분하면 $x+1$이므로 연속이라고 착각하시는 분들이 계시는데, 이 경우 함수 $f(x)$의 정의역이 '$x\neq 1$인 모든 실수' 가 되기 때문에 $x=1$에서 함숫값 자체가 정의가 되지 않습니다. $x=1$에서 연속이 되기 위해서는 함수를 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$와 같이 만들어서 $x=1$에서 함숫값을 따로 정의를 해주어야만 연속이 될 수 있습니다.

여기서 하나 가져갈 만한 스킬은 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이므로 함수 $g(x)$는 $g(x)>0$이거나 $g(x)<0$임을 쉽게 알 수 있습니다.

또, 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다항함수일 때, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한의 존재성에 관하여 유용한 스킬 하나를 소개 해보려합니다. $g(a)\neq 0$인 a에서는 당연히 극한값이 존재할 것이고, 중요한 건 $g(a)=0$인 a에서 극한이 존재하려면 어떻게 되어야 하는지입니다.

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 극한이 존재하려면 극한의 성질에 따라 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이어야 합니다. 이 때, 두 함수 모두 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $g(a)=0$, $f(a)=0$이고 고1때 배운 다항함수에 관련된 정리 중 인수정리를 사용하면 함수 $f(x)$, $g(x)$는 둘 다 인수로 $(x-a)$를 가져야 함을 알 수 있습니다.

또, 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$가 $(x-a)^n$을 인수로 가지는 경우, 함수 $f(x)$도 적어도 $(x-a)^n$을 인수로 가져야만 합니다. 예를 들어, 함수 $g(x)$가 $(x-a)^3$를 인수로 가지는데, 함수 $f(x)$가 인수로 가지는 것이 $(x-a)^2$밖에 없다면 극한 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 분모에 $(x-a)$가 남게되므로 발산할 수 밖에 없습니다. (위 내용은 2편의 자작문제에서 어떤 식으로 사용하는지를 더 자세하게 다룰 예정입니다.)

(3) 불연속인 함수를 사칙연산했을 때의 연속성

그럼 특정 x에서 불연속인 함수를 사칙연산할 때에는 어떤 식으로 연속성을 조사해야 할까요? 이런 경우, 두 함수가 불연속인 x만을 모아서, 불연속 후보로 두고 후보들에 대해서 1. 함숫값이 정의되는지, 2. 극한값은 정의되는지, 3. 함숫값과 극한값이 같은지를 조사해주면 됩니다.

예를 들어, 함수 $f(x)$는 $x=1,\ 2,\ 3$에서 불연속인 함수이고, 함수 $g(x)$는 $x=3,4$에서 불연속인 함수라면, 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 불연속인 x를 찾기 위해서는 $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$에서 함수가 연속인지만 조사해보면 됩니다. 이외의 나머지 x에서는 앞의 (1), (2)에서 했던 것처럼 연속인 두 함수를 사칙연산하는 것과 같기 때문입니다. 물론 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 (2)에서 했던 것처럼 $g(x)=0$이 되는 x가 있는지까지 조사해주어야 합니다.

사실 연속성을 조사하는 과정은 정석대로 1. 함숫값이 정의되는지, 2. 극한값은 정의되는지, 3. 함숫값과 극한값이 같은지 하나하나 계산해보는 게 가장 좋습니다. 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$와 같은 경우는 그냥 덧셈 뺄셈 정도의 계산이면 끝나기에 1, 2, 3번을 착실히 수행하면 연속성을 파악하지 못할 일이 거의 없을 것입니다.

함수 $f(x)g(x)$와 같은 경우는 특정 상황에서 이용할 수 있을만한 유용한 정리가 있습니다.

1. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속 + 좌우 극한값과 함숫값은 모두 존재
2. 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이면

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위해서는 $g(a)=0$이어야 한다.

이는 교과서에 실린 정리는 아니기에 증명을 해보면

함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a+} f(x)=\beta$, $f(a)=\gamma$ 라 하면

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)=k$라 둘 수 있다.

이에 따라 함수 $f(x)g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\alpha k$, $\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\beta k$, $f(a)g(a)=\gamma k$이다.

이 때, 함수 $f(x)$가 불연속이므로 α, β, γ 중 적어도 하나는 나머지 수들과 다른 수이다.

함수 $f(x)g(x)$가 연속이려면 $\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=f(a)g(a)$에서

$\alpha k=\beta k=\gamma k$여야 하므로 $k=0$이고 $g(a)=0$이다.

정도로 간단히 할 수 있습니다.

이 때, $g(x)$를 다항함수라 두면, 또 인수정리를 활용해 $g(x)$가 인수로 $(x-a)$를 가짐을 알 수 있습니다. 위 내용을 이용하면 많은 기출문제들을 크게 무리없이 풀어낼 수 있을 것입니다. (2020학년도 대학수학능력시험 수학 (나)형 20번 ㄱ선지에서 실제로 대놓고 위 내용을 물어봤었던 적이 있고, 2편에서 이에 관해 다룰 예정입니다.)

