01. [최소한의 연산]

sol)

$A+B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1+a & 1\end{pmatrix} \rightarrow 6+a=10 \quad \therefore\ a=4$

덧셈 연산 밖에 없네요!

02. [e의 정의]

sol)

$\lim\limits_{x\to 0}\left\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=\left\{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}^5=e^5$

03. [미분 기초]

sol)

$f'(x)=\cos x-4 \rightarrow f'(0)=1-4=-3$

04. [적분 기초]

sol)

$\int_0^1 2e^{2x}dx=\left[e^{2x}\right]_0^1=e^2-1$

[2009년 06월 평가원 수리(가형) 04번]

4. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -9　② -7　③ -5　④ -3　⑤ -1

평가원은 한 때 첫 페이지부터 이런 계산 문제를 내기도 했었지만, 요즘 들어 아~~주 아주 쉽게 내고 있습니다. 하지만 수능 때 얼마든지 뒤통수 칠 수도 있으니 쉬운 시험에만 물들어 버리시면 안 됩니다!

05. [벡터 기초]

sol)

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2t=0 \rightarrow t=2$

06. [고려하지 않아도 되는 부분]

sol)

$\dfrac{(x+2)(x^2+1)}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow -2\le x<1$

$\therefore\ 1-(-2)=3$

※ 두 정수 $a, b\ (a\le b)$에 대하여 다음 각 범위를 만족시키는 정수 n의 개수 공식(?)입니다.

$$\begin{cases} a\le n\le b \rightarrow b-a+1\\ a<n\le b \rightarrow b-a\\ a\le n<b \rightarrow b-a\\ a<n<b \rightarrow b-a-1\end{cases}$$

07. [약점 체크]

sol)

정사각형 각 변의 길이 조건과 꼭짓점이 모두 격자점에 위치한다는 점을 이용하여 두 점 A, H의 좌표를 구할 수 있고, 시키는 대로 합성연산을 해보면 $\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-k\end{pmatrix}$로 $k=2$가 나옵니다.

[2012년 11월 대수능 수리(가형) 09번]

9. 좌표평면에서 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환을 f, 직선 $y=x$에 대한 대칭변환을 g라 하자. 합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$에 의하여 직선 $x+2y+5=0$이 직선 $ax+by+5=0$으로 옮겨질 때, $a+2b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

평소에 분명히 잘 알고 있다고 생각했기에 방심하고 있었던 부분도 막상 수능 시험에서 꼬아서 물어보면 당황할 수 있습니다. 맞추긴 맞추더라도 시간을 낭비하게 되죠. 그래서 만약의 상황에 대하여 충분히 이미지 트레이닝을 하는 것도 좋은 방법입니다!

08. [삼각함수 공식들의 총 망라]

sol.1)

$\sin x=2\sin x\cos x \rightarrow \sin x=0$ or $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$x=0, \pi, \dfrac{\pi}{3} \quad \therefore\ \dfrac{4}{3}\pi$

sol.2)

$\sin 2x-\sin x=2\cos\dfrac{3x}{2}\sin\dfrac{x}{2}=0 \rightarrow \cos\dfrac{3x}{2}=0$ or $\sin\dfrac{x}{2}=0$

sol.3)

$\sin x=\sin 2x \rightarrow x=n\pi+(-1)^n\cdot 2x \rightarrow \cdots$

$0\le x\le\pi$

09. [수학적 확률]

sol)

$\mathrm{P}(A\cap B)=p\ \ (0<p<1)$라 하면 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{2}p, \mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{2}p$이고

$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{3}{2}p+\dfrac{5}{2}p-p=3p$이므로 $\dfrac{3p}{p}=3$이 답입니다.

10. [수치의 대입 위치 파악하기]

sol)

$\log\left(\dfrac{t}{t_0}-1\right)=k+4\log\dfrac{V}{C}$에서 $\dfrac{V}{C}=2$이고 $\dfrac{t}{t_0}=\dfrac{7}{2}$이므로

$\log\left(\dfrac{7}{2}-1\right)=k+4\log2 \ \rightarrow\ k=\log5-5\log2=1-6\log2$가 답입니다.

수식의 연립도 없이 바로 끝나는데 $\log5-5\log2$를 보기에서 제시하지 않고, $\log5+\log2-\log2-5\log2=1-6\log2$로 말한 부분이 그나마 응용이라고 할 수 있겠네요!

[2013년 11월 대수능 수학 영역(B형) 25번]

25. 단면의 반지름의 길이가 $R(R<1)$인 원기둥 모양의 어느 급수관에 물이 가득 차 흐르고 있다. 이 급수관의 단면의 중심에서의 물의 속력을 v_c, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $x\,(0<x\le R)$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력을 v라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{v_c}{v}=1-k\log\frac{x}{R}$$

(단, k는 양의 상수이고, 길이의 단위는 m, 속력의 단위는 m/초이다.)

$R<1$인 이 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 $R^{\frac{27}{23}}$만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\dfrac{1}{2}$일 때, 급수관의 벽면으로부터 중심 방향으로 R^{a}만큼 떨어진 지점에서의 물의 속력이 중심에서의 물의 속력의 $\dfrac{1}{3}$이다. $23a$의 값을 구하시오. [3점]

[2015학년도 09월 포카칩 모의평가 수학 영역(B형) 16번]

16. 젖은 쓰레기에서 발생하는 침출수는 오염 농도가 90(%) 이상이 되도록 농축하여 별도로 폐기 처분한다. 오염 농도가 x(%)인 침출수 a(톤)을 별도로 폐기 처분하려고 할 때 증발시켜야 하는 물의 양을 b(톤)이라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\frac{x}{100(a-b)}\ge 0.9$$

오염농도가 60(%)인 침출수 a_1(톤)을 폐기 처분하려면 최소 1(톤)의 물을 증발시켜야 한다. 오염농도가 50(%)인 침출수 $3a_1$(톤)을 폐기 처분하기 위해 증발시켜야 하는 물의 양 b_1(톤)의 범위는? [4점]

① $\dfrac{25}{9}\le b_1<4$ ② $\dfrac{25}{9}\le b_1\le4$
③ $\dfrac{25}{9}\le b_1<5$ ④ $\dfrac{40}{9}\le b_1\le5$
⑤ $\dfrac{40}{9}\le b_1<5$

11. [이차곡선에 접하는 직선의 방정식]

sol)

접선이 되는 직선 $y=nx+(n+1)$은 사실 $y=n(x+1)+1$로 점 $(-1,1)$을 지나는 기울기 n인 직선을 의미하고, 주어진 포물선은 식이 $y^2=4\cdot a_n\cdot x$로서 만약 기울기가 n인 접선의 방정식 공식을 쓰면 $y=nx+\dfrac{a_n}{n}$에서 $\dfrac{a_n}{n}=n+1$로 $a_n=n^2+n$이 됩니다. $x^2=4py$꼴일 때 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$이 아닙니다!

혹은, 접할 때의 접선 공식을 모른다면 통째로 대입하여 한 문자에 관한 이차식으로 고친 다음 판별식 $D=0$으로부터 a_n을 구할 수도 있습니다.

