$\int_0^x |f'(t)|dt$의 그래프 해석

$$g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt=\begin{cases} f(x)+c_1 & (f'(x)\geqq 0) \\ -f(x)+c_2 & (f'(x)<0) \end{cases}$$

이때, c_1, c_2의 값은 $g(0)=0$이 되도록, $g(x)$가 연속이 되도록 적절히 정해진다. 다만, 위 표현은 완벽하지 않으며 극점의 개수에 따라 구간의 개수는 늘어날 수 있다. (그와 동시에 c값의 개수도 늘어날 것이다) $f'(x)\leqq 0$인 구간이 두 개가 있다면, 두 구간에서의 c값이 다를 수 있다는 것이다. 수식으로만 설명한 위 문장들이 이해가 잘 되지 않을 것이다. 다음의 예시들과 함께 천천히 이해해보자.

간단한 함수 $f(x)=x^2$에 대해 한번 생각해보자.

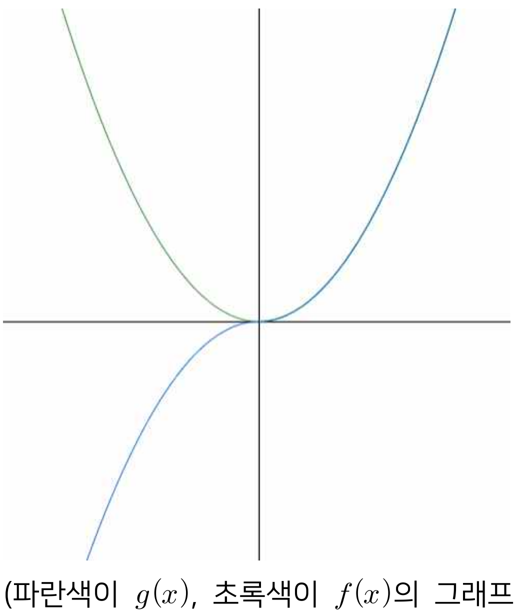
$f'(x)=2x$이고, $|f'(x)|=|2x|$이다.

$g(x)=\int_0^x |f'(x)|dx=\int_0^x |2x|dx$에 대해 다루어보자.

도함수가 양수인 경우와 음수인 경우로 적절하게 구간을 나누어주면,

$g(x)=\begin{cases} x^2 & (x>0) \\ -x^2 & (x\leqq 0) \end{cases}$ 임을 쉽게 알 수 있다.

이를 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



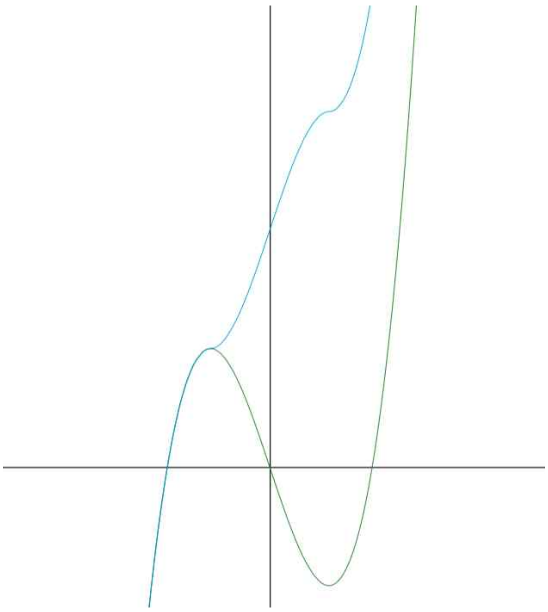
(파란색이 $g(x)$, 초록색이 $f(x)$의 그래프이다. 이후 그래프 색은 고정)

$f(x)$가 감소하는 부분이 **모양은 그대로 다만 증가하도록 뒤집혀** 붙었다.

이 경우는 단순 x축 대칭이기에 어렵지 않다.

이번에는 조금 복잡한 $f(x)=x^3-3x$에 대해 적용해보자.
(극점이 두 개로 늘었다. 이 극점의 개수는 매우 중요하다.)

같은 방식으로 $g(x)$를 설정하고 $g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.