(4) 미분가능하지 않은 함수를 사칙연산했을 때의 미분가능성

위에서 연속을 조사하는 법만 왕창 설명했기에, 미분가능성을 조사하는 법도 알아봅시다. 일단 미분가능성을 조사하기 위한 전제 조건은 함수가 연속이어야 합니다. (이는 "미분가능한 모든 함수는 연속이다." 라는 명제의 대우를 생각해보면 쉽게 알 수 있습니다.) 미분가능성을 조사하는 방법에는 보통 크게 두 가지를 꼽는데,

1. 미분계수의 정의를 이용해 $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이면 미분가능
2. 도함수의 극한을 이용해 $\lim_{x\to a-}f'(x)=\lim_{x\to a+}f'(x)$이면 미분가능

으로 두 가지 방법이 있습니다. 2번째 방법인 도함수의 극한은 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$와 같은 도함수의 극한이 발산해버리는 함수에는 사용할 수 없다는 이유 때문에, 엄밀하지 않다!, 혹은 불완전하다! 하는 분들도 계십니다만... 적어도 식이 다항식 꼴로 이루어진 함수는 모두 도함수의 좌우극한이 존재하므로 1번 방법과 2번 방법 모두 사용가능합니다. (위에 예시로 든 함수는 $x=0$에서 도함수의 극한이 발산하지만 미분은 가능한 함수입니다. 혹시 더 자세한 내용이 알고 싶다면 2종 불연속 함수라고 네이버에 검색해보는 것도 좋습니다...만 대학수학 개념입니다.)

사실 제가 이야기 하지 않아도 다들 이미 기본적인 미분가능성 문제를 도함수의 극한을 이용해서 풀어나가고 있을 것입니다. 가장 대표적인 예시가 문제에서 함수 $h(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq a)\\ g(x) & (x<a)\end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하다는 조건을 $f(a)=g(a)$, $f'(a)=g'(a)$로 연결시켜 푸는 풀이입니다.

앞에서 미분가능한 함수들을 사칙연산 했을 때는 모두 미분가능했으므로 ($\frac{f(x)}{g(x)}$는 제외), 이제 특정 x에서 미분가능하지 않은 함수들을 사칙연산할 때는 어떤 식으로 해야 하는지 알아봅시다. 앞의 연속성과 거의 같은데, 두 함수가 미분가능하지 않은 x만을 모아서, 미분불가능 후보로 두고 후보들에 대해서 1. 함수가 연속인지, 2. 미분계수가 존재하는지 (혹은 도함수의 극한이 존재하는지)를 조사해주면 됩니다.

역시 앞에서 연속성 설명할 때와 같이 함수 $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$와 같은 경우는 그냥 덧셈 뺄셈 정도의 계산이면 끝나기에 1, 2번을 착실히 수행하면 미분가능성을 파악하지 못할 일이 거의 없을 것입니다.

미분가능성에서도 함수 $f(x)g(x)$는 특정 상황에서 이용할 수 있을만한 유용한 정리가 있는데,

1. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 미분불가능 + 좌우 미분계수는 존재
2. 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 미분가능하면

함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위해서는 $g(a)=0$이어야 한다.

이 정리도 간단히 증명을 해보면
함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x \to a-} f'(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a+} f'(x)=\beta$라 하고
함수 $g(x)$에 대하여 $g'(a)=k$라 두면

함수 $f(x)g(x)$의 도함수가 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로
함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하기 위해서는
$\lim_{x \to a-} \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}=\lim_{x \to a+} \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}$가 존재해야 하고
이에 따라 $\alpha g(a)+kf(a)=\beta g(a)+kf(a)$에서 $\alpha g(a)=\beta g(a)$이다.
이 때, 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않으므로 $\alpha \neq \beta$이고 $g(a)=0$이다.

정도로 증명할 수 있습니다.

만약, $g(x)$가 다항함수라면, $g(a)=0$에서 인수정리를 통해 $(x-a)$를 인수로 가지는 것도 추가로 알 수 있습니다. (이 역시 2020학년도 대학수학능력시험 수학 (나)형 20번 ㄴ, ㄷ 선지에서 물어본 내용이고, 2편에서 다룰 예정입니다.)

2. 글을 마치며...

위 칼럼은 함수의 연속성과 미분가능성에 관하여 내용을 설명하는 데 초점을 맞춘 칼럼이라 실제 문제에 적용하는 것은 2편에서 다룰 예정입니다.

이번 주 금요일 5/28에는 주예지T X MENTOR 팀의

‘ 2022학년도 주예지T X MENTOR 모의평가 4회’

가 배포예정이고,

이번 주 토요일 5/29에는 저희 띵수학 연구실의

‘2022학년도 6월 대비 MC THE MATH 모의고사’

가 배포예정입니다. 저희 MC THE MATH 모의고사 같은 경우 orbiQ에서 5/29 저녁 8시에 실시간 시행도 할 예정이니 https://oq.atom.ac/ 에 오셔서 많은 참여 부탁드립니다!

앞으로도 더 양질의 공부자료로 여러분들께 다가가는 띵수학 연구소가 되겠습니다! 감사합니다.