CHAPTER

04 그래프 그리기, 조건 해석

미적분의 시작은 그래프 그리기이다. 미적분이 수학Ⅱ보다 어렵다고 하는 결정적인 이유가 뭘까? 미분하기 전에 그래프 개형을 미리 모르는 경우가 많기 때문이다. 하지만 **미분하기 전에 미리 그래프 개형을 안다면? 수학Ⅱ와 난이도가 크게 다르지 않을 것이다.**

미적분 킬러 문제를 풀 때는 특수한 경우부터 따진다. 특수한 경우에 답이 나오는 경우가 매우 많다. **특수한 경우에 답이 나온다면 시험장에서 엄밀한 증명까진 필요 없고 문제의 조건과 충돌하는 지점이 없는지만 확인하자.**
다만 특수한 경우에서 답이 안 나온다면 바로 일반적인 경우도 고려하여 좀 더 엄밀하게 풀어야 한다.

이 교재의 예시 해설에서는 시험장에서의 생각과 일반적인 경우 모두 담고 있어 해설이 길어질 수 있다.
하지만 참고 읽다 보면 얻어가는 것이 있을 것이며 시험장에서는 무리 없이 특수한 경우부터 고려하는 자신감이 생길 것이다.

그래프 개형 그리기

미적분의 시작이다. 미분 없이 충분히 그래프 개형을 그릴 수 있는 상황에서 미분부터 먼저 하고 있다면 시간과 에너지가 너무 낭비되어 정작 필요한 조건 해석을 못 하는 불상사가 발생한다.

웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있다. 이때 **미분은 그래프 개형을 알아내는 주요 도구가 아닌 극점이나 변곡점 좌표를 구할 때 쓰는 보조도구로 전락**한다. **미분 없이 그래프 개형을 그리는 방법은 이 책 전반에 걸쳐 제일 많이 쓰이는 도구이니 꼭 체화하자.**

웬만한 문제에서는 미분 없이 그래프 개형을 그릴 수 있으나 분명 **한계가 존재할 때**도 있다. 이를 위해 **미분을 하여 도함수를 얻고 이로부터 원함수의 그래프 개형을 그리는 방법**도 가볍게 소개한다.

1. 미분 없이 그래프 개형 그리기

x축을 먼저 그린다. y축은 원점 위치를 정확히 알 때 그린다. 킬러 문제에서는 함수 $f(x)$가 확정되지 않은 경우가 많기에 원점 위치를 모를 때가 많다. **원점 위치를 모를 때 y축은 문제 상황 파악과 조건 파악에 방해만 될 뿐이다.**

x축을 먼저 그리고 밑의 5가지를 '순서대로' 따지면 미분 없이 함수 $f(x)$그래프 개형을 쉽게 그릴 수 있다.

1. **우함수나 기함수인가?** 우함수일 때는 그래프가 y축 대칭임을, 기함수일 때는 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.

2. $\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$**의 값을 표시하자.**

3. $x = \alpha$**에서** $y = f(x)$**가 수직 점근선을 갖는다면** $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha-} f(x)$**의 값을 표시하자.**

4. **x축과의 교점은 몇 개일까?** 직접적인 $f(x) = 0$의 해를 구하면 시간이 너무 오래 걸린다. 그래프 개형 그릴 땐 **x축과의 교점 개수 정도만 표시하자.**

5. 위의 4가지를 고려하면 직관적으로 그래프 개형을 예상할 수 있고 이를 바탕으로 그래프 개형을 완성할 수 있다. 예상이 틀릴까 봐 걱정하지 말자. 예상이 대체로 잘 맞는다. 극점의 개수가 애매할 때는 이후에 미분하여 확인하면 된다.

다만, **극한 처리를 할 때 주의할 점**이 있다.

예를 들어 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$라고 하자. 그래프 개형을 그리기 위해서 x가 무한히 커질 때 $f(x)$가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근하는지, 0보다 작은 곳에서 0으로 접근하는지, 0에서 0으로 접근하는지 표시가 필요하다. **x가 무한히 커질 때 $f(x)$가 0보다 큰 곳에서 0으로 접근한다면** $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0+$**, 0보다 작은 곳에서 0으로 접근한다면** $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0-$**, 0에서 0으로 접근한다면** $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$**으로 표기하도록 하자.**

$\lim_{x \to \infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha+} f(x)$, $\lim_{x \to \alpha-} f(x)$에서 $\pm\frac{\infty}{\infty}$또는 $\pm\infty \times 0$ 꼴이 나오는 경우가 있다.
이럴 땐 어떻게 해야 할까? **증가함수에서 로그함수<무리함수<다항함수<지수함수 순으로 더 강한 영향력을 가진다고 생각하면 편하다.** 증명은 교과 외인 로피탈 정리를 사용한다.

예를 들어 극한이 $\pm\frac{\infty}{\infty}$또는 $\pm\infty \times 0$ 꼴이 나올 때 e^x은 x^{100}보다, x^2은 $10^{10}\sqrt{x}$보다, $\sqrt{x}$은 $10^{10}\ln x$보다도 강한 영향력을 가진다. 따라서 $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0+} x \ln x = 0$, $\lim_{x \to \infty} x e^{-x} = 0$이다.

$f(x)=(x-2)(x-3)e^{-x}$의 그래프 개형을 그려보자.

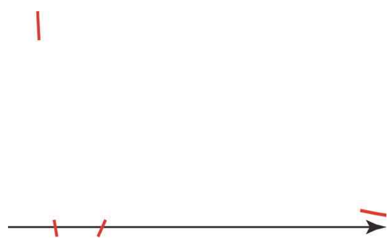
1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$를 표시하자.

※ $\lim_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

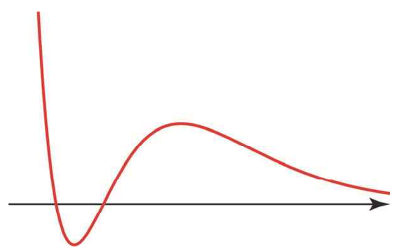
지수함수는 다항함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x\to\infty}(x-2)(x-3)e^{-x}=\infty\times 0+=0+$이다.

$\lim_{x\to-\infty}(x-2)(x-3)e^{-x}=\infty\times\infty=\infty$이다.

