6월 모의평가 대비
우주설 모의고사 3회
정답 및 해설

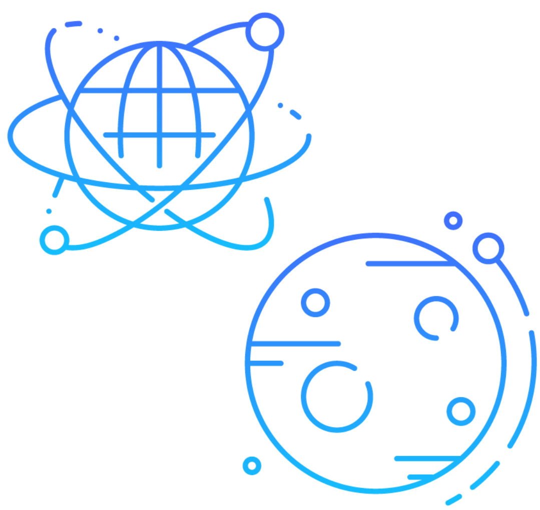
우주설 지음

생각을 조심하라. 말이 된다.
말을 조심하라. 행동이 된다.
행동을 조심하라. 습관이 된다.
습관을 조심하라. 성격이 된다.
성격을 조심하라. 운명이 된다.
우리는 생각하는 대로 된다

(Watch your thought, or they become words, Watch your words, for they become actions,
Watch your actions, for they become habits, Watch your habits, for they become character,
Watch your character, for it becomes your destiny
What we think, we become.)

- Margaret Thatcher, The Iron lady

우주설



2023학년도 대학수학능력시험 우주설 모의고사 해설지

수학 영역

6월 모의평가 대비 3회

정 답

공통과목									
1	③	2	⑤	3	①	4	④	5	③
6	④	7	③	8	①	9	②	10	⑤
11	①	12	④	13	③	14	⑤	15	③
16	7	17	26	18	9	19	29	20	35
21	11	22	500						
미적분									
23	②	24	⑤	25	②	26	③	27	①
28	④	29	59	30	5				

1. 정답 : ③

생략

2. 정답 : ⑤

생략

3. 정답 : ①

생략

4. 정답 : ④

생략

5. 정답 : ③

생략

6. 정답 : ④

생략

7. 정답 : ③

생략

8. 정답 : ①

생략

9. 정답 : ②

생략

10. 정답 : ⑤

$f(1)=0$이므로 $f(x)=(x-1)Q(x)$라 하면

$\lim\limits_{x\to1}\frac{|f(x)|}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{|x-1||Q(x)|}{x-1}$ 이다.

$\lim\limits_{x\to1+}\frac{|x-1|}{x-1}Q(x)=Q(1)$, $\lim\limits_{x\to1-}\frac{|x-1|}{x-1}Q(x)=-Q(1)$이므로

$Q(1)=0$이고, $f(2)=0$이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-2)$이고 $f(4)=18$이다.

11. 정답 : ①

$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2 & (a_n\le 0)\\ 2a_n-3 & (a_n>0)\end{cases}$, $a_{n+2}=\begin{cases}a_{n+1}+2 & (a_{n+1}\le 0)\\ 2a_{n+1}-3 & (a_{n+1}>0)\end{cases}$이므로

$a_{n+2}=\begin{cases}a_n+4 & (a_n\le -2)\\ 2a_n+1 & (-2<a_n\le 0)\\ 2a_n-1 & \left(0<a_n\le \frac{3}{2}\right)\\ 4a_n-9 & \left(\frac{3}{2}<a_n\right)\end{cases}$ 를 얻는다. $a_2=a_4$에 대하여

a_2는 $a_n=a_{n+2}$의 실근이라 볼 수 있으므로

$a_2=-1,\ 1,\ 3$이다.

$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+2 & (a_n\le 0)\\ 2a_n-3 & (a_n>0)\end{cases}$를 이용하여 이에 대응되는 a_1을 구하면

$a_1=-3,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$이다.

