타자

: 기출 밑장배기

미적분

저자 소개 | 베이즈(Bayes)

University of Illinois at Chicago ′26
Computer Science (4년 장학생)

Contents | 책의 순서

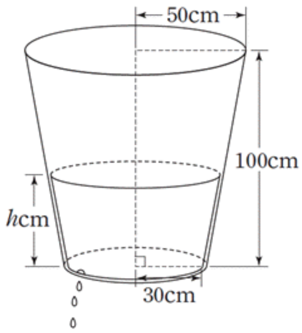
I

미적분_문제편

01

1997학년도 수능 수리영역(자연계) 23번

그림과 같이 높이가 $100\,\text{cm}$이고 윗면은 반지름이 $50\,\text{cm}$, 아랫면은 반지름이 $30\,\text{cm}$인 원으로 된 원뿔대 모양의 물통에 물이 가득 차 있었다. 이 물통의 바닥에 구멍이 나서 바닥에서부터 수면까지의 높이가 $h\,\text{cm}$일 때, 매초 $4\sqrt{h}\,\text{cm}^3$의 양으로 물이 새어나가고 있다. $h=50$일 때, 수면의 높이의 순간변화율(cm/sec)은? [4점]



① $-\dfrac{20\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$　② $-\dfrac{5\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$　③ $-\dfrac{20\sqrt{2}}{9\pi}\times 10^{-2}$

④ $-\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}\times 10^{-2}$　⑤ $-\dfrac{4\sqrt{2}}{5\pi}\times 10^{-2}$

02

2010학년도 수능(가형) 29번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03

2010학년도 수능(나형) 25번

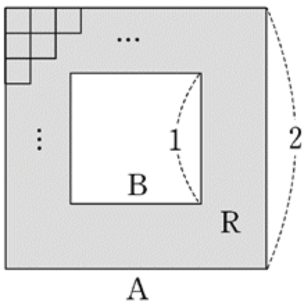
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점]



04

2011학년도 9월 평가원(가형) 29번

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

[보기]

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $\mathrm{P}(1,1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05

2011학년도 수능(가형) 25번

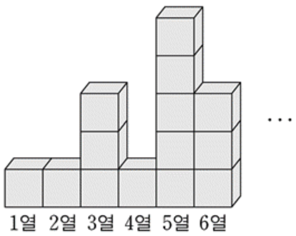
자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, $\cdots$, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



06

2013학년도 9월 평가원(가형) 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \leq \dfrac{1}{3}$이다.
(나) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11　② -9　③ -7
④ -5　⑤ -3

07

2013학년도 수능(가형) 21번

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\dfrac{e}{2}$

④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

08 2014학년도 6월 평가원(B형) 30번

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s, t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1, 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

09

2014학년도 9월 평가원(B형) 21번

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다.

$\dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}+\dfrac{b_5}{a_5}+\dfrac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{2}$ ② 12 ③ $\dfrac{25}{2}$

④ 13 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

10

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.
(나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

11

2015학년도 6월 평가원(B형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다. (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다. (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_{3}^{6} f(x)dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점]

12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
(다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx = 2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx = \frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

13

함수 $f(x) = e^{x+1} - 1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = 100|f(x)| - \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x^k\right) \right|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

14 2016학년도 6월 평가원(B형) 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49
④ 52 ⑤ 55

15

2016학년도 6월 평가원(B형) 30번

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p+\frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

(가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
(나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여

$$f(k+t)=f(k) \quad (0<t \le 1)$$

또는

$$f(k+t)=2^t \times f(k) \quad (0<t \le 1)$$

이다.
(다) 열린구간 $(0, 8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

16 2016학년도 9월 평가원(B형) 21번

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\le x<0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\le x\le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$　② $\frac{3}{2}\pi$　③ $\frac{5}{2}\pi$　④ $\frac{7}{2}\pi$　⑤ $\frac{9}{2}\pi$

17

2016학년도 9월 평가원(B형) 30번

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점]

18

2016학년도 수능(B형) 21번

$0<t<41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$와 직선 $y=t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

[4점]

① $\frac{79}{12}$　② $\frac{85}{12}$　③ $\frac{91}{12}$

④ $\frac{97}{12}$　⑤ $\frac{103}{12}$

19

2016학년도 수능(B형) 30번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

20

2017학년도 6월 평가원(가형) 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$ (나) $f(x)+f(-x)=0$ (다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21

2017학년도 6월 평가원(가형) 29번

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 1)$에서의 위치 (x, y)가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는

$t = \dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때

점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

22

2017학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a(0 < a < 2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = f(-x)$
(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$

일 때, $abc = -\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

23

2017학년도 9월 평가원(가형) 21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$ ② $\dfrac{6}{e^4}$ ③ $\dfrac{20}{3e^4}$

④ $\dfrac{22}{3e^4}$ ⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

24 2017학년도 9월 평가원(가형) 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x + 2|x|) + 1|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

25

$x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M > 0$)
(다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점]

26

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57 ② 55 ③ 53
④ 51 ⑤ 49

27

2018학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 a와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면
α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다.
$a=\alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. (나) $\displaystyle\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m\int_0^1 \lvert f(x)\rvert dx$

$mk\times e^c$의 값을 구하시오. [4점]

28

2018학년도 9월 평가원(가형) 21번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1,\ a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}}\ \ (n \ge 2)$$

이다. 구간 $[-1, 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x)\ \ (a_n \le x \le a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$을 만족시키는 $t\,(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

① -48　② -50　③ -52　④ -54　⑤ -56

29

함수 $f(x)=\ln(e^{x}+1)+2e^{x}$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x)=\lvert g(x)-f(x-k)\rvert$는 $x=k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e+\ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k-\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\dfrac{5}{2}<e<3$이다.) [4점]

30

2018학년도 수능(가형) 21번

양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.
$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$　② $\dfrac{1}{e(e+1)}$　③ $\dfrac{1}{e^2}$
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$　⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$

31

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_{k}^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\displaystyle\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점]

32

이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
>
> (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다.
>
> (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 k $(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\dfrac{241}{768}$이다.

k의 값을 구하시오. [4점]

열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}< x < \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x < \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}< k < \frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{\lvert f(x)-t \rvert}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

34

2019학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때, $2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

0이 아닌 세 정수 l, m, n이

$$|l|+|m|+|n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

36

2019학년도 9월 평가원(가형) 30번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
> (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점]

37

2019학년도 수능(가형) 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1$, $f(6) = 2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$　　② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$　　③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$　　⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

38

2019학년도 수능(가형) 30번

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]

39

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점]

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

40

2020학년도 6월 평가원(가형) 30번

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x+b\sin x$가

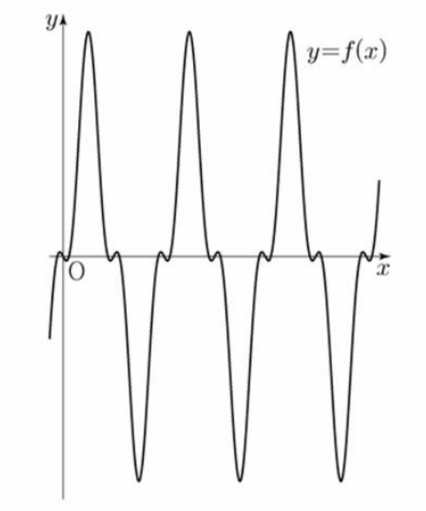
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t\,(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}}\frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{101}c_n=p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.) [4점]



41

2020학년도 9월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1)=\pi f(1)\sin\pi x+f(3)x+5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점]

42

2020학년도 수능(가형) 21번

실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (t, e^t)에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, b $(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.

ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43

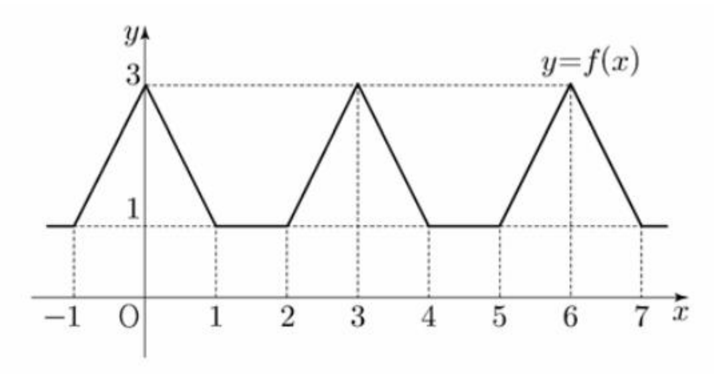
2020학년도 수능(가형) 30번

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x)=|x-1|+|x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\lim_{h \to 0+}\left|\frac{f(2^{x+h})-f(2^x)}{h}\right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_n (n은 자연수)라 할 때, $n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



45

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$\left| M \times m^3 \right| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

46

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f\left(\sin^2 \pi x\right)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

47

2022학년도 6월 평가원(미적분) 30번

$t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1 + e^{2x} - e^{-2t})$과 직선 $y = x + t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi \times f(x))}{x} = 0$
(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0 \le x < 1$일 때 $g(x) = f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1) = g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

49

2022학년도 수능(미적분) 30번

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

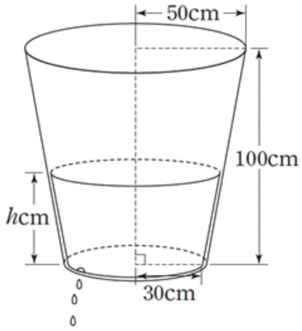
$\int_{1}^{8} xf'(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Ⅱ 미적분_해설편

01 1997학년도 수능 수리영역(자연계) 23번

그림과 같이 높이가 100 cm이고 윗면은 반지름이 50 cm, 아랫면은 반지름이 30 cm인 원으로 된 원뿔대 모양의 물통에 물이 가득 차 있었다. 이 물통의 바닥에 구멍이 나서 바닥에서부터 수면까지의 높이가 h cm일 때, 매초 $4\sqrt{h}\ \text{cm}^3$의 양으로 물이 새어나가고 있다. $h=50$일 때, 수면의 높이의 순간변화율(cm/sec)은? [4점]



① $-\dfrac{20\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$ ② $-\dfrac{5\sqrt{2}}{\pi}\times 10^{-2}$ ③ $-\dfrac{20\sqrt{2}}{9\pi}\times 10^{-2}$

④ $-\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}\times 10^{-2}$ ⑤ $-\dfrac{4\sqrt{2}}{5\pi}\times 10^{-2}$

① 반지름 r의 길이와 h 사이 관계식 찾기

$50:30 = 100+x : x$

$x = 150$

$50 : r = 250 : h+150$

$r = \frac{1}{5}(h+150)$

② 물의 부피 V 구하기

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{25}(h+150)^3 - \frac{1}{3}\pi \cdot 30^2 \cdot 150$

③ $\frac{dh}{dt}$ 구하기

$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{25}\pi(h+150)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$-4\sqrt{h} = \frac{1}{25}\pi(h+150)^2 \cdot \frac{dh}{dt}$

$\therefore \frac{dh}{dt} = \left.\frac{-100\sqrt{h}}{\pi(h+150)^2}\right|_{h=50} = \frac{-100\sqrt{50}}{200^2\pi} = -\frac{5\sqrt{2}}{4\pi}\cdot 10^{-2}$

02

2010학년도 수능(가형) 29번

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\}dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $\int_0^1 \{f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\}dx=-k$

ㄴ. $f(0)=f(1)$이고 $g(0)=g(1)$이면, $k=0$이다.

ㄷ. $f(x)=\ln(1+x^4)$이고 $g(x)=\sin\pi x$이면, $k=0$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.

$1-x=t$ 로 치환 $\longrightarrow -1=\frac{dt}{dx}$

$(x=0 \rightarrow t=1,\ x=1 \rightarrow t=0)$

$k=\int_0^1 f'(x)g(1-x)-g'(x)f(1-x)\,dx$

$=\int_1^0 \{f'(1-t)g(t)-g'(1-t)f(t)\}(-dt)$

$=-\int_0^1 f(t)g'(1-t)-g(t)f'(1-t)\,dt$

$\therefore \int_0^1 f(x)g'(1-x)-g(x)f'(1-x)\,dx=-k$

02

2010학년도 수능(가형) 29번

ㄴ.

$$k=\int_0^1 f'(x)g(1-x)\,dx-\int_0^1 g'(x)f(1-x)\,dx$$

$$=f(x)g(1-x)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)g'(1-x)\,dx-\left\{g(x)f(1-x)\Big|_0^1+\int_0^1 g(x)f'(1-x)\,dx\right\}$$

$$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}+\int_0^1 f(x)g'(1-x)-g(x)f(1-x)\,dx$$

$$=2\{f(1)g(0)-f(0)g(1)\}-k$$

$\therefore k=f(1)g(0)-f(0)g(1)$

$\therefore f(0)=f(1),\ g(0)=g(1)$ 이면 $k=0$

ㄷ.

$f(x)=\ln(1+x^4)$, $g(x)=\sin(\pi x)$

$f(0)=0,\ g(0)=0$

$k=f(1)g(0)-f(0)g(1)=0$

03

2010학년도 수능(나형) 25번

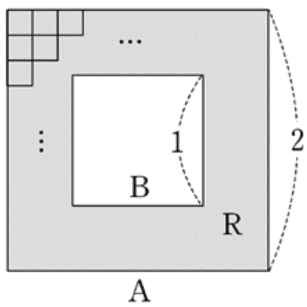
그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R라 하자.

2 이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행하다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

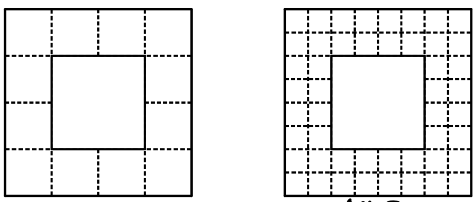
이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2 = 12$, $a_3 = 20$이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = c$라 할 때, $100c$의 값을 구하시오. [4점] 50



n이 짝수·홀수일때로 나누어 a_n을 구한다.

i) n : 짝수일 때



$n=2$일 때 $n=4$일 때

$a_2 = a_{2\times1} =$ 전체 - 내부 $= (4\cdot1)^2 - (2\cdot1)^2 = 12$

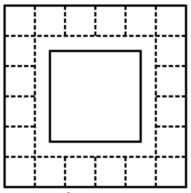
$a_4 = a_{2\times2} = (4\cdot2)^2 - (2\cdot2)^2 = 48$

⋮

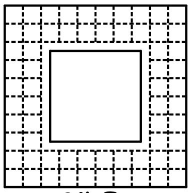
$a_{2n} = (4n)^2 - (2n)^2 = 12n^2$

03

ii) n : 홀수일 때



$n=3$일 때



$n=5$일 때

$a_3 = a_{2\times1+1} = \{2(2\times1+1)\}^2 - (2\times1+2)^2 = 20$

$a_5 = a_{2\times2+1} = \{2(2\times2+1)\}^2 - (2\times2+2)^2 = 64$

$\vdots$

$a_{2n+1} = \{2(2n+1)\}^2 - (2n+2)^2 = 12n^2+8n$

$\therefore a_{2n-1} = 12n^2 - 16n + 4$

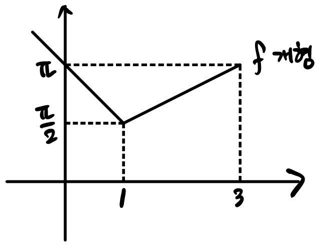
$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n}}{a_{2n} - a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{16n-4} = \frac{1}{2} = c$

$\therefore 100c = 50$

04

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	$+$		$+$	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π



함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $P(1, 1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ.

$g'(x) = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

$g'(3) = \cos\pi \cdot 1 = -1$

ㄴ. $1<a<b<3 \longrightarrow f(x)$: 아·볼·, 증가 $(\frac{\pi}{2} \longrightarrow \pi)$

$\frac{\pi}{2} < f(x) < \pi \longrightarrow g(x)$: 위·볼, 감소 $(1 \longrightarrow 0)$

$g'(1) = \cos(f(1)) \cdot f'(1) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$

$g'(3) = -1$

$\therefore -1 < \frac{g(b)-g(a)}{b-a} < 0$

04

2011학년도 9월 평가원(가형) 29번

✗ $g''(x) = -\sin(f(x)) \cdot \{f'(x)\}^2 + \cos(f(x)) \cdot f''(x)$

$g''(1) = 0 + 0 = 0$

$x = 1-\varepsilon$ 와 $x = 1+\varepsilon$ 의 부호가 같음.

$\therefore$ 점 $P(1, 1)$은 $y = g(x)$의 변곡점 X

05

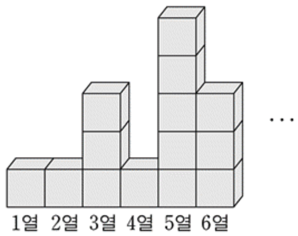
자연수 m에 대하여 크기가 같은 정육면체 모양의 블록이 1열에 1개, 2열에 2개, 3열에 3개, …, m열에 m개 쌓여 있다. 블록의 개수가 짝수인 열이 남아 있지 않을 때까지 다음 시행을 반복한다.

> 블록의 개수가 짝수인 각 열에 대하여 그 열에 있는 블록의 개수의 $\frac{1}{2}$만큼의 블록을 그 열에서 들어낸다.

블록을 들어내는 시행을 모두 마쳤을 때, 1열부터 m열까지 남아 있는 블록의 개수의 합을 $f(m)$이라 하자.
예를 들어, $f(2)=2$, $f(3)=5$, $f(4)=6$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})}=\frac{q}{p}$$

일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 19



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
	1		2		3		4		5		6		7		8	
			1				2				3				4	…
							1								2	
															1	

sol1)

$f(2^1) = 1+1 = 1^2+1$

$f(2^2) = 1+3+1+1 = 2^2+1^2+1$

$f(2^3) = 1+3+5+7+1+3+1+1 = 4^2+2^2+1^2+1$

$f(2^4) = 1+3+\cdots+15+(1+3+5+7)+\cdots = 8^2+4^2+2^2+1^2+1$

$\vdots$

$f(2^n) = 1+1+2^2+4^2+\cdots+(2^{n-1})^2$

$= 1+\frac{1^2\cdot(4^n-1)}{4-1} = \frac{4^n+2}{3}$

05

2011학년도 수능(가형) 25번

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(2^{n+1})-f(2^n)}{f(2^{n+2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}+2}{3} - \frac{4^n+2}{3}}{\frac{4^{n+2}+2}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 4^n}{16\cdot 4^n} = \frac{3}{16}$$

$p=16,\ q=3 \qquad \therefore p+q=19$

sol2)

$$\begin{cases} g(n) = (2^{n-1}+1)\text{th 항부터 } 2^n\text{th 항까지의 합} \\ g(0)=1,\ g(1)=1,\ n\geq 2\text{인 정수} \end{cases}$$

$g(2)=4 \qquad g(3)=16 \qquad g(4)=64$

$\longrightarrow g(n)=4^{n-1}$ ($n\geq 2$인 정수)

$$\therefore f(2^n) = g(0)+g(1)+\cdots+g(n) = 1+1+4+16+64+\cdots$$
$$= 1+1+2^2+4^2+8^2+\cdots$$

⋮ 이하 동일

06

2013학년도 9월 평가원(가형) 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x) \le \dfrac{1}{3}$이다. $\longrightarrow f'(x) \ge 3$
(나) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\overbrace{f(x)-g(x)}^{\to 0}}{\underbrace{(x-3)g(x)}_{\to 0}} = \frac{8}{9}$ $\longrightarrow f(3)-g(3)=0$ $\quad \therefore f(3)=g(3)$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11 ② -9 ③ -7
④ -5 ⑤ -3

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{f(x)-\underbrace{f(3)-g(x)+g(3)}_{=3}}{(x-3)g(x)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3} - \frac{g(x)-g(3)}{x-3}\right\} \times \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{f'(3)-g'(3)\right\} = \frac{8}{9}$$

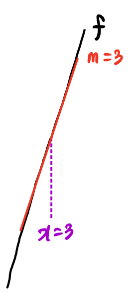
$$f'(3)-g'(3) = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{g'(3)} - \underbrace{g'(3)}_{X} = \frac{8}{3}$$

$$3X^2+8X-3=0 \longrightarrow (3X-1)(X+3)=0$$

$$\therefore g'(3)=\frac{1}{3} \quad \left(\because 0<g'(3)\le\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore f'(3)=3$$



$$f(x) = (x-3)^3 + \cancel{a(x-3)^2} + b(x-3) + c$$
$\because f''(3)=0$

$$= (x-3)^3 + \underset{3}{\cancel{b}}(x-3) + c$$
$\because f'(3)=3$

$$= (x-3)^3 + 3(x-3) + \underset{3}{\cancel{c}}$$
$\because f(3)=3$

$$= (x-3)^3 + 3(x-3) + 3$$

$$\therefore f(1) = -8-6+3 = -11$$

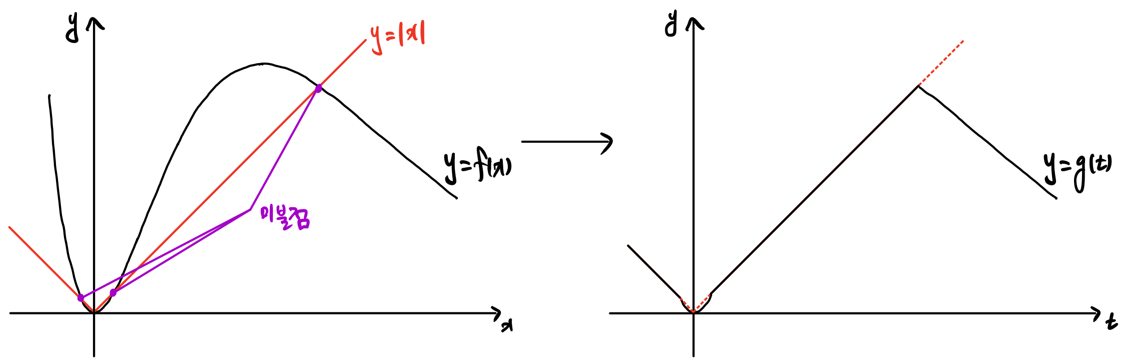
07

2013학년도 수능(가형) 21번

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$

④ $\sqrt{e}$ ⑤ e



→ g(t)가 한 점에서만 미.불.