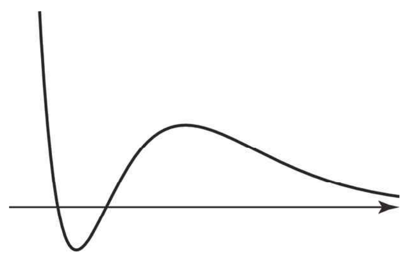
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의되므로 $y=f(x)$는 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점이 2개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$의 그래프 개형을 그려보자.

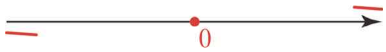
1. **기함수이다. 그래프가 원점 대칭임을 염두에 두자.**
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0-$를 표시하자.

※ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0-$임을 어떻게 알아냈을까?

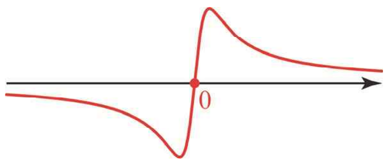
이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{-\infty}{\infty}=0-$이다.

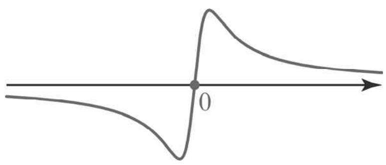
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의되므로 $y=f(x)$는 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다. **원점 대칭임을 반영하자.**

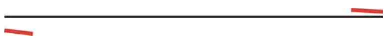


예상이 실제로 맞다!



$f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$의 그래프 개형을 그려보자.

1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $\lim_{x \to \infty} f(x)=0+$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0-$를 표시하자.

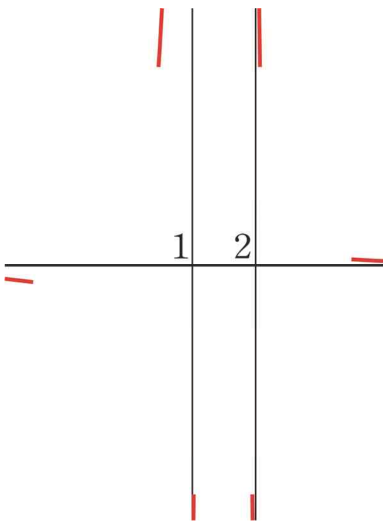


※ $\lim_{x \to \infty} f(x)=0+$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0-$임을 어떻게 알아냈을까?

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

이차함수는 일차함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{-\infty}{\infty}=0-$이다.

3. **함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$일 때 정의되지 않는다.** $\lim_{x \to 1+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2-} f(x)=-\infty$ **이므로 $y=f(x)$는 $x=1$, $x=2$에서 수직 점근선을 갖는다.** $\lim_{x \to 1+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2-} f(x)=-\infty$ **를 표시하자.**

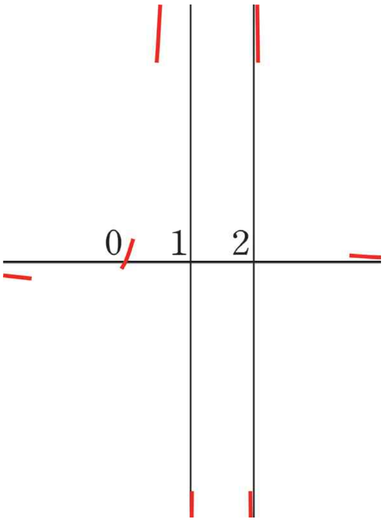


※ $\lim_{x \to 1+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2+} f(x)=\infty$, $\lim_{x \to 2-} f(x)=-\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

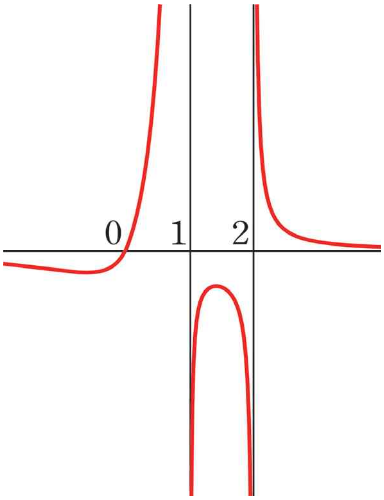
$\lim_{x \to 1+} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$이다. $\lim_{x \to 1-} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0+}=\infty$이다.

$\lim_{x \to 2+} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0+}=\infty$이다. $\lim_{x \to 2-} \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{0-}=-\infty$이다.

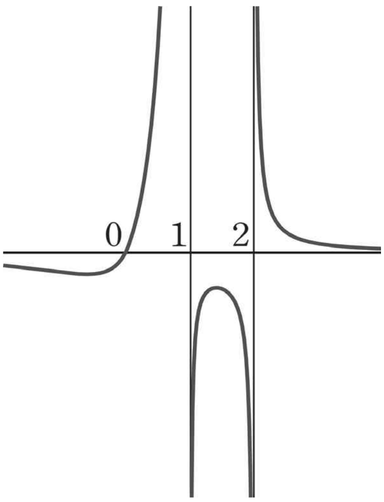
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제로 맞다!



$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$의 그래프 개형을 그려보자.

0. **로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.**
   $\ln x$**는** $x>0$**에서만 정의된다.**

1. 우함수나 기함수가 아니다.
2. $x>0$**에서만 정의되기에** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$만 따지면 된다. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$를 표시하자.

※ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0+$임을 어떻게 알아냈을까?

다항함수는 로그함수보다 더 큰 영향력을 가지므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=0+$이다.

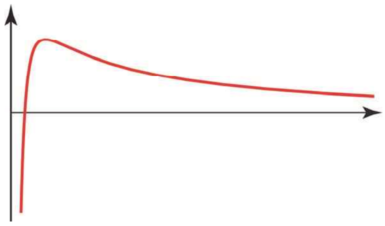
3. **함수** $f(x)$**는** $x=0$**일 때 정의되지 않는다.** $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$ **이므로** **$y=f(x)$는 $x=0$에서 수직 점근선을 갖는다.** $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$를 표시하자.

※ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$임을 어떻게 알아냈을까?

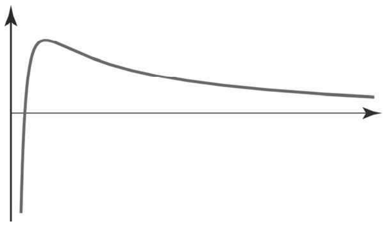
$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{-\infty}{0+}=-\infty$이다.

4. x축과의 교점이 1개임을 표시하자.