$(nx+n+1)^2=4a_nx\ \rightarrow\ n^2x^2+\cdots\ \rightarrow\ D=0\ \rightarrow\ a_n=?$

이때 답은 시그마 공식을 써도 되고, 더해야 하는 항들이 몇 안 되니 직접 나열 해봐도 $(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)+(1+2+3+4+5)=70$이 나옵니다.

12. [첨수(index) 범위의 변화]

sol)

주어진 식 (*)에 의하여

$$\frac{S_n}{n}=\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ \ (n\ge2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

이다. (*)에서 ㉠을 빼서 정리하면

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=S_n$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{\boxed{(가)}}{n}\ \ (n\ge2)\qquad (n+1)^2$$

$$\frac{S_{n+1}}{n+1}=\frac{n+1}{n}S_n$$

이다. ㉠으로부터 $S_2=2$이고,

$$S_n=\frac{S_n}{S_{n-1}}\times\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\frac{S_3}{S_2}\times S_2\ \ (n\ge3)$$

$$\frac{n^2}{n-1}\times\frac{(n-1)^2}{n-2}\times\cdots\times\frac{3^2}{2}\times2$$

이므로

$$S_n=n!\times\boxed{(나)}\ \ (n\ge3)$$

$$=n^2\times(n-1)\times\cdots\times3$$

$$\frac{n}{2}$$

이다. 그러므로 a_n은

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2)\\ \dfrac{n^2-n+1}{2}\times(n-1)! & (n\ge3)\end{cases}$$

이다.

따라서, $f(4)\times g(20)=5^2\times10=250$이 답입니다.

이정도 점화식은 빈칸 조건 없어도 일반항을 유도 할 만 합니다!

기존 점화식 문제들에서와 달리 돋보였던 부분은 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{(n+1)^2}{n}$의 양변에 $n\Rightarrow2,3,\cdots,n-2,n-1$을 대입하여 변변 곱한다는 멘트가 없이 곧바로 그 결과식인 $S_n=\dfrac{S_n}{S_{n-1}}\times\dfrac{S_{n-1}}{S_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{S_3}{S_2}\times S_2$를 제시해주었다는 부분과, $n\ge3$인 경우까지 나타난다는 점입니다. 최근 모의고사 중에 이를 적중한 것이 있습니다!

[2015학년도 09월 리듬농구 모의고사 수학 영역(B형) 13번]

13. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1,\ a_2=4$이고,

$$n^2a_{n+1}-(n+1)^2a_n=\frac{n^2(n+1)^2}{n^2-1}\quad(n\geq 2)$$

를 만족시킬 때, 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 2이상의 자연수 n에 대하여 주어진 식의 양 변을 $n^2(n+1)^2$으로 나누면,
>
> $$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{n^2-1}$$
>
> 이고, $b_n=\dfrac{a_n}{n^2}$이라 하면,
>
> $$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n^2-1}$$
>
> 이므로 수열 $\{b_n\}$은 $b_2=1$이고
>
> $$b_n=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\times\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\quad(n\geq 4)$$
>
> 이다. 즉 수열 $\{a_n\}$은
>
> $$a_n=n^2b_n=\boxed{\text{(나)}}\quad(n\geq 4)$$
>
> 이다. $n=2,\ 3$일 때에도 이 식을 만족시키므로 $a_1=1$이고, 2이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\boxed{\text{(나)}}$이다.

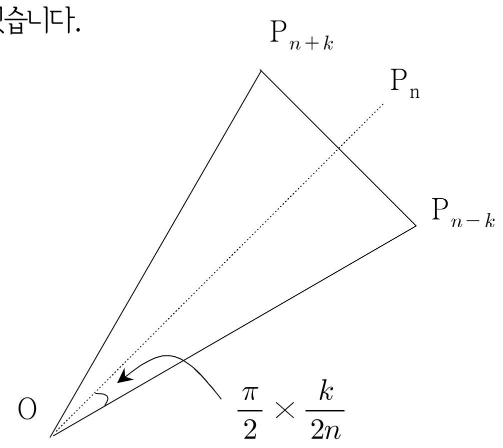
위의 (가), (나)에 들어갈 알맞은 식을 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $2f(5)g(4)$의 값은? [3점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

13. [다시 등장한 세트형 문항]

sol)

삼각형 넓이 공식 중에 $\frac{1}{2}bc\sin A\rightarrow\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{2k}{2n}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$를 이용하겠습니다.



이등변삼각형 $OP_{n-k}P_{n+k}$의 중심각을 잘 잡아주어야 하는데 부채꼴 OAB의 중심각 $\frac{\pi}{2}$의 $2n$등분한 것 중 $2k$개에 해당하는 각임을 염두에 두고 구하면 됩니다.

그러면 $S_k=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$에서 $x_k=\frac{k}{n}\pi$라 잡으면 무한급수를 정적분으로 고칠 때 $dx_k=\frac{1}{n}\pi$에 대응되고, 적분의 아래 끝과 위 끝은 각각 $x_1=0$과 $x_n=\pi$에 대응됩니다. $\because n\to\infty$

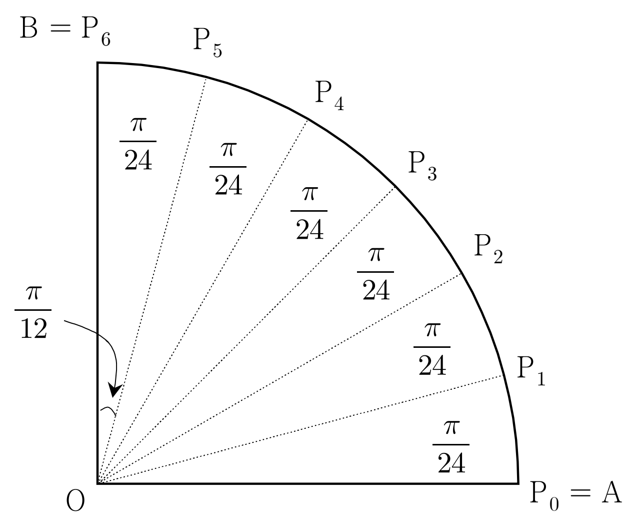
고로, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}$이 답이 됩니다.

14. [뜬금포]

sol)

이전 문항은 흔한 문제였는데, 여기서는 확률 문제와 연관 시켜버렸네요.

$n=3$이면 부채꼴 OAB를 아래와 같이 6등분 하였다는 셈이고,



확률변수 X로서 두 부채꼴 OPA와 OPB의 넓이의 차(절댓값)가 취할 수 있는 값은 $0,\ \frac{2\pi}{24},\ \frac{4\pi}{24}$이고 확률분포표를 생각해보면 다음과 같습니다.

X	0	$\frac{2\pi}{24}$	$\frac{4\pi}{24}$	계
$P(X)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
	$P=P_3$	$P=P_2,P_4$	$P=P_1,P_5$	

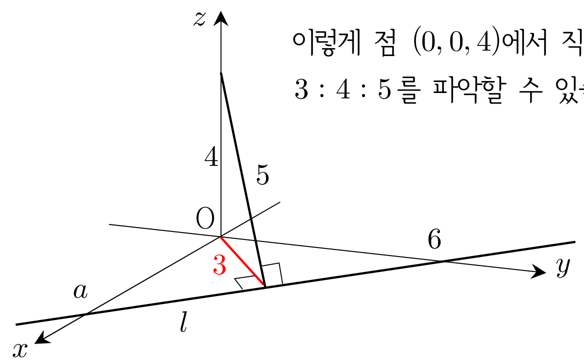
따라서 $E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+\frac{2\pi}{24}\cdot\frac{2}{5}+\frac{4\pi}{24}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4+8}{120}\pi=\frac{\pi}{10}$가 답입니다.