12. 정답 : ④

$g(x)=(x-a)\times|f(x)|$ 이므로 $|f(x)|$가 불연속함수라 하더라도

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이다. ($g(a)=0$)

$g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면

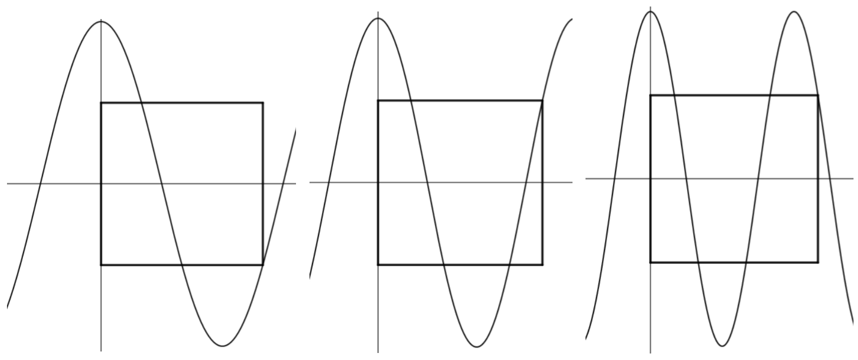
$\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$의 값이 존재하면 된다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{x-a}|f(x)|\\&=\lim_{x\to a}|f(x)|\end{aligned}$$

이므로, $|a^2-3|=|3a-1|$ 을 만족시키는 a의 값을 구하면 된다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 유의하여 마무리하자.

13. 정답 : ③



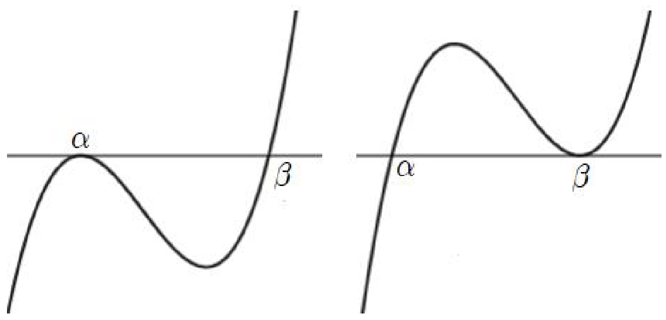
$t=\frac{2}{3}\pi$일 경우 $t=\frac{5}{6}\pi$일 경우 $t=\frac{7}{6}\pi$일 경우

따져야 할 주요 상황은 위 그림과 같다.

$p=\frac{2}{3}\pi$, $q=\frac{7}{6}\pi$를 얻는다.

14. 정답 : ⑤

$f(x)$의 최고차항이 양수일 경우



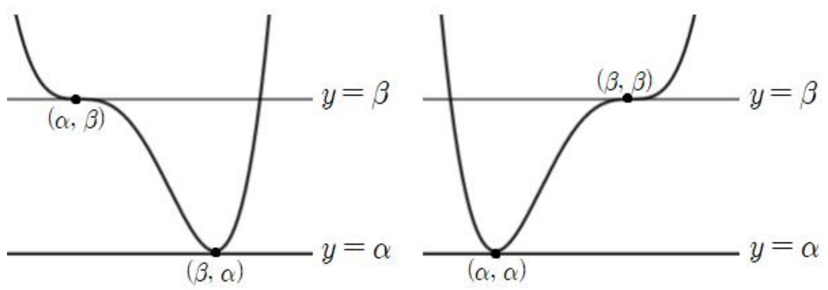
α, β중 중근인 것이 무엇이냐에 따라 개형은 위와 같이 분류된다.

집합 $A=\left\{x \mid f\left(\int_0^x f(t)dt\right)=0\right\}$ 의 원소는

$\int_0^x f(t)dt=\alpha$ 또는 β의 실근이므로

$\alpha<\beta$임에 유의하여 $A\supset\{\alpha, \beta\}$를 만족시키는

곡선 $y=\int_0^x f(t)dt$를 그리면 아래와 같다.

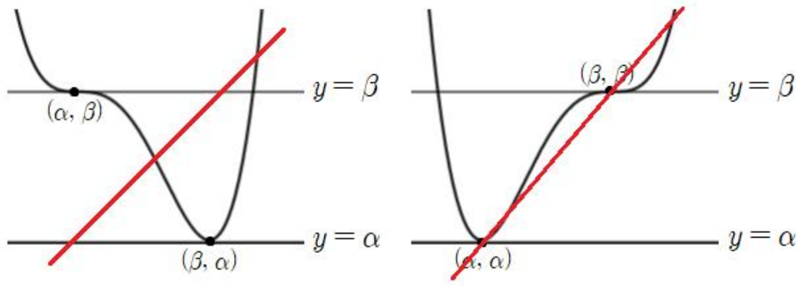


이때, $\alpha<\beta$이므로 점 (α, β)는 직선 $y=x$보다 위쪽부분에 있고

점 (β, α)는 직선 $y=x$보다 아래쪽부분에 있어야 한다.

