제 2 교시

2022학년도 주예지T X MENTOR 모의평가 4회 문제지

수학 영역

성명		수험 번호					–				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

우리도 단심을 지켜서 명월 볼 날 기다리노라

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고 하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ..... 1~8 쪽

○ 선택과목

확률과 통계 ..... 9~12 쪽

미적분 ..... 13~16 쪽

기하 ..... 17~20 쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2022학년도 주예지T X MENTOR 모의평가 수학 영역 4회

총괄

박지민 AJOODA LAB

팀장

정다예 (수학Ⅰ) **이다희** (수학Ⅱ) **김남석** (확률과 통계) **박상우** (미적분) **진남현** (기하)

출제 및 검수

김남석 김성호 김예지 김익성 김현우 박상우 박지민 백호 이다희 이종현 정다예 지승현 진남현 차영훈

검수

박진우 유수민 이동원 이희태 조은혜

해설

박지민 : 공통, 미적분, 기하

이종현 : 확률과 통계

일러스트

김예지 박지민 정다예

문제지 편집

이종현

확률과 통계 빠른 채점

미적분 빠른 채점

기하 빠른 채점

문의 사항은

카카오톡 플러스친구 채널 ASK MENTOR

(검색용 ID : mentormath)

인스타그램 mentor_math_

로 연락 주시기 바랍니다.

무단 전재 및 배포를 금합니다.

MENTOR

수학 영역

AJOODA LAB

5지선다형

1. $6^{\frac{3}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}}$의 값은? [2점]

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{3}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

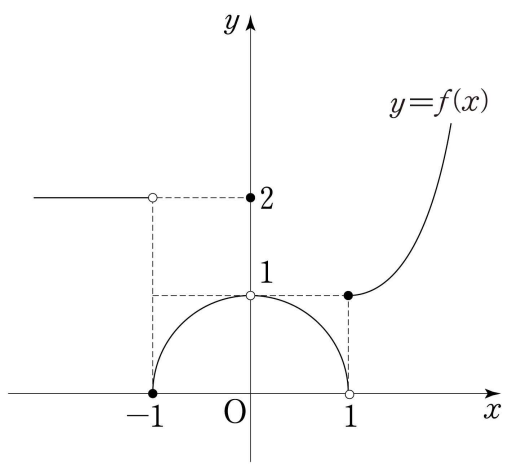
2. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. $\sin\theta \times \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{9}$일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0} f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

5. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $2a_2 = a_6$일 때, $\dfrac{S_4}{a_4}$의 값은? (단, $a_4 \neq 0$) [3점]

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

6. 열린구간 $(a, 2)$에서 정의된 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$이 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값은? (단, $a < 2$) [3점]

① $-\dfrac{5}{3}$ ② $-\dfrac{4}{3}$ ③ -1 ④ $-\dfrac{2}{3}$ ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

7. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 + at^2 - 2t + 3$$

이다. $t = 2$에서 점 P의 가속도가 10일 때, $t = 1$에서 점 P의 속도는? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -1 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

8. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 두 함수 $f(x)=4^x$, $g(x)=a^{-x}$ $(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 최댓값 $\frac{16}{9}$을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은? [3점]

① 64 ② 32 ③ $\frac{64}{3}$ ④ 16 ⑤ $\frac{64}{5}$

9. 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $O(0,\ 0)$에서의 접선 l과 수직이고 원점을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 점 O가 아닌 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 접선 l과 만나는 점을 B라 할 때, 삼각형 OAB의 넓이는? [4점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} kS_k = 2^{n+1} - n(n+1)$$

이 성립한다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$n=1$일 때, $S_1 = 2^2 - 2 = 2$이므로 $a_1 = 2$이고,
$n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$nS_n = \sum_{k=1}^{n} kS_k - \sum_{k=1}^{n-1} kS_k = 2^n - \boxed{\text{(가)}}$$

$$2^n - \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 즉, $S_n = \dfrac{2^n - \boxed{\text{(가)}}}{n}$이고, $a_1 = S_1 = 2$이다.