15. [공간상의 점에서 한 직선에 수선을 내리는 방법]

sol)

$(a,0,0), (0,6,0), (0,0,4)$ 세 점 모두 각각 x, y, z축 위의 점입니다.

차라리 어렵게 물어봤다면 수능 전에 대비라도 했을텐데 말이죠.



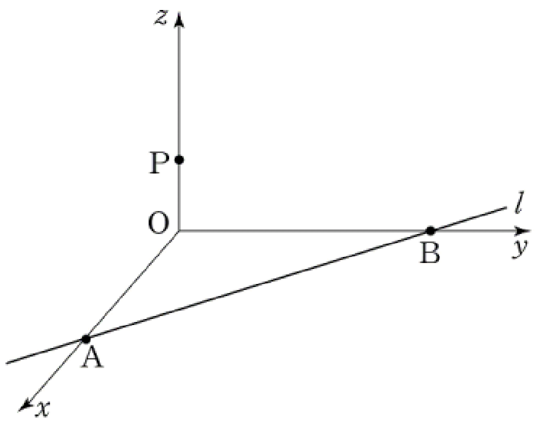
이렇게 점 $(0,0,4)$에서 직선 l에 수선을 내려서 $3:4:5$를 파악할 수 있습니다.

그러면 원점 O에서 xy평면에 존재하는 직선 $l : \frac{x}{a}+\frac{y}{6}=1$과의 거리가 3임을 이용하여 식을 세우면 $l : 6x+ay-6a=0$에서

$3=\frac{6a}{\sqrt{36+a^2}} \rightarrow 36+a^2=4a^2 \quad \therefore a^2=12$

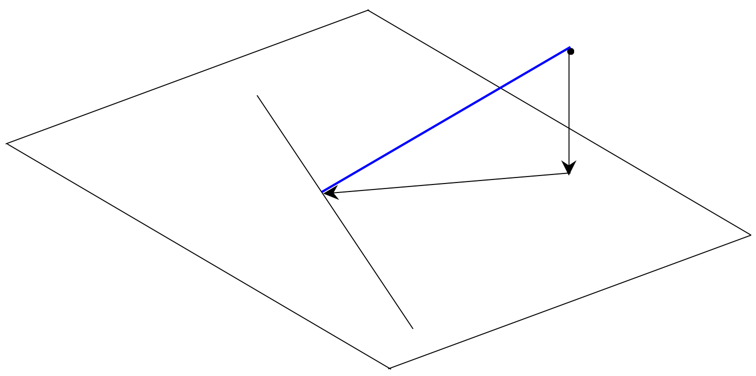
[2005년 09월 평가원 수리(가형) 08번]

8. 좌표공간에서 두 점 A(1, 0, 0), B(0, $\sqrt{3}$, 0)을 지나는 직선 l이 있다. 점 P$\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$로부터 직선 l에 이르는 거리는? [3점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

※ 공간 상의 한 점에서 어떤 직선에 수선을 내리려면 한 번에 바로 최단거리를 찾기 보다는

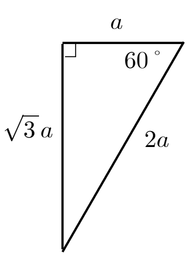


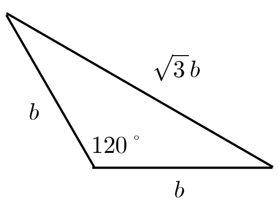
직선을 품는 평면 위로 점을 정사영 내린 다음 평면 상의 한 점에서 같은 평면 위의 직선에 최단거리를 긋는 작업으로 축소하여 찾으면 문제에서 필요한 보조선이라든가 수직관계가 더 잘 보입니다.

16. [보조선만 그을 수 있다면]

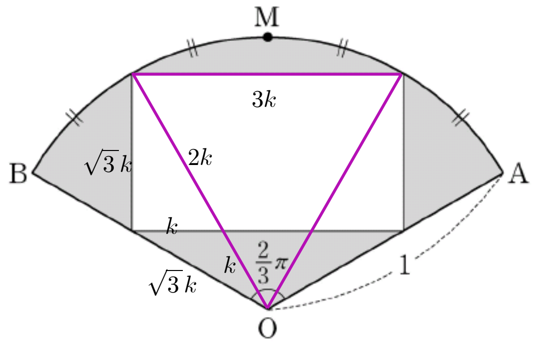
sol)

몇몇 특수각을 품는 삼각형에서의 길이 비는 시험에 빠짐없이 나오기에 충분히 외울만한 가치가 있습니다. 이미 다 아시려나 ^^





이제 일필휘지로 보조선을 그어보도록 하겠습니다.



그러면 $2k+k=1 \rightarrow k=\frac{1}{3}$이고 무한등비급수에서의 초항은

$S_1=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-(3k)(\sqrt{3}k)=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}$이 나오네요. 닮음비는 연이은 부채꼴의 반지름 길이비 $1 : \sqrt{3}k$이고, 실제 닮음비는 이를 제곱해야 하므로, $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-(\sqrt{3}k)^2}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}$이 최종 답이 됩니다.

17. [출제자가 친절친절열매를 먹었나]

sol)

y좌표로 가능한 값이 $1, 2, 3$이고 y좌표가 i $(i=1, 2, 3)$인 서로 다른 두 점을 택할 확률을 p_i라 하였을 때, $\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}$가 답이 됩니다. 이때,

$p_1=\frac{{}_7C_2}{{}_{15}C_2}, p_2=\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2}, p_3=\frac{{}_3C_2}{{}_{15}C_2}$에서 어차피 상쇄될 ${}_{15}C_2$를 미리 상쇄시켜주면 $\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}=\frac{10}{21+10+3}=\frac{5}{17}$로 답이 간단하게 나옵니다. 그리고 썩 권장하지는 않지만 문제 검토 차원에서 p_2의 분자가 10이므로 그 약수인 5를 갖는 ②번을 답이라고 확신할 수도 있습니다.

※ 문제 푸는 시간을 단축하기 위해서는 문제 해결의 첫 단추를 잘 꿰메는 것도 중요하지만, 가랑비에 옷이 젖는다는 말도 있듯 뻔한 연산을 되도록 줄이는 것이 은근히 중요합니다!

18. [행렬 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 답이 아니라니!]

sol)

$AB+A+B=2E \rightarrow (A+E)(B+E)=3E$에서

$(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$가 성립합니다.

덤으로 $(A+E)(B+E)=(B+E)(A+E)=3E$인데,

$(A+E)(B+E)=AB+A+B+E=3E$이고

$(B+E)(A+E)=BA+B+A+E=3E$이므로 $AB=BA$ 역시 성립합니다. 최근 10여년 간 평가원, 교육청 기출 중에 $AB=BA$?를 물었던 행렬 문제 중에 $AB\neq BA$였던 적이 단 한번 있었습니다.