→ $x>0$일 때 $f(x)\le x$

→ $y=x$, $y=f(x)$ 접할 때: k 최대

$f'(x)=kx(2-x)e^{-x}$

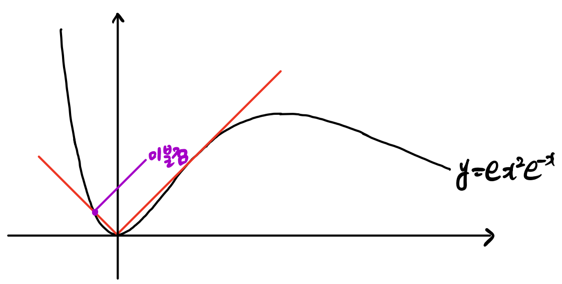
접점의 좌표를 (α,α)라 하자.

$\begin{cases} k\alpha^2e^{-\alpha}=\alpha \\ k\alpha(2-\alpha)e^{-\alpha}=1 \end{cases}$ → $\frac{\alpha}{2-\alpha}=\alpha$ $\therefore \alpha=1$

$k\cdot 1\cdot e^{-1}=1$

$\therefore k=e$

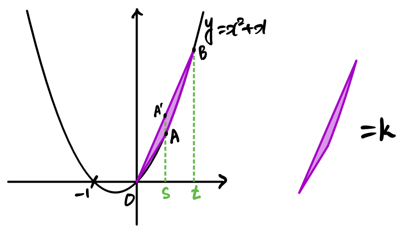
$\therefore k\le e$



08

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 (s,t)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] 109



$\overline{OA}$: l : $y=(s+1)x$

$\overline{OB}$: m : $y=(t+1)x$

$k=\triangle OAA' + \triangle ABA'$

$=\frac{1}{2}\cdot s\cdot\{(t+1)s-(s^2+s)\} + \int_s^t \{(t+1)x-(x^2+x)\}dx$

$=\frac{1}{2}s^2(t-s)+\left[\frac{1}{2}tx^2-\frac{1}{3}x^3\right]_s^t$

$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{6}s^3$

$\longrightarrow C : y^3=x^3+6k$

sol.)

$y=\sqrt[3]{x^3+6k} \longrightarrow$ 곡선 위의 점 $(a,b) \longrightarrow (a, \sqrt[3]{a^3+6k})$

$d=\sqrt{(a-1)^2+\sqrt[3]{(a^3+6k)^2}}$

$\xrightarrow{\prime} 2(a-1)+\frac{2}{3}(a^3+6k)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3a^2\Big|_{a=\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}}\times\frac{4}{3} = 0$

$\therefore k=\frac{28}{81} \longrightarrow p+q = 109$

08

2014학년도 6월 평가원(B형) 30번

sol₂)

$$\frac{1}{2}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \longrightarrow \text{접·기·} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{a^2}{b^2} \times \underbrace{\frac{b}{a-1}}_{\text{법선 기울기}} = -1 \longrightarrow b = \frac{4}{3} \quad \left(\because a = \frac{2}{3}\right)$$

$$b = \left(\frac{8}{27} + 6k\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore k = \frac{28}{81} \qquad \therefore p+q = 109$$

sol₃) 라그랑주 승수법, Lagrange Multiplier Method

$$d = \sqrt{(s-1)^2 + t^2}$$

$$\text{minimize } \{(s-1)^2 + t^2\} \quad \text{subject to } \left\{\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{6}s^3 = k\right\}$$

$$(2(s-1), 2t) = \lambda\left(\frac{1}{2}s^2, -\frac{1}{2}t^2\right) \; : \; s = \frac{2}{3}, \; \lambda = -3, \; t = \frac{4}{3}$$

$$\therefore k = \frac{28}{81} \qquad p+q = 109$$

*라그랑주 승수법: 제약 조건 하에서 다변수함수의 최대·최소를 구할 때 사용되는 판별법

λ : Lagrange Multiplier

식 $g(x,y)=0$ 이 있을 때
$f(x,y)$ 의 최대·최소를 구하라

1. $L(x,y) = f(x,y) - \lambda \cdot g(x,y)$

2. L을 각각 x, y, λ에 관해 편미분.

3. 등식 3개, 변수도 3개.

09

자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

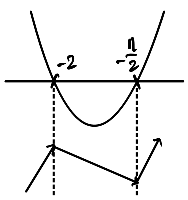
$$\begin{cases} x=e^t \xrightarrow{\ \prime\ } e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \xrightarrow{\ \prime\ } \{2t^2+(n+4)t+2n\}e^t \longrightarrow \dfrac{dy}{dx}=(t+2)(2t+n) \end{cases}$$

이고, $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다.
$\dfrac{b_3}{a_3}+\dfrac{b_4}{a_4}+\dfrac{b_5}{a_5}+\dfrac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{23}{2}$ ② 12 ③ $\dfrac{25}{2}$

④ 13 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

i) $-\frac{n}{2} > -2$: $n<4$



$t=-\frac{n}{2} \to e^{-\frac{n}{2}}$ 에서 극소 $\longrightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$ 에서 최소

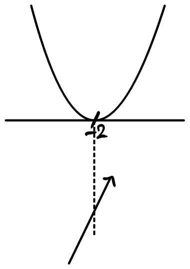
$\longrightarrow a_3=e^{-\frac{3}{2}}$, $b_3=\left\{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\right\}e^{-\frac{3}{2}}$
$=3e^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore \dfrac{b_3}{a_3}=3$

09

2014학년도 9월 평가원(B형) 21번

ii) $-\frac{n}{2}=-2$: $n=4$



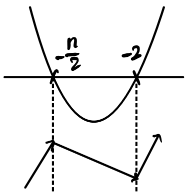
$t=-2 \longrightarrow x=e^{-2}$ 에서 최소

$\longrightarrow a_4=e^{-2},\quad b_4=\{2\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+4\}e^{-2}$

$=4e^{-2}$

$\therefore \frac{b_4}{a_4}=4$

iii) $-\frac{n}{2}<-2$: $n>4$



$t=-\frac{n}{2} \longrightarrow e^{-\frac{n}{2}}$ 에서 극소 $\longrightarrow x=e^{-2}$ 에서 최소

$\longrightarrow a_n=e^{-2}\ ,\quad b_n=\{2\cdot(-2)^2+n\cdot(-2)+n\}e^{-2}$

$=(8-n)\,e^{-2}$

$\therefore \frac{b_n}{a_n}=8-n$

$\therefore \frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}=12$

10

2014학년도 수능(B형) 30번

이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1, g(1))$과 점 $(4, g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다. (나) 점 $(0, k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오. [4점] 72

sol.)

$g'(x)=f'(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}$

$g''(x)=\{f(x)-2f'(x)+f''(x)\}e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c$
$f'(x)=2ax+b$
$f''(x)=2a$

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}=0$

: 의 해가 $x=1$, $x=4$ ($\because$ 조건 (가))

$\begin{cases} -\dfrac{b-4a}{a}=5 \\ \dfrac{2a-2b+c}{a}=4 \end{cases}$ $\therefore b=-a,\ c=0 \longrightarrow f(x)=ax^2-ax$

$g(x)$ 위 한 점 $(t, g(t))$에서의 접.방. : $y=g'(t)(x-t)+g(t)\Big|_{(x,y)=(0,k)}$

$=k=-tg'(t)+g(t)$

: 서로 다른 세 실근

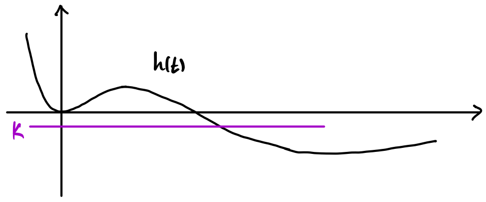
$h(t)=-tg'(t)+g(t)$

$h'(t)=-tg''(t)=0$: $t=0, 1, 4$ 에서 극값

10

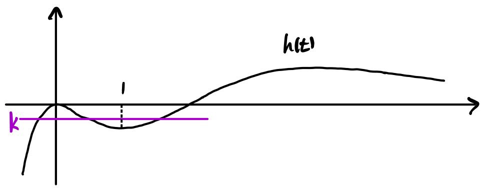
2014학년도 수능(B형) 30번

i) $a<0$



조건 성립 X

ii) $a>0$



$h(1) = -g'(1) + g(1) = -ae^{-1} = -1$

$\therefore a=e,\ b=-e,\ g(x)=ex(x-1)e^{-x}$

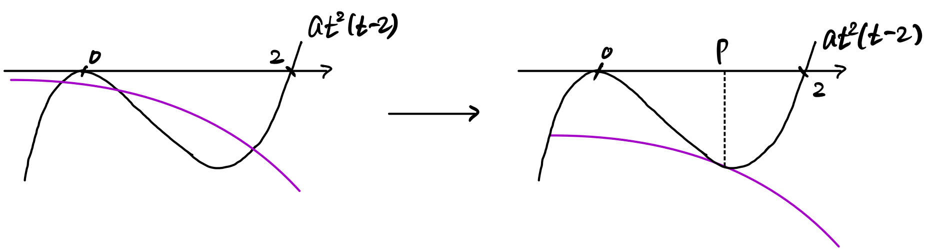
$g(-2)\cdot g(4) = 72$

sol2)

$h(t) = -tg'(t)+g(t)$ (과정은 sol1 참고)

$k = a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$ke^t = a(t^3-2t^2)$



$\therefore k=-1$일 때 접

$\therefore -e^p = a(p^3-2p^2)$, $-e^p = a(3p^2-4p)$ ($\because x=a$ 접 $\rightarrow f(a)=g(a),\ f'(a)=g'(a)$)

$\therefore p=1$ $\quad \therefore a=e,\ b=-e,\ g(x)=ex(x-1)e^{-x}$

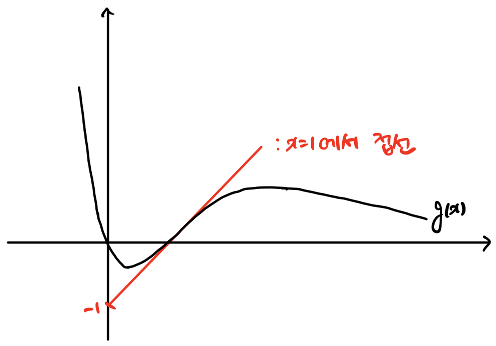
$\therefore g(-2)\cdot g(4)=72$

10

2014학년도 수능(B형) 30번

sol3)

$g(x)=ax(x-1)e^{-x}$ (과정은 sol1 참고)



x=1에서의 접선은 (0, -1)을 지난다.

$-1 = g(1)-g'(1) = ae^{-1}$ $\quad\therefore a=e$

$g(x)=ex(x-1)e^{-x}$

$\therefore g(-2)\cdot g(4) = 72$

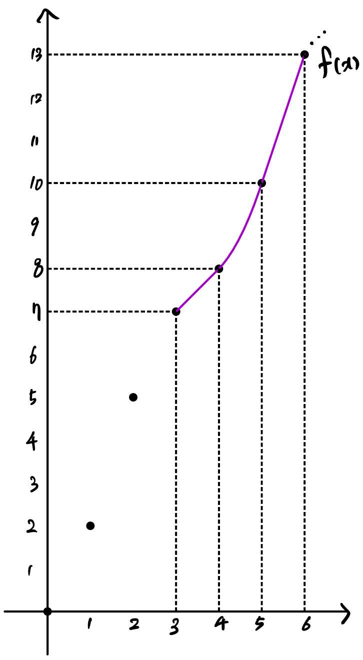
11

2015학년도 6월 평가원(B형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $1 \le f'(x) \le 3$이다.
> (나) 모든 정수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(4n, 8n)$, 점 $(4n+1, 8n+2)$, 점 $(4n+2, 8n+5)$, 점 $(4n+3, 8n+7)$을 모두 지난다.
> (다) 모든 정수 k에 대하여 닫힌 구간 $[2k, 2k+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 이차함수의 그래프의 일부이다.

$\int_3^6 f(x)dx = a$라 할 때, $6a$의 값을 구하시오. [4점] 167



$n=0$ 대입:
$(0,0)$ $(1,2)$ $(2,5)$ $(3,7)$

$n=1$ 대입:
$(4,8)$ $(5,10)$ $(6,13)$ $(7,15)$

i) $x=3\sim4$ 확인

if) 개형이
: 가) 조건 만족 X

if) 개형이
: 가) 조건 만족 X

→ 직선일 수밖에 없음. → 기울기 1
→ $x=5\sim6$ 도 마찬가지. → 기울기 3

ii) $4\sim5$ 확인
다) 조건으로 $[4,5]$는 이차함수 → $f(x)=ax^2+bx+c$

$f(4)=8,\ f(5)=10,\ f'(4)=1,\ f'(5)=3$

→ $f(x)=x^2-7x+20$

$$\int_3^6 f(x)dx = \int_3^4 x+4\,dx + \int_4^5 x^2-7x+20\,dx + \int_5^6 3x-5\,dx$$
$$=\frac{167}{6}=a$$

$\therefore 6a=167$

12
2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 121

나) 조건 해석 :

sol1) 가로 $t+1$, 세로 $f(t)$ 직사각형 − 삼각형

$$(t+1)f(t)-\frac{1}{2}tf(t)-\frac{1}{2}(t+1)f(t+1)-\frac{1}{2}(t+1-t)\{f(t)-f(t+1)\}$$
$$=\frac{(t+1)f(t)-tf(t+1)}{2}$$

sol2) 신발끈 공식

$(0,0)$ $(t, f(t))$ $(t+1, f(t+1))$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} 0 & t & t+1 & 0 \\ 0 & f(t) & f(t+1) & 0 \end{array}\right|$$

$$\frac{1}{2}\left|tf(t+1)-(t+1)f(t)\right|$$

$$\therefore \frac{t+1}{t}=\frac{(t+1)f(t)-tf(t+1)}{2}$$

$$\frac{2(t+1)}{t}\times\frac{1}{t(t+1)}=\frac{(t+1)f(t)-tf(t+1)}{t(t+1)}$$

$$\frac{2}{t^2}=\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}$$

$$\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{f(t)}{t}-\frac{2}{t^2}$$ $\frac{f(t)}{t}=g(t)$ 치환

$$g(t+1)=g(t)-\frac{2}{t^2}$$

$\int_1^2 g(x)dx=2 \longrightarrow \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx=2$: 구해야 할거

12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

본 풀이:

Sol 1) 정적분 성질

$$\int_{n}^{n+1} g(x)dx = \int_{n-1}^{n} g(x+1)dx$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x) - \frac{2}{x^2}\,dx$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x)dx - \left[\frac{2}{x}\right]_{n-1}^{n}$$
$$= \int_{n-1}^{n} g(x) - 1 - \frac{2}{n(n+1)}$$

$n = \frac{9}{2}$ 대입

$$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx$$
$$= \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx - \frac{8}{63}$$
$$= 2\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx - \frac{8}{63}$$
$$= 2\left\{\int_{\frac{7}{2}}^{4} g(x)dx + \int_{4}^{\frac{9}{2}} g(x)dx\right\}$$
$$\vdots$$
$$= 2\int_{3}^{4} g(x)dx - \frac{20}{63}$$
$$= 2\times\frac{2}{3} - \frac{20}{63} \quad \left(\because \int_{2}^{3} g(x)dx = \int_{1}^{2} g(x)dx - 1 = 2-1 = 1,\ \int_{3}^{4} g(x)dx = \int_{2}^{3} g(x)dx - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\right)$$
$$= \frac{64}{63}$$

$\therefore p+q = 127$

* 참고

$$\int_{n-1}^{n} f(x+1)dx = \int_{n}^{n+1} f(x)dx$$
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

12

2015학년도 9월 평가원(B형) 30번

sol₂) 축차대입

$$\int g(t+1)\,dt = \int g(t)\,dt + \int \frac{2}{t^2}\,dt$$

$$G(t+1) = G(t) - \frac{2}{t} + C \longrightarrow t=1 \text{ 대입} \longrightarrow C=0$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = G(x)\Big|_1^2 = G(2)-G(1) = 2$$

i) $t=\frac{7}{2} \longrightarrow G\left(\frac{9}{2}\right) = G\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{4}{7}$

ii) $t=\frac{9}{2} \longrightarrow G\left(\frac{11}{2}\right) = G\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{4}{9}$

$\therefore G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{64}{63}$

$\therefore p+q = 127$

※ 신발끈 공식 : 좌표를 이용하여 넓이 구하기 (삼각형만 되는거 아님)

$A(x_1, y_1) \quad B(x_2, y_2) \quad C(x_3, y_3)$

$$S = \frac{1}{2}\left| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left| x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 \right|$$

13

2015학년도 수능(B형) 30번

함수 $f(x)=e^{x+1}-1$과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점] 39

I) $x \ge -1$

$f(x)=e^{x+1}-1 \ge 0$

$\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)| = f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)$

II) $x<-1$

$f(x)<0$

$\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)| = -f(x)+f(x^2)+\cdots+(-1)^n f(x^n)$

⟶ $x=-1$ 기준으로 함수 바뀜.

⟶ 미·불· 의심점 : $x=-1$만 조사

$$g(x)=\begin{cases} 100f(x)-\{f(x)+f(x^2)+\cdots+f(x^n)\} & (x\ge -1) \\ -100f(x)-\{-f(x)+f(x^2)+\cdots+(-1)^n f(x^n)\} & (x<-1)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 100f'(x)-f'(x)-2xf'(x^2)-\cdots-nx^{n-1}f'(x^n) & (x\ge -1) \\ -100f'(x)+f'(x)-2xf'(x^2)+\cdots-(-1)^n\cdot nx^{n-1}f'(x^n) & (x<-1)\end{cases}$$

$g'(x)$의 $x=-1$에서 좌·우 극한 같아야 함.

⟶ $100f'(-1)-f'(-1)+2f'(1)-\cdots = -100f'(-1)+f'(-1)+2f'(1)\cdots$

$+100-1-3-\cdots = -100+1+3+\cdots$ $(\because f'(-1)=1)$

$100 = 1+3+\cdots+(2m-1)$

$=m^2$ $\quad \therefore m=10$

13

2015학년도 수능(B형) 30번

$\therefore n=2m-1 \longrightarrow n=19$

and. 소거된 $2m$이어도 가능. $n=2m \longrightarrow n=20$

$\therefore 19+20=39$

14

2016학년도 6월 평가원(B형) 21번

2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a의 최솟값을 $g(n)$이라 하자. $1 \le g(n) \le 8$을 만족시키는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 43 ② 46 ③ 49
④ 52 ⑤ 55

역함수를 가진다? ⟶ 증가 함수 ⟶ 기울기 ≥0

$f'(x) = e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \ge 0$

$f''(x) = e^{x+1}(x+n+1)(x+1) \longrightarrow x=-n-1$ or $x=-1$ ⟶ 최솟값 찾는 과정
⟶ 최솟값 $x=-1$ (∵ n은 자연수)

$f'(-1) = -n+2+a \ge 0$

$a \ge n-2$ $= g(n)$

$1 \le n-2 \le 8 \longrightarrow 3 \le n \le 10 \longrightarrow n = 3, 4, \cdots, 8$

$\Sigma n = 52$

15

2016학년도 6월 평가원(B형) 30번

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 8\}$이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은 $p + \frac{q}{\ln 2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 자연수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점] 128

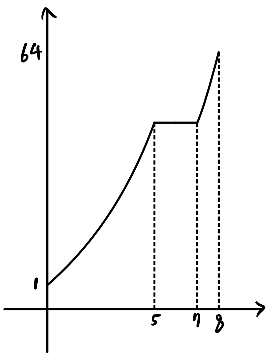
> (가) $f(0)=1$이고 $f(8) \le 100$이다.
> (나) $0 \le k \le 7$인 각각의 정수 k에 대하여
> $f(k+t)=f(k)$ $(0<t\le 1)$
> 또는
> $f(k+t)=2^t \times f(k)$ $(0<t\le 1)$
> 이다.
> (다) 열린구간 $(0,8)$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

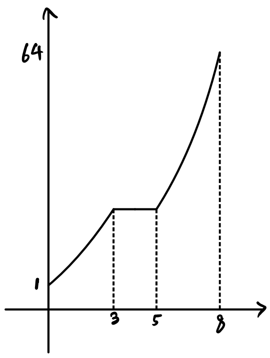
구간에서 상수함수 또는 지수함수

2^0 2^1 2^2 $\cdots$ $2^6 = 64$ $\cancel{2^7 = 128}$

→ 지수함수 6번, 상수함수 2번

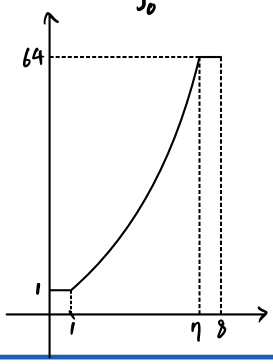
여러 가지 가정:





→ 끊겨있는 지수함수들도 결국엔 $\int_0^6 2^x dx$ 는 보장.