또한 점 (α, α)와 점 (β, β)는 직선 $y=x$위에 있어야 한다.

이를 반영하여 곡선 $y=\int_0^x f(t)dt$와 함께 나타내면 아래와 같다.



최고차항이 음수인 경우도 마찬가지로 해결할 수 있다.

15. 정답 : ③

수열 a_n의 공차를 d라 하자. $d<0$이므로 n이 충분히 클 경우

$||a_{n+2}+a_{n+1}|-|a_{n+1}+a_n||=12$에서

$a_{n+2}<a_{n+1}<a_n<0$를 만족시킬 수 있다.

$|-(a_{n+2}+a_{n+1})+(a_{n+1}+a_n)|=12$

$\Rightarrow$ $|-a_{n+2}+a_n|=12$

$\Rightarrow$ $|-2d|=12$

$\Rightarrow$ $d=-6$

$a_{n+1}+a_n=b_n$이라 하면,

$||a_{n+2}+a_{n+1}|-|a_{n+1}+a_n||=12$

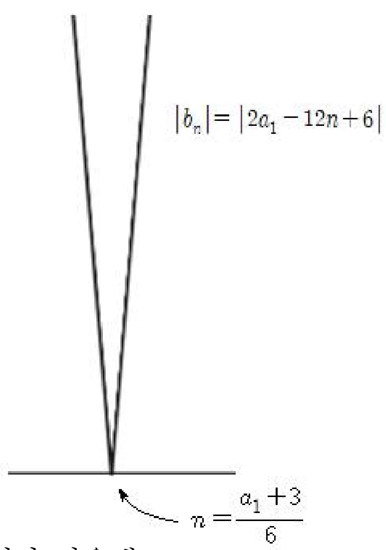
$\Rightarrow ||b_{n+1}|-|b_n||=12$

$\Rightarrow$ 등차수열 b_n의 절댓값은 이웃한 두 항끼리 12씩 차이가 난다.

$b_n=2a_1-12n+6$이므로

$|b_n|=|2a_1-12n+6|$ 임에 유의하여 그래프를 그려보면

(물론 직선의 형태로 그리지만 정의역은 자연수 집합이다.)



위와 같은데 $||b_{n+1}|-|b_n||=12$를 만족시키기 위해서는

$\frac{a_1+3}{6}<1$ 이거나 (모든 자연수 n에서 $|b_n|=-b_n$이거나)

$\frac{a_1+3}{6}$의 값이 자연수이다. ($b_n=0$인 자연수 n이 존재해야한다.)

조건을 만족시키는 자연수 a_1을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

1, 2, 3, 9, 15, 21, $\cdots$ 이다.

$\alpha_6=21$

16. 정답 : 7

생략

17. 정답 : 26

생략

18. 정답 : 9

생략

19. 정답 : 29

$2^{x^2-2x}=X$라 하자. (단, $X>0$)

$4^{x^2-2x}-2^{x^2-2x+1}+\alpha=0$

$\Rightarrow X^2-2X+\alpha=0$

방정식 $X^2-2X+\alpha=0$의 실근을 $X=p,\,q$라 하면 (단, $p<q$)

$2^{x^2-2x}=p$ 또는 q

$\Rightarrow x^2-2x=\log_2 p$ 또는 $\log_2 q$

이차함수 $y=x^2-2x$는 $x=1$에 대하여 대칭이므로 방정식 $x^2-2x=\log_2 p$ 또는 $\log_2 q$ 의 모든 실근의 합이 3이 되려면 $x=1$을 중근으로 가져야 한다. $p=\dfrac{1}{2}$이다.

$X^2-2X+\alpha=0$에서 근과 계수와의 관계를 이용하면 $p+q=2$이므로, $q=\dfrac{3}{2}$이고, $\alpha=\dfrac{3}{4}$을 얻는다.

이를 종합하면

$x^2-2x=\log_2 p$ 또는 $\log_2 q$

$\Rightarrow x^2-2x=-1$ 또는 $\log_2 \dfrac{3}{2}$

근과 계수와의 관계를 이용하여 $\beta=-\log_2 \dfrac{3}{2}$를 얻는다.

$$\begin{aligned}\alpha+2^{\beta}&=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\\&=\frac{17}{12}\end{aligned}$$

20. 정답 : 35

$\{f(x)\}^3-(x^2+3x)\{f(x)\}^2=-2x(x^2+x)f(x)$

$\Rightarrow f(x)\{f(x)-2x\}\{f(x)-(x^2+x)\}=0$

$\Rightarrow f(x)=0$ 또는 $2x$ 또는 x^2+x 이다.