$n=2$일 때, $S_2 = 0$이므로 $a_2 = \boxed{\text{(나)}}$이고,
$n \ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

이므로

$$a_n = \boxed{\text{(다)}}\ (n \ge 3),\ a_1 = 2,\ a_2 = \boxed{\text{(나)}}$$

이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(2)g(3)+p$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

11. 함수 $f(x)=|x^2-1|-1$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=k\,(k>\sqrt{2})$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $S_1=2S_2$일 때, k의 값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

12. 최고차항의 계수가 1이고 $x=-2$, $x=2$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=f(x)+|f(x)|$$

이다. $g(-2)+g(2)=2g(-1)-4$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

13. 양수 k와 자연수 m에 대하여

곡선 $y=\sin\frac{\pi}{k}x\ (0\le x\le 5k)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$가 만나는 점을 x좌표가 작은 순서대로 각각 P_1, P_2, $\cdots$, P_m이라 하고, 점 $\mathrm{A}(k,\ 0)$에 대하여 선분 $\mathrm{P}_1\mathrm{A}$를 $2:1$로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{A}$의 넓이를 $S(k)$, 삼각형 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_m\mathrm{Q}$의 넓이를 $T(k)$라 할 때, $S(m)\times T(m)$의 값은? [4점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_2^{2+x} f(t)\,dt=\int_2^{2-x} f(t)\,dt$$

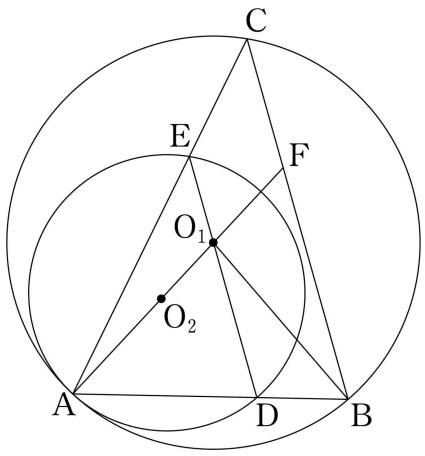
이다.

(나) 방정식 $\int_1^x f(t)\,dt=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

15. 그림과 같이 삼각형 ABC에 외접하고 중심이 O_1인 원 C_1이 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 AC 위의 점 E에 대하여 세 점 A, D, E를 지나고 중심이 O_2인 원 C_2가 원 C_1과 점 A에서 접한다. 점 O_1은 선분 DE 위에 있고, 두 원의 반지름의 길이의 비가 3 : 2이다. 직선 AO_1과 선분 BC가 만나는 점을 F라 하자. $\overline{O_1O_2}=1$이고 $\cos(\angle FAB)=\frac{2}{3}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\angle AO_1B=2\angle ACB$

ㄴ. $\angle AED=\angle ACB$

ㄷ. 삼각형 O_1BF의 둘레의 길이는 8이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

16. $\log_a(2a^2-2a)=2$를 만족시키는 1이 아닌 양수 a의 값을 구하시오. [3점]

17. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_5}{a_3}=6,\quad a_2=3$$

을 만족시킬 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

18. 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax-4}{x-1} & (x\neq 1)\\ -3x+b & (x=1)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

19. 부등식 $4^x-2^{x+2}-12<0$의 해가 $x<\alpha$일 때, 4^α의 값을 구하시오. [3점]

20. 함수 $f(x)=x^2(x+a)$ $(a>0)$와 실수 k에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int\{f(x)-k\}\,dx$$

를 만족시키고 열린구간 $(2,\ \infty)$에서만 증가할 때, $a+k$의 최댓값을 구하시오. [4점]

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

21. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n & (a_n<0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{10}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. $x=0$에서 극값을 갖는 이차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1이고 $g'(a)=0$인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 $a>0$인 상수이다.)

(가) 방정식 $h(x)=f(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
(나) 함수 $|h(x)-f(0)|$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 방정식 $h(x)=f(a)$의 실근은 $-a$, 4뿐이다.

$|f(a)-f(0)|=2$일 때, $h(3)-h(-6)$의 값을 구하시오. [4점]

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

MENTOR

수학 영역(미적분)

AJOODA LAB

5지선다형

23. 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는? [2점]

① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

24. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_{a^2}(1+x)}{x}=4$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은? [3점]

① $-e^{\frac{1}{5}}$ ② $-e^{\frac{1}{4}}$ ③ $-e^{\frac{1}{3}}$ ④ $-e^{\frac{1}{2}}$ ⑤ $-e$

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

25. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 5, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - 2}{a_n} = 3$$

일 때, $\lim_{n\to\infty} \{nb_n(b_n-2)\}$의 값은? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

26. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 < t < \pi)$에서의 위치 (x, y)가

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin 2t$$

이다. 점 P의 속력과 가속도의 크기가 같을 때, 점 P가 원점으로부터 떨어진 거리는? [3점]

① $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{17}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{19}}{5}$