5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



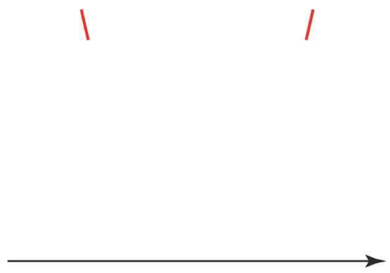
예상이 실제로 맞다!



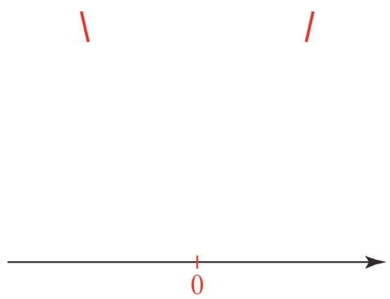
$f(x)=\ln(x^2+1)$의 그래프 개형을 그려보자.

0. **로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다.**
   $\ln(x^2+1)$에서 항상 $x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의된다.

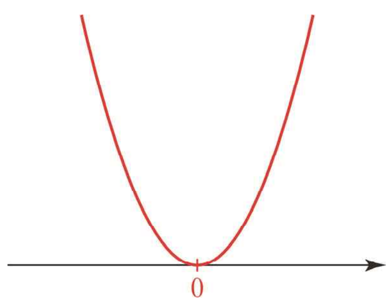
1. **우함수이다. 그래프가 y축 대칭임을 염두에 두자.**
2. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$를 표시하자.



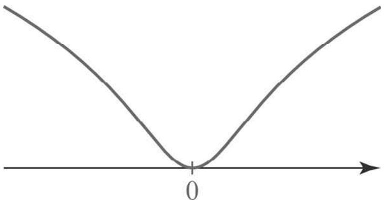
3. **함수 $f(x)$는 실수 전체 집합에서 정의가 되므로 수직 점근선을 갖지 않는다.**
4. x축과의 교점은 원점 1개임을 표시하자.



5. 위의 4가지를 고려하면 예상되는 그래프 개형은 아래와 같다.



예상이 실제와 살짝 다르다. 우리가 그린 그래프 개형은 $y=x^2+1$과 유사하다. 하지만 $x>0$에서 $y=\ln x$**는** $y=x$**보다 증가속도가 훨씬 느리기에** $y=\ln(x^2+1)$ **역시** $y=x^2+1$**보다 증가속도가 훨씬 느리다.** 이를 반영해 그래프 개형을 수정하면 아래와 같다.



변곡점이 생긴다는 점에 주목하자.

5가지만 순서대로 따져주면 그래프 개형이 비교적 쉽고 정확하게 그려진다는 것을 확인할 수 있다. **다만, 삼각함수×다항함수나 삼각함수×초월함수 꼴은 실수 전체 집합이 아닌 삼각함수의 한 주기 내에서 5가지를 순서대로 따져주며 한 주기 내의 그래프 개형을 그려주자.** 그 후에 실수 전체 집합에서의 그래프 개형을 그리면 된다.

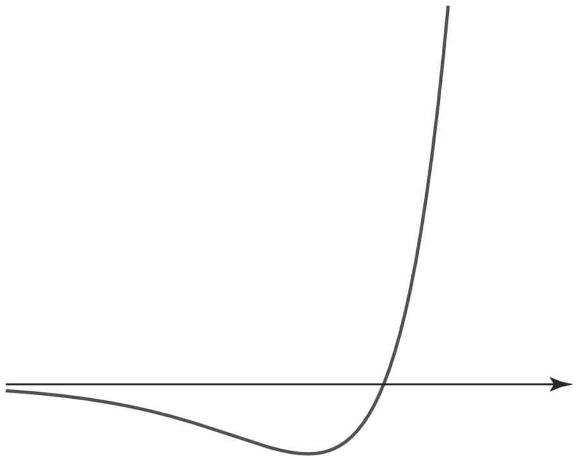
2. 암기해야 할 그래프 개형

자주 나오는 그래프 개형들을 소개한다. 전에 소개한 미분 없이 그래프 개형 그리기로 직접 그려보고 자연스럽게 암기하자.

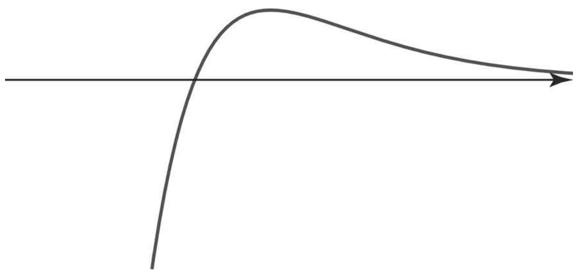
(1) $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ **꼴**

최다 빈출 꼴이다. 다항함수 최고차항 계수가 음수이면 x축 대칭시키면 된다.

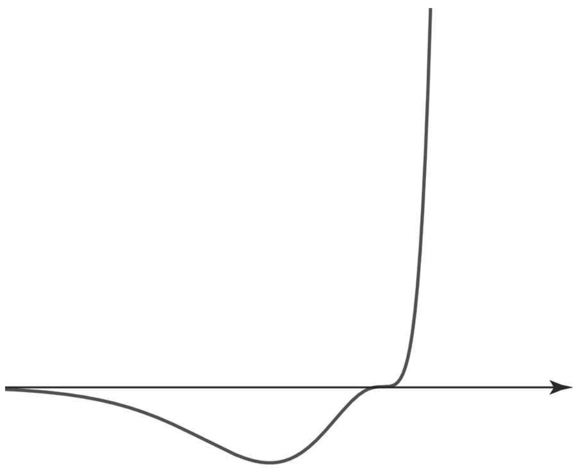
$y=xe^{x}$, $(\text{일차함수})\times e^{x}$ **꼴**



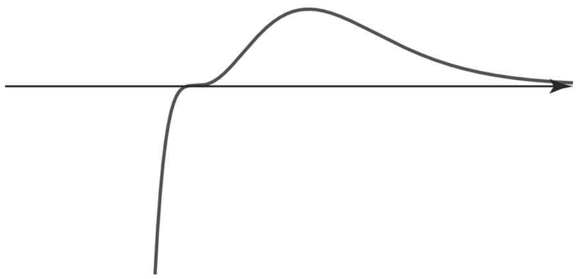
$y=xe^{-x}$, $(\text{일차함수})\times e^{-x}$ **꼴**



