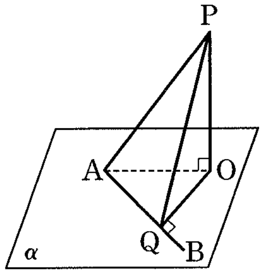
Part 1. 공간도형

01.

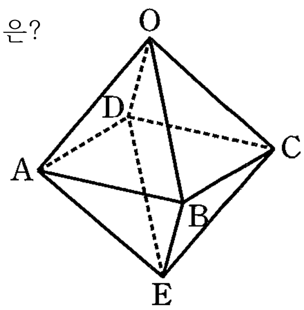
평면 α위에 있지 않은 한 점 P에서 α에서 내린 수선의 발을 O라 하고 O에서 α 위의 선분 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자. $\overline{OP}=4$, $\overline{AQ}=2\sqrt{6}$, $\overline{AP}=7$ 일 때, $\overline{OQ}$의 길이는?



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 3
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

02.

오른쪽 그림과 같은 정팔면체에 대하여 **보기** 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



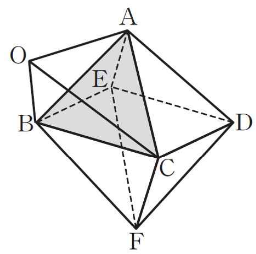
보기

ㄱ. $\overline{OA}$와 꼬인 위치에 있는 모서리는 4개이다.
ㄴ. $\overline{AB}$와 $\overline{OC}$가 이루는 각의 크기는 90°이다.
ㄷ. $\overline{BE}$와 $\overline{OC}$가 이루는 각의 크기는 60°이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

03.

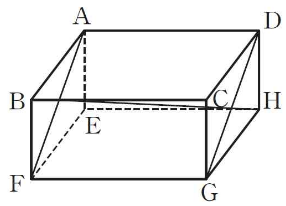
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔면체 ABCDEF와 정사면체 O$-$ABC의 한 면 ABC를 일치시켜 만든 입체도형이 있다. 선분 OC와 평행한 모서리의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

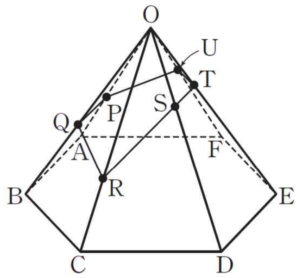
04.

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AE}=2$이고, $\overline{AD}=4$인 직육면체에서 선분 BH와 면 AFGD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $36\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



05.

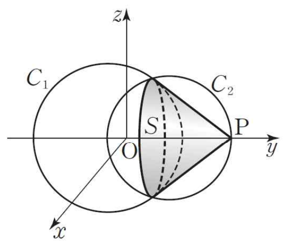
한 모서리의 길이가 6인 정육각뿔 O$-$ABCDEF에서 $\overline{\text{OA}}$, $\overline{\text{OB}}$, $\overline{\text{OC}}$를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하고, $\overline{\text{OD}}$, $\overline{\text{OE}}$, $\overline{\text{OF}}$를 $1:2$로 내분하는 점을 각각 S, T, U라 하자. 이 육각형 PQRSTU를 밑면 ABCDEF로 정사영 시킨 도형의 넓이는?



① $12\sqrt{2}$ ② $14\sqrt{2}$ ③ $12\sqrt{3}$ ④ $16\sqrt{2}$ ⑤ $14\sqrt{3}$

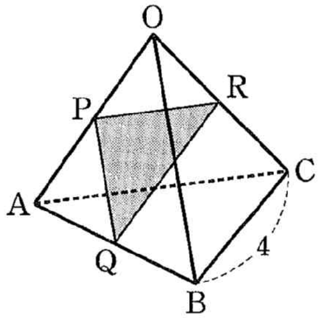
06.

두 구 $x^2+y^2+z^2=64$, $x^2+(y-5)^2+z^2=49$를 각각 C_1, C_2라 하자. 두 구 C_1, C_2가 만나서 생기는 원을 S라 하고, 구 C_2와 y축의 두 교점 중에서 원점으로부터 더 멀리 떨어진 점을 P라 하자. 원 S를 밑면으로 하고 점 P를 꼭짓점으로 하는 원뿔의 부피를 V라 할 때, $\dfrac{V}{\pi}$의 값을 구하시오.



07.

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 OABC에서 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{OC}$의 중점을 각각 P, Q, R라 하자. 평면 PQR와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, **보기** 중 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $\triangle$PQR는 직각 이등변 삼각형이다.

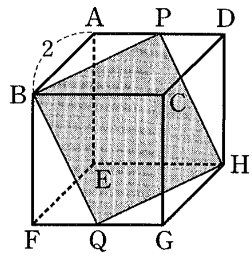
ㄴ. $\triangle$PQR의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다.

ㄷ. $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

08.

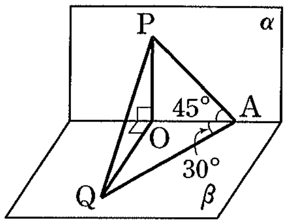
오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 $\overline{AD}$, $\overline{FG}$의 중점을 각각 P, Q라 할 때, □PBQH의 평면 EFGH 위로의 정사영의 넓이는?



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt[3]{2}$

09.

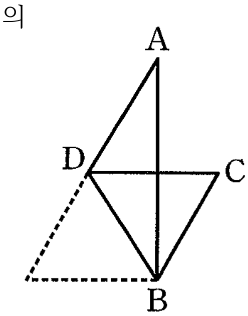
오른쪽 그림과 같이 $\angle \mathrm{PAO}=45^\circ$, $\angle \mathrm{QAO}=30^\circ$,
$\overline{\mathrm{PA}}=3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{QO}}\perp\overline{\mathrm{AO}}$일 때, 평면 α위의 삼각형 APO의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는?



① $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$　② $2\sqrt{3}$　③ $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$
④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

10.

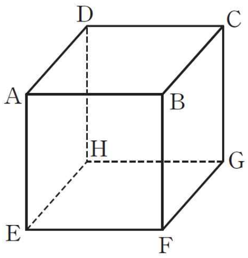
한 변의 길이가 a인 정사각형 모양의 종이 ABCD를 대각선 BD를 접는 선으로 하여 선분 AB와 선분 BC가 이루는 각이 60°가 되도록 접었을 때, 삼각형 ABD의 평면 BCD위로의 정사영의 넓이는?