$\therefore \int_0^6 2^x dx + \underset{\text{Max}}{\text{상수}}$ 의 꼴



$\therefore \frac{63}{\ln 2} + 65$

$\therefore p+q = 128$

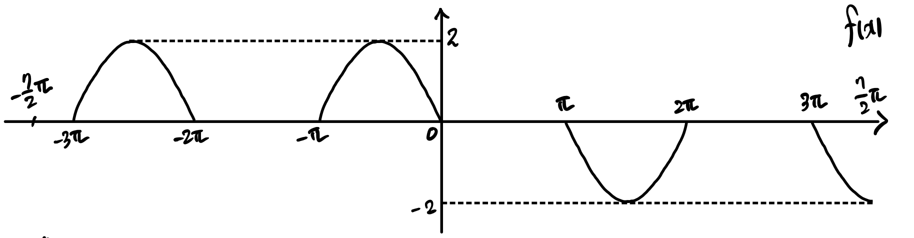
16

함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\leq x<0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0\leq x\leq\frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt\geq 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi\leq a\leq\frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$



$\int_{-\frac{7}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi} f(x)dx >0$

i) $a\leq\alpha$, $-\frac{7}{2}\pi\leq a\leq -\frac{5}{2}\pi$

: 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt$ 성립

ii) $a>\alpha$, $-3\pi<a\leq\frac{7}{2}\pi$

: $\int_a^x f(t)dt=-\int_x^a f(t)dt<0$ 가 존재.

$\therefore -\frac{7}{2}\pi\leq a\leq -3\pi$

$\therefore -\frac{7}{2}\pi\leq a\leq -3\pi$ $\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{2}\pi$

17

2016학년도 9월 평가원(B형) 30번

양수 a와 두 실수 b, c에 대하여 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$은 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)$는 $x=-\sqrt{3}$과 $x=\sqrt{3}$에서 극값을 갖는다.
> (나) $0 \le x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여
> $f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$이다.

세 수 a, b, c의 곱 abc의 최댓값을 $\frac{k}{e^3}$라 할 때, $60k$의 값을 구하시오. [4점] 15

$f'(x)=\{ax^2+(2a+b)x+b+c\}e^x$

$=a(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})e^x$

$\therefore 2a+b=0$, $b+c=-3a \longrightarrow b=-2a$, $c=-a$

sol1) 나 조건 해석 1

$f(x_2)+x_2 \ge f(x_1)+x_1$

$f(x)+x=g(x)$라 할 때,

$0 \le x_1 < x_2$에서 $g(x_2) \ge g(x_1)$이기 때문에

$g(x)$는 단조증가 함수임을 알 수 있다.

$\therefore g'(x) \ge 0 \longrightarrow f'(x) \ge -1$

sol2) 나 조건 해석 2

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge -1$$

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge \lim -1$$

$\therefore f'(x) \ge -1$

17

2016학년도 9월 평가원(B형) 30번

$f''(x)=a(x+3)(x-1)e^x$

$\longrightarrow f'(x)$ $x=1$ 에서 최소

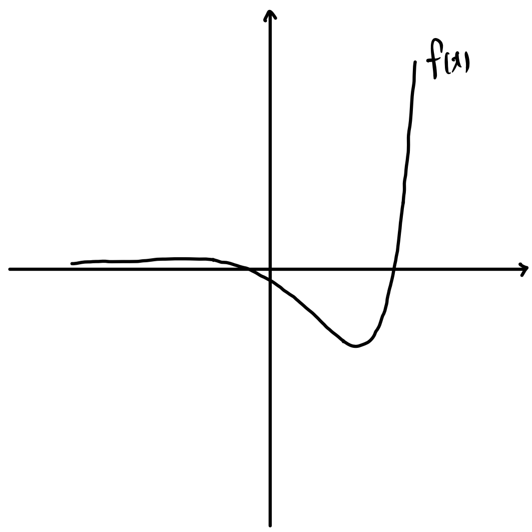
$f'(1)=-2ae\geq -1$

$\therefore 0<a\leq \frac{1}{2e}$

$abc=2a^3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^3}$

$\therefore k=\frac{1}{4}$

$\therefore 60k=15$



18

2016학년도 수능(B형) 21번

$0 < t < 41$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$와 직선 $y = t$가 만나는 세 점 중에서 x좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$라 할 때, $h'(5)$의 값은?

[4점]

① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$

④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

$h'(x) = \{f(t) - g(t)\} + t\{f'(t) - g'(t)\}$

$t = 5$ 대입.

$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$

$x(x+5)(x-3) = 0$

$\therefore f(5) = 3,\ g(5) = -5$

$I(x) = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$

$I'(x) = 3x^2 + 4x - 15$

$f'(5) \cdot I'(3) = 1 \longrightarrow f'(5) = \frac{1}{24}$

$g'(5) \cdot I'(-5) = 1 \longrightarrow g'(5) = \frac{1}{40}$

$\therefore h'(5) = \frac{97}{12}$

18

2016학년도 수능(B형) 21번

*참고 : 역함수의 미분

$g(x) = f^{-1}(x)$

$y = f(x) \longrightarrow x = g(y)$

$\frac{dx}{dx} = \frac{dg(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$\therefore 1 = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

$\therefore g(b) = a \longrightarrow 1 = g'(b) \cdot f'(a)$

19

2016학년도 수능(B형) 30번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 35

sol1)

$f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$

$x \le b$ 일 때, $f'(x) = 2a(x-b)$

$2a(x-b) = \sqrt{4-2a(x-b)^2-2c}$

$2a(2a+1)(x-b)^2+2c-4=0$

$\therefore c=2,\ a=0 \text{ or } a=-\frac{1}{2}$ ($\because$ 항등식)

i) $a=0$일 때

$f(x)=2$ $(x \le b)$

$f(0)=0$ $(\because \int_0^0 = 0)$

$\rightarrow b<0$

$\rightarrow$ 구간 $[b, 0]$ 에서 연속이 되려면

평균변화율 $\frac{2}{b}$인 점이 구간 $(b, 0)$에서 존재 ($\because$ 평균값정리)

but. f'는 모든 구간에서 ≥ 0.

$\therefore$ 모순

19

ii) $a=-\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=-\frac{1}{2}(x-b)^2+2 \quad (x\le b)$

$b<0$일 때 : i) 과 마찬가지로 모순

$\longrightarrow b\ge 0$, $f(0)=0=-\frac{1}{2}\cdot b^2+2$

$\therefore b=2$

$\therefore f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$ —— $\because f(x)>2$: $\sqrt{음수}$: X

$f(x)<2$: 감소함수 : X

$\therefore \int_0^6 f(x)dx=\frac{32}{3}$

$\therefore p+q=35$

sol2) 가 조건 없이 미분방정식으로 풀기

$\frac{d}{dx}f(x)=\sqrt{4-2f(x)}$

$\frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}=1$

$\int \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}dx=\int 1\,dx$

$-\sqrt{4-2f(x)}=x+C$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x^2+C^2+2Cx)+2$

$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2 \ (f(x)\ne 2) \ (\because f(0)=0)$

19

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2+2 & (x \le 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases} \longrightarrow \text{(가) 과조건}$$

*참고: 미분 방정식

$$\int \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\sqrt{4-2f(x)}}dx = \underbrace{\int -\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}_{t=4-2f(x) \to f(x)=-\frac{x-4}{2},\ dx=-\frac{1}{2}dt} = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{t} = -\sqrt{t} = -\sqrt{4-2f(x)}$$

20

2017학년도 6월 평가원(가형) 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$ $\longrightarrow f(x)=-f(-x)$ (원점대칭)
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{\underbrace{1+f(-x)}_{-f(x)}\}$ $=1-\{f(x)\}^2$

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=-f(-x) \neq 1$

$\therefore f(-x) \neq -1$

ㄴ. $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq -1$

$\longrightarrow -1 < f(x) < 1$

$f'(x) > 0$ ($\because f'(x)=1-\{f(x)\}^2 > 0$)

$\therefore$ 증가한다.

ㄷ. $f''(x)=-2f(x)\underbrace{f'(x)}_{>0}$

$\longrightarrow$ $x=0$ 좌우에서만 부호 바뀜.
$\longrightarrow$ 변곡점은 1개

21

2017학년도 6월 평가원(가형) 29번

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \ge 1)$에서의 위치 (x, y)가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0, f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는

$t = \dfrac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$이고, $t = 2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t = 2$일 때

점 P의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2}, a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점] 15

$$s = \int_1^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^t \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2}\,dt$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2}$$

$$2t - s = \sqrt{s^2 + 4}$$

$$\longrightarrow \frac{ds}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{t^2} = \sqrt{\frac{4}{t^2} + \{f'(t)\}^2}$$

$\therefore f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$ 또는 $\dfrac{1}{t^2} - 1$

시각 t에서 점 P의 속도 : $\left(\dfrac{2}{t}, f'(t)\right)\Big|_{t=2} = (1, f'(2)) \longrightarrow f'(2) = \dfrac{3}{4}$

가속도 : $\left(-\dfrac{2}{t^2}, f''(t)\right)$

$$\therefore f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore f''(t) = \frac{2}{t^3}\Big|_{t=2} = \frac{1}{4} = a$$

$$\therefore 60a = 15$$

22

2017학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a\,(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$ y축 대칭
(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \longrightarrow f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때, $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 83

$[x, x+a]$의 중점 $=0$

$\longrightarrow x=-\frac{a}{2}$

$f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=0=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$-\pi<-\frac{a}{2}<0$

$-\frac{2}{3}\pi<-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$

$\therefore a=\frac{5}{3}\pi \quad \left(\because \cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0\right)$

$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = 2\int_{0}^{\frac{a}{2}} f(t)dt = \sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$2\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi} b\cos(3t)+c\cos(5t)\,dt = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$2\left[\frac{b\sin(3t)}{3}-\frac{c\sin(5t)}{5}\right]_{0}^{\frac{5}{6}\pi} = \frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1$

$f'(x+a)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$f'\left(\frac{a}{2}\right)-f'\left(-\frac{a}{2}\right)=\underline{2f'\left(\frac{a}{2}\right)}=-\sin\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$(\because f'(x)$는 원점대칭$)$

22

2017학년도 6월 평가원(가형) 30번

$\therefore f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$f'(x)=-3b\sin(3x)-5c\cdot\sin(5x)$

$\therefore f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}=-3b-\frac{5}{2}c$

$\therefore b=-\frac{9}{4},\ c=\frac{5}{2}$

$\therefore abc=-\frac{75}{8}\pi$

$\therefore 83$

23

2017학년도 9월 평가원(가형) 21번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{16}{3e^4}$　② $\dfrac{6}{e^4}$　③ $\dfrac{20}{3e^4}$　④ $\dfrac{22}{3e^4}$　⑤ $\dfrac{8}{e^4}$

$$g(x) = \frac{4}{e^4}\int_1^x f(t)\,dt$$

$$= \frac{4}{e^4}\int_1^x 2t \cdot e^{t^2} \cdot \frac{f(t)}{t}\,dt$$

$$= \frac{4}{e^4}\left\{\left[e^{t^2} \cdot \frac{f(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x t^2\,dt\right\} \quad (\because \text{조건 가})$$

$$= \frac{4}{e^4}\left\{e^{x^2} \cdot \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}\right\}$$

$\therefore g(2) = f(2) - \dfrac{20}{3e^4}$

$\therefore f(2) - g(2) = \dfrac{20}{3e^4}$

24

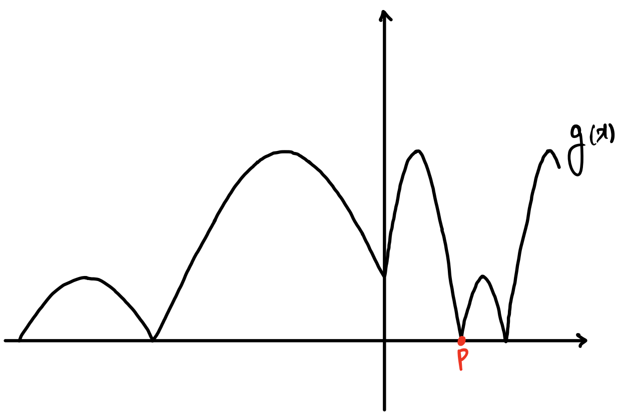
최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x + 2|x|) + 1|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점] 48

$$h'(x) = \underbrace{f'(g(x))}_{\text{미가}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\text{의심}} \quad : \text{연속, 미·가·}$$

$$g(x) = \begin{cases} |-2\sin x + 1| & (x < 0) \\ |2\sin(3x) + 1| & (x \ge 0) \end{cases}$$



h'

$0- = f'(1) \times (-2)$

$0+ = f'(1) \times 6$ = 동일해야 함

$\longrightarrow f'(1) = 0$

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

h'

$p- = f'(0) \times$ (기울기)

$p+ = f'(0) \times$ (−기울기) $\Rightarrow f'(0) = 0$

24

2017학년도 9월 평가원(가형) 30번

$h''(x) = f''(g(x)) \cdot \{g'(x)\}^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$

$0- = f''(1) \times 4 + 0$

$0+ = f''(1) \times 36 + 0$

$\Rightarrow f''(1) = 0$

$p- = f''(0) \cdot (\text{기울기})^2 + 0$

$p+ = f''(0) \cdot (\text{기울기})^2 + 0$

$=$ 같다

$\therefore$ 얻은 조건 : $f'(1) = f'(0) = f''(1) = 0$

$\longrightarrow f'(x) = 4x(x-1)^2$ ($\because$ $f'(1) = f''(1) = 0$, $f'(1)$은 극점, 중근)

$\therefore f'(3) = 48$

25

2017학년도 수능(가형) 30번

$x > a$에서 정의된 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a는 상수이다.)

(가) $x > a$인 모든 실수 x에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$이다. (나) 서로 다른 두 실수 α, β에 대하여 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M > 0$) (다) 함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$일 때, M의 최솟값을 구하시오. [4점] 216

sol1) 정석으로...

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-a} = \frac{-x^4+\cdots}{x-a} \quad (x>a)$$

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x)-g(x)}{(x-a)^2}$$

나) 조건 이용

$\longrightarrow f(\alpha) = f(\beta) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a} = \frac{g(\beta)}{\beta-a} = M$

$\longrightarrow f'(\alpha) = 0$

$\longrightarrow (\alpha-a)g'(\alpha) = g(\alpha) \longrightarrow g'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a} = M$

$\longrightarrow f'(\beta) = 0$

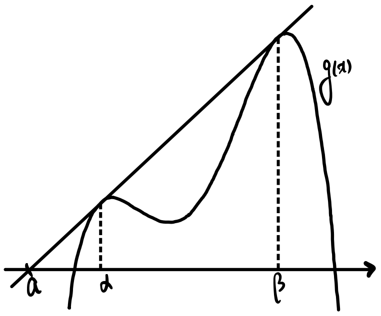
$\longrightarrow (\beta-a)g'(\beta) = g(\beta) \longrightarrow g'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta-a} = M$

위 두 식 해석 :

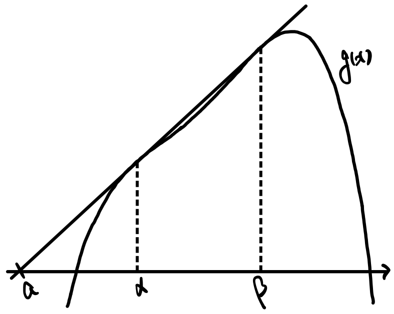
$(a,0)$ $(\alpha, g(\alpha))$의 평균변화율 = $x=\alpha$에서 기울기 M

$(a,0)$ $(\beta, g(\beta))$의 평균변화율 = $x=\beta$에서 기울기 M

$\longrightarrow$ $(a,0)$ $(\alpha, g(\alpha))$ $(\beta, g(\beta))$ 는 일직선 위 점.



$\longrightarrow$ f극점 개수 = g극점 개수



$\longrightarrow$ f극점 개수 > g 극점 개수
: 다 조건 만족!

$\longrightarrow g(x) - M(x-a) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta) + M(x-a)$

$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + M$

g'의 실근 개수 : 1 or 2

$\therefore$ $h(x) = 4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 와 $y=M$의 교점 개수 : 1 or 2

$\therefore$ $\min(M) = h(x)$ 극댓값

$h'(x) = 3(2x-\alpha-\beta+6)(2x-\alpha-\beta-6) = 0$

$\longrightarrow x = \frac{\alpha+\beta-6}{2}, \ \frac{\alpha+\beta+6}{2}$

$\therefore M = h\left(\frac{\alpha+\beta-6}{2}\right) = 216$

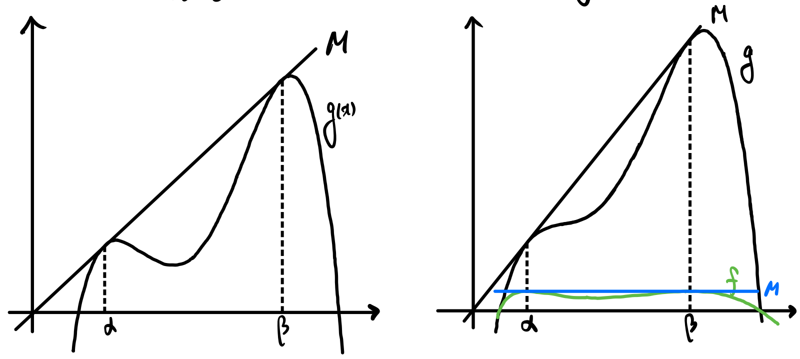
sol2) WLOG 2번

M을 구하는 데에 있어 'a'가 답에 영향을 줄까?

$\longrightarrow$ X

$\therefore$ WLOG, $a=0$ 라 하자.

$f(x)=\frac{g(x)}{x}=\frac{g(x)-0}{x-0} \longrightarrow (0,0)$ 에서 $(x, g(x))$ 까지의 기울기



$\longrightarrow$ f극점 개수 = g극점 개수

$\longrightarrow$ f극점 개수 > g 극점 개수
: 다 조건 만족!

$\longrightarrow g(x)-Mx=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)+Mx$

$\longrightarrow$ α와 β의 확정적인 값을 정한다고 해서 여전히 답 도출에는 관여 X

$\therefore$ WLOG. $\alpha=-3\sqrt{3}$, $\beta=3\sqrt{3}$

$g(x)=-(x+3\sqrt{3})^2(x-3\sqrt{3})^2+Mx$

$g'(x)=-4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})+M$

$h(x)=4x(x+3\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$
$=4x^3-108x$

$h'(x)=12x^2-108$

$\therefore M \geq h'(-3)$
$=216$

* WLOG : Without Loss Of Generality

: 일반성을 잃지 않고

sol_3) 접근을 다르게! but, 결과는 같음.

⋮

$(x-a)g'(x)=g(x)$

→ a에 대한 방정식으로 해석

→ $(x, g(x))$ 에서 그은 접·방

결론: α, β 에서 그은 접·방이 $(a, 0)$을 지난다.

⋮

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

$$F(x)=\ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여

$$G(x)=\ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=3,\ \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점]

① 57　② 55　③ 53
④ 51　⑤ 49

sol1)

$F(x)=\ln|f(x)|$

$F'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=3 \longrightarrow f(1)=0$

$\therefore f(x)=(x-1)^n Q(x)\quad (1\le n\le 4,\ Q(1)\ne0)$

$f'(x)=n(x-1)^{n-1}Q(x)+(x-1)^n Q'(x)$

$\lim_{x\to1}\dfrac{n(x-1)^n Q(x)+(x-1)^{n+1}Q(x)}{(x-1)^n Q(x)}=n=3$

$\therefore f(x)=(x-1)^3(x+a)\quad (a\ne-1)$

$\lim_{x\to0} G(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} G'(x) = \infty$, $\lim_{x\to0-} G'(x) = -\infty$

$\lim_{x\to0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$

$\therefore \lim_{x\to0} |F'(x)| = \lim_{x\to0} \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| = \infty$

$\longrightarrow f(0) = 0$

$\therefore f(x) = x(x-1)^3$

$\therefore F'(x) = \frac{4x-1}{x(x-1)}$

$G'(x) = \frac{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}{g(x)\sin x}$

$$\lim_{x\to0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x\to0} \frac{(4x-1)g(x)\sin x}{x(x-1)\{g'(x)\sin x + g(x)\cos x\}}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{4x-1}{x-1} \cdot \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{g(x)}{g'(x)\sin x + g(x)\cos x} = \frac{1}{4}$$

$\longrightarrow g(0) = 0$

$\therefore g(x) = x^n P(x) \quad (1 \le n \le 3,\ P(0) \ne 0)$

$g'(x) = nx^{n-1}P(x) + x^n P'(x)$

$$\lim_{x\to0} \frac{nx^{n-1}P(x)\sin x + x^n P'(x)\sin x}{x^n P(x)} = n = 3$$

$\therefore g(x) = x^3$

$\therefore f(3) + g(3) = 51$

26

2018학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol2) log의 성질 이용

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$F(x)=\ln|f(x)|=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|x-\gamma|+\ln|x-\delta|$

$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}(x-1)\left(\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}\right)=3$

$\therefore \ln|f(x)|=3\ln|x-1|+\ln|x-\alpha|$

$\longrightarrow f(x)=(x-1)^3(x-\alpha) \quad (\alpha\neq1)$

$g(x)=(x-p)(x-q)(x-r)$

$$\lim_{x\to1}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-\alpha}}{\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{x\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{x-\alpha}\right)}{x\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}\right)+\frac{x}{\tan x}}=\frac{1}{4}$$

$\therefore \alpha=0$

$\lim_{x\to1}x\left(\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}+\frac{1}{x-r}\right)=3$

$\therefore p=q=r=0$

$\therefore g(x)=x^3,\ f(x)=x(x-1)^3$

$\therefore f(3)+g(3)=51$

26

sol3) 역로피탈

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{F'(x)}{\frac{1}{x-1}}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)}{\ln|x-1|}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|x-1|}=3$$

$\longrightarrow f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)\quad(\alpha\neq1)$

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln|f(x)|}{\ln|g(x)\sin x|}=\frac{1}{4}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이기 때문에 $\alpha=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)^3$

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3\ln|x-1|}{\underbrace{\ln|g(x)|+\ln|\sin x|}_{=0}}+\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\ln|g(x)|+\ln|\sin x|}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\ln|xg(x)|}{\ln|x|}+\underbrace{\frac{\ln\left|\frac{\sin x}{x}\right|}{\ln|x|}}_{=0}}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|xg(x)|}{\ln|x|}=4\qquad\therefore g(x)=x^3$$

$\therefore f(3)+g(3)=51$

* 로피탈의 정리, L'Hôpital's rule

$x=a$ 에서 미분 가능한 함수에 대해

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ 일 때

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 이 성립한다.

sol4) $\sin x = x$ ..?

