도함수의 연속과 원함수의 미분가능성의 관계

안녕하세요? 원래 함수 추론을 준비하려 했으나, 그 전에 미적분 관련 내용으로 찾아왔습니다. 특히 미적분에서 자주 논란거리가 되는 주제인
'도함수의 연속성과 원함수의 미분가능성의 관계'
에 대해 얘기하고자 합니다.

'미분가능성이랑 도함수의 연속성은 다르다.'
거의 모든 학생들이 한 번쯤은 접해볼 내용입니다. 함수추론 얘기하기 전에 왜 굳이 이 얘기를 꺼내냐면, 은근히 이 주제에 관해서 불안해하시는 분들이 있어서에요. 보통 이 부분에 관해서 수학을 가르치시는 많은 분들이 '고교과정에선 그냥 도함수 연속인 것처럼 풀어라'라고 적당히 넘어가는 경우를 많이 보았습니다. 그것이 결국 여러분들의 불안감으로 이어지곤 하죠.

오늘은 그 불안감을 철저히 해소시켜 드리겠습니다. **언제 도함수의 풀이를 써도 되는지 알려드릴게요.**

1. 다음 문제와 그것의 풀이과정 중 일부를 보죠.

'최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|\geq 2) \\ x^3 & (|x|<2) \end{cases}$$

가 있다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값은?'

풀이)

'우선 연속성을 사용하면 $f(2)=8, f(-2)=-8$이겠다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하니, 도함수는

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (|x|\geq 2) \\ 3x^2 & (|x|<2) \end{cases}$$

구나. 우선 $g'(2)=\lim_{x\to 2}g'(x)$니까 $\lim_{x\to 2-}g'(x)=\lim_{x\to 2+}g'(x)$이고, 따라서

$f'(2)=12$이고, 같은 논리로 $f'(-2)=12$겠네. 그러면 $f(x)=x^4+$~~~.....'

이 풀이에서 굳이 하나 딴지걸고 싶으신 부분이 있으신가요?

저는 이 부분을 태클하고 싶네요.

'우선 $g'(2)=\lim_{x\to 2}g'(x)$니까 $\lim_{x\to 2-}g'(x)=\lim_{x\to 2+}g'(x)$이고~~'

제가 왜 이 부분을 딴지걸었을까요?

$g'(2)=\lim_{x\to 2}g'(x)$라는 식은 $g'(x)$가 $x=2$에서 연속인지 아닌지를 체크하는 식입니다.

사실 이미 아실 분들은 아시겠지만, **'도함수의 연속성과 원함수의 미분가능성은 다릅니다. 도함수가 연속하다는 것은, 원함수가 미분가능하다는 사실보다 더 강합니다.'**

이 주제는 이미 많이 논의가 된 주제긴 해요. 특히 미적분을 배우신 분들은

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

이라는 가시적인 함수를 보며,

'도함수가 연속이면 원함수는 미분가능하지만, 원함수가 미분가능하다고 해서 도함수가 연속인 것은 아니다.'

의 직접적인 예시도 확인했을 겁니다.

하지만 그렇다고 위에서 제시된 풀이가 틀렸나? 라고 하기엔 애매합니다.

실제로 여러분들이나 저나 자주 사용할 풀이입니다. 구간별로 정의된 함수문제에서 특히 말이죠.

그리고 야매라고 하기에도 애매합니다. 도함수의 연속성을 활용한 풀이가 정식풀이에 실린 경우도 있어요.

실제 문제를 통해 예시를 보여드리면,

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = \left| 2\sin(x + 2|x|) + 1 \right|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

2017학년도 9월 모의평가 가형 30번입니다. 이 문제에 대한 ebs 해설지에선

30. **출제의도** : 함수의 연속과 함수의 미분가능을 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g(x)=\begin{cases}|2\sin 3x+1| & (x\geq 0)\\ |-2\sin x+1| & (x<0)\end{cases}$이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $x=0$과 $g(x)=0$을 만족시키는 x의 값에서 미분가능하지 않다.

또, $\lim_{x\to 0+} g'(x)=6$, $\lim_{x\to 0-} g'(x)=-2$이다.

(i) 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$가 성립해야

한다.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} h'(x) &= \lim_{x\to 0+} f'(g(x))g'(x)\\ &= \lim_{x\to 0+} f'(g(x))\times\lim_{x\to 0+} g'(x)\\ &= f'(1)\times 6\end{aligned}$$

에서 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하려면 $\lim_{x\to 0+} h'(x)=\lim_{x\to 0-} h'(x)$가 성립한다는 사실은, 맨 위의 문제에서 보셨듯이 도함수의 연속성을 이용한다고 볼 수 있죠.