① 0　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $2\sqrt{2}$

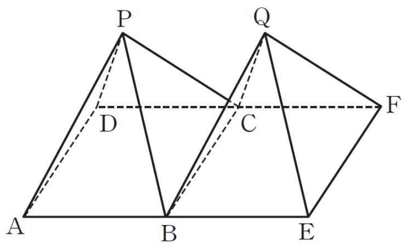
11.

그림과 같은 정육면체 ABCD−EFGH에서 면 ADGF와 면 BEG의 교선과 면 EFGH가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $3\cot^2\theta$의 값을 구하시오.



12.

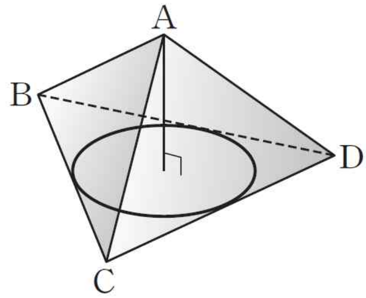
그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 P−ABCD, Q−BEFC가 한 평면 위에 놓여있다. 면 PAD의 내접원을 S라 하고 S를 면 PBC위로 정사영한 도형을 S_1이라 하자. 도형 S_1을 다시 면 QBC 위로 정사영한 도형을 S_2라 하고, S_2를 면 QEF 위로 정사영 한 도형을 S_3라고 할 때, S_3의 넓이는?



① $\dfrac{\pi}{27}$　② $\dfrac{\pi}{36}$　③ $\dfrac{\pi}{54}$　④ $\dfrac{\pi}{81}$　⑤ $\dfrac{3\pi}{108}$

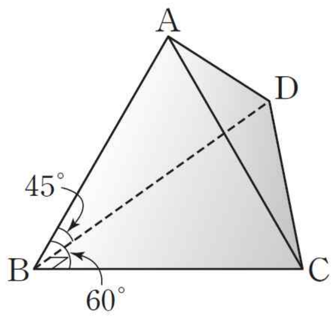
13.

부피가 16인 사면체 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 둘레의 길이는 8이고 넓이는 12이다. 꼭짓점 A에서 삼각형 BCD에 내린 수선의 발이 삼각형 BCD의 내접원의 중심과 일치할 때, 세 삼각형 ABC, ACD, ADB의 넓이의 합을 구하시오.



14.

그림과 같이 $\angle CBA = 60^\circ$, $\angle CBD = 90^\circ$, $\angle ABD = 45^\circ$인 사면체 ABCD가 있다. 평면 ABC와 평면 ABD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $60\cos^2\theta$의 값을 구하시오.



Part 2. 공간좌표

15.

두 점 $\mathrm{A}(2, -3, -1)$, $\mathrm{B}(1, -2, 1)$이 있다. $\triangle\mathrm{ABC}$가 정삼각형이 되도록 xy평면 위에 점 C를 잡을 때, C는 2개 존재한다. 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{2}$　② $2\sqrt{3}$　③ $3\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

16.

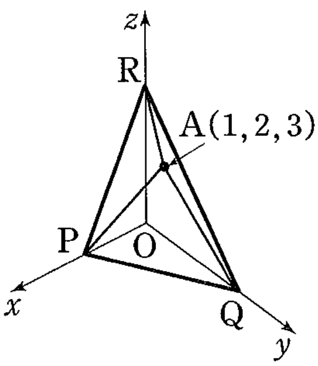
점 $(1, 1, 3)$을 지나고, xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하는 두 구의 겉넓이의 합은?

① 48π　② 52π　③ 56π　④ 60π　⑤ 64π

17.

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$에서 x축, y축, z축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R 이라 하자. 이 때, 사면체 APQR의 부피는?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$　② $\sqrt{3}$　③ 2
④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\sqrt{5}$



18.

좌표공간 위의 세 점 A$(1,\ 1,\ 2)$, B$(-1,\ 0,\ 1)$, C$(2,\ 0,\ -3)$이 있다. 네 점 A, B, C, D에 의하여 만들어지는 사각형이 평행사변형이 되도록 하는 점 D가 3개 존재하고, 그 점들을 각각 D_1, D_2, D_3라 할 때, 삼각형 $D_1D_2D_3$의 무게중심이 $(a,\ b,\ c)$이다. $10(a+b-c)$의 값을 구하시오.

19.

두 구 $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$, $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=1$에 그을 수 있는 모든 공통외접선에 의하여 만들어지는 직원뿔대의 윗면의 넓이와 아랫면의 넓이의 합은?

① $\frac{33}{9}\pi$ ② $\frac{35}{9}\pi$ ③ $\frac{39}{9}\pi$ ④ $\frac{40}{9}\pi$ ⑤ $\frac{43}{9}\pi$

20.

좌표공간에 두 점 A$(6,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 8,\ 0)$이 있다. 삼각형 ABC의 넓이가 10이 되도록 하는 점 C의 자취를 T라 할 때, 원점 O와 도형 T위의 한 점까지의 거리의 최솟값은?

① 2 ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

21.

좌표공간에 있는 구

$$x^2+(y-3)^2+(z-4)^2=3^2$$

의 중심에서 y축에 내린 수선의 발을 P, z축에 내린 수선의 발을 Q라 하자.
구와 직선 PQ가 두 점에서 만날 때, 두 점 사이의 거리는?

① $\frac{13}{5}$ ② $\frac{14}{5}$ ③ $\frac{16}{5}$ ④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

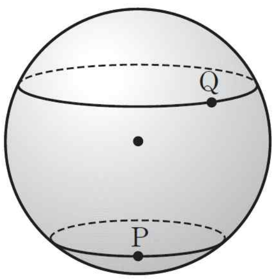
22.

그림과 같이 구

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=13^2$$

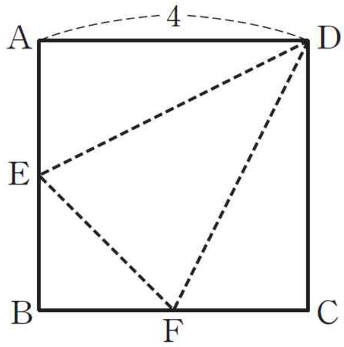
위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 점 P의 자취의 z좌표가 -8,
점 Q의 z좌표가 9일 때, 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최솟값은?

① 322 ② 325 ③ 332 ④ 335 ⑤ 338



23.