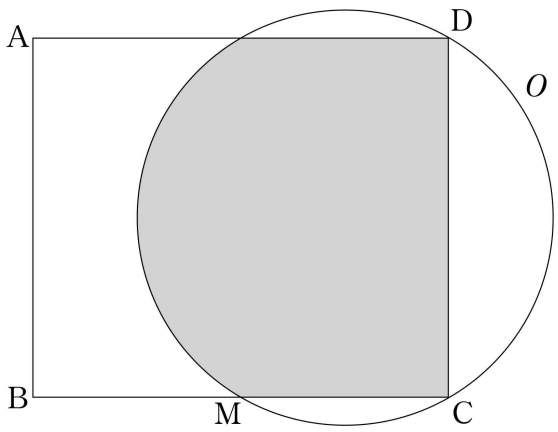
이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

27. 그림과 같이 $\overline{AD}=4$, $\overline{AB}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BC의 중점 M에 대하여 세 점 C, D, M을 지나는 원 O를 그린다. 원 O의 내부와 직사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 ㄇ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

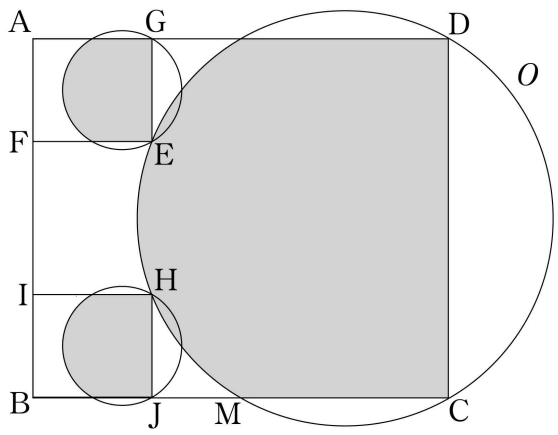
그림 R_1에서 원 O 위의 점 E에서 선분 AB와 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하고, 원 O 위의 점 H에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 I, J라 하자. $\overline{EF}:\overline{EG}=\overline{HI}:\overline{HJ}=2:\sqrt{3}$ 일 때, 두 직사각형 AFEG와 IBJH에 각각 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ㄇ 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{49(9\sqrt{3}+4\pi)}{135}$ ② $\frac{49(9\sqrt{3}+4\pi)}{129}$ ③ $\frac{49(9\sqrt{3}+4\pi)}{123}$

④ $\frac{49(6\sqrt{3}+4\pi)}{135}$ ⑤ $\frac{49(6\sqrt{3}+4\pi)}{123}$

28. $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ 에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(2x)$라 하자. $g'(2)$의 값은? [4점]

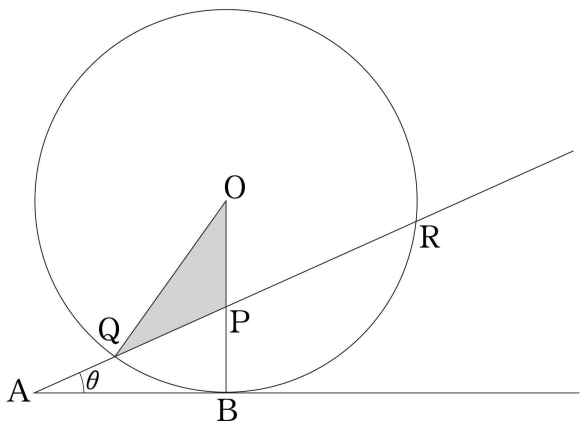
① $\frac{e}{8e^2+8}$ ② $\frac{e}{4e^2+4}$ ③ $\frac{e}{2e^2+2}$

④ $\frac{e}{e^2+1}$ ⑤ $\frac{2e}{e^2+1}$

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원 C 밖의 점 A에서 원 C에 그은 접선의 접점을 B라 하자. $\overline{AB}=2$이고, 선분 $\overline{OB}$ 위의 점 P에 대하여 직선 PA가 원 C와 만나는 점 중 점 A에 가까운 점을 Q, 나머지 한 점을 R라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 선분 QR의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}=p$일 때, $40p$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



30. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 이계도함수가 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ (-3x^2-2x+2)e^{-x} & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. $x>-1$에서 정의된 함수 $y=\frac{g(x)-t}{x+1}$의 극값의 개수를 $h(t)$라 할 때, 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

방정식 $h(t)=1$을 만족시키는 t가 오직 하나 존재한다.

$h(t)>0$을 만족시키는 t의 범위가 $\alpha<t<\beta$일 때, $\left|g\left(-\frac{\beta}{3}\right)\right|$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$) [4점]

∗ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 MENTOR와 AJOODA LAB에 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.