끝으로 ㄷ을 살펴보자면, $A^3+E=(A+E)(A^2-A+E)=O$를 지금껏 한 번도 사용하지 않았으므로 $A^3+E=O$의 왼쪽에서 $A+E$의 역행렬을 가하면 $A^2-A+E=O$가 나옵니다.

그런데 $A^2-A+E=O$에서 $A+E$의 역행렬을 A, E만으로도 나타낼 수 있습니다. 바로 안 보인다면, 초등학생 때 자연수 나눗셈을 하던 그 원리 그대로 자릿수를 맞춰서

$$\begin{array}{r|l} & A-2E \\ \hline A+E & A^2-A+E \\ & A^2+A \\ \hline & -2A+E \\ & -2A-2E \\ \hline & 3E \end{array}$$

로부터 $A^2-A+E=(A+E)(A-2E)+3E=O$를 얻을 수 있고, $(A+E)(A-2E)=-3E$에서 $(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$임을 알 수 있습니다. 한편, 아까 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{3}(B+E)$임을 구했었으니 서로 등치해보면 $\frac{1}{3}(B+E)=(A+E)^{-1}=-\frac{1}{3}(A-2E)$에서

$B+E=-A+2E \rightarrow A+B=E$임을 알 수 있습니다. 고로 ㄱ, ㄴ은 참이고 ㄷ이 거짓이 되네요.

19. [표준정규분포함수의 정적분 구간 or 정적분 값?]

sol)

먼저 확률변수로서 두 과목의 시험 점수를 X_A, X_B로 잡았을 때,

$$X_A \sim \mathrm{N}(m, \sigma^2),\ X_B \sim \mathrm{N}(m+3, \sigma^2)$$

이고, $\mathrm{P}(X_A \ge 80)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{80-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 1.34)=0.09$와

$\mathrm{P}(X_B \ge 80)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{80-m-3}{\sigma}\right)=\mathrm{P}(Z \ge 1.04)=0.15$로부터

$80-m=1.34\sigma$와 $77-m=1.04\sigma$를 연립하면 $\sigma=10, m=66.6$이 되어 $m+\sigma=76.6$이 답이 됩니다.

※ 숫자들이 되게 많이 나오는데, 그 성격에 따라 잘 분류하여서 식을 세우는 것이 포인트입니다.

[2009년 05월 교육청 수리(가형) 13번]

13. 어느 학교 학생들의 한 달 간 휴대폰 사용 시간을 조사하였더니 전체의 2.28%가 5시간 이하, 15.87%는 20시간 이상이었다. 휴대폰 사용시간의 분포가 정규분포를 따른다고 할 때, 휴대폰 사용시간의 평균을 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.00	0.3413
1.50	0.4332
2.00	0.4772
2.50	0.4938
3.00	0.4987

① 13
② 14
③ 15
④ 16
⑤ 17

20. [극값 혹은 변곡점을 갖기 위한 필요충분조건은?]

sol)

보기에서 묻는 것들에 답하기 위해선 $f(x)=x^n e^{-x}$를 계속 미분해서

$f'(x)=nx^{n-1}e^{-x}-x^n e^{-x}=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$와

$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}e^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}-nx^{n-1}e^{-x}+x^n e^{-x}$

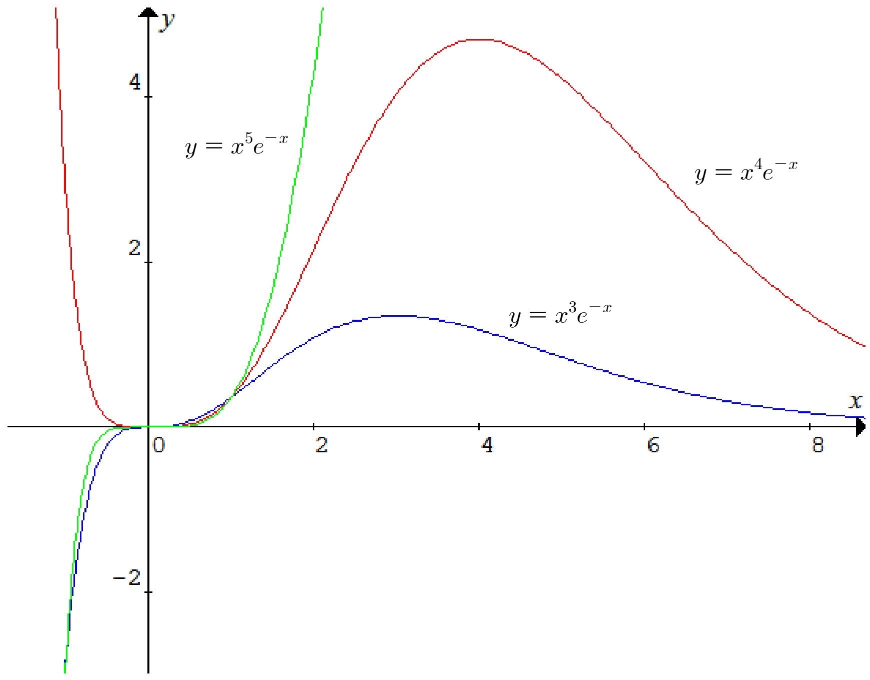
$\quad=x^{n-2}\{(n^2-n)-2nx+x^2\}e^{-x}$

까지는 일단 구해놓고 시작해야 합니다.

ㄱ은 $\left(\frac{n}{2}\right)^n e^{-\frac{n}{2}}=\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}\left(n-\frac{n}{2}\right)e^{-\frac{n}{2}}$인지를 묻고 있으므로 참.

ㄴ은 $x=n$에서 도함수 $f'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$으로 바뀌므로 참.

ㄷ은 $x=0$에서 이계도함수 $f''(x)$의 부호가 $n-2=1, 2, 3, \cdots$의 홀짝에 따라 변할 수도 있고, 변하지 않을 수도 있으므로 거짓입니다.



※ 어떤 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖기 위한 필요충분조건은 해당하는 지점 $x=a$에서 도함수가 불연속이어도 좋으니 $f'(x)$의 부호변화가 일어나야 한다는 것이고, 비슷하게 $x=b$에서 $f(x)$가 변곡점을 갖기 위한 필요충분조건은 $x=b$에서 이계도함수가 불연속이어도 좋으니 $f''(x)$의 부호변화가 일어나야 한다는 것입니다.