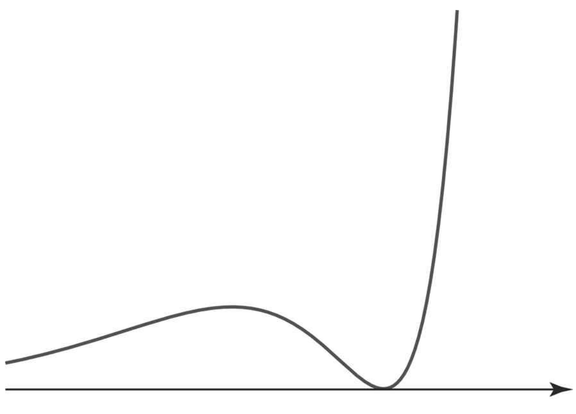
$y = x^{2k-1}e^{x}$ **꼴** (k는 2 이상의 자연수)



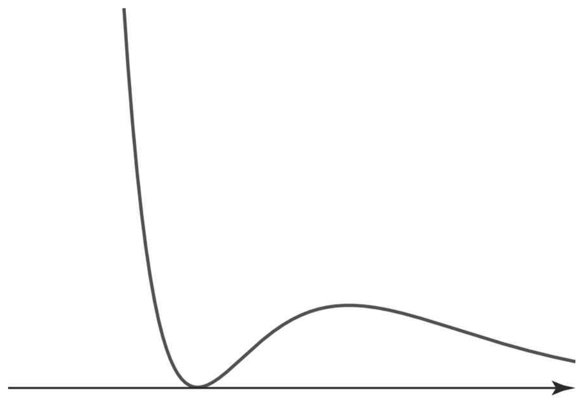
$y = x^{2k-1}e^{-x}$ **꼴** (k는 2 이상의 자연수)



$y = x^{2k}e^{x}$ **꼴** (k는 자연수)

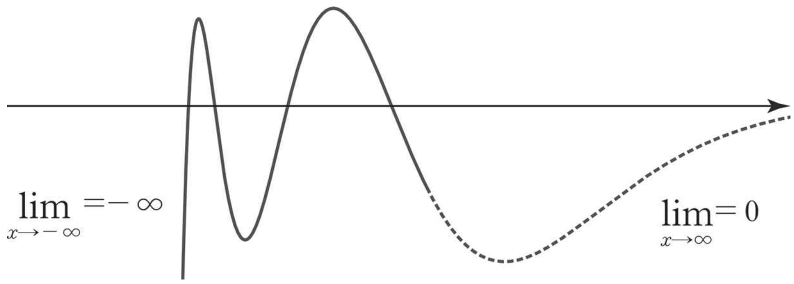


$y=x^{2k}e^{-x}$ **꼴** (k는 자연수)



결론적으로 $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ **꼴의 다항함수의 차수가** n**일 때 실근의 개수가** n**인 일반적인 경우,**
$(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ **꼴은 다항함수 그래프처럼 그린 다음** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$**,** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$**의 값을 표시하면 된다.**

예를 들어 최고차항 계수가 음수일 때 일반적인 $(\text{사차함수})\times e^{-x}$는 아래와 같이 그려진다.
(사차함수가 서로 다른 실근 4개를 가질 때)



하지만 $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ **꼴의 다항함수의 차수가** n**일 때 실근의 개수가** n**이 아니라면,**
미분을 하여 극대, 극소가 되는 지점의 수를 따져 그래프 개형을 그려야 한다.

(2) (다항함수)$\times \ln x$ 또는 (분수함수)$\times \ln x$ 꼴

$\dfrac{(\text{다항함수})}{(\text{다항함수})}$ 꼴의 분수함수 중 **분자의 차수가 분모의 차수보다 크거나 같은 꼴을 '가분수 꼴'**이라고 부르겠다.

이런 '가분수 꼴'은 '대분수 꼴'로 꼭 분리하자!

예를 들어 $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{x}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$로 바꿔주자. 등식의 우변을 '대분수 꼴'이라고 부르겠다. **그래프 개형을 그리거나 x에 대해 미분, 적분할 때 훨씬 유리**하다.

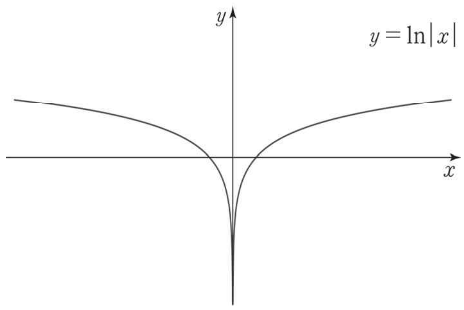
다만, 분수함수가 우함수나 기함수일 때는 예외이다. 우함수나 기함수인 것을 쉽게 알아볼 수 있는 형태로 분수함수를 두는 것이 그래프 개형을 그릴 때 유리하다.

예를 들어 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$의 그래프 개형을 그릴 때는 $x-\dfrac{x}{x^2+1}$보다 $\dfrac{x^3}{x^2+1}$꼴일 때 기함수임을 쉽게 알아볼 수 있기 때문에 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 형태로 두고 그래프 개형을 그린다.

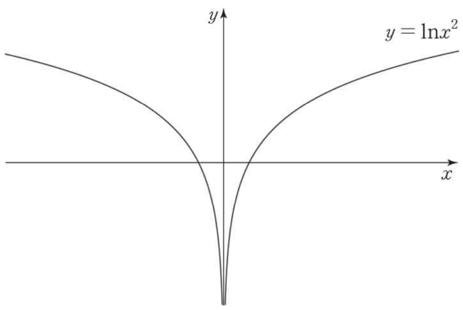
로그함수가 나오면 모든 것을 멈추고 밑, 진수 조건을 따져야 한다. 예를 들어 $\ln f(x)$를 보면 $f(x)>0$임을 꼭 적어주자.

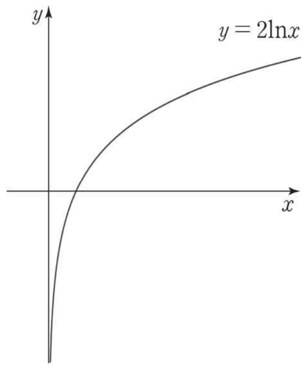
$y=\ln|x|$의 그래프를 그려보자. $y=\ln|x|$은 $x\neq 0$에서 정의되는 함수이다.

$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x & (x>0)\\ \ln(-x) & (x<0)\end{cases}$ 이다. 따라서 $y=\ln|x|$의 그래프는 아래와 같다.