역시 감소하는 부분이 **모양은 그대로, 증가하도록 뒤집혀, 연속이 되도록** 붙었다.
또한, 나머지 증가하는 부분($x>1$에서)도 역시 평행이동되어 연속이 되도록 붙었다.
결국 그래프는 항상 증가한다.

대략 어떤 형태로 그래프가 그려지는지 알게 되었을 것이다.

이를 정리하면 다음과 같다.

1) 감소하는 부분이 증가하도록 뒤집는다.
2) 나머지 부분과 연속이 되도록 붙힌다.

조금 더 직관적으로 말하자면, 그래프가 **항상 증가하도록** 짜깁기한다고 생각해도 좋다.
여러 가지 함수에 직접 적용해보고 그려보면 더욱 잘 이해될 것이다.

적용 연습) 2022 수능 14번 문항

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

직접 위 방식대로 풀어보자.

해설

속도·가속도 문항의 탈을 쓴 절댓값 도함수 적분 문제이다.

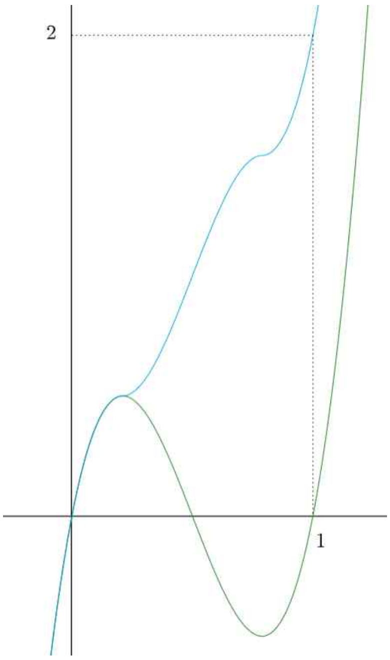
$x(t)=f(x)=x(x-1)(ax+b)$, $\int_0^1 |f'(x)|dx=2$로 놓자.

ㄱ. $f(1)-f(0)=0$ (참)

ㄴ. 아까 했던 것처럼 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|dt$로 두자.

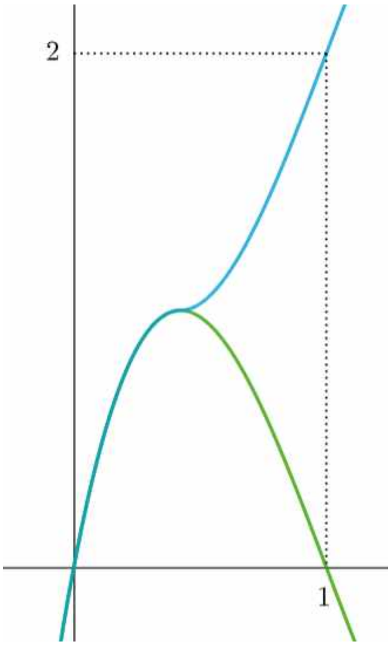
두 번째 조건은 결국 $g(1)-g(0)=2$이라는 것과 동치이다.
$|f(x)|$에 대해 묻고 있으므로, $a>0$으로 두자.

case1) $0 < -\dfrac{b}{a} < 1$인 경우



$f(x)$의 두 극값의 차를 α라 하자. 그림에서 알 수 있듯 $\alpha = 1$이므로
$0 < x < 1$ 사이의 함수값의 절댓값이 1보다 클 수는 없다.

case2) $0 < -\dfrac{b}{a} < 1$이 아닌 경우



0과 1사이의 한 극값을 β라 하면, $\beta = 1$
역시 같은 이유로 $0 < x < 1$ 사이의 함수값의 절댓값이 1보다 클 수는 없다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 케이스 분류를 잘 했다면 거저먹을 수 있다.
case2의 경우 조건을 만족시킬 수 없으므로 주어진 상황은 case1이고,
case1의 경우는 0과 1 사이에 실근이 존재하는 경우이다. (참)

같이 풀어보면 좋을 문제를 몇 개 적어두었다.

03수능 자연계 16번
17수능 나형 20번