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 $\overline{\mathrm{DE}}$, $\overline{\mathrm{DF}}$, $\overline{\mathrm{EF}}$를 접는 선으로 하여 접었더니 꼭짓점 A, B, C가 모두 한 점에서 만나서 사면체 ABCD가 만들어졌다. 사면체 ABCD의 부피는?



① $\frac{8}{3}$ ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ $\frac{11}{3}$ ⑤ 4

24.

좌표공간에 구 $x^2+(y+2)^2+(z-5)^2=4$와 xy평면 위에 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=5$가 있다. 원 위의 점 P에서 구에 접선을 그었을 때, 이 접선의 길이의 최솟값은?

① $2\sqrt{10}$ ② $\sqrt{41}$ ③ $\sqrt{42}$ ④ $\sqrt{43}$ ⑤ $2\sqrt{11}$

Part 3. 벡터

25.

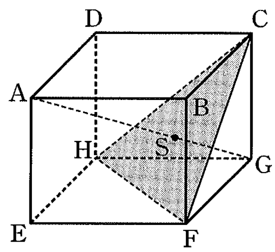
$\triangle$ABC의 내부의 한 점 P가 있고, $\overline{\mathrm{AP}}$의 연장선이 $\overline{\mathrm{BC}}$와 만나는 점을 D라 하자.

$\triangle\mathrm{PAB} : \triangle\mathrm{PBD} : \triangle\mathrm{PDC} = 3:2:5$이고, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\vec{b}+y\vec{c}$라 할 때, $x+y$의 값은?

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

26.

직육면체 ABCD−EFGH에서 대각선 AG와 평면 CHF의 교점을 S라고 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=m\overrightarrow{\mathrm{AG}}$인 실수 m에 대하여 $6m$의 값을 구하여라.



27.

좌표평면 위에 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=4$이고 $\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$인 세 점 O, A, B가 있다.

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+\frac{y}{3}=1$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$로 주어진 점 P가 그리는 도형의 길이는?

① $3\sqrt{6}$ ② $3\sqrt{7}$ ③ $4\sqrt{6}$ ④ $4\sqrt{7}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

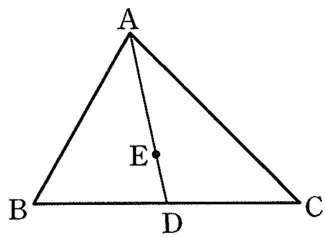
28.

두 벡터 $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(1,1,0)$이고 $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$라 할 때, $\vec{a}$, $\vec{c}$가 이루는 각의 크기가 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $\frac{1}{2}$이 되도록 하는 양수 t의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

29.

$\triangle$ABC의 변 BC 위에 한 점 D가 있고 선분 AD위에 한 점 E가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=50$일 때, $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이는?



① 25 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 35

30.

$\triangle$ABC의 무게중심을 G라 하고 동점 P에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=6$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{GQ}}=\overrightarrow{\mathrm{GO}}+\overrightarrow{\mathrm{GP}}$를 만족하는 점 Q가 그리는 도형의 길이는? (단, O는 원점)

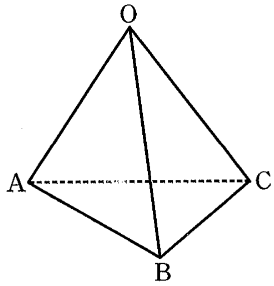
① 10 ② 12 ③ 4π ④ 6π ⑤ 9π

31.

한 모서리의 길이가 1인 정사면체 OABC에 대하여

$\vec{x}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$일 때

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OC}=6$ 을 만족한다. 이 때, $l+m+n$의 값은?

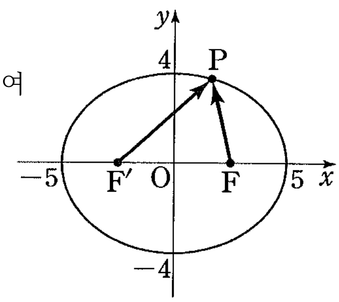


① 3　　② 4　　③ 5
④ 6　　⑤ 7

32.

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′과 타원 위를 움직이는 점 P에 대하여

$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}$의 최댓값은?

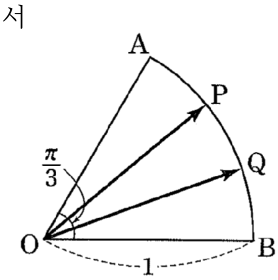


① 14　　② 16　　③ 18
④ 20　　⑤ 22

33.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$인

부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위를 움직이는 두 점 P, Q에 대하여 **보기**에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

ㄱ. $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최댓값은 1이다.

ㄴ. $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 2이다.

ㄷ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값은 1이다.

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄱ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

34.

좌표공간에서 $\overline{\mathrm{AB}}=6$인 두 점 A, B가 직선 $l: \dfrac{x+2}{2}=y-2=\dfrac{z-4}{-1}$ 위를 움직이고,

점 C는 직선 $m: \dfrac{x}{2}=y=\dfrac{z}{-1}$ 위를 움직일 때, △ABC의 넓이는?

① $2\sqrt{2}$　② $4\sqrt{2}$　③ $6\sqrt{2}$　④ $9\sqrt{2}$　⑤ $10\sqrt{2}$

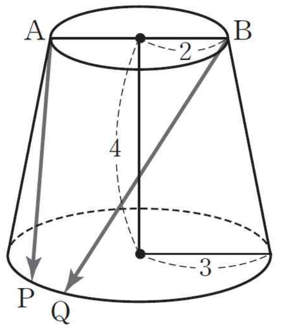
35.

직선 $l: x-1=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 위에 한 변 BC가 포함되는 정육각형 ABCDEF가 있다.

점 A의 좌표가 A$(1,\,-2,\,3)$일 때, 이 정육각형의 한 변의 길이는?

① $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$　② $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　③ $\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$
④ $3\sqrt{10}$　⑤ $4\sqrt{10}$

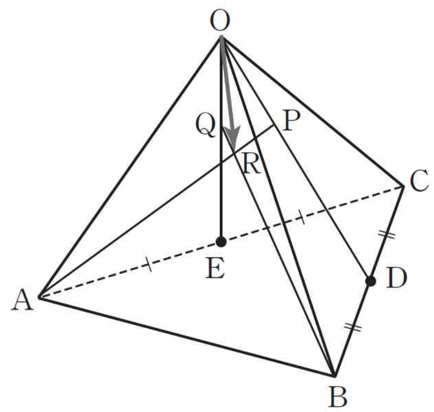
36. 그림과 같이 윗면과 아랫면의 반지름의 길이가 각각, 2, 3이고 높이가 4인 원뿔대가 있다. 윗면에서 임의의 한 지름을 잡고 양 끝점을 각각 A, B라 하고 아랫면의 원주 위에 임의의 두 점 P, Q를 잡는다. 이때, $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}|$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.