$\sin x = x$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\ln|x-1|+\ln|x|}{\ln|x\cdot g(x)|}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln|g(x)|}{\ln|x|}+\frac{\ln|x|}{\ln|x|}=4$$

$\therefore g(x)=x^3$

$\therefore f(3)+g(3)=51$

*테일러 급수, Taylor Series

$\sin\theta = \theta$
$\tan\theta = \theta$
등, 함수를 근사시키는 방법

자세한 설명은 33번, 190621 에서

27 2018학년도 6월 평가원(가형) 30번

실수 a와 함수 $f(x) = \ln(x^4+1) - c$ ($c > 0$인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ —— } g'(x) = f(x)$$

라 하자. 함수 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2가 되도록 하는 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)이다.

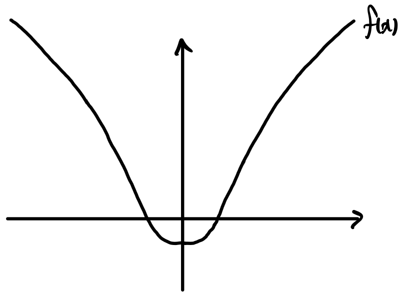
$a = \alpha_1$일 때, 함수 $g(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

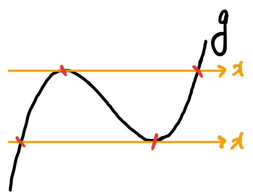
(가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다. —— $g'(1)=0$
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx = k\alpha_m \int_0^1 \lvert f(x) \rvert dx$

$mk \times e^c$의 값을 구하시오. [4점] 16

$f(1)=0$ $\therefore c = \ln 2$

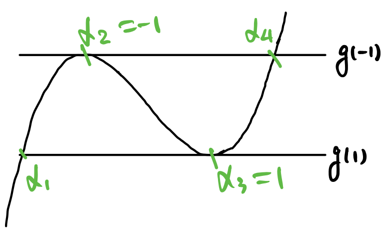
$g'(x) = f(x) = \ln(x^4+1) - \ln 2 = 0$ $\therefore x = \pm 1$





$\therefore$ a가 될 수 있는 값 : 4개 ($\because g(a) = \int_a^a = 0$)

$\therefore m=4$



27

2018학년도 6월 평가원(가형) 30번

f: 우함수 $\longrightarrow$ g: 점대칭

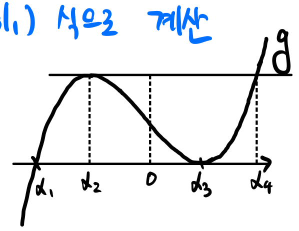
$$g(-x)=\int_a^{-x} f(t)\,dt \quad \Big)\ -t=s \text{ 치환}$$
$$=\int_{-a}^{x} f(-s)\cdot(-ds)$$
$$=\int_{x}^{-a} f(s)\,ds$$
$$=\int_{x}^{a} f(s)\,ds+\int_{a}^{-a} f(s)\,ds$$
$$=-g(x)+2g(0)$$

$\therefore\ g(x)+g(-x)=2g(0)$

$\longrightarrow (0, g(0))$ 대칭

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx$ 를 먼저 구해보자.

sol.1) 식으로 계산



$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)\,dx=\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} g(x)\,dx$$
$$=\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1}\{2g(0)-g(-x)\}\,dx$$
$$=2g(0)\{(-\alpha_1)-\alpha_1\}-\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} g(-x)\,dx \quad \Big)\ x=-t \text{ 치환}$$
$$=4\alpha_1 g(0)-\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} g(t)(-dt)$$
$$=4\alpha_1 g(0)-\int_{\alpha_1}^{-\alpha_1} g(t)\,dt$$

27

2018학년도 6월 평가원(가형) 30번

$$\therefore \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = 2\alpha_1 g(0) = 2\alpha_4 g(0)$$

$$= 2\alpha_4\{g(0)-g(1)\} \quad (\because g(1)=0)$$

$$= 2\alpha_4\left\{\int_{\alpha_1}^{0} f(x)dx - \int_{\alpha_1}^{1} f(x)dx\right\}$$

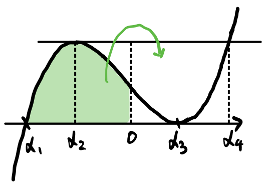
$$= 2\alpha_4 \int_{1}^{0} f(x)dx$$

$$= 2\alpha_4 \int_{0}^{1} -f(x)dx$$

$$= 2\alpha_4 \int_{0}^{1} |f(x)|dx \quad (\because 0<x<1,\ f(x)<0)$$

$$\therefore k=2$$

sol2) 그래프 특징성 이용



$$\therefore \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx = \alpha_4 \times g(\alpha_2) = \alpha_4 g(\alpha_2)$$

$$\int_{0}^{1} |f(x)|dx = -\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha_1}^{0} f(x)dx + \int_{1}^{\alpha_1} f(x)dx$$

$$= g(0)-g(1)$$

$$= g(0) \quad (\because g(1)=0)$$

$$\therefore \alpha_4 g(\alpha_2) = k\cdot\alpha_4\cdot g(0)$$

$$\alpha_4\cdot 2g(0) = k\cdot\alpha_4 g(0)$$

$$\therefore k=2$$

$$\therefore mk\cdot e^c = 16$$

27

2018학년도 6월 평가원(가형) 30번

*참고 : 대칭성

— $x=a$ 선대칭 $\quad f(a-x)=f(a+x)$

— $(a,0)$ 점대칭 $\quad f(a-x)+f(a+x)=0$

— (a,b) 점대칭 $\quad \dfrac{f(a-x)+f(a+x)}{2}=b$

28

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = -1,\ a_n = 2 - \underline{\frac{1}{2^{n-2}}}\ (n \ge 2)$$

등비수열

이다. 구간 $[-1, 2)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x)\ \ (a_n \le x \le a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$인 실수 α에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x)dx = 0$을 만족시키는

$t\,(0 < t < 2)$의 값의 개수가 103일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$의 값은? [4점]

① -48　　② -50　　③ -52

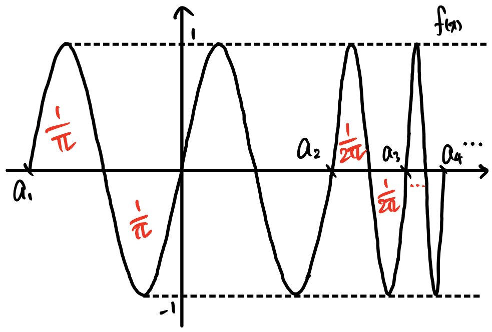
④ -54　　⑤ -56

$a_2 = 2 - 1 = 1$

$a_3 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\longrightarrow$

$a_4 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

⋮



if) $\alpha = -\frac{1}{2}$

: $t = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ 1개

if) $\alpha = -\frac{1}{4}$

: $t = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$

⋮

28

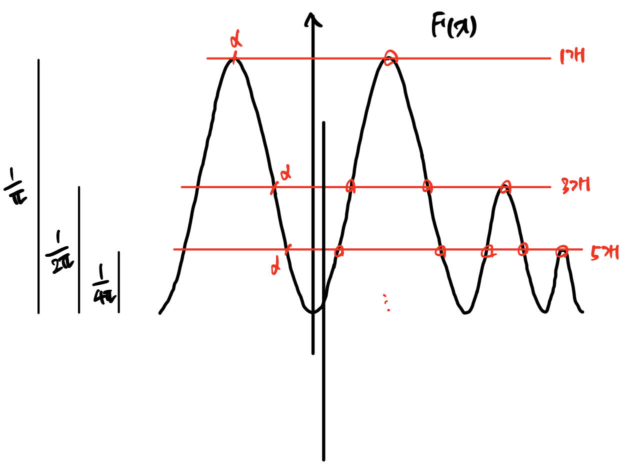
if) $\alpha = -\frac{1}{2}$

: $t = \frac{1}{2} \longrightarrow$ 1개

if) $\alpha = -\frac{1}{4}$

: $t = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$

$\vdots$



$\longrightarrow$ 1개 : 폭 : $\frac{1}{\pi} = \frac{1}{2^0 \pi}$

$\longrightarrow$ 3개 : 폭 : $\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2^1 \pi}$

$\vdots$

$\longrightarrow$ 103개 : 폭 : $\frac{1}{2^{51}\pi}$

$$\int_{\alpha}^{0} \sin(2\pi x)\,dx = -\frac{1}{2^{51}\pi}$$

$$\left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi x)\right]_{\alpha}^{0} = -\frac{1}{2\pi}\left\{1 - \cos(2\pi\alpha)\right\} = -\frac{1}{2^{51}\pi}$$

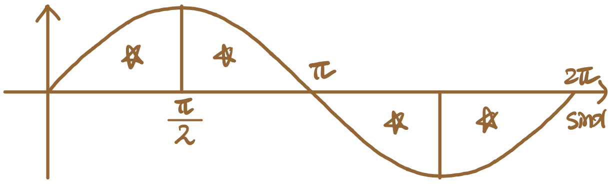
$$\therefore 1 - \cos(2\pi\alpha) = \frac{1}{2^{50}}$$

$$\therefore \log_2(1 - \cos(2\pi\alpha)) = -50$$

28

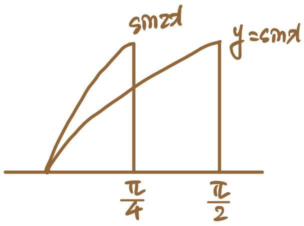
2018학년도 9월 평가원(가형) 21번

* 참고 : 삼각함수 한 조각의 넓이는 1이다.



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

☆ = 1



한칸

- $y = \sin 2x \longrightarrow$ 가로 : $\frac{1}{2}$배 $\longrightarrow 1 \times \frac{1}{2}$
- $y = 2\sin x \longrightarrow$ 세로 : 2배 $\longrightarrow 1 \times 2$
- $y = a\sin bx \longrightarrow 1 \times \frac{1}{b} \times a$

29

함수 $f(x) = \ln(e^x + 1) + 2e^x$에 대하여 이차함수 $g(x)$와 실수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $h(x) = \lvert g(x) - f(x-k) \rvert$는 $x = k$에서 최솟값 $g(k)$를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1, k+1]$에서 최댓값 $2e + \ln\left(\dfrac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$를 갖는다.

$g'\left(k - \dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. (단, $\dfrac{5}{2} < e < 3$이다.) [4점] 6

$h(k) = \lvert g(k) - f(0) \rvert = g(k)$

$\therefore f(0) = 2g(k) = \ln 2 + 2 \quad (\because f(x) > 0)$

$\therefore g(k) = \dfrac{\ln 2 + 2}{2}$: 최솟값

$f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$: 증가함수, 아래로 볼록

$\longrightarrow$ if) $g(x)$가 아·볼 : $h(x) = 0 \longrightarrow$ 모순 ($\because f, g$ 교점 존재)

$\therefore g(x)$는 위·볼!

$\therefore f(x-k) > g(x)$

$\therefore h(x) = f(x-k) - g(x)$

$h'(x) = f'(x-k) - g'(x) = 0$

$\therefore g'(k) = \dfrac{5}{2} \quad \left(\because f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} + 2e^x\right)$

$g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$

$g'(k) = 2ak + b = \dfrac{5}{2}$

29

$h(k-1)-h(k+1)=f(-1)-g(k-1)-f(1)+g(k+1)$

$=\frac{2}{e}-1-2e+\{4ak+b\}$

$=\underbrace{\frac{2}{e}}_{0.735\cdots}\underbrace{-1-2e+5}_{-1.436\cdots}<0$

$\therefore$ 최댓값 : $h(k+1)$

$h(k+1)=\ln(e+1)+2e-g(k+1)=2e+\ln(1+e)-\ln(\sqrt{2})$

$\therefore g(k+1)=\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2$

$g(k+1)-g(k)=2ak+b+a=-1$

$\therefore a=-\frac{7}{2}$

$\therefore g'\left(k-\frac{1}{2}\right)=2ak+b-a=6$

30

양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & (1 \le x < e) \\ -t+\ln x & (x \ge e)\end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y=g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x)-f(x)\} \ge 0$이다.

— $x \ge e$: $g(x) \ge f(x)$

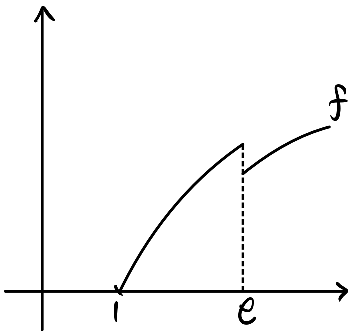
— $1 \le x < e$: $f(x) \ge g(x)$

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a)=\dfrac{1}{e+2}$을 만족시킨다.

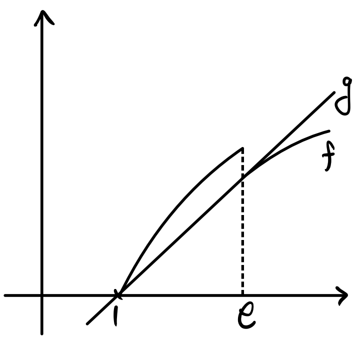
$h'\left(\dfrac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{(e+1)^2}$ ② $\dfrac{1}{e(e+1)}$ ③ $\dfrac{1}{e^2}$

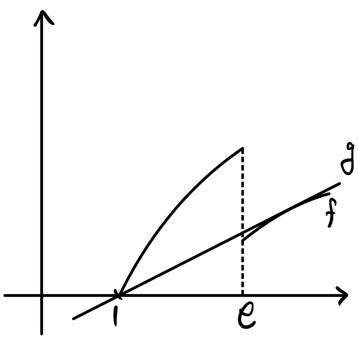
④ $\dfrac{1}{(e-1)(e+1)}$ ⑤ $\dfrac{1}{e(e-1)}$



i) $g(x)$가 $(e, -t+1)$을 지날 때



ii) $x \ge e$ 에서 g와 f가 접할 때



30

2018학년도 수능(가형) 21번

: $(e, -t+1)$를 지나면서 + 동시에 f와 접하는걸 찾아보자 (경계 찾기)

$(e, -t+1)$에서 f의 접.기. : $\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 가 $(e, -t+1)$에서 접할 때 : $h(t)=\frac{1}{e}$

$-t+1=\frac{1}{e}(e-1)$

$\therefore t=\frac{1}{e}$

i) $0<t\le\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 이 $(1,0)$과 $(e, -t+1)$ 지남.

$\therefore h(t)=\frac{1-t}{e-1} \longrightarrow h'(t)=-\frac{1}{e-1}$

ii) $t>\frac{1}{e}$

$y=h(t)(x-1)$ 이 $y=-t+\ln x$ 와 접함.

$y'=\frac{1}{x}$ ↳ $x=k$ 에서 접

$\therefore h(t)=\frac{1}{k}$

sol1) 라이프니츠 표기법

$-t+\ln k=\frac{1}{k}(k-1)$ ($\because y=\frac{1}{k}(x-1)$ 이 $(k, -t+\ln k)$를 지남)

$\therefore t=\ln k+\frac{1}{k}-1$

$1=\frac{1}{k}\cdot\frac{dk}{dt}-\frac{1}{k^2}\cdot\frac{dk}{dt}$

$\therefore \frac{dk}{dt}=\frac{k^2}{k-1}$

30

$$h'(t) = -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{dk}{dt}$$
$$= -\frac{1}{k^2}\cdot\frac{k^2}{k-1}$$
$$= -\frac{1}{k-1}$$

$t=a$ 일 때 $k=e+2$ $\left(\because h(a)=\frac{1}{e+2},\ h(t)=\frac{1}{k}\right)$

$$\therefore h'(a) = -\frac{1}{e+1}$$

$h'\left(\frac{1}{2e}\right) = -\frac{1}{e-1}$ $\left(\because 0<x\le\frac{1}{e}\right.$ 일 때 $\left.h'(t) = -\frac{1}{e-1}\right)$

$$\therefore h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a) = \frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

sol$_2$) 뉴턴 포기법

$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\ln k-t$$

$0=\frac{1}{k}-1+\ln k-t = h(t)-\ln(h(t))-t-1=0$ $\left(\because \ln k = -\ln\frac{1}{k}\right)$

$$h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e} > h(a)$$

$$\therefore h(a)-\ln(h(a))-a-1=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{e+2}+\ln(e+2)-1$$

$$h'(t)-\frac{h'(t)}{h(t)}-1=0$$

$$h'(a)-\frac{h'(a)}{h(a)}-1=0$$

$$h'(a)\{1-(e+2)\}-1=0$$

$$\therefore h'(a)=-\frac{1}{e+1}$$

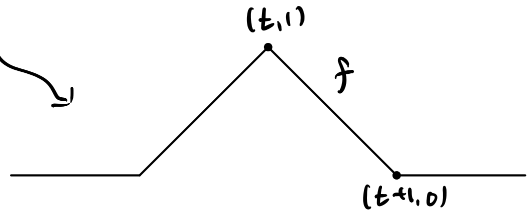
$$\therefore h'\left(\frac{1}{2e}\right)\times h'(a)=\frac{1}{(e-1)(e+1)}$$

31

2018학년도 수능(가형) 30번

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1) \\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases} \longrightarrow [t-1,\ t+1]$$



이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m}g(\alpha_i)$의 값을 구하시오. [4점] 21

sol.)

i) $t+1\le k$

$$g(t)=\int_k^{k+8} 0\cdot\cos(\pi x)\,dx=0$$

ii) $t\le k<t+1$

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$
$$=t\int_k^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+\int_k^{t+1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\frac{\cos(\pi t)-1}{\pi^2}$$

iii) $t-1 \le k < t$

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-t\int_k^{t}\cos(\pi x)\,dx+\int_k^{t}(1+x)\cos(\pi x)\,dx+t\int_t^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\frac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2}$$

iv) $k < t-1$

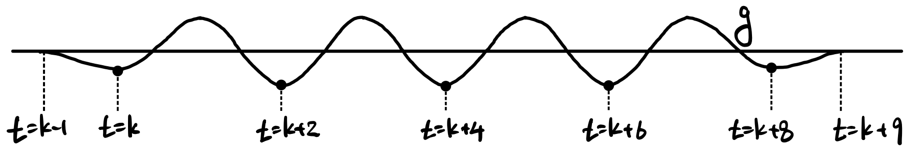
$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t-1}0\cdot\cos(\pi x)\,dx+\int_{t-1}^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\frac{4\cos(\pi t)}{\pi^2}$$

+) t가 계속 증가하다 보면 t가 $[k, k+8]$에 속해지지 않음.

$t=k+4$ 에 대하여 대칭.

$\therefore g(t)=g(2k+8-t)$

$$\therefore g(t)=\begin{cases} 0 & (t\le k-1) \\ \dfrac{\cos(\pi t)-1}{\pi^2} & (k-1<t\le k) \\ \dfrac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2} & (k<t\le k+1) \\ \dfrac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} & (k+1<t\le k+7) \\ \dfrac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2} & (k+7<t\le k+8) \\ \dfrac{\cos(\pi t)-1}{\pi^2} & (k+8<t\le k+9) \\ 0 & (t>k+9) \end{cases}$$



$\sum^{m} \alpha_i = k+k+2+k+4+k+6+k+8$

$= 5k+20 \quad = 45$

$\therefore k=5,\ m=5$

$g(k)=g(k+8)=-\frac{2}{\pi^2}$

$g(k+2)=g(k+4)=g(k+6)=-\frac{4}{\pi^2}$

$\therefore \sum g(\alpha_i) = -\frac{16}{\pi^2}$

$\therefore k-\pi^2\sum g(\alpha_i)=21$

sol$_2$)

$f(x)$의 구간 $[k-1, k+1]$의 길이와 $\cos(\pi x)$의 주기가 같다.