[2008년 09월 평가원 수리(가형) 27번]

27. 좌표평면에서 곡선

$$y=\cos^n x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2},\ n=2, 3, 4, \cdots\right)$$

의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ④ $\frac{1}{2e}$ ⑤ $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

[2015학년도 09월 리듬농구 모의고사 수학 영역(B형) 21번]

21. 양수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=(\ln x)^n-tx^n$$

의 극값의 개수가 3이 되는 어떤 양수 t가 존재할 때, 가능한 100이하의 자연수 n의 개수는? [4점]

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 98 ⑤ 99

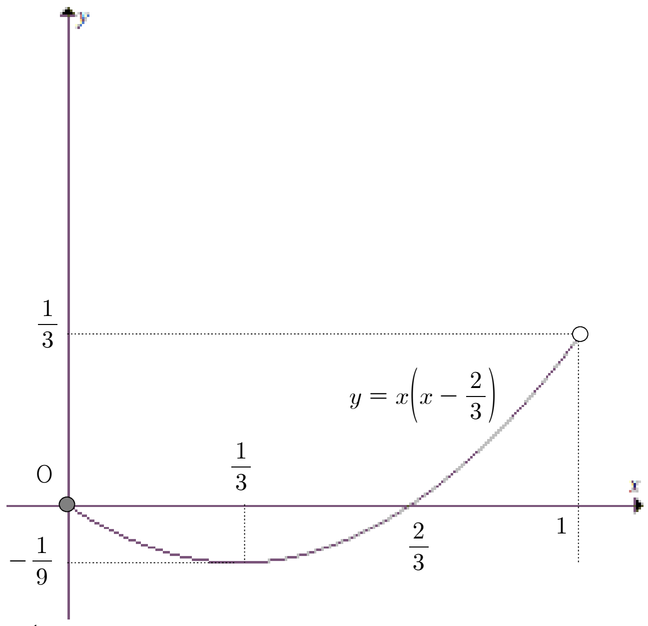
21. [알고 있는 것들을 그러모아서]

sol)
$\log t = f(t) + g(t)$에서 t가 양수라 하였으니 딱히 범위에 제한을 두지는 않았네요. 이때 지표 $f(t)$는 임의의 정수를 취할 수도 있고, 가수 $g(t)$에 대해서는 $0 \le g(t) < 1$이 성립합니다.

그러면 $f(t) = 9n\left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 - n$에서 좌변이 확실히 정수이므로 우변도 정수여야 합니다. 편의상 $g(t) = \alpha$라 하면 준 식의 우변은 다시

$9n\left(\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 - n = 9n\alpha\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$로 정리할 수 있습니다.

그런데 $0 \le \alpha < 1$에서 $\alpha\left(\alpha - \frac{2}{3}\right)$이 취할 수 있는 값은



$-\frac{1}{9}$ 이상 $\frac{1}{3}$ 미만으로 $-n \le f(t) < 3n$으로 이 중의 정수 값으로

$f(t) = -n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 3n-2, 3n-1$을 취할 수 있습니다.

그리고 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 꼴로부터 a_n이 n에 대한 이차식일 것이라 예측할 수 있죠.

따라서, $a_n = \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - 3n = 4n^2 + \cdots$에서 답은 4가 됩니다.

※ 지금까지 쓰인 개념을 보아하니
1. 상용로그의 지표와 가수의 분리 2. 가수의 해석 - 이차함수의 범위
3. 지표 값 연산 - 등차수열의 합 4. 극한값 계산
그리고 그밖에 소소한 계산 테크닉들이 어우러져 있네요.
도저히 이 풀이가 와 닿지 않는다면 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 등을 대입하여 발견적 추론을 통해 파악할 수도 있습니다.

22. [Solving vs Finding]

solving)
$a_n = a \cdot 2^{n-1}$라 두면 $a(1+2+8) = 55$에서 $a = 5$이므로 $a_3 = 20$이 답.

finding)
$1, 2, 4, 8, \cdots$에서 $1, 2, 4$항의 합이 11이므로 전체적으로 5배 해주면 $a_3 = 20$이 답.

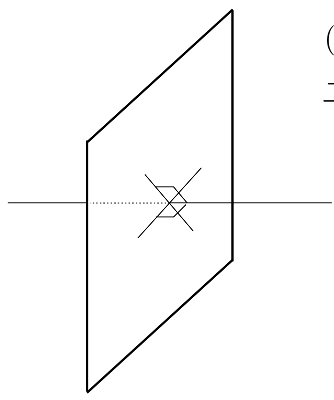
23. [낚시는 없는지]

sol)
문제 자체에서 해가 유일함을 암시하고 있으므로 준 식을 만족하는 값을 어떻게든 하나만 구해내면 됩니다.

그러면 $\frac{x}{x-7} = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \rightarrow x = 14$가 정답입니다.

24. [방향벡터 or 법선벡터 ?]

sol)
직선의 방향벡터가 평면의 법선벡터와 평행한(?!) 상황입니다. 그리고 평면의 방정식을 구할 수 있는 조건 중의 하나로, 한 점과 법선 벡터를 아는 것인데, 문제에서 다 가르쳐 주고 있네요. 어차피 맞출테지만 신중에 신중을 가한다는 마음으로 특히나 중요한 시험에선 더더욱 그림을 일단 그려봅시다!



$(2, a, 4)//(2, 5, b) \rightarrow a = 5, b = 4$
그리고 이 평면이 점 $(1, 1, -2)$를 포함하므로
$2 + 5 - 8 + c = 0 \rightarrow c = 1$
따라서, $a + b + c = 10$이 답입니다.

[2009년 11월 대수능 수리(가형) 20번]

20. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = z-1$에 수직이고 점 $(1, -5, 2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x + ay + bz + c = 0$이라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [3점]

25. [Imagine ~]

sol)
굳이 타원과 쌍곡선을 그려야 할 필요가 없습니다. 시간도 걸릴뿐더러 여러분들은 이미 수많은 이차곡선들을 그려왔기 때문에 감각이 충분합니다! 타원은 장축이 세로로 있고, 쌍곡선은 주축이 가로로 있기 때문에, 해당하는 사각형은 대각선이 x, y축에 놓여있는 마름모가 됩니다. 이때 넓이는 대각선 길이 곱에 $\frac{1}{2}$을 곱해주면 되죠! 따라서, 세로, 가로 대각선 길이는

$2\sqrt{a^2-1}$과 $2\sqrt{2}$이므로 $12 = 2\sqrt{2(a^2-1)} \rightarrow a^2 = 19$가 답입니다.

[2009년 09월 평가원 수리(가형) 12번]

12. 쌍곡선 $9x^2 - 16y^2 = 144$의 초점을 지나고 점근선과 평행한 4개의 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]

① $\frac{75}{16}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{25}{2}$ ④ $\frac{75}{4}$ ⑤ $\frac{75}{2}$

26. [중복조합]

sol)

a, b, c는 n개의 2를 적어도 하나씩 나누어 가져야 하므로 미리 나누어주고서 $n-3$개의 2를 중복조합으로 나누면 됩니다. 그러면

${}_3H_{n-3} = {}_{n-1}C_{n-3} = {}_{n-1}C_2 = 28 = 4 \cdot 7 = \frac{8 \cdot 7}{2}$에서 $n=9$가 답입니다. 여기서 ${}_3H_{n-3}$인지 ${}_{3-n}H_3$인지 순간적으로 위치가 헷갈릴 수도 있는데, $n=3$일 때, ${}_3H_0 = {}_2C_0$은 정의되지만 ${}_0H_3 = {}_2C_3$은 정의부터 안 되므로 그래서 ${}_3H_{n-3}$이라 판단할 수도 있습니다.

※ 중복조합이 정식으로 수능에 등장한 것이 2011년, 즉 2012학년도 수능부터인데 이후 지금까지 4년 간 평가원 시험에 등장한 중복조합 문제들은 하나같이 기본 예제 수준에 약간 변형을 준 정도였습니다. 그리고 이 문제도 간단한 수준의 계산 문제입니다.

