케이스는 어떤 기준으로 나눠야할까? (with a의 n제곱근 수특 변형) - 김지헌T

0. 서론

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식

$$x^n=a$$

의 근을 a의 n제곱근이라고 한다.

이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

참고 실수 a $(a\neq0)$의 모든 n제곱근은 서로 다른 n개의 복소수임이 알려져 있다. 이 중 실수인 n제곱근은 아래 (2)와 같이 표기한다.

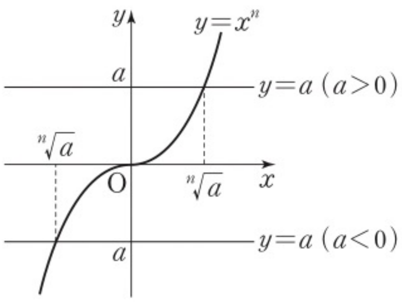
(2) $\sqrt[n]{a}$ (n제곱근 a)

실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

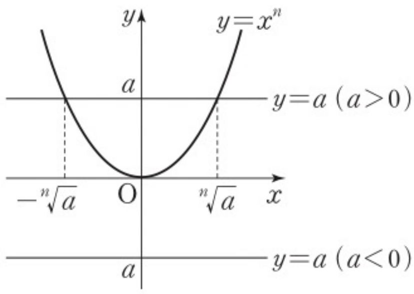
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}>0$	$\sqrt[n]{0}=0$	$\sqrt[n]{a}<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}>0$, $-\sqrt[n]{a}<0$	$\sqrt[n]{0}=0$	없다.

설명 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것과 같으므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표이다. 이때 이 실수 값을 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

(i) n이 홀수일 때



(ii) n이 짝수일 때



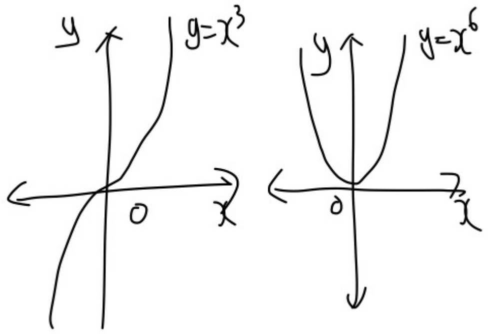
작년 6월평가원 21번 문제와같이 실수 a의 n제곱근 같이 쉬운소재도 킬러문제가 될 수 있음을 인지해야한다. 재작년 예시문항 22번에서도 적당한 수준의 소위 말하는 "개수 세기" 문제가 출제됐음을 떠올려보면 학생들에게 복잡한 상황이 주어진 문제에서 어떠한 기준을 세워 다양한 케이스를 분류할 것인지 학생들이 구체적으로 학습할 필요성이 있다! 이러한 능력을 요구하는 문제는 확률과 통계를 선택한 학생 또는 신유형의 문제를 마주했을 때 어떻게 접근법을 세울 것인지 막막함을 느끼는 학생들에게 학습할 것이 요구되어진다.

1. 본 문제는 어떻게 출제되었는가?

2
[22008-0002]

24의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 3의 여섯제곱근 중 실수인 것의 모든 곱을 b라 할 때, $\frac{a\times b}{\sqrt[3]{9}}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4



$x^3=24=2^3\times3$

$\therefore x=2\sqrt[3]{3}=a$

$x^6=3$

$\therefore x=+\sqrt[6]{3},\ -\sqrt[6]{3}$

$\therefore b=-\sqrt[3]{3}$

$\therefore \frac{ab}{\sqrt[3]{9}}=-2$

01 지수와 로그 5

올해 수능특강의 문제가 실린 첫 쪽에 위와 같은 문제가 실려있으며, 기본개념에 충실하게 접근법을 세운 학생이라면 위와 같은 풀이를 통해 답을 어렵지 않게 구하였을거라 생각한다. 하지만 이를 다음과 같이 발문을 바꾸어보면 어떨까?

> 2'. 방정식 $(x^3-24)(x^6-3)=0$의 모든 실근의 곱은? (3점)

위와 거의 동일한 문제이지만 만약 선지에 72가 있었다면 근과 계수의 관계를 떠올리며 자연스레 오답을 선택할 학생은 역시 반드시 존재할 것이다. (혹여나 왜 72가 아닌지 궁금할 학생이 있다면, "모든 실근의 곱"이 아닌 발문이 "모든 근의 곱"으로 서술되었다면, 이때 정답이 72가 된다.)

또한, 이러한 유형에서는 다음과 같은 함정을 고려해볼 수도 있다.

> 2''. 방정식 $(x^3-3)(x^6-9)=0$의 모든 실근의 곱은? (3점)

위의 문제를 바르게 풀어본 이후, 다음 쪽에서 함정을 함께 살펴보자.

혹여나 정답을 −3으로 구한 학생들은 다음과 같은 명제를 떠올려보자.

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

위와 같이 합집합의 원소의 개수를 구했던 이유는 집합은 동일한 원소를 2개 이상 가질 수 없기 때문이다. (즉, 한 집합의 임의의 두 원소는 반드시 다르다!)

2''. 의 문제에서 방정식 $(x^3-3)(x^6-9)=0$의 모든 실근만을 원소로 갖는 집합은 방정식 $x^3-3=0$의 실근만을 원소로 갖는 집합과 방정식 $x^6-9=0$의 실근만을 원소로 갖는 집합의 합집합이다. 이때, $x^3-3=0$일 때 $x=\sqrt[3]{3}$이고 $x^6-9=0$일 때 $x=\pm\sqrt[3]{3}$이므로 모든 실근의 곱은 $(+\sqrt[3]{3})\times(-\sqrt[3]{3}) = -\sqrt[3]{9}$이다. (이때 $\sqrt[3]{3}$을 한번 더 곱하면 오답인 −3이 나올 수 있으며, 시험장에서 학생들이 충분히 할 법한 실수라 생각된다.)

□ 표시가 된 두 예제 문제를 어느정도 일반화시키면 공개했던 킬러문제가 나오게 된다. 자연수 전체의 집합은 정수 전체의 집합과 양수 전체의 집합의 교집합임을 고려하며 본 문제를 차분하게 풀어보자.

$-10 \le a \le 10$, $-10 \le b \le 10$, $1 \le m \le 4$, $1 \le n \le 4$인 네 정수 a, b, m, n에 대하여 함수

$f(x) = x^{m+n} - ax^m - bx^n + ab$가 다음 조건을 만족한다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2 이상이며 서로 다른 모든 실근의 곱은 자연수이다.

서로 다른 순서쌍 (a, b, m, n)의 개수를 구하시오.