$f(x)$가 실질적으로 t에 따라 달라지기 때문에 상황에 따라 $g(t)$의 함수식도 달라짐.

i) $t+1 \le k$

$[k, k+8]$에서 $f(x)=0$

$\therefore g(t)=0 \longrightarrow g'(t)=0 \quad (t<k)$

ii) $k-1 < t \le k$

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$
$$=t\int_k^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+\int_k^{t+1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$g'(t)=\int_k^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+t\cos(\pi t+\pi)-t\cos(\pi t+\pi)$$
$$=-\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)\quad(k-1<t<k)$$

iii) $t-1 \le k < t$

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$
$$=-t\int_k^{t}\cos(\pi x)\,dx+\int_k^{t}(1+x)\cos(\pi x)\,dx+t\int_t^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

$$g'(t)=-\int_k^{t}\cos(\pi x)\,dx-t\cos(\pi t)+(t+1)\cos(\pi t)+\int_k^{t+1}\cos(\pi x)\,dx-2t\cos(\pi t)$$
$$+t\cos(\pi t)+(t-1)\cos(\pi t)$$

$$=-\frac{3}{\pi}\sin(\pi t)\quad(k<t<k+1)$$

iv) $k < t-1$

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)\,dx$$
$$=\int_k^{t-1}0\cdot\cos(\pi x)\,dx+\int_{t-1}^{t}(x-t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(-x+t+1)\cos(\pi x)\,dx+\int_{t+1}^{k+8}0\cdot\cos(\pi x)\,dx$$

$$=-t\int_{t-1}^{t}\cos(\pi x)\,dx+\int_{t-1}^{t}(1+x)\cos(\pi x)\,dx+t\int_t^{t+1}\cos(\pi x)\,dx+\int_t^{t+1}(1-x)\cos(\pi x)\,dx$$

31

2018학년도 수능(가형) 30번

$$g'(t) = -\int_{t-1}^{t} \cos(\pi x)dx - t\{\cos(\pi t) - \cos(\pi(t-1))\} + (t+1)\cos(\pi t) - t\cos(\pi(t-1))$$

$$+\int_{t}^{t+1} \cos(\pi x)dx + t\{\cos(\pi(t+1)) - \cos(\pi t)\}$$

$$- t\cos(\pi(t+1)) + (t-1)\cos(\pi t)$$

$$= -\frac{4}{\pi}\sin(\pi t) \quad (t > k+1)$$

홀수 k에 대하여 $g(k-1)=0$ 임에 착안하여 $g(t)$가 연속함수가 되도록 적분상수 잡기

+) t가 계속 증가하다 보면 t가 $[k, k+8]$에 속해지지 않음.

$t = k+4$ 에 대하여 대칭.

$\therefore g(t) = g(2k+8-t)$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} 0 & (t \le k-1) \\ \dfrac{\cos(\pi t)-1}{\pi^2} & (k-1 < t \le k) \\ \dfrac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2} & (k < t \le k+1) \\ \dfrac{4\cos(\pi t)}{\pi^2} & (k+1 < t \le k+7) \\ \dfrac{3\cos(\pi t)+1}{\pi^2} & (k+7 < t \le k+8) \\ \dfrac{\cos(\pi t)-1}{\pi^2} & (k+8 < t \le k+9) \\ 0 & (t > k+9) \end{cases}$$

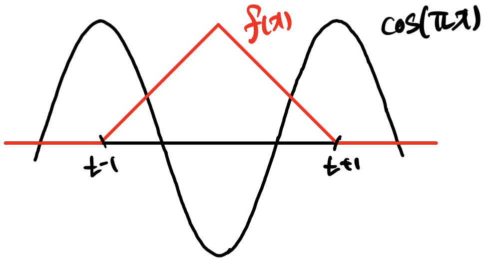
sol. 과 동일

31

sol(3) 직관! + 가장 현실적 풀이

$f(x)$의 구간 $[k-1, k+1]$의 길이와 $\cos(\pi x)$의 주기가 같다.

그래프가 이렇지 않을까 추론:



: 최대

$\cos(\pi x) = -1$: $x = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots$

$\alpha_{1\sim 5} = 5, 7, 9, 11, 13$ (∵ $g(t)$의 구간 길이는 8)

$\therefore k=5,\ m=5$

$\int_0^1 (1-x)\cos(\pi x)dx = \frac{2}{\pi^2}$

$\therefore g(\alpha_1) = g(\alpha_5) = -\frac{2}{\pi^2}$

$g(\alpha_2) = g(\alpha_3) = g(\alpha_4) = -\frac{4}{\pi^2}$

$\therefore \Sigma g(\alpha_i) = -\frac{16}{\pi^2}$

$\therefore k - \pi^2 \Sigma g(\alpha_i) = 21$

32

2018학년도 수능(나형) 30번

이차함수 $f(x)=\dfrac{3x-x^2}{2}$에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
>
> (나) $n \le x < n+1$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\}+x$이다.
>
> (단, n은 자연수이다.)

어떤 자연수 k $(k \ge 6)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & (0 \le x < 5 \text{ 또는 } x \ge k) \\ 2x-g(x) & (5 \le x < k) \end{cases}$$

이다. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\displaystyle\int_0^n h(x)dx$라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=\frac{241}{768}$이다.

k의 값을 구하시오. [4점] 9

sol.)

$$a_n=\int_0^n h(x)\,dx=\int_0^5 g(x)\,dx+\int_5^k 2x-g(x)\,dx+\int_k^n g(x)\,dx$$

1) $$\int_0^5 g(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{4}\int_k^{k+1}\frac{1}{2^k}\{f(x-k)-(x-k)\}dx+\int_1^5 x\,dx$$
$$=\frac{7}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^4}\right)+12$$

2) $$\int_5^k 2x-g(x)\,dx=\int_5^k x\,dx-\sum_{j=5}^{k-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{2^j}\{f(x-j)-(x-j)\}dx$$
$$=\frac{k^2-25}{2}-\frac{7}{12}\left(\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

3) $$\int_k^n g(x)\,dx=\sum_{j=k}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{2^j}\{f(x-j)-(x-j)\}dx+\int_k^n x\,dx$$
$$=\frac{7}{12}\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{n^2-k^2}{2}$$

$$a_n = 1) + 2) + 3)$$

$$= \frac{1}{12}\left(\frac{31}{16} - \frac{2^{k-6}+\cdots+1}{2^{k-1}} + \frac{2^{n-k-1}+\cdots+1}{2^{n-1}}\right) + \frac{n^2}{2}$$

$$2a_n - n^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{15}{8} + \frac{1}{2^{k-2}} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n + n^2) = \frac{5}{16} + \frac{1}{3\cdot 2^{k-1}} = \frac{241}{768}$$

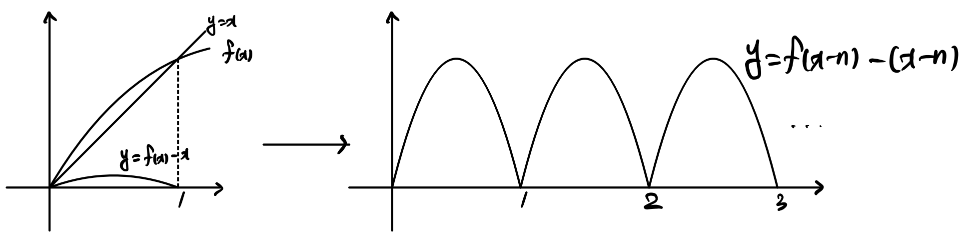
$$\frac{241}{768} = \frac{5}{16} + \frac{1}{3\times 2^8}$$

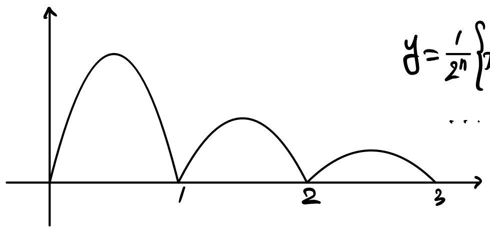
$$\therefore k=9$$

sol2)

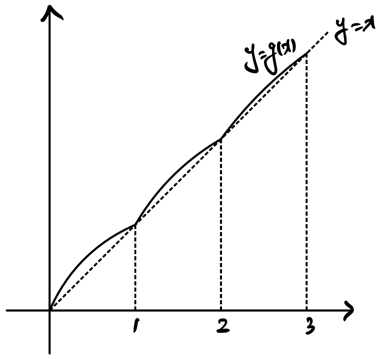
나 조건에 $n=0$ 대입.

$0\le x<1$ 일 때, $g(x)=f(x)$: 가,나 조건 합치기





$$y=\frac{1}{2^n}\{f(x-n)-(x-n)\} \quad (n=0,1,\cdots)$$



32

2018학년도 수능(나형) 30번

규칙성 : 이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$의 넓이 $\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$ 에 대하여

$\beta-\alpha$는 일정, 최고차항의 계수만 절반씩 줄어듦.

∴ 구간 $[n, n+1]$ 에서

$$y=g(x)-x=\frac{-(x-n)(x-n-1)}{2^n}$$

과 x축으로 둘러싸인 넓이 $=\frac{1}{6\cdot 2^n}$

∴ $\lim_{n\to\infty}\int_0^n g(x)dx$ = 발산

+) $[5, k)$ 에서 $h(x)$함수는 $g(x)$의 개형을 $y=x$에 대하여 대칭.

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n-n^2)=2\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{2}\right)$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^n h(x)dx-\frac{n^2}{2}\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\int_0^n h(x)-x\,dx \quad \left(\because \int x\,dx=\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\frac{241}{768}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{241}{768}=\int_0^5 g(x)-x\,dx-\int_5^k x-g(x)\,dx+\lim_{n\to\infty}\int_k^n g(x)-x\,dx$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\frac{1}{192}-\frac{1}{6\cdot 2^6}-\frac{1}{6\cdot 2^7}-\cdots-\frac{1}{6\cdot 2^k}+\frac{1}{6\cdot 2^{k+1}}+$$

$$=\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\cdots\right)-2\left(\frac{1}{6\cdot 2^6}+\cdots+\frac{1}{6\cdot 2^k}\right)$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{96}\left(1-\frac{1}{2^{k-5}}\right)$$

$$\therefore \frac{241}{16}=16-\left(1-\frac{1}{2^{k-5}}\right)$$

∴ $k=9$

32

sol3)

sol2)에서 $g(x)$와 $y=x$로 둘러싸인 넓이들이

초항 $= \frac{1}{12}$, 공비 $= \frac{1}{2}$ 인 등비수열임을 알아냈다.

$$2\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots+\frac{1}{12\cdot 2^4}-\frac{1}{12\cdot 2^5}-\cdots-\frac{1}{12\cdot 2^{k-1}}+\frac{1}{12\cdot 2^k}+\cdots\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6\cdot 2^n}-4\sum_{n=5}^{k-1}\frac{1}{6\cdot 2^n}=\frac{241}{768}$$

이 되는 k값 찾기

33

열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

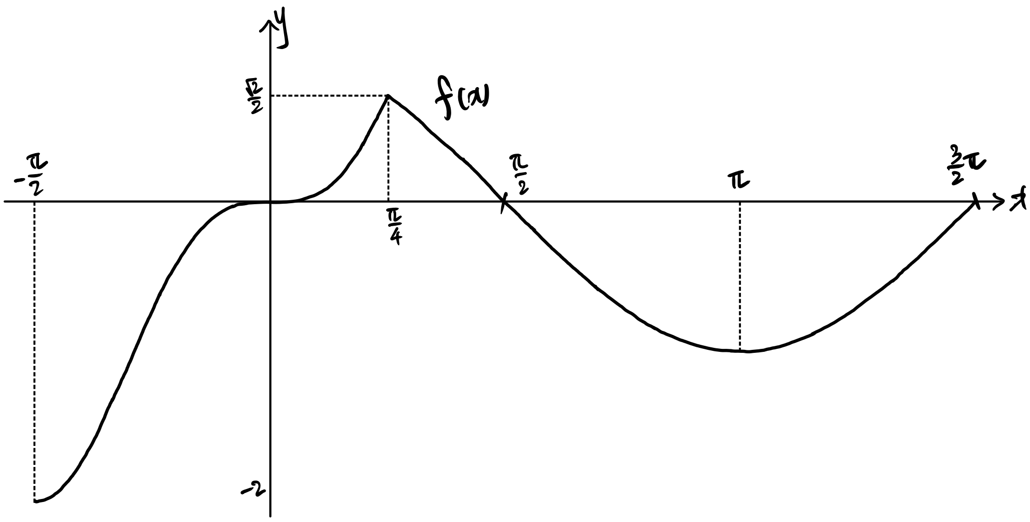
$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

> (가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
>
> (나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h \circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a$, $g(0)=b$, $g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

① 96 ② 97 ③ 98
④ 99 ⑤ 100

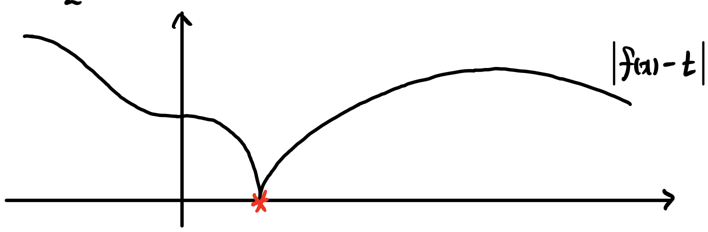


33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol1)

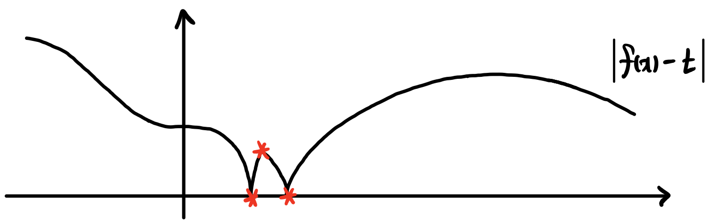
i) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ $t \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$: 미불점 : $x = \frac{\pi}{4}$

$\therefore a = 1$

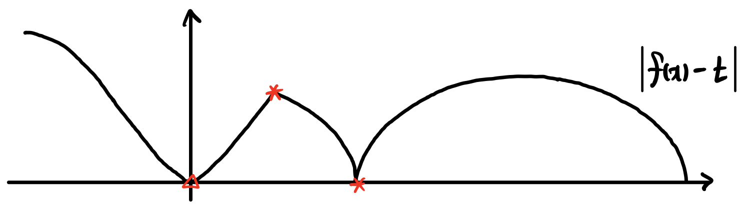
ii) $0 < t < \frac{\sqrt{2}}{2}$



→ $0 < t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$: 미불점 3개

$\therefore g = 3$

iii) $t = 0$



확실 : 2개, 의심점: $x = 0$

$i(x) = \sqrt{|\sin^3 x|}$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{i(x) - i(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sin x \sqrt{-\sin x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0+} \frac{i(x) - i(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin x \sqrt{\sin x}}{x} = 0$$

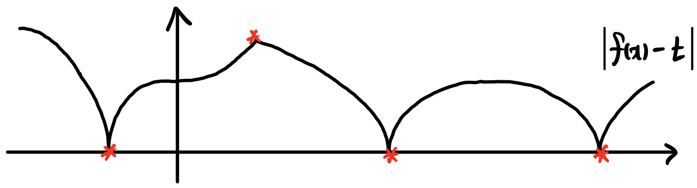
→ $x = 0$ 에서 미가

33

→ 미불점 : 2개
$g=2$

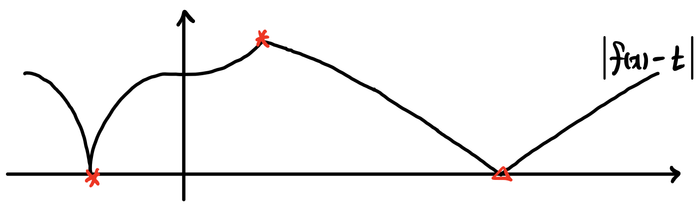
$\therefore b=2$

iv) $-1<t<0$



→ 미불점 : 4개
$g=4$

v) $t=-1$



확실 : 2개, 의심점 : $x=\pi$

$j(x)=\sqrt{|\cos x+1|}$

$=\sqrt{\cos x+1}$ $(\cos x+1\geq 0)$

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{j(x)-j(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\frac{\sin x}{(x-\pi)\sqrt{1-\cos x}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to\pi+}\frac{j(x)-j(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}=\frac{-\sin x}{(x-\pi)\sqrt{1-\cos x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

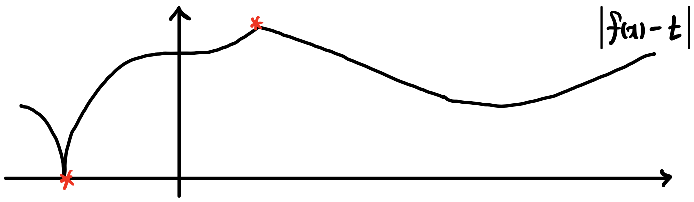
→ $x=\pi$ 에서 미불

→ $g=3$, $c=3$

33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

vi) $-2<t<-1$



$\longrightarrow g=2$

vii) $t\le -2$

$g=1$

$$\therefore g(t)=\begin{cases} 1 & t<-2 \\ 1 & t=-2 \\ 2 & -2<t<-1 \\ 3 & t=-1 \\ 4 & -1<t<0 \\ 2 & t=0 \\ 3 & 0<t<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & t=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & t>\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

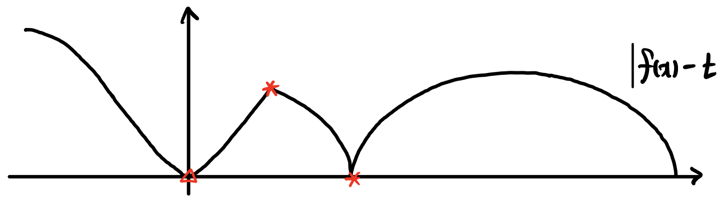
$\therefore h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+C$

$\therefore h(6)-h(5)+3=99$

sol2) 반각공식 이용하기!

sol1 에서 iii), v)만 찾고 다시 풀이. (나머지는 동일)

iii) $t=0$



확실 : 2개, 의심점 : $x=0$

$f(x)=2\sin^3 x$ 인 곳에서

$f(-x)=-f(x)$

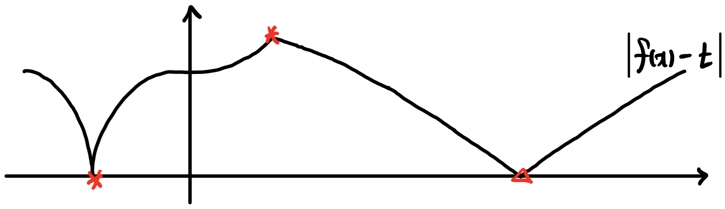
$|f(-x)|=|-f(x)|$

$=f(x)$

$\therefore$ 함수 $\sqrt{|f(x)|}$ 는 $x=0$ 에서 미·가.

$\longrightarrow g=2$

v) $t=-1$



첨점 : 2개, 외심점 : $x=\pi$

$f(x)=\cos x$ 인 곳에서

$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{|\cos x+1|}$

$\lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}$

$1-\cos h = 2\sin^2\frac{h}{2}$ ($\because$ 반각 공식)

$\therefore \lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h} = \lim_{h\to0+}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{\cos(\pi+h)+1}}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ 함수 $\sqrt{|f(x)+1|}$ 은 $x=\pi$ 에서 미분X.

$\longrightarrow g=3$

* 반각공식 : 배각 공식에 $\frac{\theta}{2}$ 대입해서 $\cos2\theta$ 배각공식 이용하면 증명 된다!

$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

$\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

33

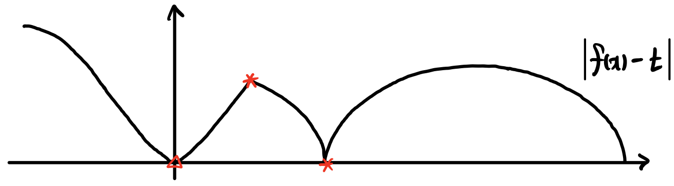
2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol3) 테일러 급수

$\sqrt{|f(x)-t|} = \sqrt{x} \circ |f(x)-t|$

sol1 에서 iii), v)만 갖고 와서 풀이. (나머지는 동일)

iii) $t=0$



확실 : 2개, 의심점 : $x=0$

$\sqrt{x} \circ \sin^3 x$

$i(x) = \sin^3 x$

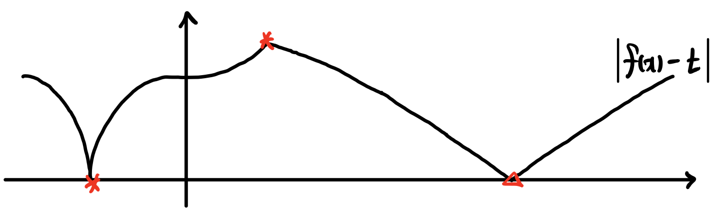
$i(0)=0,\ i'(0)=0,\ i''(0)=0,\ i^{(3)}(0)=6$

$\longrightarrow i(x) = x^3 + \sim$ 꼴 일거라 예측.

$\longrightarrow i(x)$는 $x=0$에서 미가.

$\longrightarrow g=2$

v) $t=-1$



확실 : 2개, 의심점 : $x=\pi$

$\sqrt{x} \circ (1+\cos x)$

33

2019학년도 6월 평가원(가형) 21번

$j(x)=1+\cos x$

$j(\pi)=0,\ j''(\pi)=1$: 이계도함수 $\neq 0$: 미분

$\longrightarrow j(x)=\frac{1}{2}(x-\pi)^2+\sim$ 꼴

$\longrightarrow g=3$

* 테일러 전개

무한번 미분할 수 있는 함수에 대하여 그 함수를 다항식으로 근사하는 방법

예) e^x, $\sin x$, $\cos x$, …

* 테일러 급수

테일러 전개한 $f(x)$를 $x=a$에서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\longrightarrow a=0$일 때, 알아두면 좋은 함수

$$e^x\cong 1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots$$

$$\sin x\cong x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$\cos x\cong 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\tan x\cong x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

34

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\int_0^1 f(x)dx = -\frac{\ln 10}{4}$, $f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$일 때,

$2\{f(4)+f(-4)\}-\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점] 16

$y=f(x)$ 위 점 $(t, f(t))$ 에서 접.방.