37. 정사면체 OABC에서 두 모서리 BC, CA의 중점을 각각 D, E라 하고 두 선분 OD, OE를 1 : 2로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하면 두 선분 AP, BQ는 한 점 R에서 만난다.
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라고 할 때,

$$\overrightarrow{OR}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$$

를 만족시키는 세 실수 l, m, n에 대하여 $\dfrac{1}{lmn}$의 값을 구하시오.



38. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(2,\ 1,\ 1)$을 지나고, 직선 OP에 수직인 평면 α가 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 A, B, C라고 할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 18　② $12\sqrt{3}$　③ $9\sqrt{6}$　④ 24　⑤ $18\sqrt{2}$

39.

좌표공간의 원점 O에서 두 평면

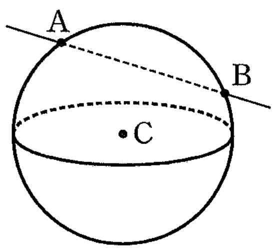
$\alpha : 3x-2y-z=28,\ \beta : 2x-y+3z=14$

에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 할 때, $\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$의 값은?

① $5\sqrt{2}$　② $\sqrt{51}$　③ $\sqrt{52}$　④ $\sqrt{53}$　⑤ $3\sqrt{6}$

40.

중심이 $\mathrm{C}(1,1,2)$이고 반지름의 길이가 3인 구와 직선 $x=y=\dfrac{-z}{2}$가 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$를 만족하는 점 P가 나타내는 도형의 방정식이 $ax+y-bz+c=0$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.



Part 1. 공간도형의 정답 및 해설

01.

$\alpha \perp \overline{PO}$이므로 평면 α위의 $\overline{AO}$에 대하여 $\overline{AO} \perp \overline{PO}$이다.
따라서 삼각형 PAO가 직각삼각형이므로

$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AP}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$

$\therefore \overline{OQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AQ}^2} = \sqrt{(\sqrt{33})^2 - (2\sqrt{6})^2} = 3$

답 ③

02.

ㄱ. $\overline{OA}$와 꼬인 위치에 있는 모서리는 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ $\overline{BE}$, $\overline{DE}$ 로 4개이다. (참)

ㄴ. $\overline{AB}$를 $\overline{CD}$로 평행이동하면 삼각형 OCD가 정삼각형이므로 $\angle OCD = 60°$,
따라서 $\overline{AB}$와 $\overline{OC}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. (거짓)

ㄷ. $\overline{BE}$를 $\overline{OD}$로 평행이동하면 삼각형 OCD가 정삼각형이므로 $\angle DOC = 60°$,
따라서 $\overline{BE}$와 $\overline{OC}$가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

03.

두 면 ABC, ABE가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$, 두 면 ABC, OAB가 이루는 각의 크기를 θ' $(0 \le \theta' \le \pi)$이라 하면 $\cos\theta = \cos\theta' = \frac{1}{3}$
이므로 $\triangle OAB$와 $\triangle ABE$는 한 평면 위에 있다.
또한, $\triangle OAC$와 $\triangle ACD$, $\triangle OBC$와 $\triangle BCF$도 각각 한 평면 위에 있다.
따라서 사각형 OADC는 마름모이므로 $\overline{OC} // \overline{AD}$이고, 마찬가지 방법으로 $\overline{OC} // \overline{BF}$이다.
따라서 $\overline{OC}$와 평행한 모서리는 2개다.

답 ②

04.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$이므로 점 B의 면 AFGD 위로의 정사영은 $\overline{\mathrm{AF}}$의 중점 M이 되고,
점 H의 정사영은 $\overline{\mathrm{DG}}$의 중점 N이 된다. 따라서 $\overline{\mathrm{BH}}=2\sqrt{6}$이고, $\overline{\mathrm{MN}}=4$이므로

$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ $\quad\therefore\ 36\cos^2\theta=24$

답 24

05.

육각형 PQRSTU와 점 O를 밑면 ABCDEF로 정사영 시킨 도형을 각각 P′Q′R′S′T′U′와 O′라 하면
△O′P′Q′, △O′Q′R′는 한 변의 길이가 4인 정삼각형
△O′S′T′, △O′T′U′는 한 변의 길이가 2인 정삼각형
△O′R′S′, △O′U′P′는 직각삼각형이다.
따라서 구하는 넓이는

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2+2\sqrt{3}\right)\times2=14\sqrt{3}$$

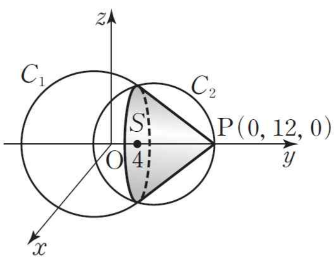
답 ⑤

06.

두 구의 방정식을 연립하면 $y^2-(y-5)^2=15$ $\quad\therefore\ y=4$
따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은 $x^2+z^2=48$
두 구가 만나서 생기는 원 S의 반지름의 길이는 $\sqrt{48}$이므로 이 원의 넓이는 48π이다.
구 C_2와 y축의 두 교점의 y좌표를 구하면
$(y-5)^2=49$ $\quad\therefore\ y=-2$ 또는 $y=12$
이때, 원점으로부터 더 멀리 떨어진 점이 P이므로 P$(0, 12, 0)$
따라서 구하는 원뿔의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\times48\pi\times(12-4)=128\pi$$

$$\therefore\ \frac{V}{\pi}=128$$



답 128

07.

ㄱ. $\overline{PR}=\overline{PQ}=2$

$\overline{PR} /\!/ \overline{AC}$, $\overline{PQ} /\!/ \overline{OB}$, $\overline{OB} \perp \overline{AC}$

$\therefore \angle QPR = 90^\circ$ 따라서 $\triangle PQR$는 직각이등변삼각형이다. (참)

ㄴ. 꼭짓점 O의 평면 ABC위로의 정사영은 삼각형ABC의 무게중심 G이다.

