제 2 교시

수리 영역 (나형)

성명		수험 번호						3				

- 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. 두 행렬 A, B에 대하여

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ A-B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

일 때, A^2-AB의 모든 성분의 합은? [2점]

① 12 ② 10 ③ 8 ④ 6 ⑤ 4

2. $\left(\dfrac{1}{\log_8 2}\right)^3+\log_2 16^2$의 값은? [2점]

① 18 ② 28 ③ 32 ④ 35 ⑤ 46

3. 지수부등식 $3^{x^2}<9\cdot 3^x$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & (x\neq 1)\\ k & (x=1)\end{cases}$$

가 $x=1$에서 연속일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

5. 함수 $f(x)=\int(x^2+2x)\,dx$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$ 의 값은? [3점]

① 14　② 16　③ 18　④ 20　⑤ 22

6. 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에 많아야 한 개의 변이 존재하는 다섯 개의 꼭짓점을 갖는 그래프 G의 두 꼭짓점을 잇는 변의 개수를 성분으로 하는 행렬을 M이라 할 때, 다음은 행렬 M^2을 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

이때, 그래프 G의 모든 변의 개수는? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

7. 식품의 부패 정도를 수치화한 식품손상지수 G와 상대습도 $H(\%)$, 기온 $T(℃)$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있다고 한다.

$$G=\frac{H-65}{14}\times(1.05)^T$$

상대습도가 80%, 기온이 35℃일 때의 식품손상지수를 G_1, 상대습도가 70%, 기온이 20℃일 때의 식품손상지수를 G_2라 할 때, $\frac{G_1}{G_2}$의 값은? (단, $1.05^{15}=2$로 계산한다.) [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

8. 체중이 각각 75kg, 80kg인 갑과 을이 1개월짜리 다이어트 프로그램에 참가하여 동시에 다이어트를 시작하였다. 갑은 매일 전날에 비해 0.3%의 체중이 감소하였고, 을은 매일 전날에 비해 0.5%의 체중이 감소하였다고 할 때, 갑과 을의 체중이 같아지는 때는 다이어트 시작일로부터 며칠 후인가? (단, $\log 2 = 0.301$, $\log 3 = 0.477$, $\log 9.95 = 0.998$, $\log 9.97 = 0.999$ 로 계산한다.) [3점]

① 15일 ② 18일 ③ 22일
④ 25일 ⑤ 28일

9. 주사위 1개와 동전 5개를 동시에 던져 나온 주사위의 눈의 수를 a, 동전의 앞면의 개수를 b라 할 때, $a = 3b$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{1}{32}$ ③ $\frac{3}{64}$
④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{5}{64}$

10. 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(x) = f(x+4)$를 만족하고

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \le x < 2) \\ x^2 - 2x + a & (2 \le x \le 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$
④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

11. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=n(x-1)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{19} \frac{100}{a_n b_n}$의 값은? [3점]