[2013년 06월 평가원 수학 영역(B형) 10번]

10. 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m개를 주문하는 경우의 수는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

[2013년 09월 평가원 수학 영역(B형) 08번]

8. 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

27. [시키는 대로 식을 세울 수 밖에 없을까]

sol)

$f(x) = x(x+4)$이고 $f(1) = 5$에서, 이차함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=-2$이므로 $f(-5) = 5$가 됩니다. 따라서, 쌩 계산을 피하고 $f(\sqrt{x+1} - x) = f(1) = f(-5)$가 되므로,

$$\sqrt{x+1} - x = 1 \text{ 또는 } \sqrt{x+1} - x = -5$$

의 모든 실근의 합을 구하는 문제로 환원시킬 수 있습니다.

그러면 무리함수와 직선의 개형을 염두에 두고서

$\sqrt{x+1} = x+1 \to x = -1, 0$과 $\sqrt{x+1} = x-5 \to x = 8$

로부터 모든 실근의 합은 $-1+0+8 = 7$이 됩니다.

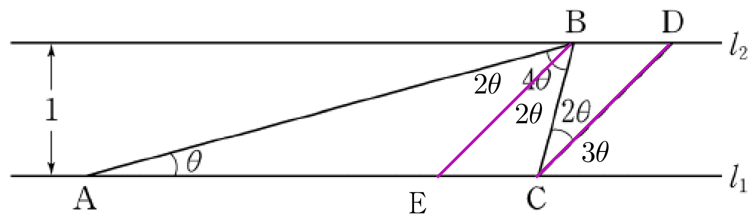
28. [빠르고 정확하게 계산할 수 있다면]

정말 다양한 풀이가 존재하는 문제입니다. 그 중에서 대표적인 풀이 몇 가지를 간추려 보겠습니다. 뭐니 뭐니 해도 여러분들에게 최고의 풀이는 수능 시험장에서도 구사할 수 있을 것 같은 현실적인 풀이입니다.

물론 가장 이상적인 것은 다양한 풀이를 모두 체화하고 있는 거겠죠?

sol.1) **난짱극** - http://cafe.naver.com/pnmath/355274

보조선으로서 $\overline{CD}$의 평행선 $\overline{BE}$를 다음과 같이 그어줍니다.

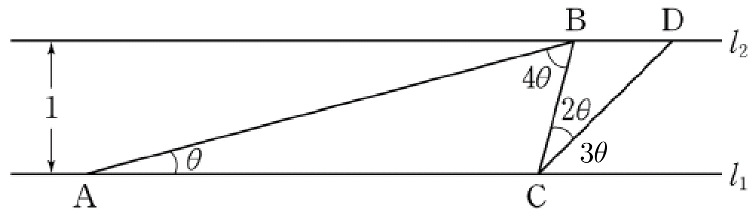


그러면 $\overline{BE}$는 삼각형 ABC의 각의 이등분선으로서 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{EC}$를 만족합니다. 그런데 $\overline{BD} = \overline{EC}$이고 $\overline{AB} : \overline{BC} = \frac{1}{\theta} : \frac{1}{5\theta} = 5\theta : \theta$

이므로 답은 $\lim_{\theta \to +0} \frac{5\theta + \theta}{\theta} = 6$이 됩니다. 사실 보조선으로서 각의 이등분선을 그어주고 변 길이 관계만 체크해주면 순삭이 가능한 문제였죠!

sol.2) **사인법칙**

문제 상황을 보아하니 두 삼각형이 같은 높이를 갖기 때문에 실질적으로 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$의 꼴에서 극한을 취해주면 됩니다.



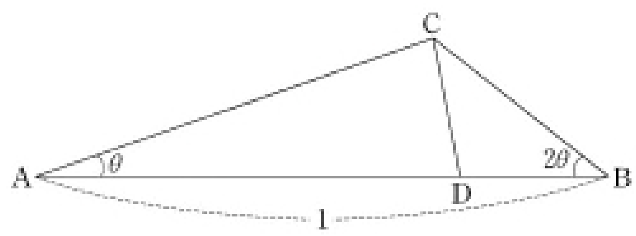
삼각형 ABC에 사인법칙을 적용하면 $\frac{\overline{AC}}{\sin 4\theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta}$이고,

삼각형 BCD에 사인법칙을 적용하면 $\frac{\overline{BD}}{\sin 2\theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin 3\theta}$에서 양변을 적당히 나누면 $\frac{\overline{AC}}{\sin 4\theta} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin 3\theta}{\overline{BC}}$, 즉 $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\sin 3\theta \sin 4\theta}{\sin\theta \sin 2\theta}$가

되어 $\lim_{\theta \to +0} \frac{T_1}{T_2} = \frac{12}{2} = 6$이 답이 됩니다.

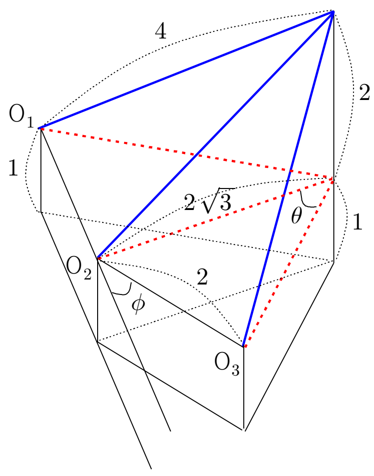
[2012년 11월 대수능 수리(가형) 29번]

29. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 1$이고 $\angle A = \theta$, $\angle B = 2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD = 2\angle BCD$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta \to +0} \frac{\overline{CD}}{\theta} = a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.) [4점]



29. [다각도에서 관찰하기]

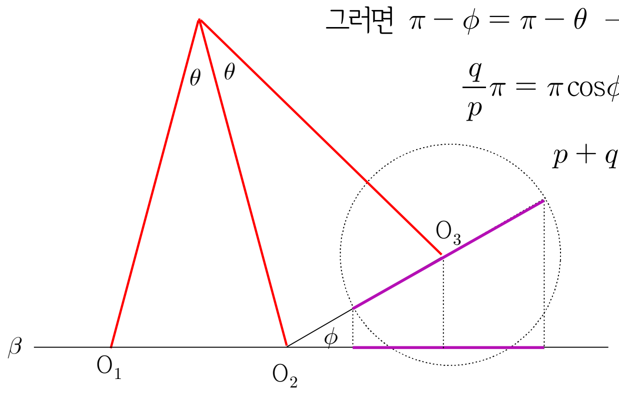
sol)
좌표 공간에서 네 개의 구가 접하는 상황을 다시 그릴 필요는 없습니다.
핵심은 보존하면서 알짜만을 그리려면, 각 구의 중심들을 이으면 됩니다.



그러니 이번에도 기대를 저버리지 않고 $1:2:\sqrt{3}$ 의 특수각을 품는 직각삼각형들이 보이네요. 이때 제이코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{12+12-4}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{5}{6}$ 가 됩니다. 이런 건 숨 쉬는 것처럼 자연스레 구해놓고 보는 습관을 들여야 합니다!

이제 단면 D의 평면 β위로의 정사영의 넓이를 구해야 하는데, 평면에 의한 구의 절단면 D는 역시 원이니 우리는 이제 원의 반지름과, 정사영 각도 ϕ를 구해야 합니다. 이때, 곧바로 이면각이 잘 안 보이니 평면 α로부터 1만큼 떨어져 있고, 세 구의 중심 O_1, O_2, O_3를 지나는 새 평면을 관찰해봅시다.