이렇듯 국가교육기관의 정식 해설지에도, 함수가 미분가능하다는 사실로부터 바로 도함수의 연속성을 이용한 풀이로 이어갑니다.

사실 이 문제에 대해서 많은 선생님들이나 강사들이 학생들에게 하는 말은 **'신경쓰지 말아라'** 입니다.

신경쓰지 않아도 되는 이유를 묻는다면, 많은 분들은 이렇게 대답할 것입니다.

‘$x^2\sin\frac{1}{x}$**같은 이상한 함수는 수능에 안 나올거니, 크게 신경 안써도 된다.**’

이 대답을 듣고 나서 납득을 하는 수험생분들도 많지만, 사실 수학을 좋아하고 엄밀하게 이해하고 싶어하는 학생분들에게는 납득할 수 있는 대답은 아닐 겁니다.

특히 저도 수학과로서, 제 업이 수학이기도 하고, 그리고 하나의 멘토로서 학생들의 질문에 ‘신경 안써도 된다’ 라는 대답은 무책임하다고 느낍니다.

그리고 애초에 수능에 나올지 안 나올지는 모르는 겁니다. 나올 확률이 극히 적은 건 공감을 하나, 섣부르게 예측할 수 없는 것이 수능입니다.

그렇다면 언제 저희는 아무 걱정없이 그냥 도함수의 연속성을 사용한 풀이가 가능할까요?

그래서 제가 확실한 답을 드리겠습니다. **언제 미분가능하다는 조건에서 바로 도함수의 연속성 풀이로 이어갈 수 있는지 말이죠.**

우선 정답은 다음과 같습니다.

‘연속함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능성을 체크할 경우, 만약 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 좌극한과 우극한이 각각 존재한다면, **도함수의 연속성 풀이를 사용할 수 있다**.’

도함수의 연속성 풀이를 사용할 수 있다를 엄밀하게 정의해본다면, 도함수의 연속성을 활용한 풀이를 통해서 얻은 $f(x)$의 미분가능 여부가 실제 $f(x)$의 미분가능여부와 일치한다는 뜻입니다.

이 정리는 ‘왜 수능 수학 문제에서는 도함수의 연속성을 이용해도 큰 무리가 없었는지를 보여줍니다.’

우선 활용을 해볼게요.

맨 처음의 수2 문제인
'최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|\geq 2) \\ x^3 & (|x|<2) \end{cases}$$
가 있다. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값은?'

의 경우엔, 어차피 $g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (|x|\geq 2) \\ 3x^2 & (|x|<2) \end{cases}$에서 $\lim_{x\to 2} f'(x)$와 $\lim_{x\to 2} 3x^2$이 각각 존재함은 명백합니다. 따라서 도함수의 연속성 풀이가 가능합니다.

그리고 위의 미적분 문제에서

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\left|2\sin(x+2|x|)+1\right|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

저희가 $h'(x)$의 연속성을 쓸 수 있었던 이유는 다음과 같습니다.
어차피 $g(x)$는, 절댓값으로 인해 복잡해보이지만, 절댓값을 분리해본다면 끽해야 4가지 중 하나입니다.
$2\sin 3x+1,\ -2\sin x+1,\ -2\sin 3x-1,\ 2\sin x-1$
쉽게 확인가능하듯, 이 각각의 함수들은, **그것들의 도함수가 연속이고, 당연히 각각의 x지점마다 좌극한과 우극한이 존재합니다.**
따라서 도함수의 연속성 풀이를 써도 문제가 없죠.

이제 조금 설명을 해볼게요.

'연속함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능성을 체크할 경우, 만약 $f'(x)$가 $x=\alpha$에서 좌극한과 우극한이 각각 존재한다면, **도함수의 연속성 풀이를 사용할 수 있다**.'

이 명제가 참임을 보여드리겠습니다. 이 명제가 참임을 증명하기 위해선, 저희는 다음을 보여야합니다.

1) $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 가능하다면, 도함수의 연속성 풀이에서 활용할 $\lim_{x\to\alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x\to\alpha+} f'(x)$의 값이 서로 같아야 한다.
2) $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능하다면, 도함수의 연속성 풀이에서 활용할 $\lim_{x\to\alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x\to\alpha+} f'(x)$의 값이 서로 달라야 한다.