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$\therefore g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{1+t^2}$

$\int_t^{t+1} g(x)\,dx = \int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$

$-(t+1)f(t+1)+tf(t)+2\int_t^{t+1} f(x)dx = \ln(1+t^2)+C$

$\longrightarrow t=0$ 대입

$-4-\frac{\ln 17}{8}+2\left(-\frac{\ln 10}{4}\right)=C \quad \left(\because \int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4},\ f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}\right)$

$\therefore C=-4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2}$

$\therefore -(t+1)f(t+1)+tf(t)+2\int_t^{t+1} f(x)dx = \ln(1+t^2)-4-\frac{\ln 17}{8}-\frac{\ln 10}{2}$

— $t=-4$ 대입 : $3f(-3)-4f(-4)+2\int_{-4}^{-3}f(x)dx = \ln 17 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=-3$ 대입 : $2f(-2)-3f(-3)+2\int_{-3}^{-2}f(x)dx = \ln 10 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=-2$ 대입 : $f(-1)-2f(-2)+2\int_{-2}^{-1}f(x)dx = \ln 5 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=-1$ 대입 : $-f(-1)+2\int_{-1}^{0}f(x)dx = \ln 2 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=0$ 대입 : $-f(1)+2\int_{0}^{1}f(x)dx = -4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=1$ 대입 : $-2f(2)+f(1)+2\int_{1}^{2}f(x)dx = \ln 2 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=2$ 대입 : $-3f(3)+2f(2)+2\int_{2}^{3}f(x)dx = \ln 5 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

— $t=3$ 대입 : $-4f(4)+3f(3)+2\int_{3}^{4}f(x)dx = \ln 10 - 4 - \frac{\ln 17}{8} - \frac{\ln 10}{2}$

$+)$ $-4\{f(4)+f(-4)\}+2\int_{-4}^{4}f(x)dx = \ln(10^4\times 17) - \ln 17 - \ln 10^4 - 32$

$= -32$

$\therefore 2\{f(4)+f(-4)\} - \int_{-4}^{4}f(x)dx = 16$

35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

0이 아닌 세 정수 l, m, n이

$$|l|+|m|+|n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0)=0$, $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$이고

$$f'(x)=\begin{cases} l\cos x & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l+2m+3n$의 값은? [4점]

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

sol.)

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x + C_1 & \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + C_2 & \left(\frac{\pi}{2}<x<\pi\right) \\ n\sin x + C_3 & \left(\pi<x<\frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$f(0)=C_1=0$

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-n+C_3=1$　　$\therefore C_3=1+n$

$C_2=C_3$　$(\because f(\pi-)=f(\pi+))$

$l=m+n+1$　$\left(\because f\left(\frac{\pi}{2}-\right)=f\left(\frac{\pi}{2}+\right)\right)$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} l\sin x & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ m\sin x + n + 1 & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right) \\ n\sin x + n + 1 & \left(\pi < x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (m\sin x + n + 1)\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} (n\sin x + n + 1)\,dx$$

$$= l + m - n + n\pi + \pi$$

$$= l + (l - n - 1) - n + n\pi + \pi \quad (\because m = l - n - 1)$$

$$= 2l + (-2 + \pi)n + (-1 + \pi)$$

$1 < \pi - 2 < 2$

$l,\ n > 0$ ($\because$ 최대가 되기 위하여)

$\therefore l + |m| + n \leq 10$

i) $m > 0$

$l + m + n \leq 10$

$l + l - 1 \leq 10$

$\therefore l \leq \frac{11}{2}$

$\therefore l = 5,\ m = 1,\ n = 3$

$\therefore \max = 3 + 4\pi$

ii) $m<0$

$l-m+n\le 10$

$n+1+n \le 10$

$\therefore n\le \frac{9}{2}$

$\therefore l=4,\ m=-1,\ n=4$

$\therefore max=5\pi-1$

$\longrightarrow l=5,\ m=1,\ n=3$ 일 때 max

$\therefore l+2m+3n=16$

sol₂) 그림 그리기

$$f(x)=\begin{cases} l\sin x + C_1 & (0<x<\frac{\pi}{2}) \\ m\sin x + C_2 & (\frac{\pi}{2}<x<\pi) \\ n\sin x + C_3 & (\pi<x<\frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

$f(0)=C_1=0$

$f(\frac{3}{2}\pi)=-n+C_3=1 \qquad \therefore C_3=1+n$

$C_2=l-m \quad (\because f(\frac{\pi}{2}-)=f(\frac{\pi}{2}+))$

$l=m+n+1 \quad (\because f(\pi-)=f(\pi+))$

35

2019학년도 9월 평가원(가형) 21번

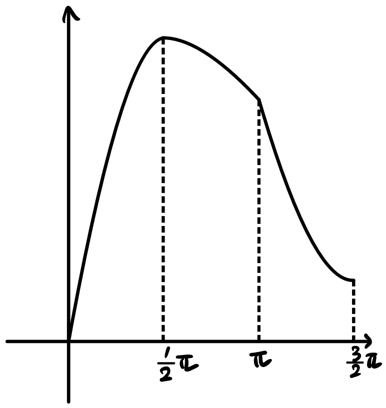
$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)\,dx = l + m - n + (l - m + n + 1)\frac{\pi}{2}$$: max 여야 함.

$$= 2m + 1 + (n+1)\pi \quad (\because l - m = n + 1)$$

⟶ 추론 : n이 크면 좋겠다.

⟶ n은 커질때마다 π (약 3.14) 만큼 커짐.

i) $l > 0$, $m > 0$ 라 가정 (자동으로 $n > 0$)



$l + m + n \leq 10$

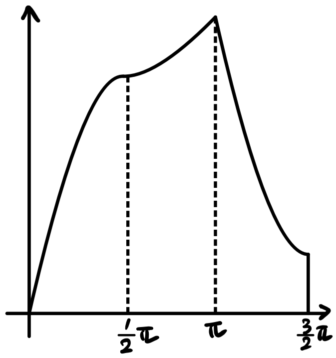
$l + l - 1 \leq 10$

$\therefore l \leq \frac{11}{2}$

$\therefore l = 5,\ m = 1,\ n = 3$

$\therefore \max = 3 + 4\pi$

ii) $l>0, m<0$ 라 가정, $n>0$



$l-m+n\le 10$

$n+1+n\le 10$

$\therefore n\le \frac{9}{2}$

$\therefore l=4, m=-1, n=4$

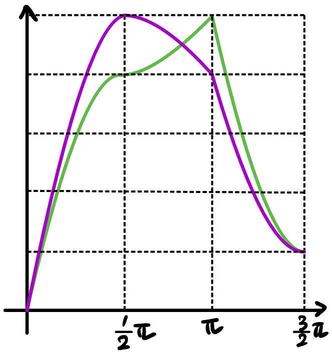
$\therefore max=5\pi-1$

iii) $l<0$: 직관적으로 적분값이 작은 것을 알 수 있음.

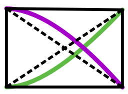
$\longrightarrow l=5, m=1, n=3$ 일 때 max

$\therefore l+2m+3n=16$

Sol3) sin함수의 특징 이용하기



i) $\frac{1}{2}\pi \sim \pi$



: 보라가 더 큼.

ii) $0 \sim \frac{1}{2}\pi$

보라 : $5\sin x$
초록 : $4\sin x$
$\longrightarrow$ 보라 - 초록 : $\sin x$
구간 $\int$: 1

iii) $\pi \sim \frac{3}{2}\pi$

보라 : $3\sin x + 4$
초록 : $4\sin x + 5$
$\longrightarrow$ 초록 - 보라 $= \sin x + 1$
구간 $\int$: $-1 + \frac{1}{2}\pi \cong 0.5707\cdots$

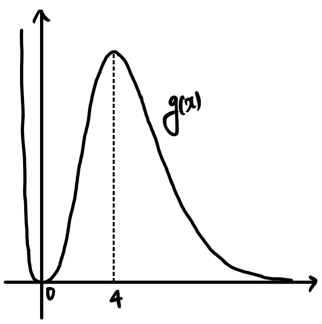
$\therefore$ 보라가 더 큼.

36

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=2x^4e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (나) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극소이다. (다) 방정식 $h(x)=8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} g(x)=0$) [4점] 30



sol.)

min(f(x)) = 0 : 한 점이 접 or 두 점이 접

If. (α, 0) 에서만 만난다

→ g(x) = α 교점 개수의 최댓값 : 3개

→ h(x)=0 의 서로 다른 실근 개수의 최댓값 : 3개

→ 가) 에 모순.

→ f(x)는 (α, 0), (β, 0) 에서 접한다.

$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$g(x)$: $x=0$ 에서 극소 : 고려대상 X

$\therefore \lim_{x \to 0+} f'(g(x)) = \lim_{x \to 0+} f'(x) > 0$

가) 조건을 만족시키기 위해선
$g(x)=\alpha$, $g(x)=\beta$ 의 실근의 개수가 각각 $\begin{matrix}1,3\\3,1\end{matrix}$ 中 1 이 되어야한다.

if) $g(x)=\alpha$ 교점 개수가 3개라면

$\longrightarrow 0<\alpha<g(4)<\beta$

$\longrightarrow \lim_{x \to 0+} f'(x) < 0$: 모순

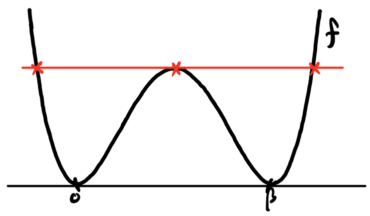
$\longrightarrow$ $g(x)=\alpha$ 교점 개수는 1개, $g(x)=\beta$ 교점 개수는 3개

$\therefore 0=\alpha<\beta<g(4)$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2$

if) $f(x)$의 극댓값이 8일 때

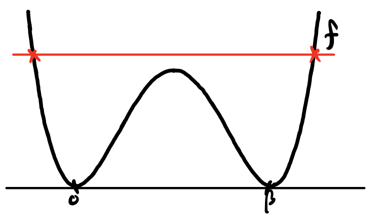
$g(x)$ = 음수 : 존재 X
= $\frac{\beta}{2}$: 3개 ($\because$ $g(x)=\beta$ 개수가 3개)
= 양수 $>\beta$: 3개 (단, $\beta<$ 양수 $<g(4)$)



if) $f(x)$의 극댓값 >8

$g(x)$ = 음수 : X
= 양수 : 최대 3개

$\longrightarrow$ X



36

2019학년도 9월 평가원(가형) 30번

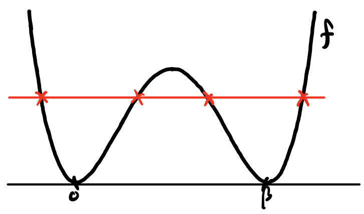
if) $f(x)$의 극댓값 < 8

$g(x)$ = 음수 : X

= 양수 $< \frac{\beta}{2}$: 3개

= $\frac{\beta}{2} <$ 양수 $< \beta$: 3개

= 양수 $> \beta$: 적어도 1



$\longrightarrow$ X

$\therefore f(x)$ 극댓값 $= 8$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

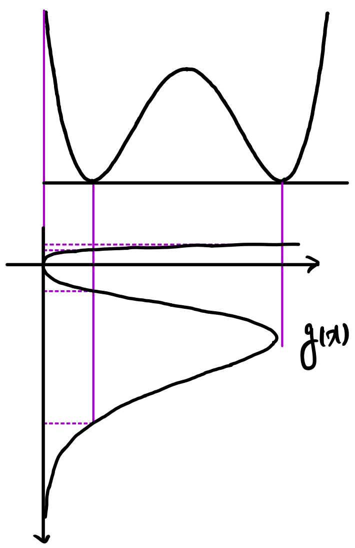
$\therefore f'(5) = 30$

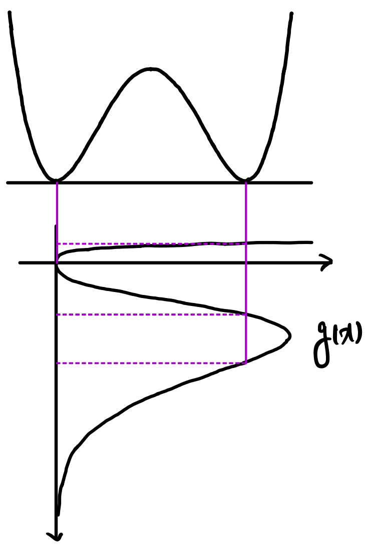
sol2)

⋮

$f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

$g(x)$의 그래프를 적절히 회전시켜서 정의역처럼 생각해보자.

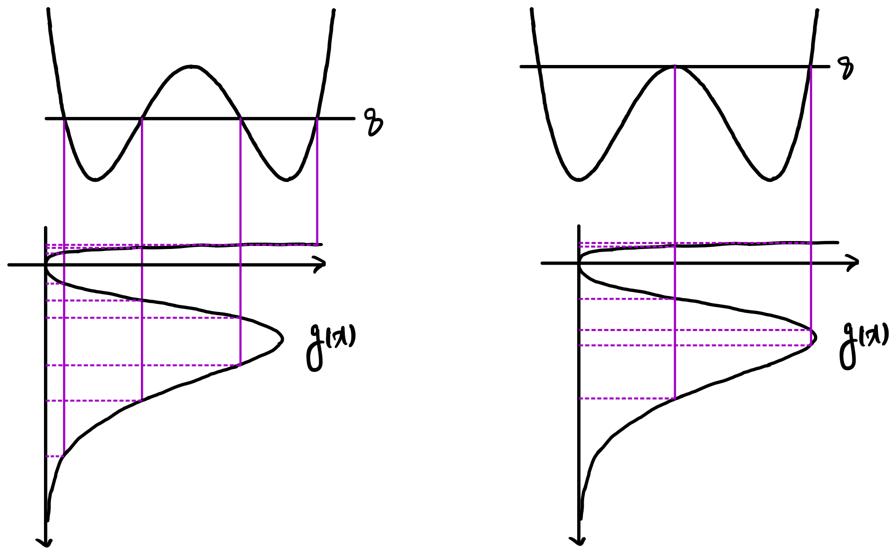




2019학년도 9월 평가원(가형) 30번

합성함수가 그려지는 과정을 살펴보면 $\alpha=0$이 되어야만 나) 조건을 만족시킨다.

$\because$ $\alpha, \beta \neq 0$ 이면 $x=0$ 에서 극대를 가지기 때문



그림을 그려보니 $f(x)$의 극댓값이 $y=8$이 되어야 조건 만족.

$\therefore \beta=4$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-4)^2$

$\therefore f'(5)=30$

37

2019학년도 수능(가형) 21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right)=1$, $f(6)=2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$　② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$　③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

sol.)

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 + C = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3$$

$x=-1$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(-1)\}^3 = \frac{1}{6}\{f(-1)\}^3$

$\therefore C = -\frac{1}{2}\{f(-1)\}^3$

$x=-\frac{1}{8}$ 대입 : $\frac{2}{3} + C = \frac{1}{6}\{f(\frac{3}{4})\}^3$ $(\because f(-\frac{1}{8})=1)$

$x=\frac{3}{4}$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(\frac{3}{4})\}^3 + C = \frac{1}{6}\{f(\frac{5}{2})\}^3$

$x=\frac{5}{2}$ 대입 : $\frac{2}{3}\{f(\frac{5}{2})\}^3 + C = \frac{4}{3}$ $(\because f(6)=2)$

$\therefore C = -\frac{4}{9} = -\frac{1}{2}\{f(-1)\}^3$

$\therefore f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

Sol2) $f(x)$ 구하기

$4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + \frac{8}{3}$

$g(x) = \{f(x)\}^3$ 라 하자.

$4g(x) = g(2x+1) + \frac{8}{3}$

$4g(x-1) = g(2x-1) + \frac{8}{3}$ ($x-1$ 대입)

$h(x) = g(x-1)$ 라 하자.

$4h(x) = h(2x) + \frac{8}{3}$

$4h'(x) = 2h'(2x)$ ($\because f$ 미가, h도 미가)

$\therefore 2h'(x) = h'(2x)$

$h'(0) = 0$ ($x=0$ 대입)

$i(x) = \frac{h'(x)}{x} = \frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}$ ($x \neq 0$)

$2x\,i(x) = 2x\,i(2x)$

$\therefore i(x) = i(2x)$

$i(x)$는 연속함수라 가정.

$\longrightarrow i(0) = h''(0)$

$i(x) = i\left(\frac{x}{2}\right) = i\left(\frac{x}{4}\right) = \cdots = i(2^{-n}x)$ (n은 자연수)

$\lim_{n\to\infty} i(2^{-n}x) = i(0) = h''(0)$

$\therefore i(x) = h''(0)$

37

$h'(x) = xh''(x)$

$h''(0) = a$ 라 하면 $(a>0)$

$h(x) = ax^2 + \frac{8}{9}$

$g(x) = a(x+1)^2 + \frac{8}{9}$

$\therefore f(x) = \sqrt[3]{a(x+1)^2 + \frac{8}{9}}$

이고, 나) 조건을 이용하여

$f(x) = \sqrt[3]{\left\{\frac{8}{21}(x+1)\right\}^2 + \frac{8}{9}}$

$\therefore f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

38

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\dfrac{1}{\underbrace{2+\sin(f(x))}_{>0}}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, $\cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1=0$이고 $g(\alpha_1)=\dfrac{2}{5}$이다.
(나) $\dfrac{1}{g(\alpha_5)}=\dfrac{1}{g(\alpha_2)}+\dfrac{1}{2}$

$g'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]27

sol.)

$$g'(x)=-\frac{\cos(f(x))\cdot f'(x)}{\{2+\sin(f(x))\}^2}$$

$g(0)=\dfrac{2}{5}$, $g'(0)=0$ $(\because \alpha_1=0)$

$\therefore \dfrac{1}{2+\sin(f(0))}=\dfrac{2}{5} \longrightarrow \sin(f(0))=\dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow f(0)=\dfrac{\pi}{6}$ $\left(0<f(0)<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore -\dfrac{\cos(f(0))\cdot f'(0)}{\{2+\sin(f(0))\}^2}=0 \longrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}f'(0)=0$

$\longrightarrow f'(0)=0$

$2+\sin(f(\alpha_5))=2+\sin(f(\alpha_2))+\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin(f(\alpha_5))=\sin(f(\alpha_2))+\dfrac{1}{2}$

38 2019학년도 수능(가형) 30번

if) $g'(\alpha_5)=0$ 에서 $\cos(f(\alpha_5))=0$ 이라면

$-\frac{1}{2} \le \sin(f(\alpha_5)) \le \frac{3}{2}$ $\left(\because -1 \le \sin(f(\alpha_2)) = \sin(f(\alpha_5)) - \frac{1}{2} \le 1\right)$

$\therefore \sin(f(\alpha_5))=1,\ \sin(f(\alpha_2))=\frac{1}{2}$

$\longrightarrow \cos(f(\alpha_2)) \neq 0$

$\longrightarrow f'(\alpha_2)=0$

$f(\alpha_2) < \frac{\pi}{6}$ $(\because f(\alpha_2)$: 극소$)$

$\therefore \max(f(\alpha_2)) = -\frac{7}{6}\pi$

$(0, \alpha_2)$ 사이에 $f(x)=-\frac{\pi}{2}$ 를 만족시키는 x값 존재

$\longrightarrow$ 모순

$\therefore \cos(f(\alpha_2))=0,\ \sin(f(\alpha_2))=-1,\ \sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(\alpha_2)=-\frac{\pi}{2},\ f'(\alpha_5)=0$

$\therefore f(\alpha_3)=-\frac{3}{2}\pi,\ f(\alpha_4)=-\frac{5}{2}\pi,\ f(\alpha_5)=-\frac{17}{6}\pi$ $\left(\because -\frac{7}{2}\pi \le f(\alpha_5) < -\frac{5}{2}\pi\right)$

$f'(x)=18\pi x(x-\alpha_5)$

$\therefore f(x)=6\pi x^3-9\alpha_5\pi x^2+C$

$f(0)=\frac{\pi}{6}=C \longrightarrow f(x)=6\pi x^3-9\alpha_5\pi x^2+\frac{\pi}{6}$

$f(\alpha_5)=6\pi(\alpha_5)^3-9\pi(\alpha_5)^3+\frac{\pi}{6}=-\frac{17}{6}\pi$

$\therefore \alpha_5=1,\ f(x)=6\pi x^3-9\pi x^2+\frac{\pi}{6},\ f'(x)=18\pi x^2-18\pi x$

$$g'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\cos\left(-\frac{17}{6}\pi\right)\cdot\frac{27}{2}\pi}{\left\{2+\sin\left(-\frac{17}{6}\pi\right)\right\}^2}=3\sqrt{3}\pi$$

$\therefore a=3\sqrt{3},\ a^2=27$

sol₂) 삼차함수 비율관계

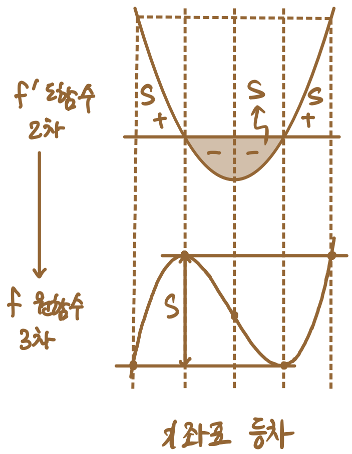
sol₁) 에서 $f(\alpha_5)$가 $-\frac{17}{6}\pi$인 것을 알아내고

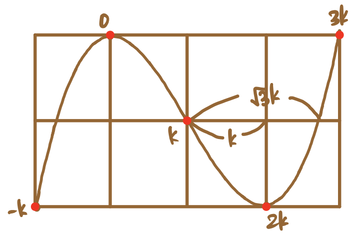
바로 $f(x)$를 만들 수 있다.

$$f(x) - \frac{1}{6}\pi = 6\pi x^2\left(x - \frac{3}{2}\alpha_5\right) \Big|_{x=\alpha_5} \Rightarrow \alpha_5 = 1$$

⋮

※ 참고 : 삼차함수 비율관계





합동인 직사각형 8개

38

2019학년도 수능(가형) 30번

sol3) 시각적인 해석

$2+\sin(f(x)) \ge 1$

→ $\frac{1}{g(x)} = 2+\sin(f(x))$: $x=\alpha$ 에서 여전히 극대·극소를 가짐.