또, 점 P, R의 평면 ABC 위로의 정사영은 각각 $\overline{AG}$, $\overline{CG}$의 중점이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 삼각형 PQR의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$\triangle P'QR' = \triangle GR'P' + \triangle GP'Q$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\triangle ABC\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\triangle ABC\right)$

$= \frac{1}{6}\triangle ABC = \frac{1}{6}\times 4\sqrt{3}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (참)

ㄷ. $\overline{PQR} = \frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$이므로

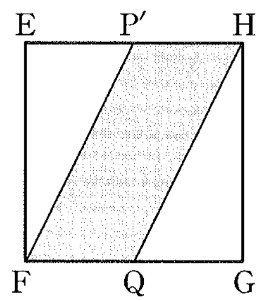
$\cos\theta = \frac{\triangle P'QR'}{\triangle PQR} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

08.

□PBQH의 평면 EFGH위로의 정사영은 오른쪽 그림의 어두운 부분과 같다.

따라서 구하는 정사영의 넓이는 $2\times 1 = 2$



답 ④

09.

두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overline{PA}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{OP}=3\sqrt{2}\sin45^\circ=3$

또, $\overline{OA}=3$이므로 $\overline{OQ}=3\tan30^\circ=\sqrt{3}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{3^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$\triangle APO=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$\dfrac{9}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

답 ①

10.

점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 M이라 하고,

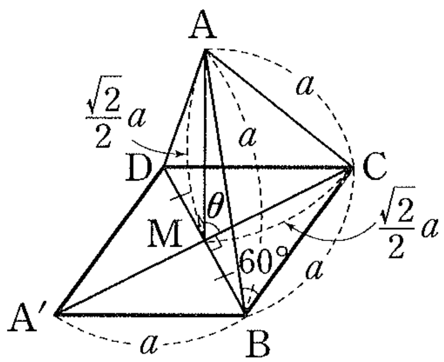
두 평면 ABD와 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle AMC=\theta$ 이다.

$\overline{AM}^2+\overline{MC}^2=\overline{AC}^2$

$\therefore \theta=90^\circ$

따라서 정사영의 넓이는

$\triangle ABD\cos90^\circ=0$



답 ①

11.

사각형 ABFE의 두 대각선의 교점을 T, $\overline{\mathrm{EF}}$의 중점을 K라 할 때, 평면 ADGF와 평면 BEG의 교선은 $\overline{\mathrm{TG}}$가 된다.

즉, $\overline{\mathrm{TG}}$와 평면 EFGH가 이루는 예각은 △GTK에서 ∠TGK이다.

이때, 정육면체의 한 변의 길이를 $2a$로 놓으면

$\overline{\mathrm{GK}}=\sqrt{5}a$, $\overline{\mathrm{TK}}=a$

$$\therefore\ \cot(\angle\mathrm{TGK})=\cot\theta=\frac{\overline{\mathrm{GK}}}{\overline{\mathrm{TK}}}=\sqrt{5}$$

$$\therefore\ 3\cot^2\theta=15$$

답 15

12.

$\overline{\mathrm{AD}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 N이라 하면 △PAD와 △PBC의 이면각은 △PMN에서 ∠MPN이다.

$\overline{\mathrm{PM}}=\overline{\mathrm{PN}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MN}}=2$이므로

$$\cos(\angle\mathrm{MPN})=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

이고, 한 변의 길이가 2인 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는 $S=\frac{\pi}{3}$이므로

$$S_3=S_2\cos\theta=S_1\cos^2\theta=S\cos^3\theta=\frac{\pi}{81}$$

답 ④

13.

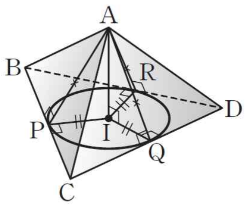
사면체의 높이를 h라 하면

(사면체의 부피)$=\frac{1}{3}\times 12\times h=16 \qquad \therefore h=4$

이때, $\triangle$BCD의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle BCD=\frac{1}{2}\times 8\times r=12 \qquad \therefore r=3$

$\triangle$BCD의 내접원의 중심을 I, 세 접점을 P, Q, R라 하면



$\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

한편, 세 삼각형 ABC, ACD, ADB는 밑면 BCD와 이루는 각이 모두 같고 세 삼각형 ABC, ACD, ADB의 정사영이 각각 $\triangle$IBC, $\triangle$ICD, $\triangle$IDB이므로

$\triangle IBC+\triangle ICD+\triangle IDB$

$=(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB)\cos(\angle API)$

$\triangle BCD=(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB)\cos(\angle API)$

$\therefore \triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB=\frac{12}{\cos(\angle API)}=\frac{12}{\frac{3}{5}}=20$

[다른 풀이]

$\triangle$BCD의 둘레의 길이가 8이고, $\overline{AP}=\overline{AQ}=\overline{AR}=5$이므로

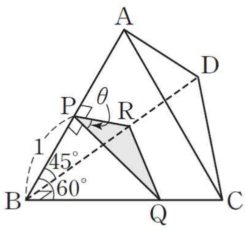
$\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADB=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$

답 20

14.

$\overline{BA}$ 위에 $\overline{BP}=1$인 점 P를 잡자.

점 P를 지나고 $\overline{BA}$에 수직인 평면과 $\overline{BC}$, $\overline{BD}$의 교점을 각각 Q, R라 하면



$\triangle$BPQ에서 $\overline{BQ}=2$, $\overline{PQ}=\sqrt{3}$

$\triangle$BPR에서 $\overline{BR}=\sqrt{2}$, $\overline{PR}=1$

따라서 $\triangle$BQR에서

$\overline{QR}=\sqrt{\overline{BQ}^2+\overline{BR}^2}=\sqrt{6}$이고

$\triangle$PQR에서 $\cos\theta=\frac{3+1-6}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore 60\cos^2\theta=60\times\frac{1}{3}=20$

답 20

15.

xy평면 위의 점의 $(x, y, 0)$의 꼴이므로 점 C의 좌표를 $(x, y, 0)$으로 놓으면 주어진 조건에 의해

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{CA}}^2$

$(x-2)^2+(y+3)^2+1=(x-1)^2+(y+2)^2+1$에서

$x-y=4$, 즉 $y=x-4$ …… ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(-3+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{6}$이므로

㉠을 $6=(x-2)^2+(y+3)^2+1$에 대입하면

$6=(x-2)^2+(x-4+3)^2+1$

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

㉠에 대입하면 $x=0$, $y=-4$또는 $x=3$, $y=-1$이므로

점 C의 좌표는 $(0, -4, 0)$ 또는 $(3, -1, 0)$이다.