$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$가 최댓값을 갖기 위해서는

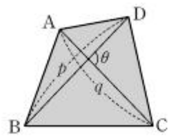
$$f(x)=\begin{cases}0 & (-1\le x<0)\\ 2x & (0\le x<1)\\ x^2+x & (1\le x\le 2)\end{cases}$$ 이어야 한다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\,dx+\int_1^2 (x^2+x)\,dx&=1+\left\{\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\frac{29}{6}\end{aligned}$$

21. 정답 : 11

그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$

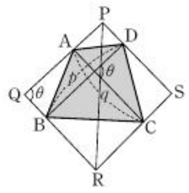


설명 그림과 같이 대각선 BD와 평행하고 두 점 A, C를 지나는 직선을 각각 그리고, 대각선 AC와 평행하고 두 점 B, D를 지나는 직선을 각각 그린다.

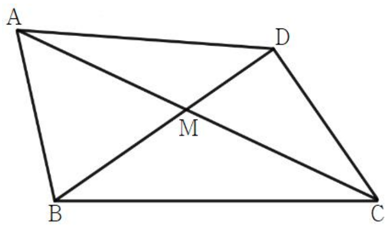
네 직선이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 PQRS의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이고, 삼각형 PQR의 넓이도 사각형 PQRS의 넓이의 $\dfrac{1}{2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.

즉, $S=\dfrac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{QR}\times\sin\theta=\dfrac{1}{2}pq\sin\theta$



(수능특강 60쪽 내용설명)



$$\begin{aligned}\text{사각형 ABCD의 넓이 }&=\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AC}\times\sin(\angle CMD)\\&=\frac{5\sqrt{3}}{4}\times\overline{AC}\\&=\frac{85}{8}\sqrt{3}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{AC}=\dfrac{17}{2}$인다.

한편 $\overline{MC}=x$라 하면 삼각형 BCM에서 코사인법칙을 사용 $\overline{BC}=\sqrt{37}$를 대입하여 $x=4$를 얻는다.

$$\begin{aligned}\overline{AM}&=\overline{AC}-\overline{MC}\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

22. 정답 : 31

(가) 조건을 만족시키기 위해서는
어떤 직선 $y=kx$가 곡선 $y=f'(x)\ (x\le 0)$와 곡선 $y=f(x)\ (x>0)$에 동시에 접해야 한다. (단, k는 상수)

(나)조건을 해석하자.
$f'(x)+6x+24=3(x+3)^2$
$f'(x)=3x^2+12x+3$이다.
곡선 $y=f'(x)\ (x\le 0)$와 접하는 직선 $y=kx$를 구하자.
$3x^2+(12-k)x+3=0$에서 판별식을 사용하면
$k=6$ 또는 18을 얻는다. 그런데, $k=18$이면
접점의 좌표가 양수이므로 모순이 발생한다.
그러므로 조건을 만족시키는 $k=6$이다.

곡선 $y=f(x)\ (x>0)$가 $y=6x$에 접해야 하므로
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=6x$의 접점의 x좌표를 t라 하여
$f'(t)=6$의 양의 실근을 구해보자.
$3t^2+12t+3=6$
$\Rightarrow\ t^2+4t-1=0$
$\Rightarrow\ t=-2+\sqrt{5}$
$\int f'(x)dx=x^3+6x^2+3x+c$이므로
$f(x)=x^3+6x^2+3x+c$라 하여
$f(-2+\sqrt{5})=6(-2+\sqrt{5})$를 풀면
$c=10\sqrt{5}$를 얻는다.

$$\{f(1)-2f'(-1)\}^2=(10\sqrt{5})^2$$
$$=500$$

미적분

23. 정답 : ②
생략

24. 정답 : ⑤
생략

25. 정답 : ②

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=k$라 하면

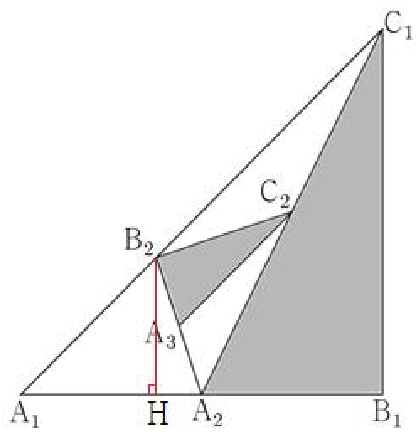
$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-2\times\frac{b_n}{a_n}}{1+\frac{b_n}{a_n}}$$
$$=\frac{3-2k}{1+k}$$
$$=\frac{4}{3}$$

이므로 $k=\frac{1}{2}$을 얻는다.