→ $\frac{1}{g(x)}$ 를 관찰해도 됨!

$f(x)$의 그래프를 적절히 회전시켜서 정의역처럼 생각해보자.

if) $f(x)$가 극값 X

: 극소 : 1, 극대 : 3

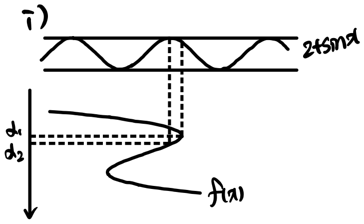
→ 나 조건 모순 $\left(\because 3 \ne 3+\frac{1}{2},\ 3 \ne 1+\frac{1}{2} \cdots\right)$

→ $f(x)$: 극값을 두개 갖는다! + 3/1 이 다른 극점

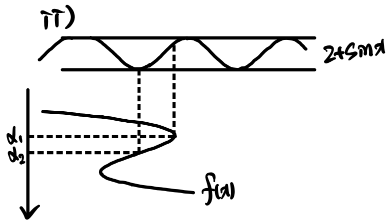
→ f의 자체극값

$2+\sin(f(x))$ 가 $x=\alpha_1=0$ 일 때 $\frac{5}{2}$ 이다.

i)



ii)



i) $x=\alpha_2$ 에서 극댓값 3

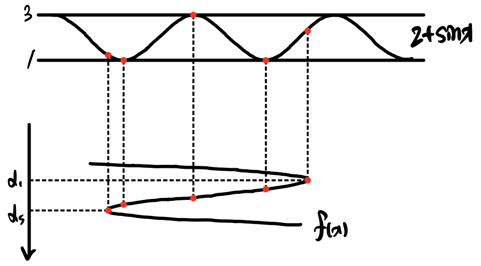
$\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2} = 3+\frac{1}{2} > 3$: 모순 $\left(\because 1 \le \frac{1}{g(x)} \le 3\right)$

∴ ii) $x=\alpha_2$ 에서 극솟값 1

$\frac{1}{g(\alpha_5)} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: 자체 극값 $(\because \ne 1, 3)$

38

2019학년도 수능(가형) 30번



$2+\sin(f(\alpha_1))=\frac{5}{2}$

$\therefore f(\alpha_1)=\frac{\pi}{6}$

$2+\sin(f(\alpha_5))=\frac{3}{2}$, $\therefore \sin(f(\alpha_5))=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(\alpha_5)=-\frac{17}{6}\pi$ ($\because \sin x=-\frac{1}{2}$ 인 음의 x값 중 4번째로 큰 수)

$\therefore f(x)$: $x=0$, 극대 $\frac{\pi}{6}$

$x=\alpha_5$, 극소 $-\frac{17}{6}\pi$

$f(x)-\frac{1}{6}\pi=6\pi x^2(x-3p)$

$f(2p)=-\frac{17}{6}\pi$ ($\because$ 2:1 ⟶ 비율관계)

$\therefore p=\frac{1}{2}$, $f(x)=6\pi x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{6}\pi$

⋮

Sol4) 단위원 해석

$$\frac{1}{g(x)} - x = \sin(f(x)) = \sin x \circ f(x) = h(x)$$

가: $\alpha_1 = 0$ 이고, $h(\alpha_1) = \frac{1}{2}$ 이다.

나: $h(\alpha_5) - h(\alpha_2) = \frac{1}{2}$

: $f(x)$를 단위원 위의 동경값으로,

$h(x)$를 단위원 위의 y좌표로 해석

$h(x) = \pm 1$: 겉함수 $(\sin x)$가 만든 극값

$h(x) \neq \pm 1$: 속함수 $(f(x))$가 만든 극값

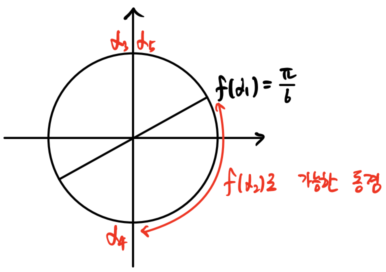
if) $f(x)$: $x = \alpha_1$ 에서 극소

: 극소 $\longrightarrow$ 극대 사이에서 증가

$\longrightarrow$ 나 조건 모순

$\longrightarrow f(x)$: $x = \alpha_1$ 에서 극대 + 나) 조건에서 α_5와 α_2 중 하나는 $f(x)$의 극값이다.

if) $f(x)$: $x = \alpha_2$ 에서 극소

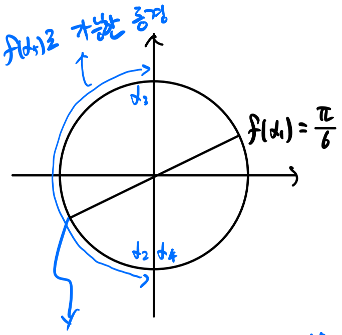


$\underbrace{h(\alpha_5)}_{1} - h(\alpha_2) = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow h(\alpha_2) = \frac{1}{2} \longrightarrow$ 모순

$\longrightarrow f(x)$: $x = \alpha_5$ 에서 극소

38

2019학년도 수능(가형) 30번



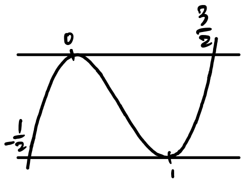
$f(\alpha_5) = -2\pi - \frac{5}{6}\pi = -\frac{17}{6}\pi$

$\therefore h(\alpha_5) = \frac{1}{2}$

$f(\alpha_1) - f(\alpha_5) = \int_{\alpha_5}^{\alpha_1} f'(x)\,dx$

$= 3\pi = \frac{18}{6}\pi \cdot (\alpha_5)^3$

$\therefore \alpha_5 = 1$



$f(x) = 6\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)^3 - \frac{17}{6}\pi$

⋮

39

2020학년도 6월 평가원(가형) 21번

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은? [4점] ℓ

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$　② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$　③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$

④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

sol.)

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\frac{1-\ln g(t)}{\{g(t)\}^2}=t$$

$$\therefore 1-\ln g(t)=t\{g(t)\}^2$$

$$\ell : y=ax$$

$$ag(a)=\frac{\ln g(a)}{g(a)},\quad a=\frac{1-\ln g(a)}{\{g(a)\}^2}$$

$$\therefore g(a)=\sqrt{e},\quad a=\frac{1}{2e}$$

$$1-\ln g(t)=t\{g(t)\}^2$$

$$\xrightarrow{\prime} -\frac{g'(t)}{g(t)}=\{g(t)\}^2+2tg(t)g'(t)$$

$$\therefore -\frac{g'(a)}{g(a)}=\{g(a)\}^2+2ag(a)g'(a)$$

$$\therefore g'(a)=-\frac{e\sqrt{e}}{2}$$

$$\therefore ag'(a)=-\frac{\sqrt{e}}{4}$$

39

2020학년도 6월 평가원(가형) 21번

sol₂)

$a = f'(g(a)) \longrightarrow ag'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$

: $f(g(t))$ 의 $t=a$ 에서의 변화율

$f'(g(t)) = t \longrightarrow g'(t) = \dfrac{1}{f''(g(t))}$

$\therefore a\cdot g'(a) = \dfrac{f'(g(a))}{f''(g(a))}$

$\dfrac{d}{dt}\ln f'(t) = \dfrac{f''(t)}{f'(t)} \xrightarrow{\text{구하는거}} t$에 $g(a)$ 대입

두 함수 $y=\ln x$, $y=ax$가 $x=g(a)$ 에서 접.

$\longrightarrow y = \dfrac{\ln x}{x^2}$ 의 극댓값의 x좌표 $=g(a)$

$y' = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

$\therefore g(a) = \sqrt{e}$

$f'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2}$

$\dfrac{d}{dt}\ln f'(t) = -\dfrac{1}{t(1-\ln t)} - \dfrac{2}{t}\Bigg|_{t=g(a)=\sqrt{e}} = -\dfrac{4}{\sqrt{e}}$

$\therefore$ 답 $= -\dfrac{\sqrt{e}}{4}$

40

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin^3 x + b\sin x$가

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=5\sqrt{3} \longrightarrow a=16,\ b=-2$$

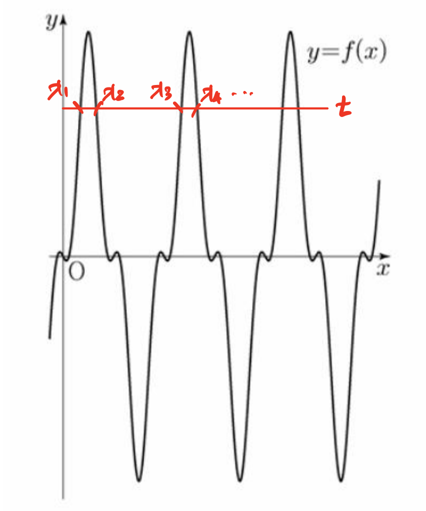
$$\longrightarrow f(x)=16\sin^3 x - 2\sin x$$

을 만족시킨다. 실수 $t\,(1<t<14)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n=\int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p+q\sqrt{2}$일 때, $q-p$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.) [4점] 12



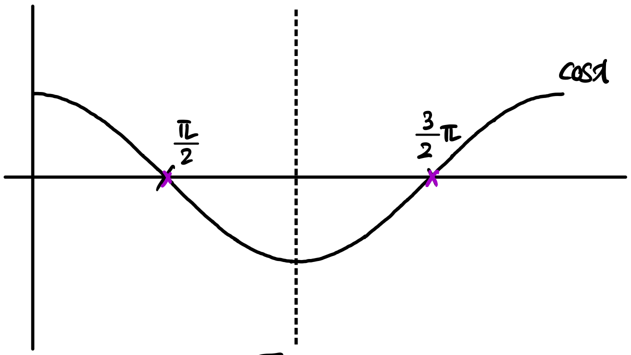
sol.)

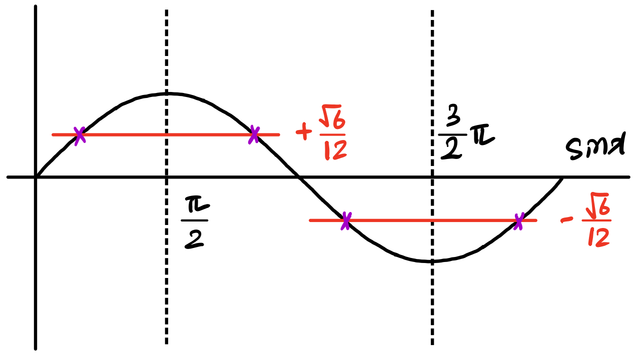
$$f'(x)=48\left(\sin x+\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\left(\sin x-\frac{\sqrt{6}}{12}\right)\cos x=0$$

$$\longrightarrow \cos x=0 \quad \text{또는} \quad \sin x=\pm\frac{\sqrt{6}}{12}$$

40

2020학년도 6월 평가원(가형) 30번





$$\left.\begin{aligned}
&\rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{6}}{12} : \text{극소} \\
&x = \frac{\pi}{2} : \text{극대} \\
&\sin x = \frac{\sqrt{6}}{12} : \text{극소} \\
&\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{12} : \text{극대} \\
&x = \frac{3}{2}\pi : \text{극소} \\
&\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{12} : \text{극대}
\end{aligned}\right\} \text{반복}$$

$f(x)$ 에 $\sin x = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ 대입 $\longrightarrow \frac{\sqrt{6}}{9} < 1$

$$f'(x_n) : \begin{aligned} &x_1 = x_3 = x_5 = \cdots = p \\ &x_2 = x_4 = x_6 = \cdots = -p \end{aligned}$$

$$\therefore C_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{p}\,dt, \quad C_2 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} -\frac{t}{p}\,dt$$

$$\therefore C_1 + C_2 = 0$$

$$\therefore \Sigma C_n = C_{101} = C_1$$

$t = f(x_1) \longrightarrow x_1 = f^{-1}(t)$ (일부만)

$$\therefore C_1 = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(f^{-1}(t))}\,dt$$

$f^{-1}(t) = s$ 로 치환 $\longrightarrow t = f(s)$

40

2020학년도 6월 평가원(가형) 30번

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{f(s)}{f'(s)} \cdot f'(s)\, ds = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(s)\, ds$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 16\sin^3 x - 2\sin x \, dx$$

$$= -\frac{19}{3} + \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

$\therefore q - p = 12$

Sol$_2$) 치환적분

⋮

$t = f(x)$ 라 하자.

$dt = f'(x)\, dx$

$t = 3\sqrt{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$t = 5\sqrt{3} \longrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 16\sin^3 x - 2\sin x \, dx$$

$$= -\frac{19}{3} + \frac{17}{3}\sqrt{2}$$

$\therefore q - p = 12$

41

2020학년도 9월 평가원(가형) 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1) = \pi f(1)\sin\pi x + f(3)x + 5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오. [4점] 93

sol1)

$$(2x+1)f'(x^2+x+1) = f(1)(2x+1)\pi\sin(\pi x) + f(3)(2x^2+x) + 10x^3+5x^2$$

$\downarrow \int$

$$f(x^2+x+1) = f(3)\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - f(1)(2x+1)\cos(\pi x) + \frac{2}{\pi}f(1)\sin(\pi x) + C$$

$x=0$ 대입 $\longrightarrow$ $C = 2f(1)$

$x=1$ 대입 $\longrightarrow$ $f(3) = \frac{7}{6}f(3) + \frac{25}{6} + 3f(1) + 2f(1)$

$x=-1$ 대입 $\longrightarrow$ $f(1) = -\frac{1}{6}f(3) + \frac{5}{6} - f(1) + 2f(1)$

$\longrightarrow f(1) = -1,\ f(3) = 5$

$$\therefore f(x^2+x+1) = \frac{5}{2}x^4 + 5x^3 + \frac{5}{2}x^2 + (2x+1)\cos(\pi x) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) - 2$$

$x=2$ 대입 $\longrightarrow$ $f(7) = 93$

sol2) 역함수 이용, $f(x)$ 구하기

$p(x) = x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\quad \left(x \ge -\frac{1}{2}\right)$

$g(x) = x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\quad \left(x < -\frac{1}{2}\right)$

$\longrightarrow p(x),\ g(x) \ge \frac{3}{4}$

$g(x) = p^{-1}(x) = \sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\quad \left(x \ge \frac{3}{4}\right)$

$h(x) = g^{-1}(x) = -\sqrt{x-\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}\quad \left(x \ge \frac{3}{4}\right)$

41

2020학년도 9월 평가원(가형) 30번

i) $x \ge -\frac{1}{2}$

$f'(p(x)) = \pi f(1)\sin(\pi x) + f(3)x + 5x^2$

$x = g(t)$ 대입

$f'(t) = \pi f(1)\sin(\pi g(t)) + f(3)g(t) + 5\{g(t)\}^2$

$f'(t)g'(t) = \pi f(1)\sin(\pi g(t))g'(t) + f(3)g(t)g'(t) + 5\{g(t)\}^2 g'(t)$

$g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2g(t)+1}$

$f'(t) = \pi f(1)\sin(\pi g(t))g'(t)\cdot\{2g(t)+1\} + f(3)g(t)g'(t)\{2g(t)+1\} + 5\{g(t)\}^2 g'(t)\{2g(t)+1\}$

$\downarrow \int$

$f(t) = -f(1)\{2g(t)+1\}\cos(\pi g(t)) + f(1)\frac{2}{\pi}\sin(\pi g(t)) + f(3)\left\{\frac{2}{3}\{g(t)\}^3 + \frac{1}{2}\{g(t)\}^2\right\}$
$\quad + 5\left\{\frac{1}{2}\{g(t)\}^4 + \frac{1}{3}\{g(t)\}^3\right\} + C_1$

$t=1$ 대입 $\longrightarrow f(1) = -f(1) + C_1$

$t=3$ 대입 $\longrightarrow f(3) = 3f(1) + \frac{7}{6}f(3) + \frac{25}{6} + C_1$

ii) $x < -\frac{1}{2}$

$f'(g(x)) = \pi f(1)\sin(\pi x) + f(3)x + 5x^2$

$x = h(t)$ 대입

$f'(t) = \pi f(1)\sin(\pi h(t)) + f(3)h(t) + 5\{h(t)\}^2$

$f'(t)h'(t) = \pi f(1)\sin(\pi h(t))h'(t) + f(3)h(t)h'(t) + 5\{h(t)\}^2 h'(t)$

$h'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{2h(t)+1}$

41

2020학년도 9월 평가원(가형) 30번

$$f'(t) = \pi f(1)\sin(\pi h(t))h'(t)\cdot\{2h(t)+1\} + f(3)h(t)h'(t)\{2h(t)+1\} + 5\{h(t)\}^2h'(t)\{2h(t)+1\}$$

$$\Big\downarrow \int$$

$$f(t) = -f(1)\{2h(t)+1\}\cos(\pi h(t)) + f(1)\frac{2}{\pi}\sin(\pi h(t)) + f(3)\left\{\frac{2}{3}\{h(t)\}^3 + \frac{1}{2}\{h(t)\}^2\right\} + 5\left\{\frac{1}{2}\{h(t)\}^4 + \frac{1}{3}\{h(t)\}^3\right\} + C_2$$

$t=1$ 대입 $\longrightarrow f(1) = -f(1) - \frac{1}{6}f(3) + \frac{5}{6} + C_2$

f는 연속이므로 $x=\frac{3}{4}$에서 연속이다.

$\therefore C_1 = C_2,\ f(1) = -1,\ f(3) = 5,\ C_1 = C_2 = -2$

$\therefore f(t) = \{2g(t)+1\}\cos(\pi g(t)) - \frac{2}{\pi}\sin(\pi g(t)) + \frac{5}{2}\{g(t)\}^2\{g(t)+1\} - 2 \quad \left(t \geq \frac{3}{4}\right)$

$\therefore f(x) = \sqrt{4x-3}\,\sin\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{2}{\pi}\cos\left(\pi\sqrt{x-\frac{3}{4}}\right) + \frac{5}{2}(x-1)^2 - 2 \quad \left(x \geq \frac{3}{4}\right)$

$\therefore f(7) = 93$

42 2020학년도 수능(가형) 21번

실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 (t, e^t)에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 할 때, 함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 $\int_a^b g(t)dt=m$이라 할 때, [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. $m<0$이 되도록 하는 두 실수 a, b $(a<b)$가 존재한다.

ㄴ. 실수 c에 대하여 $g(c)=0$이면 $g(-c)=0$이다.

ㄷ. $a=\alpha$, $b=\beta$ $(\alpha<\beta)$일 때 m의 값이 최소이면 $\dfrac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}<-e^2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

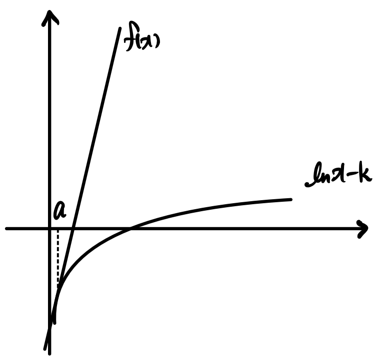
$f(x)=e^t(x-t)+e^t$
$=e^t x+(1-t)e^t$

$y=|f(x)+k-\ln x|=\begin{cases} f(x)+k-\ln x & (f(x)+k\geq \ln x) \\ \ln x-\{f(x)+k\} & (f(x)+k<\ln x) \end{cases}$

→ 양의 실수 전체 집합에서 미.가.

→ $y=f(x)$와 $y=\ln x-k$가 접 or 만나지 X

+) k가 최소이려면: $y=f(x)$와 $y=\ln x-k$가 접



→ $x=a$ 에서 접

42

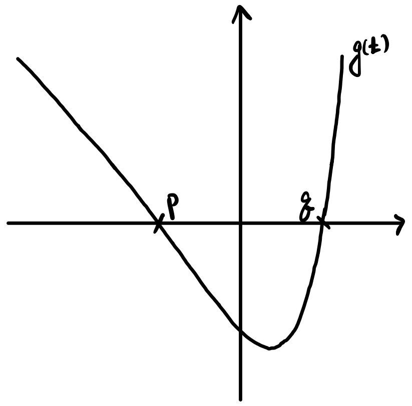
2020학년도 수능(가형) 21번

$f'(a)=e^t=\dfrac{1}{a} \longrightarrow a=e^{-t}$

$f(a)=e^t(a-t)+e^t=\ln a-k$

$\longrightarrow e^t\cdot e^{-t}-te^t+e^t=\ln e^{-t}-k$

$\therefore g(t)=(t-1)e^t-(t+1)$



ㄱ.

$p<t<q$ 에서 $g(t)<0$ 이므로
$a=p$, $b=q$ 라 하면
$m<0$ 이 자명하다.

ㄴ.

$g(c)=0 \longrightarrow (c-1)e^c=c+1$

$$\begin{aligned} g(-c)&=-(c+1)e^{-c}+c-1 \\ &=-(c-1)e^c\cdot e^{-c}+c-1 \\ &=0 \end{aligned}$$

42

2020학년도 수능(가형) 21번

ㄷ.

$g'(t)=te^t-1$

$\longrightarrow g(c)=g(-c)=0,\ g(0)\neq 0$

$\longrightarrow g(t)=0$ 의 실근은 : $t=\pm c\ (c\neq 0)$

$m=\int_\alpha^\beta g(t)dt$ 가 최소가 되려면

$\alpha : g(t)=0$ 의 음의 실근

$\beta = g(t)=0$ 의 양의 실근

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=\frac{\beta e^\beta}{\alpha e^\alpha}=\frac{\beta e^\beta}{-\beta e^{-\beta}}=-e^{2\beta}$$

$g(1)=-2$ 이므로 $1<\beta$

$\therefore -e^{2\beta}<-e^2$ 이 성립한다.