따라서 두 점 사이의 거리는 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 답 ③

16.

점 $(1, 1, 3)$을 지나고 xy평면, yz평면, zx평면에 동시에 접하므로 구의 중심의 좌표는 (r, r, r)이고,

구의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$

이 구가 점 $(1, 1, 3)$을 지나므로

$(1-r)^2+(1-r)^2+(3-r)^2=r^2$

$2r^2-10r+11=0$

이 때, 두 구의 반지름의 길이를 α, β라 하면

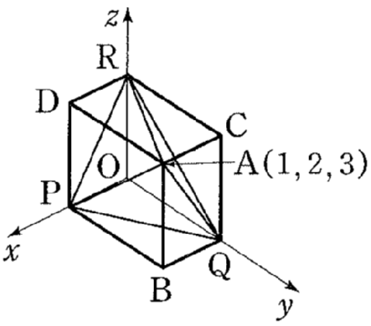
$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=\dfrac{11}{2}$

따라서 두 구의 겉넓이의 합은

$$\begin{aligned}4\pi(\alpha^2+\beta^2)&=4\pi\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=4\pi(25-11)=56\pi\end{aligned}$$

답 ③

17.



점 A에서 xy평면, yz평면, zx평면에 내린 수선의 발을 각각 B, C, D라 하면 삼수선의 정리에 의하여
육면체 ACRD−BQOP는 직육면체이고,
B(1, 2, 0), C(0, 2, 3), D(1, 0, 3),
P(1, 0, 0), Q(0, 2, 0), R(0, 0, 3)

(사면체 APQR의 부피) =(직육면체의 부피)−(사면체 APBQ의 부피)−(사면체 ACRQ의 부피)
−(사면체 ARDP의 부피)−(사면체 OPQR의 부피)
이므로 구하는 부피는

$$6-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times1\right)\times3-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\right)\times1-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times3\right)\times2-\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)\times3$$
$$=6-4=2$$

답 ③

18.

평행사변형에서 두 대각선의 중점은 일치하므로
$\overline{AD_1}$이 대각선일 때, $D_1(0, -1, -4)$, $\overline{BD_2}$이 대각선일 때, $D_2(4, 1, -2)$,
$\overline{CD_3}$이 대각선일 때, $D_3(-2, 1, 6)$이다.
따라서 삼각형 $D_1D_2D_3$의 무게중심은 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$이다.
$\therefore$ $10(a+b-c)=10$이다.

답 10

19.

두 구는 중심거리가 3이고, 두 구의 반지름의 길이의 합은 3이므로 두 구는 서로 외접한다.
반지름의 길이가 2, 1인 두 구의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 두 구의 공통외접선이 구 O_1과 만나는 점을 P, 구 O_2와 만나는 점을 Q라 하자.

이때, 점 P에서 직선 O_1O_2에 내린 수선의 발을 H_1, 점 Q에서 선분 O_1O_2에 내린 수선의 발을 H_2, 점 H_2에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 H_3이라 하면 $\triangle QH_2H_3$에서 $\overline{QH_3}=1$, $\overline{QH_2}=3$이므로 $\overline{H_2H_3}=2\sqrt{2}$

또한, $\triangle QPH_1 \backsim \triangle QH_2H_3$이므로 $\overline{PH_1}=\frac{4}{3}\sqrt{2}$ 마찬가지 방법으로 $\overline{QH_2}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$

따라서 구하는 직원뿔대의 윗면의 넓이와 아랫면의 넓이의 합은

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^2\pi+\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)^2\pi=\frac{40}{9}\pi$$

답 ④

20.

두 점 A(6, 0, 0), B(0, 8, 0)에서 $\overline{AB}=10$이므로 △ABC의 넓이가 10이면 높이가 2이다.
즉, 도형 T는 $\overline{AB}$를 회전축으로 하고 밑면인 원의 반지름의 길이가 2인 속이 비어있는 원기둥 모양이다. 이때, 원점 O에서 $\overline{AB}$에 이르는 수선의 길이가 $\frac{24}{5}$이고, $\overline{OC}$의 최솟값은

(원점 O에서 $\overline{AB}$까지의 거리)-2 $\overline{OC}$의 최솟값은 $\frac{14}{5}$이다.

답 ⑤

21.

구의 중심이 A(0, 3, 4)이므로 두 점 P, Q는 P(0, 3, 0), Q(0, 0, 4)이다.

구의 중심에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=\frac{12}{5}$이고, 구의 반지름의 길이는 3이므로

직선 PQ가 구와 만나는 두 점 사이의 거리는 $2\sqrt{3^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{18}{5}$

답 ⑤

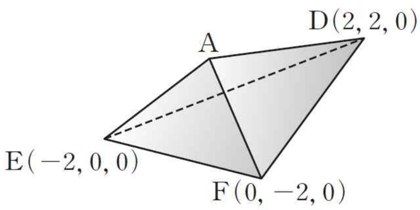
22.

구의 반지름의 길이가 13이고, 구의 중심에서 점 P의 자취인 원까지의 거리가 12이므로 점 P의 자취는 반지름의 길이가 5인 원이다.
또한, 구의 중심에서 점 Q의 자취인 원까지의 거리가 5이므로 점 Q의 자취는 반지름의 길이가 12인 원이다.
이때, 점 P에서 점 Q의 자취인 원에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PQ}$의 길이가 최소일 때는 $\overline{PH}=17$, $\overline{QH}=7$이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{17^2+7^2}=\sqrt{338} \qquad \therefore \overline{PQ}^2=338$$

답 ⑤

23.



접었을 때 사면체가 되므로 두 점 E, F는 각각 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 중점이다.