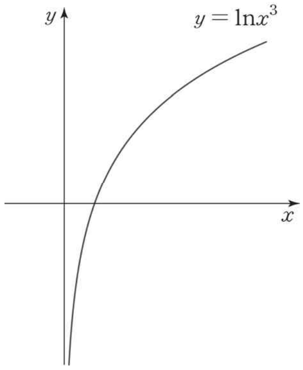


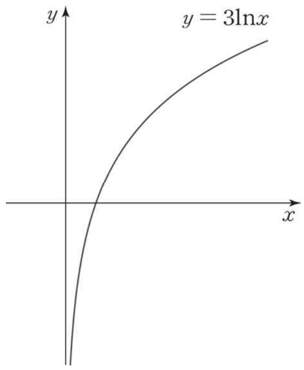
n**이 자연수일 때,** $\ln x^{2n} \neq 2n\ln x$**이다.** $\ln x^{2n}$**는** $x \neq 0$**에서 정의되는 함수이고** $2n\ln x$**는** $x > 0$**에서 정의되는 함수이기 때문이다.** $x > 0$에서만 $\ln x^{2n} = 2n\ln x$이다.
따라서 $y = \ln x^2$, $y = 2\ln x$의 그래프는 아래와 같다.





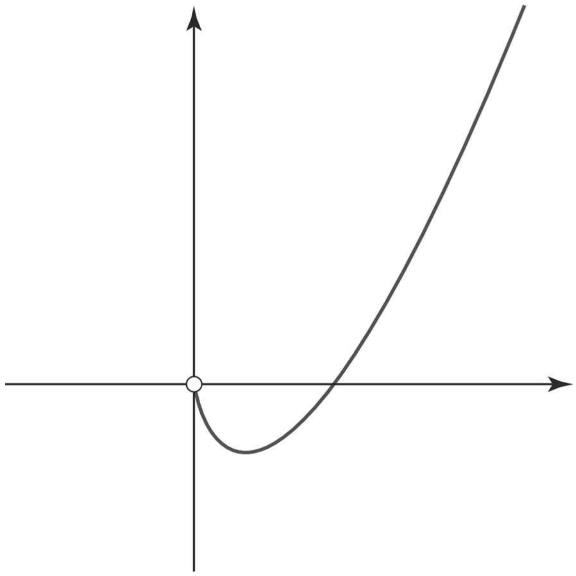
n이 자연수일 때, $\ln x^{2n-1} = (2n-1)\ln x$ 이다. $\ln x^{2n-1}$, $(2n-1)\ln x$은 **모두** $x > 0$**일 때만 정의되기 때문이다.**
따라서 $a > 1$일 때, $y = \ln x^3$, $y = 3\ln x$의 그래프는 아래와 같다.



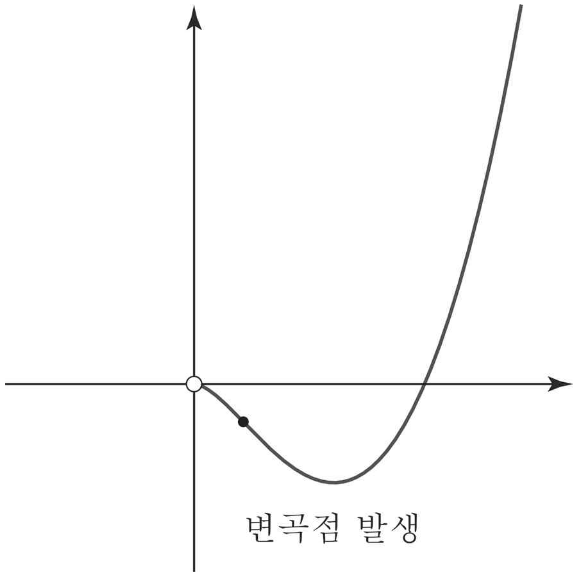


로그함수의 성질을 최대한 잘 이용하자. $y = \ln 2x$**는** $\ln 2 + \ln x$**로 바꾸고,** $y = \log_2 x$**는** $y = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$**로 바꾸자.**
그래프 그릴 때도 수월하고 무엇보다도 미분할 때 실수를 줄일 수 있다.

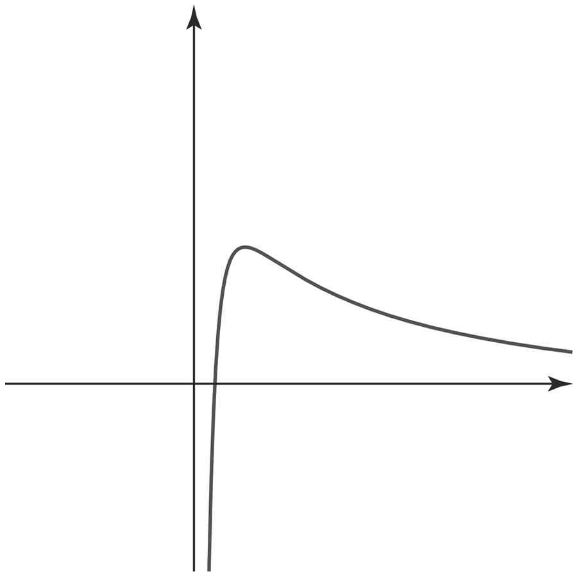
$y = x\ln x$ **꼴** $\left(\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0\right)$



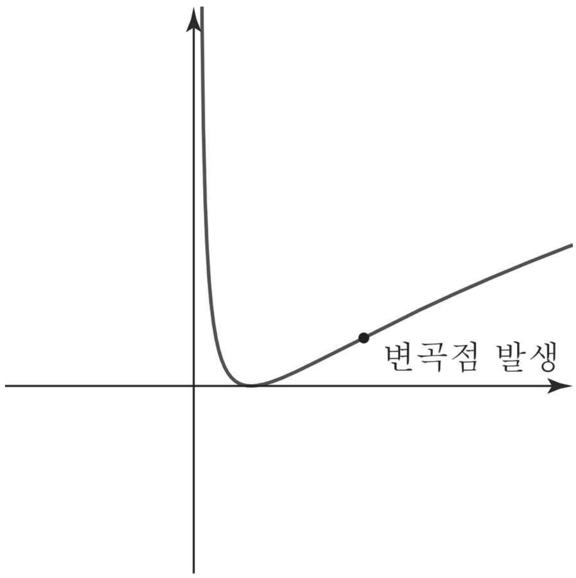
$y = x^2\ln x$ **꼴** $\left(\lim_{x\to 0+} x^2\ln x = 0\right)$