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

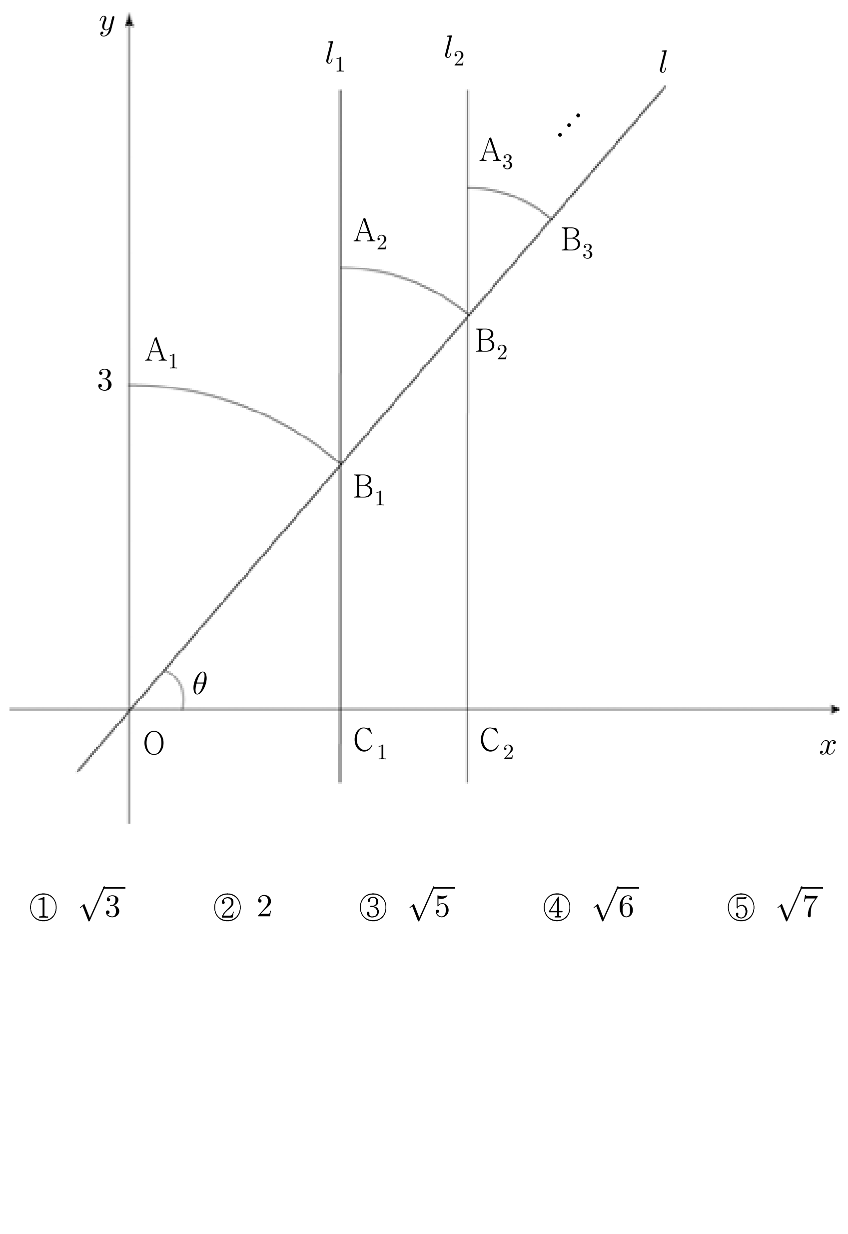
12. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$에 대하여 $\frac{f'(1)}{f'(4)}$의 값은? [4점]

① -80 ② -84 ③ -88 ④ -92 ⑤ -96

13. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\dfrac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^2-1}=2$를 만족할 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

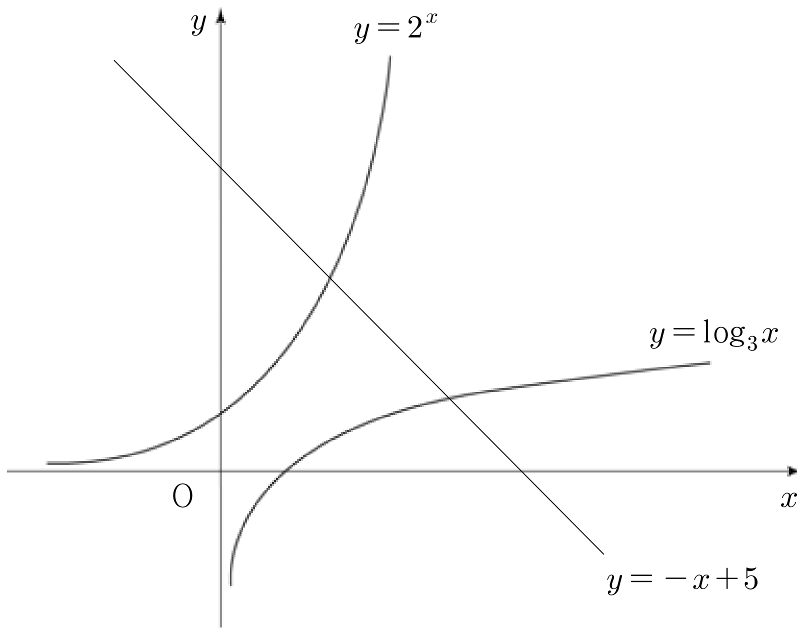
① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

14. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l과 점 $\mathrm{A}_1(0,\ 3)$이 있다. 점 O를 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{OA}_1}$을 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_1이라 하자. B_1을 지나고 y축에 평행한 직선 l_1이 x축과 만나는 점을 C_1이라 하고, 직선 l_1 위에 $\overline{\mathrm{OC}_1}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2}$가 되는 점 A_2를 잡는다. 점 B_1을 중심으로 하고 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2}$를 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_2라 하자. B_2를 지나고 y축에 평행한 직선 l_2가 x축과 만나는 점을 C_2라 하고, 직선 l_2 위에 $\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3}$이 되는 점 A_3을 잡는다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$의 호의 길이를 $\overparen{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overparen{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=9\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$이다. $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right.$ 이고 B_0은 원점이다.$\left.\right)$ [4점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

15. 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_3 x$와 직선 $y=-x+5$가 만나는 점을 각각 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $a_1 > b_2$

ㄴ. $a_1+a_2=b_1+b_2$

ㄷ. $\dfrac{a_1}{a_2}<\dfrac{b_2}{b_1}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 국가의 정책 수립을 위해 국민 5만 명을 대상으로 전화와 인터넷을 이용한 설문조사를 실시하였다. 전화조사 대상자 1만 명 중 70%가 조사에 참여하였고, 인터넷조사 대상자 4만 명 중 85%가 조사에 참여하였다고 한다. 조사에 참여한 대상자 중에서 임의로 한 명 선택하였을 때, 이 사람이 인터넷조사에 참여하였을 확률은? [3점]

① $\dfrac{26}{41}$ ② $\dfrac{28}{41}$ ③ $\dfrac{30}{41}$ ④ $\dfrac{32}{41}$ ⑤ $\dfrac{34}{41}$

17. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n+1}$$

으로 정의할 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로

$$(n+3)b_{n+2}=(\boxed{(가)})\,b_{n+1}+b_n$$

$$(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)\ \cdots\cdots\ (\bigstar)$$

식 $(\bigstar)$에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\ (m\ge 2)$를 대입하면

$$4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$$

$$5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$$

$$\vdots$$

$$(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$b_{m+1}-b_m=\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{5}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$

$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\ (n\ge 2)$

따라서 $a_1=1,\ a_n=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{(나)}\right)\ (n\ge 2)$이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 할 때, $f(1)g(3)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{1}{240}$ ② $\dfrac{1}{180}$ ③ $\dfrac{1}{40}$ ④ $\dfrac{1}{30}$ ⑤ $\dfrac{1}{24}$

18. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_c|x|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n>b_n)$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n+b_n=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{c}{1-c}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

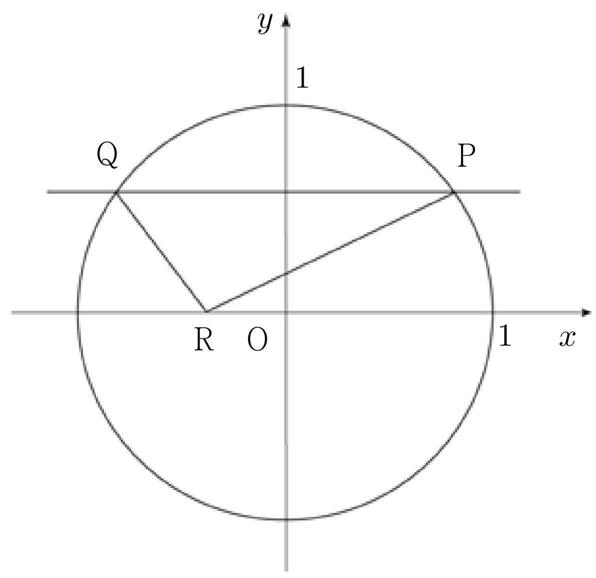
19. 정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 α에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
>
> (나) $-6<f'(1)<-2$

이때, 함수 $y=f(x)$의 극솟값은? [4점]