43

2020학년도 수능(가형) 30번

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점] 64

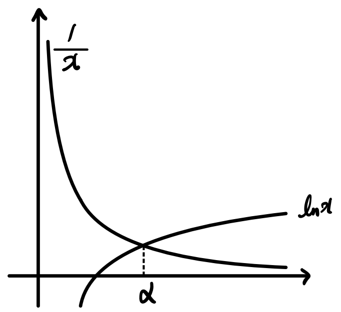
sol.)

$y=t^3\ln(x-t)$ 와 $y=2e^{x-a}$ 의 교점을 $x=k$라 하자.

$$\begin{cases} t^3\ln(k-t)=2e^{k-a} \\ \dfrac{t^3}{k-t}=2e^{k-a} \end{cases}$$

$\therefore \ln(k-t)=\dfrac{1}{k-t}$

$\longrightarrow \ln x=\dfrac{1}{x}$ 의 실근이 $x=k-t$



$k-t=\alpha$

$\therefore k=t+\alpha$

$2e^{k-a}=\dfrac{t^3}{k-t} \longrightarrow a=t-3\ln t+(\alpha+\ln 2\alpha)=f(t)$

$f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$ ($\because$ α는 상수 $\longrightarrow \alpha+\ln 2\alpha$ 도 상수)

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$

$\therefore \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=64$

43

2020학년도 수능(가형) 30번

sol₂)

$$t^3\ln(k-t)=2e^{k-a}$$

$$3t^2\ln(k-t)-\frac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}\cdot\left(-\frac{da}{dt}\right)$$

$$\frac{6}{t}e^{k-a}-e^{k-a}=2e^{k-a}\left(-\frac{da}{dt}\right)$$

$$\frac{da}{dt}=1-\frac{3}{t}\quad(\because e^{k-a}>0)\qquad\qquad \frac{t^3}{k-t}=2e^{k-a}$$

$$\therefore f'(t)=1-\frac{3}{t}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$$

$$\therefore \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2=64$$

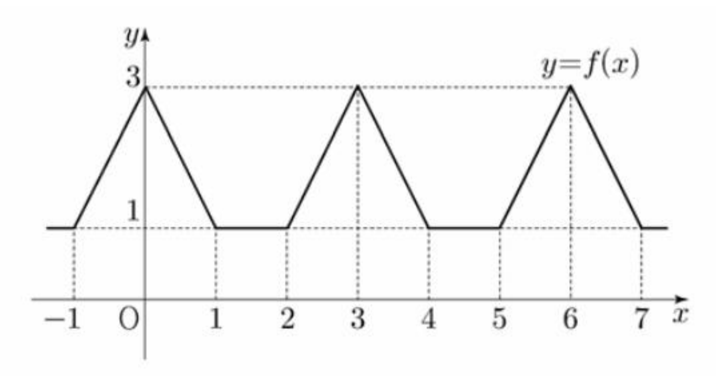
44

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

a_1, a_2, $\cdots$, a_n (n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점] 331



$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

$$= \lim_{x \to a+} |f'(2^x)| \cdot \ln 2 \cdot 2^x$$

→ 정수 k에 대하여 f(x)의 우미계

→ $x = 3k-$: 2

$x = 3k+$: -2

$x = 3k-2-$: -2

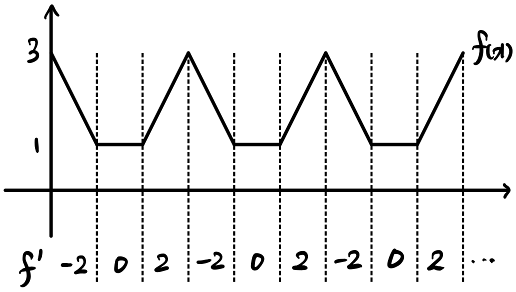
$x = 3k-2+$: 0

$x = 3k-1-$: 0

$x = 3k-1+$: 2

44

2021학년도 6월 평가원(가형) 30번



$-5 < x < 5 \longrightarrow \frac{1}{32} < 2^x < 32$

$\longrightarrow$ 불연속 의심점 : $1, 2, 3, \cdots, 31$

$|f'(2^{x+})|$: $2 \quad 0 \quad \underbrace{2 \quad 2}_{\text{연속}} \quad 0 \quad 2 \cdots$

$\longrightarrow$ 31개의 불연속 의심점 중 $x=3k$일 때 제외

$\longrightarrow 31-10=21=n$

$\sum_{k=1}^{21} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$:

$g(x)$: $x=1$ 대입 $\longrightarrow |f'(1^+)| \cdot 1 \cdot \ln 2 = 0$

$x=4$ 대입 $\longrightarrow |f'(4^+)| \cdot 4 \cdot \ln 2 = 0$

$\vdots$

$\longrightarrow$ 남는거 : $x=2, 5, 8, \cdots$

$|f'(2^+)| \cdot 2 \cdot \ln 2$

$|f'(5^+)| \cdot 5 \cdot \ln 2$

$\vdots$

$|f'(3k-1^+)| = 2$로 동일

$$\therefore \sum \frac{g(a_k)}{\ln 2} = \frac{2 \cdot (2+5+\cdots+29) \cdot \ln 2}{\ln 2}$$

$$= 310$$

$$\therefore n + \sum \frac{g(a_k)}{\ln 2} = 331$$

45

2021학년도 9월 평가원(가형) 30번

다음 조건을 만족시키는 실수 a, b에 대하여 ab의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자.

> 모든 실수 x에 대하여 부등식
> $$-e^{-x+1} \le ax+b \le e^{x-2}$$
> 이 성립한다.

$|M \times m^3| = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]43

$0<b<e^{-2}$: $y=ab$가 $y=e^{x-2}$에 접할 때 최대

$y=e^{x-2}$ 위의 점 (t, e^{t-2})에서 접·방

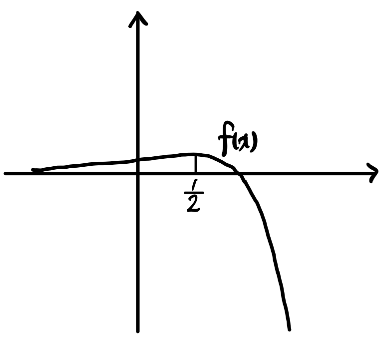
$\longrightarrow y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$\quad = e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$

$\therefore a=e^{t-2}$, $b=(1-t)e^{t-2}$

$\therefore ab=(1-t)e^{2t-4}=f(t)$

$f'(t)=(1-2t)e^{2t-4}$



$\longrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 에서 최대

$\longrightarrow b=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore M=f(\tfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}e^{-3}$ $\left(\because 0<\dfrac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}}<e^{-2}\right)$

$-e^{-x+1}$ 과 e^{x-2} 는 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 에 대하여 대칭.

$\longrightarrow y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$ 에 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 대입

$\longrightarrow t=\frac{5}{2}$

$\therefore$ 공통접선 : $y=e^{\frac{1}{2}}x-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

y절편 : $-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

if) $-e<b<-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

: $y=ax+b$는 두 점에서 만난다.

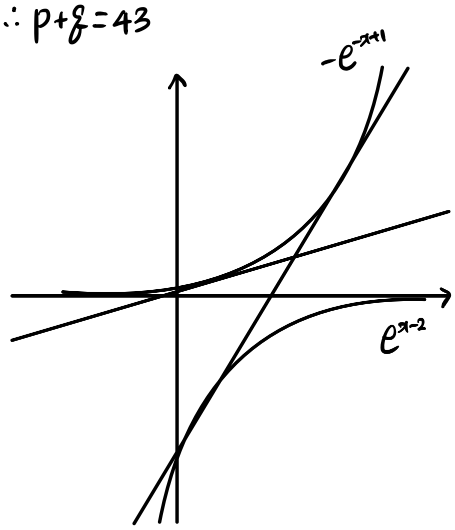
$\therefore b\geq-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$

$b>-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$ 일 때 $a<e^{\frac{1}{2}}$

$\therefore m=e^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{3}{2}e$

$\therefore |Mm|=\frac{27}{16}$

$\therefore p+q=43$



46

2021학년도 수능(가형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)=f(\sin^2 \pi x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0<x<1$에서 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\dfrac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

$f(2)=a+b\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]29

sol1)

$0<x<1$ 일 때 $y=\sin^2\pi x$ 는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값 가짐.

$\longrightarrow g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$ 에서 극값 가짐

f가 $x=\alpha$ 에서 극대, $x=\beta$에서 극소.

$\longrightarrow g(x)$는 $\sin^2\pi x=\alpha$, $\sin^2\pi x=\beta$ 인 x에서 극값 가짐.

$0<x<1$ 일 때 극값 x 개수 : 3

$\longrightarrow$ 극값 개수 최소 : 5개

$\therefore 0<\alpha<\beta<1$

$y=\sin^2\pi x$ 와 $y=\alpha, \beta, 1$ 과 만나는 점의 좌표

: x_1 x_2 $\frac{1}{2}$ x_3 x_4 (크기순)

$\longrightarrow x_1, \frac{1}{2}, x_4$ 에서 극대

$\sin^2\pi x_1=\sin^2\pi x_4=\alpha$

46

2021학년도 수능(가형) 30번

$g(x_1)=g\left(\frac{1}{2}\right)=g(x_4) \longrightarrow f(\alpha)=f(1)=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)-\frac{1}{2}=(x-\alpha)^2(x-1)$

$\therefore \beta=\frac{\alpha+2}{3}$

if) $f(\beta)=f\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=0$

$\alpha=-\frac{1}{2}$: 모순

$\longrightarrow f(0)=0$

$\longrightarrow \alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because \alpha>0)$

$\therefore f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

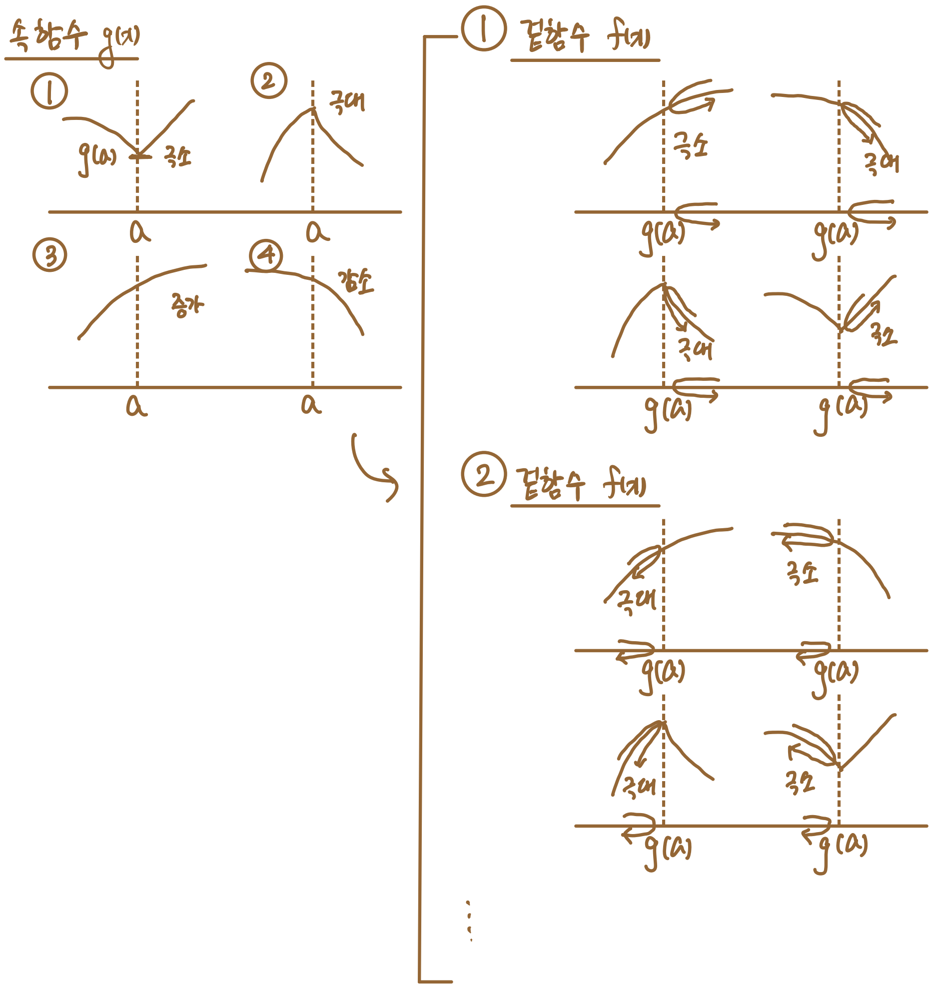
$\therefore f(2)=5-2\sqrt{2}$

$\therefore a^2+b^2=29$

46

2021학년도 수능(가형) 30번

* 참고 : 합성함수의 해석



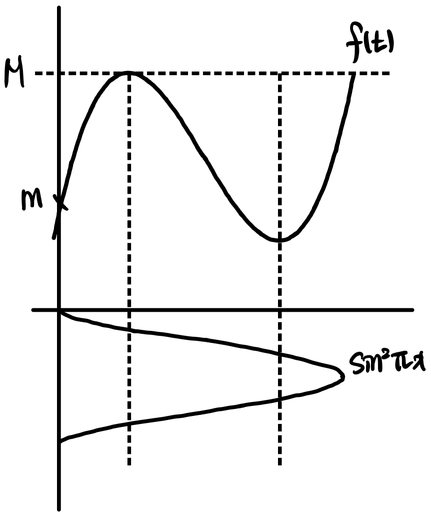
⟶ 겉함수의 성질을 그대로 따라간다.

46

2021학년도 수능(가형) 30번

sol2)

⋮



$\longrightarrow M=\frac{1}{2},\ m=0$

⋮

47

$t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y = x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 11

Sol.) 현장풀이

두 교점 : α, β

$\ln(1+e^{2\alpha}-e^{-2t}) = \alpha+t$, $\ln(1+e^{2\beta}-e^{-2t}) = \beta+t$

$\therefore 1+e^{2\alpha}-e^{-2t} = e^{\alpha+t}$, $1+e^{2\beta}-e^{-2t} = e^{\beta+t}$

$t=\ln 2 \longrightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{2}$, $e^{\beta} = \frac{3}{2}$

$2e^{2\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + 2e^{-2t} = e^{\alpha+t}\left(\frac{d\alpha}{dt}+1\right)$, $2e^{2\beta}\cdot\frac{d\beta}{dt} + 2e^{-2t} = e^{\beta+t}\left(\frac{d\beta}{dt}+1\right)$

$t=\ln 2 \longrightarrow \frac{d\alpha}{dt} = -1$, $\frac{d\beta}{dt} = \frac{5}{3}$

$f(t) = \sqrt{2}(\beta-\alpha) \longrightarrow f'(t) = \sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}\right)$

$t=\ln 2 \longrightarrow f'(\ln 2) = \frac{8}{3}\ln 2$

$\therefore p+q = 11$

47

Sol₂)

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$

$(e^{x}+e^{-t})(e^{x}-e^{-t})-e^{t}(e^{x}-e^{-t}) = 0$

$\therefore (e^{x}-e^{-t})(e^{x}+e^{-t}-e^{t}) = 0$

$\therefore x = -t,\ x = \ln(e^{t}-e^{-t})$

$f(t) = \sqrt{2}\{\ln(e^{t}-e^{-t})+t\}$

$f'(t) = \sqrt{2}\left(\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{e^{t}-e^{-t}}+1\right)$

$\therefore f'(\ln 2) = \dfrac{8}{3}\ln 2$

$\therefore p+q = 11$

48

2022학년도 9월 평가원(미적분) 30번

최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$
(나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)dx=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 115

sol1) 현장풀이

가) $f(0)=n$, $f'(0)=0$, n은 정수

$\longrightarrow f(x)=9x^2(x-1)+n$ $\left(\because g(x)\text{가 연속} \rightarrow f(0)=f(1)\right)$

$\longrightarrow$ 극대 $=n$, 극소 $=n-\frac{4}{3}$ $\left(f(\frac{2}{3}):\text{극소}\right)$

$\therefore n\left(n-\frac{4}{3}\right)=5 \longrightarrow n=3$ $(\because n\text{은 정수})$

$\therefore f(x)=9x^2(x-1)+3$

$$\int_n^{n+1} xg(x)dx = a_n \longrightarrow \int_0^5 xg(x)dx=\sum_{n=0}^{4}a_n$$

$$=\int_0^1 (x+n)g(x+n)dx$$

$$=\int_0^1 xg(x)dx + n\int_0^1 g(x)dx$$

$$\longrightarrow \int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 9x^2(x-1)+3\,dx$$

$$=\frac{9}{4}$$

$$\int_0^1 xg(x)dx = \int_0^1 9x^3(x-1)+3x\,dx$$
$$= \frac{21}{20}$$

$$\therefore \sum_0^4 a_n = \frac{21}{20} + \frac{9}{4}\times 10$$
$$= \frac{111}{4}$$

$\therefore p+q = 115$

sol₂)

$$\int_0^5 xg(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^2 x f(x-1)dx + \cdots + \int_4^5 xf(x-4)dx$$
$$= \int_0^1 (5x+10)f(x)dx$$

가) $f(0)=n$, $f'(0)=0$, n은 정수

$\longrightarrow f(x) = 9x^2(x-1)+n$ $\quad$ ($\because g(x)$가 연속 $\longrightarrow f(0)=f(1)$)

$\longrightarrow$ 극대 $=n$, 극소 $= n-\frac{4}{3}$ $\quad$ ($f(\frac{2}{3})$: 극소)

$\therefore n(n-\frac{4}{3}) = 5 \quad \longrightarrow \quad n=3$ ($\because n$은 정수)

$\therefore f(x) = 9x^2(x-1)+3$
$= 9x^3-9x^2+3$

$$\therefore \int_0^1 (9x^3-9x^2+3)(5x+10)dx = \frac{111}{4}$$

49

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 143

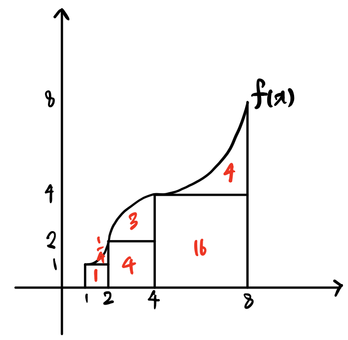
Sol.) 현장풀이

$g(2)=2f(1)=2$ $\quad f(2)=g(2)=2$

$g(4)=2f(2)=4$ $\quad f(4)=g(4)=4$

⋮

$g'(2x)=f'(x)$



$\therefore \int_1^8 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$

$= 63-\left(28-\frac{1}{4}\right)$

$= \frac{139}{4}$

$\therefore p+q=143$

sol2)

$x=2f(t)$ 라 치환하자.

$f(x)=f(2f(t))=2t$

$$\int_2^4 f(x)dx = \int_1^2 f(2f(t))\cdot 2f'(t)dt$$
$$=7$$

$$\int_4^8 f(x)dx = \int_2^4 f(2f(t))\cdot 2f'(t)dt$$
$$=20$$

$$\therefore \int_1^8 xf'(x)\,dx = xf(x)\Big|_1^8 - \int_1^8 f(x)dx$$
$$=63-\left(\frac{5}{4}+7+20\right)$$
$$=\frac{139}{4}$$

$\therefore p+q=143$

sol3)

$y=f(x)$, $x=g(y)$, $f'(x)dx=dy$

$$\int_1^8 xf'(x)dx = \int_1^{f(8)} g(y)dy = \int_2^{f(8)} 2\cdot f(\tfrac{1}{2}y)dy + \int_1^2 g(y)dy$$
$$=\int_1^{\frac{f(8)}{2}} 4f(x)dx + \frac{7}{4}$$
$$=4\int_1^4 f(x)dx + \frac{7}{4}$$
$$=\frac{139}{4}$$

$\therefore p+q=143$

Sol4) 카발리에리의 원리

가) 조건 → $[1,2]$ 에서 f가 주어짐.

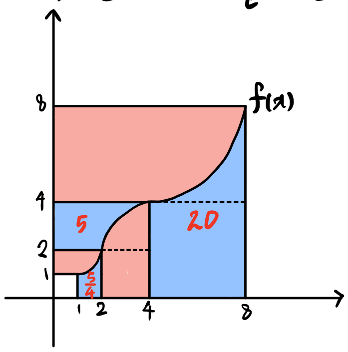
→ $g(2x) = 2f(x)$

→ $g(x) = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$ $[2,4]$

→ $[2,4]$에서 $g(x)$는 $[1,2]$에서 $f(x)$를 x축으로 2배 / y축으로 2배 한 거임을 알 수 있음.

→ $[2,4]$ 에서 $g(x)$의 적분값은 $[1,2]$ 에서 $f(x)$의 적분값의 4배

반복하면 아래와 같이 알 수 있음.



$\int_1^8 xf'(x)dx$: 역함수 적분

→ $\left(4-1-\frac{5}{4}\right) + 4\cdot\frac{5}{4} + (64-16-20) = \frac{139}{4}$

∴ $p+q = 143$

* 카발리에리의 원리

: 서로 다른 두 평면도형이 주어졌을 때, 임의의 동일한 높이에서 평행한 직선에 의하여 생기는 두 선분의 길이가 같지 않더라도 그 길이의 비가 $m:n$ 으로 일정하면 두 도형의 넓이 비 역시 $m:n$으로 일정하다.

타짜

: 기출 밑장빼기

미적분

베이즈 지음