정사각형의 대각선의 교점을 원점으로 하면 세 점 D, E, F의 좌표는 D$(2, 2, 0)$, E$(-2, 0, 0)$, F$(0, -2, 0)$

A(x, y, z)라 하면

$\overline{AD}^2=(x-2)^2+(y-2)^2+z^2=16$ …… ㉠

$\overline{AE}^2=(x+2)^2+y^2+z^2=4$ …… ㉡

$\overline{AF}^2=x^2+(y+2)^2+z^2=4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=-\frac{2}{3},\ y=-\frac{2}{3},\ z=\pm\frac{4}{3}$

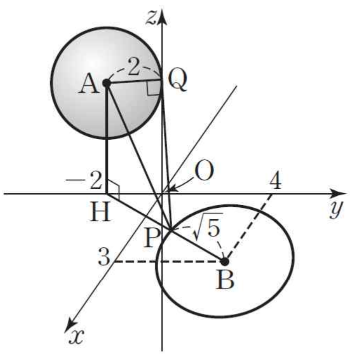
이때, △DEF의 넓이가 6이므로 사면체 ABCD의 부피는

$\frac{1}{3}\times 6\times\left|\pm\frac{4}{3}\right|=\frac{8}{3}$

답 ①

24.

구와 원의 중심을 각각 A$(0, -2, 5)$, B$(3, 4, 0)$이라 하고 점 A에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H$(0, -2, 0)$이라 하자. 원과 $\overline{BH}$의 교점을 P라 하면 원 위의 점 중에서 점 A에 이르는 거리가 최소인 점이 점 P이다.



점 P에서 구에 한 접선을 그었을 때의 접점을 Q라 하면

$\overline{HP}=\overline{BH}-\sqrt{5}=\sqrt{3^2+6^2}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{HP}^2}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{5})^2}=3\sqrt{5}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AQ}^2}=\sqrt{45-4}=\sqrt{41}$

답 ②

25.

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}} = \triangle\mathrm{PBD}:\triangle\mathrm{PDC} = 2:5$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7} = \dfrac{5\vec{b}+2\vec{c}}{7}$

또, $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{PD}} = \triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{PBD} = 3:2$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5\vec{b}+2\vec{c}}{7} = \dfrac{15}{35}\vec{b}+\dfrac{6}{35}\vec{c}$

$\therefore x+y = \dfrac{15}{35}+\dfrac{6}{35} = \dfrac{3}{5}$ 답 ①

26.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{c}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AS}} = m\overrightarrow{\mathrm{AG}} = m(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ …… ㉠

또, S는 평면 CHF위의 점이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CS}} = x\overrightarrow{\mathrm{CH}}+y\overrightarrow{\mathrm{CF}}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CS}}$

$= (\vec{a}+\vec{b})+x\overrightarrow{\mathrm{CH}}+y\overrightarrow{\mathrm{CF}} = (\vec{a}+\vec{b})+x(-\vec{a}+\vec{c})+y(-\vec{b}+\vec{c})$

$= (1-x)\vec{a}+(1-y)\vec{b}+(x+y)\vec{c}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$1-x = 1-y = x+y = m$

$\therefore x = y = \dfrac{1}{3}$, $m = \dfrac{2}{3}$ $\therefore 6m = 6\times\dfrac{2}{3} = 4$ 답 4

27.

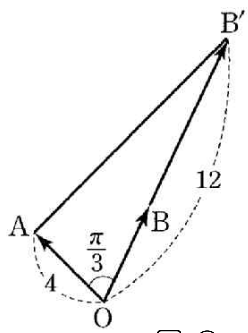
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{y}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+\dfrac{y}{3} = 1$이므로 점 P의 자취는 선분 AB′이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AB}'}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}'}^2-2\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}'}\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = 4^2+12^2-2\cdot4\cdot12\cdot\dfrac{1}{2} = 112$

따라서 점 P가 그리는 도형의 길이는

$\overline{\mathrm{AB}'} = \sqrt{112} = 4\sqrt{7}$



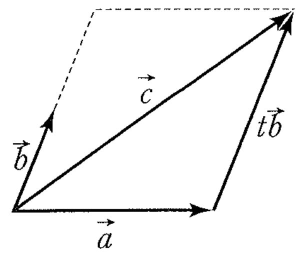
답 ④

28.

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$이므로 오른쪽과 같은 평행사변형을 생각할 수 있다.

그런데 $\vec{c}$가 $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각을 이등분 하는 것은 $\vec{c}$가 마름모의 대각선이 될 때이므로 $t|\vec{b}|=|\vec{a}|$

$\therefore t=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$



답 ③

29.

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하면 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{AD}=t\overrightarrow{AE}\ =t\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{5}\vec{b}\right)\ =\dfrac{5t\vec{a}+2t\vec{b}}{10}$ (단, $t\neq 0$)

점 D는 선분 BC를 내분하는 점이므로

$5t+2t=10$ $\qquad\therefore t=\dfrac{10}{7}$

따라서 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{10}{7}\overrightarrow{AE}$이므로 $|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{7}{10}|\overrightarrow{AD}|=\dfrac{7}{10}\times 50=35$

답 ⑤

30.

점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이므로 $\overrightarrow{PG}=\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}$

$3|\overrightarrow{PG}|=|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6$ $\quad\therefore |\overrightarrow{PG}|=2$

또한, $\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GP}$에서 $\overrightarrow{GQ}-\overrightarrow{GO}=\overrightarrow{GP}$

$\therefore \overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{GP}$

$\therefore |\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{GP}|=|\overrightarrow{PG}|=2$

따라서 점 Q의 자취는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이므로 Q가 그리는 도형의 길이는 4π이다.

답 ③

31.

$\vec{x}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$ 에서

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}=4$, $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=2$, $\vec{x}\cdot\overrightarrow{OC}=6$ 이므로

$$\begin{aligned}\vec{x}\cdot\overrightarrow{OA}&=(l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}\\&=l\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=l|\overrightarrow{OA}|^2+m|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\frac{\pi}{3}+n|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\frac{\pi}{3}\\&=l+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n=4 \quad\cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

같은 방법으로 계산하면

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}l+m+\frac{1}{2}n=2 \quad\cdots\cdots ㉡$

$\vec{x}\cdot\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}m+n=6 \quad\cdots\cdots ㉢$

㉠+㉡+㉢을 하면 $2(l+m+n)=12$ $\therefore l+m+n=6$

답 ④

32.

타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점의 좌표를 $F(c,0)$, $F'(-c,0)$이라 하면 $c=\sqrt{25-16}=3$

$\therefore F(3,0)$, $F'(-3,0)$

점 P의 좌표를 (a,b)라 하면

$\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF}=(a,b)-(3,0)=(a-3,b)$

$\overrightarrow{F'P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OF'}=(a,b)-(-3,0)=(a+3,b)$

$\therefore \overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}=(a-3)(a+3)+b^2=a^2+b^2-9 \quad\cdots\cdots ㉠$

한편, 점 $P(a,b)$는 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{25}+\frac{b^2}{16}=1$, 즉 $b^2=16-\frac{16}{25}a^2 \quad\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{F'P}=\frac{9}{25}a^2+7$ $(-5\leq a\leq 5)$

따라서 구하는 최댓값은 $a=\pm5$일 때이므로 $9+7=16$

답 ②

33.