$y=\dfrac{\ln x}{x^n}$ **꼴** (n은 자연수)



$y=(\ln x)^2$ **꼴**



※ $y=\ln x$는 증가함수이고 $y=(\ln x)^2$는 $y=x^2$에 $y=\ln x$를 합성한 것이므로 $y=x^2$의 그래프 개형과 비슷하다는 것을 예측할 수 있다. **하지만** $x>0$**에서** $y=\ln x$**는** $y=x$**보다 증가속도가 훨씬 느리기에** $y=(\ln x)^2$ **역시** $y=x^2$**보다 증가속도가 훨씬 느리다. 따라서 그래프 개형을 그릴 때 변곡점이 생긴다는 것을 고려하자.**

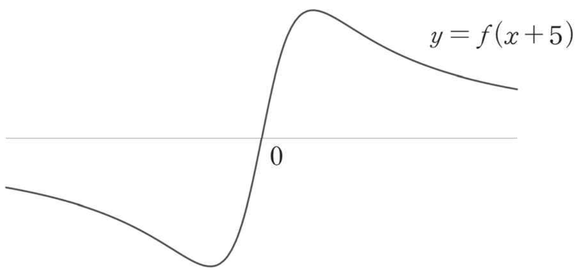
예제(1) 06학년도 수능 30번

양수 a에 대하여 닫힌 구간 $[-a, a]$에서 함수

$$f(x)=\frac{x-5}{(x-5)^2+36}$$

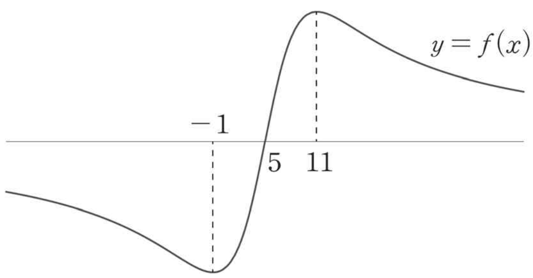
의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

1. $y=f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$는 $y=f(x+5)=\dfrac{x}{x^2+36}$의 그래프를 x축 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프이다. $y=f(x+5)=\dfrac{x}{x^2+36}$의 그래프 개형은 '미분 없이' 그리면 아래와 같다.



$y'=\dfrac{36-x^2}{(x^2+36)^2}$이므로 $y=\dfrac{x}{x^2+36}$는 $x=6$에서 극대이고, $x=-6$에서 극소이다.

2. 따라서 $y=f(x+5)=\dfrac{x}{x^2+36}$의 그래프를 x축 방향으로 5만큼 평행이동한 $y=f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 그래프 개형은 아래와 같다.



$0<a<1$일 때, $M+m\neq 0$이다. $a=1$일 때, $M+m\neq 0$이다.

$a>1$일 때, $m=f(-1)=-\dfrac{1}{12}$이므로 $M+m=0$을 만족하려면 $M=f(11)=\dfrac{1}{12}$이어야 한다.

이를 만족하려면 닫힌 구간 $[-a, a]$이 닫힌 구간 $[-1, 11]$을 포함해야 하므로 $a\geq 11$이다.

따라서 a의 최솟값은 11이다.

답은 11!!

예제(2) 13학년도 수능 21번

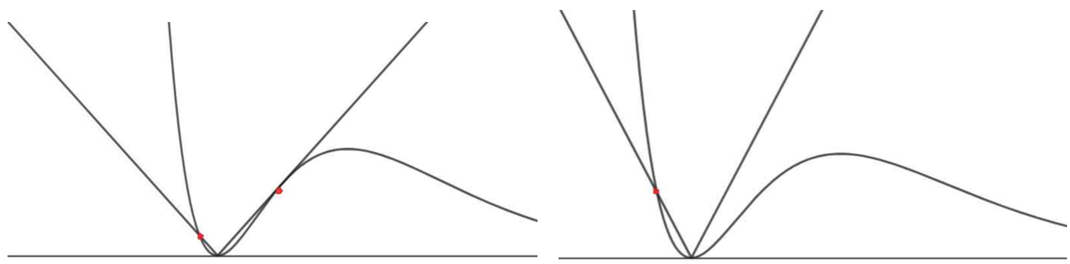
함수 $f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

1. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$의 그래프 개형은 '미분 없이' 쉽게 그릴 수 있다.
점 $(t,\ f(t))$에서 x축과의 거리는 $|t|$이고 y축과의 거리는 $|f(t)|$이다.
$k>0$이므로 $|f(t)|=f(t)$이다.

따라서 함수 $g(t)=\begin{cases} f(t) & (f(t)\le |t|) \\ |t| & (f(t)\ge |t|) \end{cases}$ 이다.

2. 함수 $g(t)$가 미분가능하지 않은 점을 찾기 위해 함수 $y=|t|$와의 교점을 찾아보자.



$t<0$에서 $y=f(t)$와 $y=|t|$의 접하지 않는 교점에서 함수 $g(t)$는 미분가능하지 않으므로 $t>0$에서 곡선 $y=f(t)$와 $y=|t|$가 만나지 않거나 접하여야 함수 $g(t)$는 미분가능하다.
두 그래프가 접할 때 k값이 최대이므로 두 그래프가 접하는 상황인

$\begin{cases} f(t)=t \\ f'(t)=1 \end{cases}$ 를 만족하는 t값을 찾아보자.

$\begin{cases} kt^2e^{-t}=t \\ k(2t-t^2)e^{-t}=1 \end{cases}$ 에서 $kte^{-t}=k(2t-t^2)e^{-t}=1$이므로 $t=1,\ k=e$를 얻는다.

답은 ⑤!!

예제(3) 14년 4월 교육청 30번

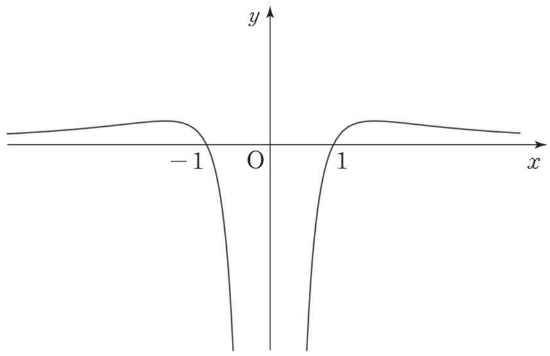
함수 $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$의 극댓값을 α라 하자. 함수 $f(x)$와 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)-\dfrac{\alpha}{n}x=0$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

1. $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$는 $x \neq 0$**에서 정의되므로** 방정식 $f(x)=\dfrac{\alpha}{n}x$에서 양변을 x로 나눠서 생각하자.