그러면 $\pi-\phi=\pi-\theta \rightarrow \phi=\theta$에서

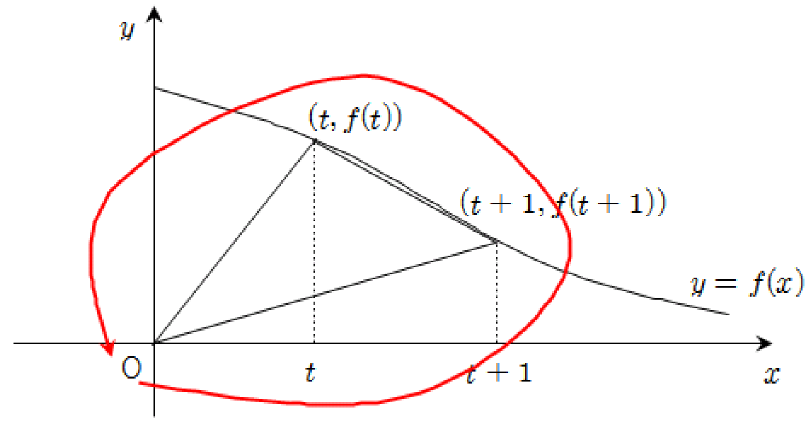
$\dfrac{q}{p}\pi = \pi\cos\phi = \dfrac{5}{6}\pi$ 이므로

$p+q=11$이 답입니다.

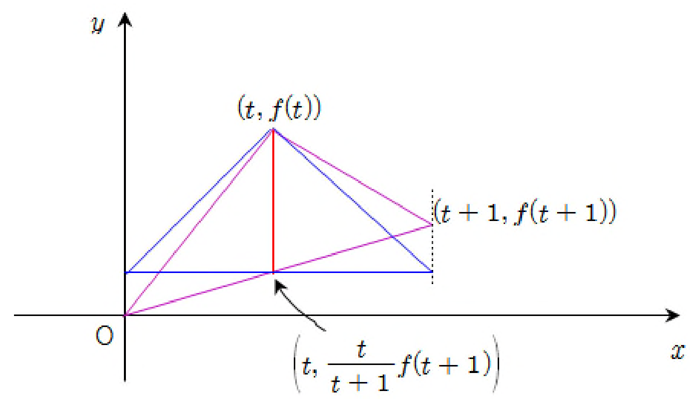
30. [올해 수능 킬러의 예고?]

작년 6월 30번 문제처럼 초반부에 넓이 적분을 행해야 합니다.

우선 모든 양수 x에서 감소하므로 $\dfrac{f(t)}{t} > \dfrac{f(t+1)}{t+1}$ 입니다. 만약에 (나) 조건에서 벡터의 외적을 이용한, 혹은 삼각형의 세 꼭짓점 좌표를 알 때 사용하는 사선식 공식을 사용한다면 꼭짓점을 반시계 방향으로 돌려서 여기서 실수하면 식이 반대로 나옵니다.



$S = \dfrac{t+1}{t} = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & t+1 & t & 0 \\ 0 & f(t+1) & f(t) & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}\{(t+1)f(t) - tf(t+1)\}$이고, $\dfrac{2}{t(t+1)}$를 곱하여 정리하면 $\dfrac{2}{t^2} = \dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{f(t+1)}{t+1}$가 나옵니다. 혹은, 사선식을 모른다고 할 때



평행선을 이용한 삼각형 넓이의 등적 변형(혹은 넓이가 같으면서 형태를 변형)을 통해

$\dfrac{t+1}{t} = \dfrac{1}{2}(t+1)\boxed{\left\{f(t) - \dfrac{t}{t+1}f(t+1)\right\}} \rightarrow \dfrac{2}{t^2} = \dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{f(t+1)}{t+1}$

를 이끌어 낼 수 있습니다. 이제 이를 변형해야 합니다.

sol.1)
다음과 같이 한 번에 찾을 수도 있습니다! 완전 뒷북 수학 같네요 ㅠㅠ

$\dfrac{2}{t^2} = \dfrac{f(t)}{t} - \dfrac{f(t+1)}{t+1}$의 양변을 1에서 x까지 적분을 한 후 구간 평행이동까지 하면

$$\int_1^x \frac{2}{t^2}dt = \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^x \frac{f(t+1)}{t+1}dt$$
$$= \int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_2^{x+1} \frac{f(t)}{t}dt$$

즉, $-\dfrac{2}{x}+2 = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}dt - \int_2^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt$ 이고, $\dfrac{f(t)}{t}$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$-\frac{2}{x}+2 = F(x) - F(1) - \{F(x+1) - F(2)\}$$
$$= \{F(x) - F(x+1)\} + \{F(2) - F(1)\}$$

$$= \int_{x+1}^{x}\frac{f(t)}{t}dt + \int_{1}^{2}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{x+1}^{x}\frac{f(t)}{t}dt + 2$$

가 되어 $\frac{2}{x} = \int_{x}^{x+1}\frac{f(t)}{t}dt$가 되어

$$\therefore \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(t)}{t}dt = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}}\frac{f(t)}{t}dt + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(t)}{t}dt$$

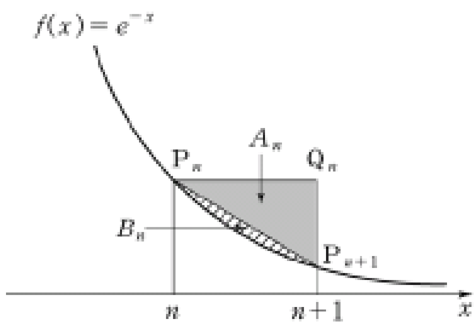
$$= \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63} \to p+q = 127$$

$sol.2)$

$\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1}$ 여기서부터 출발하겠습니다. 그리고 유사 기출문제로는 평가원이 10년 전 기출문제까지 보길 요구하는 걸지도 모르겠네요.

[2005년 11월 대수능 수리(가형) 28번]

28. 함수 $f(x)=e^{-x}$과 자연수 n에 대하여 점 P_n, Q_n을 각각 $P_n(n, f(n))$, $Q_n(n+1, f(n))$이라 하자. 삼각형 $P_nP_{n+1}Q_n$의 넓이를 A_n, 선분 P_nP_{n+1}과 함수 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 B_n이라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx = f(n)-(A_n+B_n)$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{1}{2e}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{3-e}{2e(e-1)}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이때 적분 구간 끝값에 무한대가 등장하는 이상적분(특이적분, improper integral)이 등장 하는데 엄연히 교과 외입니다. 여러분들이 내년에 보게 될 대학 미적분학 책에 등장하는 내용입니다.