26. 정답 : ③

$-1<\tan\frac{2k\pi}{9}<1$을 만족시키는 k의 값을 구하면
$k=1,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10$이다.

27. 정답 : ①



$\angle B_1A_2C_1=\theta$라 하면, $\tan\theta=2$이다. 이때,

$$\tan(\angle B_1A_2B_2)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$
$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$
$$=-3\ \text{이므로}$$

점 B_2에서 선분 A_1A_2에 내린 수선의 발을 H라 하였을 때,
$\overline{A_2H}=x$이면 $\overline{B_2H}=3x$, $\overline{A_1H}=3x$이므로
$\overline{A_1A_2}=4x$
$=1$ 이고, $x=\frac{1}{4}$를 얻는다.
$\overline{A_2B_2}=\sqrt{10}x$임을 이용하여 마무리하자.

28. 정답 : ④

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{MR}}\times\overline{\mathrm{RQ}}\times\sin(\angle\overline{\mathrm{QRM}})$

$=\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{AM}}-\overline{\mathrm{AR}})\times(\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OR}})\times\sin5\theta$ 이므로

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin5\theta}{2\theta}\times(\overline{\mathrm{AM}}-\overline{\mathrm{AR}})\times(\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OR}})$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin5\theta}{2\theta}\times(\cos\theta-\overline{\mathrm{AR}})\times(1-\overline{\mathrm{OR}})$

이다.

한편 삼각형 AOR에서

$\angle\mathrm{PAB}=\theta$이고, $\angle\mathrm{APQ}=2\theta$이므로 원주각을 이용하여

$\angle\mathrm{AOQ}=4\theta$이다. $\overline{\mathrm{AO}}=1$이므로 $\lim_{\theta\to0+}\overline{\mathrm{AR}}=\frac{4}{5}$, $\lim_{\theta\to0+}\overline{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}$

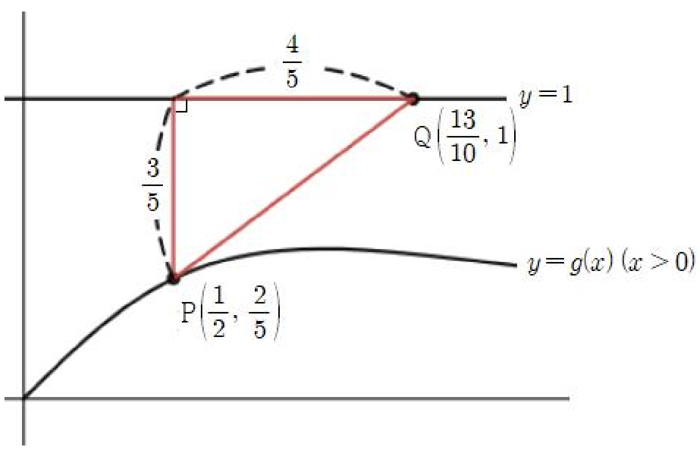
$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin5\theta}{2\theta}\times\lim_{\theta\to0+}(\cos\theta-\overline{\mathrm{AR}})\times\lim_{\theta\to0+}(1-\overline{\mathrm{OR}})$

$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}$

$=\frac{2}{5}$

29. 정답 : 59

$g(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $g'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ 를 정의하자.



위 그래프처럼 나타내면 피타고라스 정리를 이용하여

점 P의 x좌표가 $\frac{1}{2}$일 때, 점 Q의 x좌표가 $\frac{13}{10}$임을 알 수 있다.

$f(t)=s$라 하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$의 관계식을 나타내면

$\sqrt{(t-s)^2+(g(t)-1)^2}=1$, 양변을 제곱하면 $(t-s)^2+(g(t)-1)^2=1$

양변을 t에 대하여 미분하면, $2(t-s)\left(1-\frac{ds}{dt}\right)+2(g(t)-1)g'(t)=0$

$t=\frac{1}{2}$, $s=\frac{13}{10}$을 대입하면, $2\times\left(-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{ds}{dt}\right)+2\left(\frac{2}{5}-1\right)\frac{12}{25}=0$

$\frac{ds}{dt}=\frac{34}{25}$

30. 정답 : 18

$g'(x)=f'(x)\times\cos f(x)$이므로 함수 $g(x)$는

$\cos f(x)=0$이거나 $f'(x)=0$일 때 극값을 갖는다.