$\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\alpha}{n}$에서 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$로 두자.

앞서 암기해야 할 그래프 개형을 충분히 숙지했다면 $g(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}=\dfrac{2\ln|x|}{x^2}$의 그래프를 그리는 것이 어렵지 않았을 것이다.

함수 $g(x)$는 우함수이므로 구간$(0,\ \infty)$에서의 그래프를 먼저 그려주고
y축에 대하여 대칭시켜 구간$(-\infty,\ 0)$에서의 그래프를 그리면 된다.



그래프 개형을 다 그렸으면 극댓값을 구하자.

$g'(x)=\dfrac{2x(1-2\ln x)}{x^4}\ (x>0)$에서

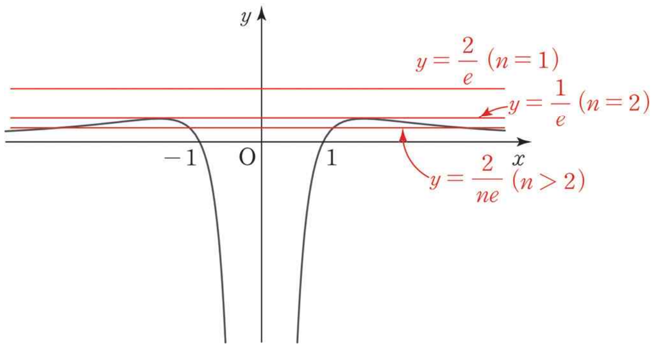
$g'(\sqrt{e})=0$이므로 극댓값은 $g(\sqrt{e})=\dfrac{1}{e}$이고, 이는 최댓값이다.

2. 직선 $y=\dfrac{\alpha}{n}$의 그래프를 구하기 위해 α의 값을 구해보자.

$f'(x)=\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}\ (x>0)$이므로 $f'(e)=0$에서 $\alpha=f(e)=\dfrac{2}{e}$이다.

방정식 $g(x)=\dfrac{\alpha}{n}$의 근의 개수를 구하기 위해 함수 $g(x)$와 직선 $y=\dfrac{\alpha}{n}=\dfrac{2}{ne}$의 그래프를 그려 교점의 개수를 파악해야 한다.

따라서 $a_1=0,\ a_2=2,$
$a_n=4\,(n\geq 3)$ 이므로
$\sum_{n=1}^{10} a_n=0+2+4\times 8=34$이다.



답은 34!!

comment

$g(x)=\dfrac{\ln x^2}{x^2}$를 단순히 $g(x)=\dfrac{2\ln x}{x^2}$로 바꾸어 실수하는 경우가 매우 많다. 로그함수가 정의되는 정의역 구간에 항상 신경을 곤두세우자. 또한 '곡선과 직선이 만나는 형태'로 풀며 실수한 경우도 있을 것이다.

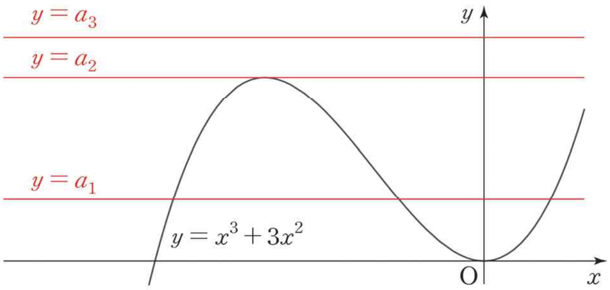
예제(4) 18학년도 사관 28번

함수 $f(x)=(x^3-a)e^x$ 과 실수 t 에 대하여 방정식 $f(x)=t$ 의 실근의 개수를 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 불연속인 점의 개수가 2 가 되도록 하는 10 이하의 모든 자연수 a 의 값의 합을 구하시오. (단, $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$) [4점]

1. 함수 $f(x)$의 개형은 a값에 따라서 개형이 달라진다.

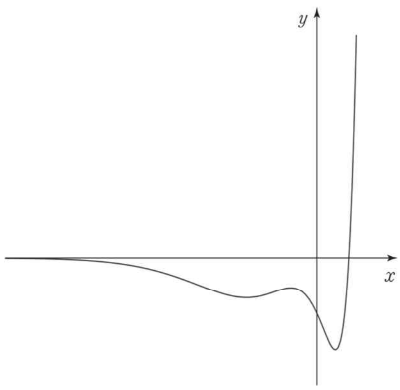
따라서 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 그리기 위해 $f'(x)$를 구해서 접근해야 한다.

$f'(x)=(x^3+3x^2-a)e^x$에서 $e^x>0$이므로 $y=x^3+3x^2$의 그래프와 $y=a$의 그래프의 관계를 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 파악하자.



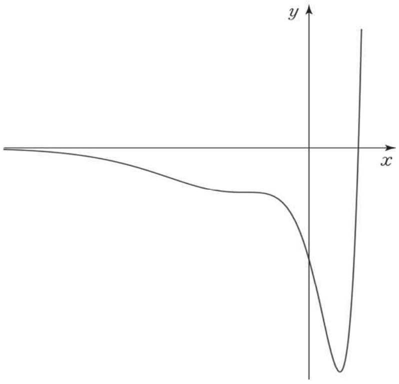
2. 이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그려보자.

(1) $y=a_1$ $(0<a_1<4)$



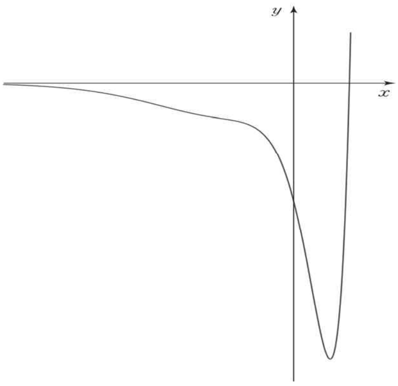
함수 $f(x)$의 극점은 3개이므로 함수 $g(t)$의 불연속인 점의 개수는 4이다.

(2) $y=a_2\ (a_2=4)$



함수 $f(x)$의 극점은 1개이므로 함수 $g(t)$의 불연속인 점의 개수는 2이다.

(3) $y=a_3\ (a_3>4)$



함수 $f(x)$의 극점은 1개이므로 함수 $g(t)$의 불연속인 점의 개수는 2이다.