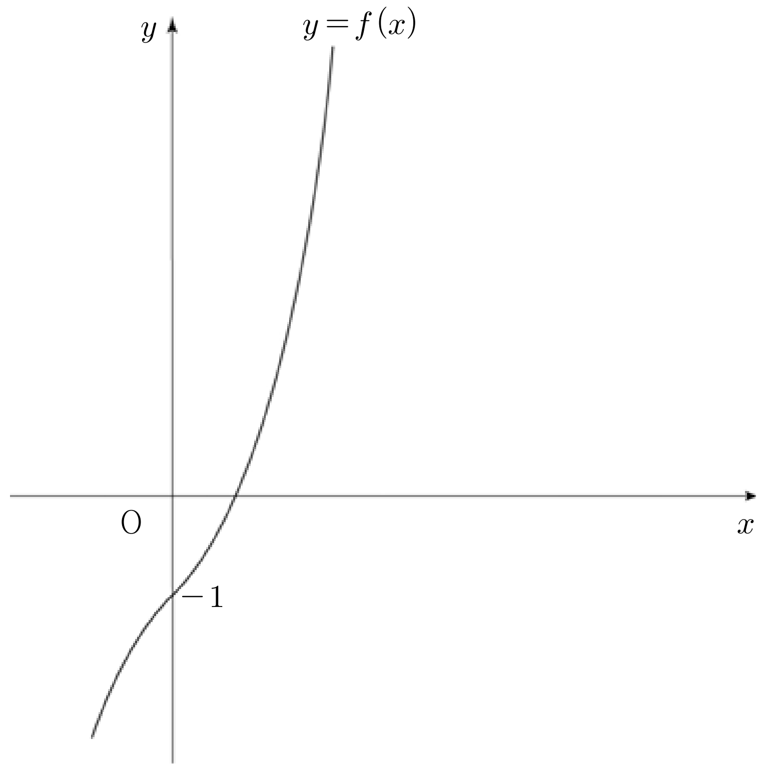
① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

20. 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 지나고 x축과 평행한 직선을 그어 원과 만나는 다른 점을 Q, x축 위의 한 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\alpha)$라 할 때, $\lim_{\alpha \to 1-0} \frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$의 값은? [4점]



① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

21. 함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{4}$ ② $\frac{49}{4}$ ③ $\frac{51}{4}$
④ $\frac{53}{4}$ ⑤ $\frac{55}{4}$

단답형(22 ~ 30)

22. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_{100}-a_{90}=34$를 만족할 때, a_{21}의 값을 구하시오. [3점]

23. 방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점]

24. 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-12$이고 함수 $f(x)$의 극솟값이 3일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

25. 함수 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-6x)\right\}dx$에 대하여 $f(x)$의 최솟값이 8일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [4점]

26. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}\right)=5$를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$의 값을 구하시오. [4점]

27. 다음 두 조건을 모두 만족시키는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+3x+5}{f(x)} = \frac{1}{2}$

(나) $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$

28. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 정수 부분이 네 자리인 양수 t에 대하여

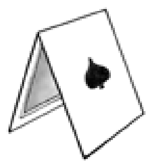
$$\log t = \frac{1}{4} f(t^2) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 곱을 A라 할 때, $4\log A$의 값을 구하시오. [4점]

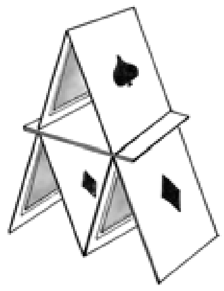
29. 다음은 n층 카드탑에 대한 설명이다.

Ⅰ. 1층 카드탑 : 두 장의 카드를 맞대어 세운 것.
Ⅱ. 2층 카드탑 : 1층 카드탑 두 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 한 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 1층 카드탑을 쌓은 것.
Ⅲ. 3층 카드탑 : 1층 카드탑 세 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 두 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 2층 카드탑을 쌓은 것.
Ⅳ. n층 카드탑 : 1층 카드탑 n개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 $(n-1)$장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 $(n-1)$층 카드탑을 쌓은 것.

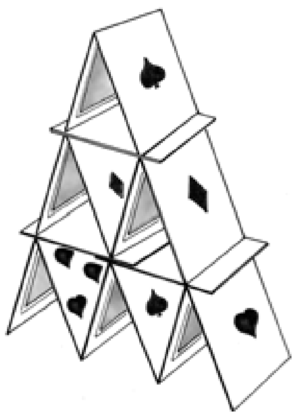
1층 카드탑



2층 카드탑



3층 카드탑



⋮ ⋮

n층 카드탑을 만드는데 필요한 카드의 개수를 a_n이라 할 때, a_{20}의 값을 구하시오. [3점]

30. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 0)$이 있다. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}$를 n등분한 점을 차례로 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}$이라 하고, 점 O는 A_0, 점 A는 A_n이라 하자. 점 A_k를 지나고 x축과 수직인 직선이 함수 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$의 그래프와 만나는 점을 B_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$

$\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k}$를 밑변으로 하고, $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}$를 높이로 하는 직사각형 n개의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $2\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.

[4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.