우선 1)을 보이죠.
1) $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 가능하다면, 도함수의 연속성 풀이에서 활용할 $\lim_{x\to\alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x\to\alpha+} f'(x)$의 값이 서로 같아야 한다.
증명) $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분가능하다는 뜻은, 미분계수가 존재한다는 의미로서 $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$가 존재한다는 의미입니다. 또 이 말은
$\lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$라는 의미입니다.
근데 저희는 $f(x)$가 미분가능하다는 사실에서 평균값의 정리를 사용가능합니다. 즉,

$x<\alpha$일 때, x와 α사이에 적당한 c_x가 존재해서 $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(c_x)$
$x>\alpha$일 때, x와 α사이에 적당한 d_x가 존재해서 $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(d_x)$
이제 이거를 위에 적용하면,

$$\lim_{x\to\alpha-} f'(c_x) = \lim_{x\to\alpha-} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha+} f'(d_x)$$
입니다.

지금 어차피 c_x나 d_x나 x가 α로 가까워짐에 따라 둘 다 α로 향하므로, 저희는 $\lim_{x\to\alpha-} f'(x) = \lim_{x\to\alpha+} f'(x)$라는 것을 알 수 있죠.

즉, 미분가능하다면 도함수의 좌극한과 우극한이 같아야합니다.

2) $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능하다면, 도함수의 연속성 풀이에서 활용할 $\lim_{x\to\alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x\to\alpha+} f'(x)$의 값이 서로 달라야 한다.

이 명제는 귀류법으로 보이죠. 만약 $\lim_{x \to \alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x \to \alpha+} f'(x)$의 값이 서로 같음에도 $f(x)$가 미분가능하지 않다 해봅시다. 지금 좌극한 우극한이 같으니, $\lim_{x \to \alpha} f'(x) = p$라 해보죠.

사실 지금부터 조금 애매한데... 극한의 엄밀한 정의를 써볼게요. 대학과정인데 어차피 잠깐 나오니까 양해좀...

극한의 엄밀한 정의에 의해, $\lim_{x \to \alpha} f'(x) = p$이라면, 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 적당한 $\delta > 0$이 존재해서, $0 < |x - \alpha| < \delta$이면 $|f'(x) - p| < \epsilon$입니다. 주목할 것은 다름이 아니라 어떤 적당한 양수 δ가 정해졌고, $0 < |x - \alpha| < \delta$라는 열린 구간 안에 $f'(x)$가 **잘 정의되어있다는 사실**입니다.

이 말은 즉, $f(x)$가 $0 < |x - \alpha| < \delta$에서는 미분가능하다는 사실을 말해줍니다.

그러면 이제 1)에서 하던 논리 그대로입니다. 평균값의 정리에 의해 $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$에서 좌극한과 우극한이 각각 $\lim_{x \to \alpha-} f'(x)$와 $\lim_{x \to \alpha+} f'(x)$이므로 미분가능하므로 모순이죠. 따라서 2)는 참입니다.

이렇게

'연속함수 $f(x)$가 $x = \alpha$에서 미분가능성을 체크할 경우, 만약 $f'(x)$가 $x = \alpha$에서 좌극한과 우극한이 각각 존재한다면, **도함수의 연속성 풀이를 사용할 수 있다**.'

명제가 참임을 보였습니다.

이 명제가 참이므로 대우도 참이죠.

도함수의 연속성 풀이를 사용할 수 없는 상황이면, $f'(x)$의 좌극한과 우극한 중 어느 하나는 존재하지 않는다.

이 명제가 참임을 경험적으로 보여주는 예시가 바로 그 유명한(이미 위에 나온)

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

이라는 함수죠.

한 번 실제로 체크해보죠. 이 함수는 $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$으로서 $f'(0)$이 존재하지만, $f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$에서, $\lim_{x\to 0}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$는 존재하지 않습니다.

즉, 여러분이 풀, 이미 풀었던 많은 문제들은 $f'(x)$의 좌극한과 우극한이 존재하고요.

좌극한과 우극한 자체가 존재한다는 사실만 보인다면(값을 구해야한다는 얘기가 아닙니다) 여러분들은 자신있게 도함수의 연속성 풀이를 쓰시면 됩니다!

하지만 그렇다고 해서, 도함수의 연속성 풀이가 항상 좋다는 것은 아닌거 알고 계시죠?