그렇다면 $\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1}$를 정리할 때도 비슷한 논리로 나아가 보겠습니다. $\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \frac{f(t+1)}{t+1}$의 양변에 $t \Rightarrow t, t+1, t+2, \cdots$를 대입하여 변변 더하면

$$\frac{2}{t^2} = \frac{f(t)}{t} - \cancel{\frac{f(t+1)}{t+1}}$$

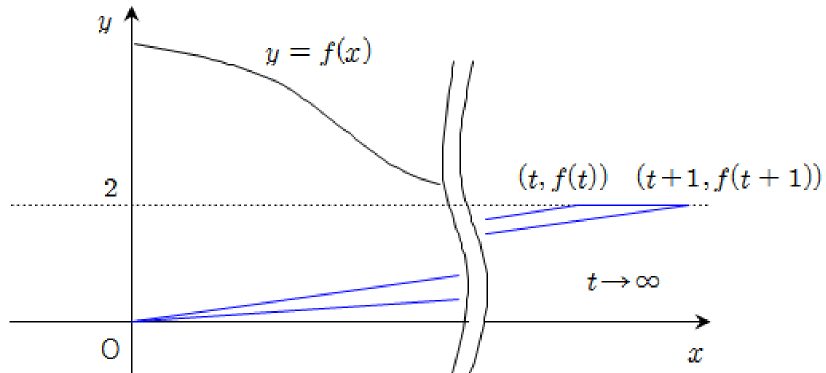
$$\frac{2}{(t+1)^2} = \cancel{\frac{f(t+1)}{t+1}} - \cancel{\frac{f(t+2)}{t+2}}$$

$$\frac{2}{(t+2)^2} = \cancel{\frac{f(t+2)}{t+2}} - \cancel{\frac{f(t+3)}{t+3}}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boxed{}$$

이때 $\boxed{} = \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}$ 부분이 0으로 수렴하는지를 확인해야 합니다. 다시 (나) 조건으로 돌아가서, $t\to\infty$이면 삼각형 넓이 $\frac{t+1}{t}\to 1$에서 $y=f(x)$는 $y=2$를 가로 점근선으로 갖는 함수임을 알 수 있습니다.



따라서 $t\to\infty$일 때 $f(t)\to 2$이기에 $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t} = 0$으로 상쇄시킬 수 있습니다. 그러면 축차대입법의 결과는

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{2}{t^2} + \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{(t+2)^2} + \frac{2}{(t+3)^2} + \cdots$$

가 나오고, 적분하면

$$\int\frac{f(t)}{t}dt = -2\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+3} + \cdots\right)$$

입니다. 검산 차 (다)를 확인 해봐도

$$\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x}dx = -2\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \cdots\right]_{1}^{2}$$

$$= -2\left\{\left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots}\right)\right\} = 2$$

로 제대로 구한 것이네요.

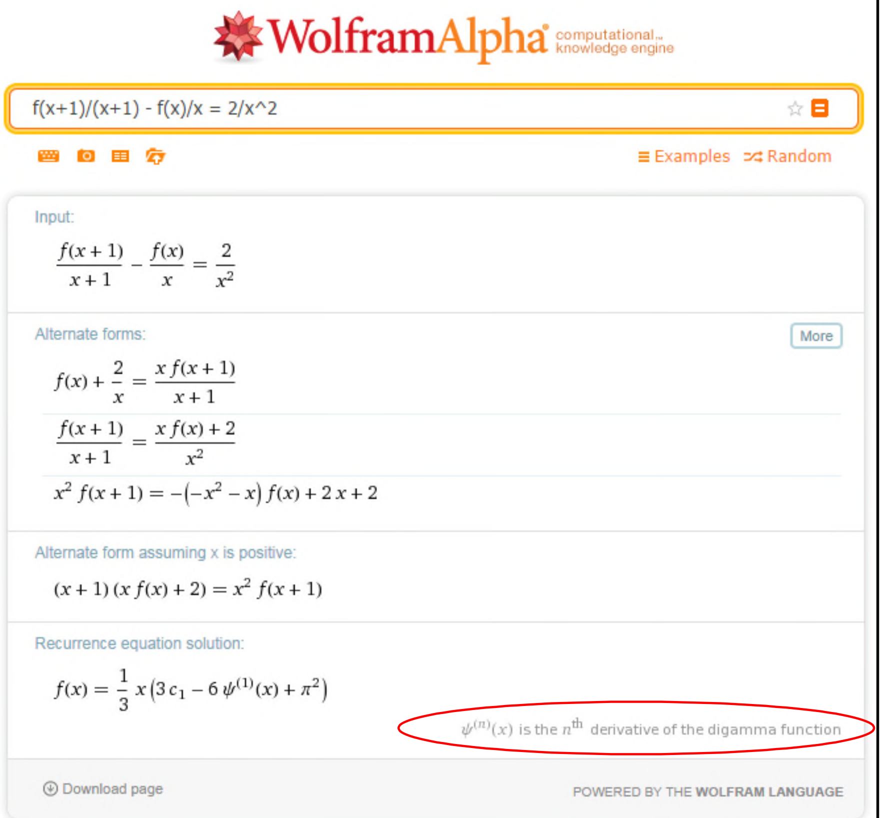
$$\therefore \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}}\frac{f(t)}{t}dt = -2\left\{\left(\cancel{\frac{2}{11} + \frac{2}{13} + \frac{2}{15} + \cdots}\right) - \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{9} + \cancel{\frac{2}{11} + \cdots}\right)\right\}$$

$$= 2\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{9}\right) = \frac{64}{63} \to p+q = 127$$

※ 이것으로 답은 구했지만 아까 등장한 함수

$$\frac{f(t)}{t}=\frac{2}{t^2}+\frac{2}{(t+1)^2}+\frac{2}{(t+2)^2}+\cdots$$

를 분석해보겠습니다. 확실히 친근한 함수는 아니네요.



그랬더니 digamma function이라는게 등장하네요?! 간단히 말해 gamma function이라는 것은 오일러가 $\left(\frac{1}{2}\right)!\left(=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$같은 factorial의 확장을 연구하면서 발견한 함수이고, digamma function은 gamma function에다 미분 등의 조작을 통해 정의한 것입니다.

그렇다고 출제자들이 이런 것을 염두에 두고서 문제를 낸 것은 절~~대 아니라 봅니다. 다보니 우연히 그렇게 된 것에 가깝겠지요. 그리고, 설령 우리가 이 함수의 정체를 안다고 한들 문제 해결에 지대한 영향을 끼쳤느냐 하면 그것 또한 대답은 No No No~입니다.

[2010년 11월 대수능 수리(가형) 28번]

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k\ \ (a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

[2013년 06월 평가원 수학 영역(B형) 30번]

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 $s,\ t\ (0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이 두 문제 역시 함수의 정체를 안다고 하여도 문제 해결에 커다란 도움을 주는 것은 없습니다.

단지 출제자가 의도한 대로,
소위 말하는 고교 교과과정에 충실한 풀이를 통해서
정답에 이르기를 요구하고 있습니다!

약간 비슷하게는 다음과 같은 문제도 있었습니다.

[2011년 11월 대수능 수리(가형) 28번]

28. 함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오. [4점]

이런 함수가 존재하기나 싶은 생각이 들 정도로 난해한 함수들이죠. 이럴 땐 당연한 말이지만 가장 원론적인 사실부터 출발해서 풀어 나가면 됩니다. 올해 수능 다음으로 중요한 시험인 9월 평가원에서 이런 문제를 내 주었으니 앞으로 이를 패러디한 문제들과, 이에 아이디어를 얻어 탄생한 신유형 문제들이 쏟아질 것이니 그때그때 주의 깊게 풀어보는 습관을 갖되 기존의 기출문제들도 철저히 분석하셔서 수능 때도 이런 문제를 맞추시길 바랍니다!