$\cos f(x)=0$일 때, $\sin f(x)=\pm1$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 $x=p,\ q$라 하면 $(p<q)$

$x=p,\ q$에서는 함수 $g(x)$가 -1, 1이 아닌 극값을 가질 수 있고

$x\neq p,\ q$에서 함수 $g(x)$가 갖는 극값은 -1 또는 1이다.

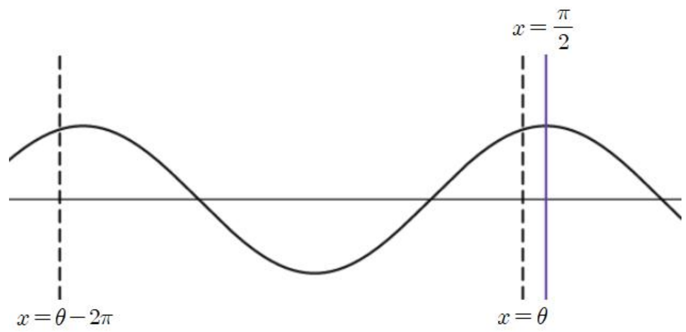
$g(\alpha_1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$에 유의하여 $f(\alpha_1)=\theta$라 하자.

(다) 조건을 만족시키기 위해서는 $g(\alpha_m)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$을 만족시키는

1이 아닌 6이하의 자연수 m이 존재하므로

$g(p)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $p=0$이고 $g(q)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이다.

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에서 $f(p)>f(q)$이므로



이 정보를 모두 종합하여 $y=\sin x$ 그래프 상에 나타내면

$f(0)=\theta$일 때, $f(q)=\theta-2\pi$이면

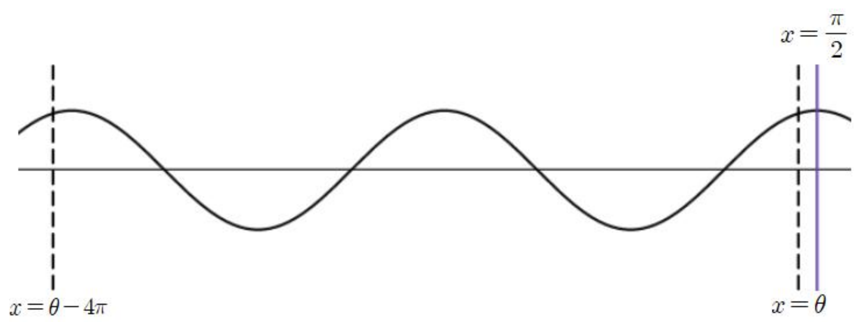
$g(\alpha_1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $g(\alpha_2)=-1$, $g(\alpha_3)=1$

$g(\alpha_4)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $g(\alpha_5)=1$, $g(\alpha_6)=-1$ 이므로

3종류의 극값이 두 군데씩 존재하므로

(다) 조건을 만족시킬 수 있다.

$f'(\alpha_4)=0$이므로 $\alpha_4<\alpha_6$에서 (나)조건 $f'(\alpha_6)>0$를 만족시킨다.



$f(0)=\theta$일 때, $f(q)=\theta-4\pi$이면

$g(\alpha_1)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $g(\alpha_2)=-1$, $g(\alpha_3)=1$

$g(\alpha_4)=-1$, $g(\alpha_5)=1$, $g(\alpha_6)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

3 종류의 극값이 두 군데씩 존재하므로

(다) 조건을 만족시킬 수 있다.

그러나 $f'(\alpha_6)=0$ 이므로 (나)조건을 만족시키지 않는다.

$f'(x)=0$ 의 실근 $0, q$에 대하여 두 극값의 차이

$f(0)-f(q)=2\pi$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}(q-0)^3}{2}=2\pi$$

$q=2$ 를 얻는다.

이때, 삼차함수 비율관계를 이용하면 $f(0)=f(3)=\theta$ 이고

$f'(x)=\frac{3}{2}\pi x(x-2)$ 이다.

$g'(3)=f'(3)\times\cos f(3)$

$=\frac{9}{2}\pi\times\cos\theta$

$=\frac{3}{2}\pi$

6월 모의평가 기준 예상 등급컷

등급컷	원점수
1등급	76점
2등급	66점

우주설 수학

Naver ID, 우주설 (포만한)
ORBI ID, 우주설 (오르비)