따라서 발문의 조건을 만족하는 모든 자연수 a의 값의 합은 $\sum_{a=4}^{10} a = 55-6=49$이다.

답은 49!!

comment

$(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ 꼴의 다항함수의 차수가 n일 때 실근의 개수가 n인 일반적인 경우,
$(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ 꼴은 다항함수 그래프처럼 그린 다음 $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$의 값을 표시하면 된다.

하지만 $(\text{다항함수})\times e^{\pm x}$ 꼴의 다항함수의 차수가 n일 때 실근의 개수가 n이 아니라면,
미분을 하여 극대, 극소가 되는 지점의 수를 따져 그래프 개형을 그려야 한다.
이를 염두에 두지 않고 문제를 풀었다면 극점의 개수가 다르게 나와 오답을 냈을 것이다.

예제(5) 20년 10월 교육청 20번

자연수 n에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{nx}{x^n+1} & (x \neq -1) \\ -2 & (x=-1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

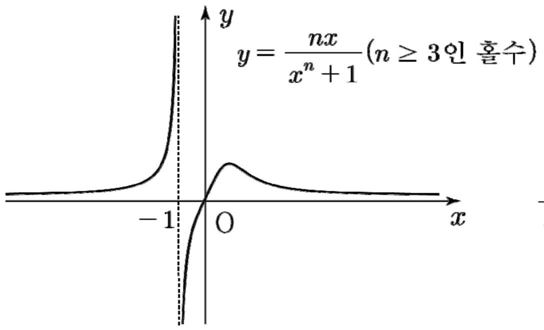
ㄱ. $n=3$일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다.

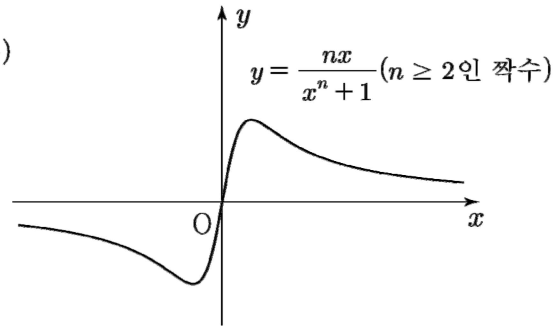
ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이 되도록 하는 n에 대하여 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 구간 $(-1,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 모든 자연수 n의 값의 합은 24이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $y=\dfrac{nx}{x^n+1}$ 의 그래프는 '미분 없이' 그릴 수 있다.





n이 홀수일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가한다. 선지 (ㄱ)은 참.

2. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면 n은 짝수여야 하고, $f(-1)=\dfrac{-n}{2}=-2$에서 $n=4$이다.

함수 $f(x)$의 극댓값을 구하기 위해 미분하자. $f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$에서 $n=4$일 때

$f'(x)=\dfrac{4-12x^4}{(x^4+1)^2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3^{-\frac{1}{4}}$에서 극댓값을 갖는다.

$f\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)=\dfrac{4\cdot3^{-\frac{1}{4}}}{\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^4+1}=\dfrac{4\cdot3^{-\frac{1}{4}}}{\frac{4}{3}}=3^{\frac{3}{4}}>2$이므로 선지 (ㄴ)은 참.

3. 함수 $f(x)$가 구간 $(-1,\ \infty)$에서 극솟값을 가지려면 n은 짝수여야 한다.

$f'(x)=\dfrac{n-(n^2-n)x^n}{(x^n+1)^2}$에서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{-1}{\sqrt[n]{n-1}}$에서 극솟값을 갖는다.

(1) $n=2$일 때, $x=-1$이므로 구간 $(-1,\ \infty)$을 벗어난다. (x)

(2) $n\geq4$일 때, $x=\dfrac{-1}{\sqrt[n]{n-1}}>-1$이므로 구간 $(-1,\ \infty)$에 포함된다.

따라서 구간 $(-1,\ \infty)$에서 극솟값을 갖도록 하는 10 이하의 자연수 n은 4, 6, 8, 10이므로
합은 28이다. 선지 (ㄷ)은 거짓.

답은 ②!!

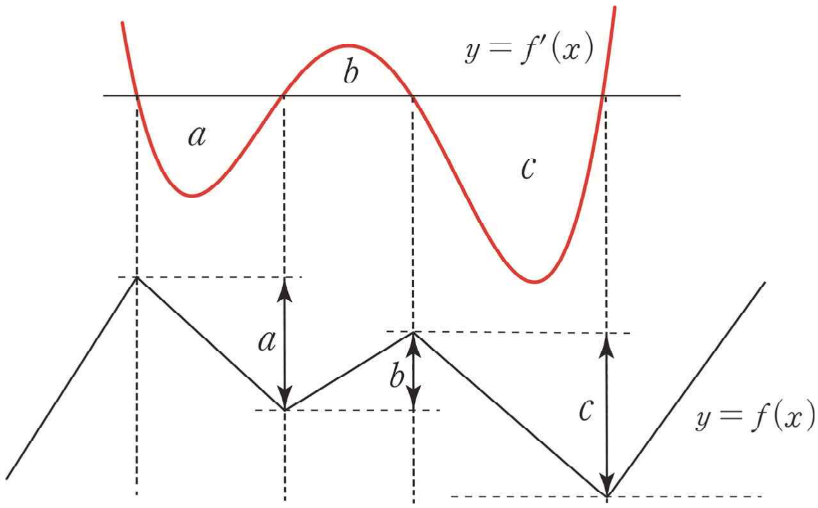
3. 미분을 이용한 그래프 그리기

$f(x)$가 미분가능한 함수라고 하자. 미분 없이 그래프 그리기가 잘 안 통할 때,
$y=f'(x)$로부터 $y=f(x)$ 그래프 개형을 그려낸다.

어떤 구간에서 $f'(x)$의 정적분 값은 $f(x)$의 함숫값 차이이다.

$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$를 이용하여 $y=f'(x)$로부터 $y=f(x)$의 그래프 개형을 알아낼 수 있다.

단, $y=f(x)$ 그래프의 정확한 x축 위치는 적어도 하나의 $f(k)$ 값을 알아야 확정할 수 있다. (k는 상수)



a, b, c는 $y=f'(x)$와 x축이 둘러싸인 넓이이다. $y=f(x)$를 **간편하게 위처럼 그렸지만 실제로는 smooth 한 곡선임을 염두에 두자.**