ㄱ. $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$이므로 $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$이다.

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta = 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta$이므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$의 최댓값은 1이다. (참)

ㄴ. $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2 = 1^2 + 2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta + 1^2$

$= 2 + 2\cos\theta$

이 때, $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$이므로 $3 \leq 2+2\cos\theta \leq 4$ 따라서 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값은 2이다. (참)

ㄷ. $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 - 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + |\overrightarrow{OQ}|^2 = 1^2 - 2|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\theta + 1^2 = 2 - 2\cos\theta$

이 때, $\frac{1}{2} \leq \cos\theta \leq 1$이므로 $0 \leq 2-2\cos\theta \leq 1$

따라서 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|$의 최솟값은 0이다. (거짓)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

34.

두 직선 l, m은 서로 평행하다. 직선 l위의 한 점 $\mathrm{P}(-2, 2, 4)$와 직선 m위의 임의의 한 점 $\mathrm{Q}(2t, t, -t)$에 대해 $\overrightarrow{PQ}$가 직선 l에 수직일 때, $|\overrightarrow{PQ}|$가 직선 l과 m사이의 거리가 된다.

$\overrightarrow{PQ} = (2t+2, t-2, -t-4)$이므로

$\overrightarrow{PQ} \cdot (2, 1, -1) = (2t+2, t-2, -t-4) \cdot (2, 1, -1)$

$= 4t+4+t-2+t+4 = 0$ $\therefore t = -1$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = (0, -3, -3)$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$이므로

$\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

답 ④

35.

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t+1, -t+2, 2t+1)$이라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (t, -t+4, 2t-2)$

이 때, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp l$이므로

$(t, -t+4, 2t-2) \cdot (1, -1, 2) = 0 \quad \therefore t = \dfrac{4}{3}$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AH}}| = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

이 때, 정육각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$a = \overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\overline{\mathrm{AH}} = \dfrac{4\sqrt{7}}{3}$

답 ③

36.

윗면과 아랫면의 중심을 각각 $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}$가 윗면의 지름이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{BO}_1} = \vec{0}$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

$= (\overrightarrow{\mathrm{AO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{P}}) + (\overrightarrow{\mathrm{BO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{Q}})$

$= (\overrightarrow{\mathrm{AO}_1} + \overrightarrow{\mathrm{BO}_1}) + 2\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + (\overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{Q}})$

$= 2\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + (\overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{Q}})$

$\overline{\mathrm{PQ}}$가 밑면의 지름일 때, 최솟값

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}| = 2|\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}| = 8$ 을 갖는다.

두 점 P, Q가 일치할 때, 최댓값

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}}| = 2|\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}_2\mathrm{P}}| = 2\sqrt{4^2+3^2} = 10$을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 18이다.

답 18

37.

$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-s)\vec{a} + s\left(\frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$= (1-s)\vec{a} + \frac{s}{6}\vec{b} + \frac{s}{6}\vec{c}$ ...... ㉠

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (1-t)\vec{b} + t\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{c}\right)$

$= \frac{t}{6}\vec{a} + (1-t)\vec{b} + \frac{t}{6}\vec{c}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $s = t = \frac{6}{7}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$ $\quad\therefore\ l = m = n = \frac{1}{7}$ $\quad\therefore\ \frac{1}{lmn} = 7^3 = 343$

답 343

38.

평면 α는 점 P$(2,\ 1,\ 1)$을 지나고

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2,\ 1,\ 1)$에 수직이므로

$\alpha\ :\ 2(x-2)+1(y-1)+1(z-1)=0$

$\alpha\ :\ 2x+y+z=6$

따라서 세 점 A, B, C의 좌표는

A$(3,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 6,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 6)$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점이 $(0,\ 3,\ 3)$이므로

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6\sqrt{2} = 9\sqrt{6}$

답 ③

39.

두 평면 α, β의 법선벡터가 각각 $(3,-2,-1)$, $(2,-1,3)$이므로

(ⅰ) 두 점 O와 A를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1}$

$\frac{x}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-1}=t$에서 $x=3t$, $y=-2t$, $z=-t$ …… ㉠

㉠을 평면 α의 방정식에 대입하면

$3\cdot 3t-2\cdot(-2t)-(-t)=28$ $\therefore t=2$

따라서 점 A의 좌표는 $(6,-4,-2)$이다.

(ⅱ) 두 점 O와 B를 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}$

$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{3}=s$에서 $x=2s$, $y=-s$, $z=3s$ …… ㉡

㉡을 평면 β의 방정식에 대입하면

$2\cdot 2s-(-s)+3\cdot 3s=14$ $\therefore s=1$

따라서 점 B의 좌표는 $(2,-1,3)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(6,-4,-2)-(2,-1,3)=(4,-3,-5)$

$\therefore \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{4^2+(-3)^2+(-5)^2}=5\sqrt{2}$

답 ①

40.

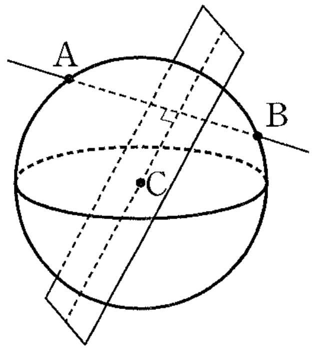
$\overline{AP}=\overline{BP}$를 만족하는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB를 수직이등분하는 평면이며,

이 평면은 주어진 구의 중심을 지나고, $\overrightarrow{AB}$와 수직이다.

$\overrightarrow{AB}$와 직선 $x=y=\frac{-z}{2}$의 방향벡터인 $\vec{d}=(1,1,-2)$는 평행하므로

점 P가 나타내는 도형은 $\vec{d}$가 법선벡터이고 점 C$(1,1,2)$를 지나는 평면이다.

즉, 이 평면의 방정식은



$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)+(-2)\cdot(z-2)=0$

$\therefore x+y-2z+2=0$ 이므로, $a=1$, $b=2$, $c=2$에서 $a^2+b^2+c^2=1^2+2^2+2^2=9$

답 9