제 2 교시

수리 영역 (나형)

성명		수험번호						3				

○ 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.
○ 문제지에 성명과 수험번호를 정확히 써 넣으시오.
○ 답안지에 성명과 수험번호를 써 넣고, 또 수험번호와 답을 정확히 표시하시오.
○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $a=\sqrt{3}$, $b=\log_4 16$일 때, a^b의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+A^{-1}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 함수 $f(x)=x^2+2x$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{x-1}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 연결 관계가 다음 행렬로 나타내어지는 그래프의 변의 개수는? [3점]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 1 \\ b & 0 & c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & e & 0 & 1 \\ 1 & f & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

5. 표는 연비가 x(km/L)인 자동차 A와 연비가 y(km/L)인 자동차 B의 연료량에 따른 주행거리를 나타낸 것이다.

연료량(L)	주행거리(km)	
	A자동차	B자동차
⋮	⋮	⋮
15	a	b
20	c	d
25	e	f
⋮	⋮	⋮

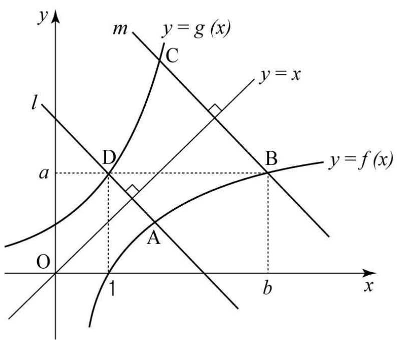
다음은 $b+c=600$, $d+e=770$일 때, x와 y의 값을 구하는 식을 행렬로 나타낸 것이다.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ \beta & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 600 \\ 770 \end{pmatrix}$$

이때, 두 상수 α, β에 대하여 $\alpha\beta$의 값은? (단, 연비는 1L의 연료로 달릴 수 있는 거리를 수치로 나타낸 것이다.) [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

6. 그림과 같이 직선 $y=x$와 수직으로 만나는 평행한 두 직선 l, m이 있다. 두 직선 l, m이 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=2^x$의 그래프와 만나는 교점을 A, B, C, D라 하자. $f(b)=g(1)=a$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [3점]



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

7. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ x \,\middle|\, \log x - [\log x] = \frac{1}{k},\ 1 \le x \le 10^5 \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt{10} \in A_2$

ㄴ. $n(A_3)=n(A_5)$

ㄷ. $A_m \cap A_n \ne \phi$를 만족하는 서로 다른 자연수 m, n이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

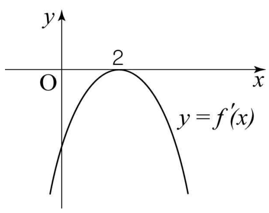
8. 함수 $y=\dfrac{3^{2x}+3^x+9}{3^x}$의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

9. 어느 건물의 실내온도 28℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량을 A라 하자. 실내온도를 1℃ 내릴 때마다 그 온도를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 일정한 비율로 증가한다. 실내온도 25℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량이 $1.23A$일 때, 실내온도 20℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 A의 몇 배인가? (단, $\log 1.23 = 0.09$, $\log 1.40 = 0.15$로 계산하고, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.) [3점]

① 1.72 ② 1.86 ③ 2.00 ④ 2.14 ⑤ 2.28

10. 그림은 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다.



함수 $f(x)$에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에 있다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

라 정의하자. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$과 $\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)$의 값은? [3점]

① 2^9+45 ② $2^{10}+43$ ③ $2^{10}+45$
④ $2^{11}+43$ ⑤ $2^{11}+45$

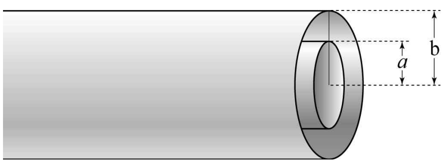
12. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log_2(a_n+1)\log_2(a_{n+1}+1)}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

13. 도체가 전하를 저장할 수 있는 능력을 정전용량이라 한다. 원통도체에서 안쪽 원통의 반지름의 길이 a와 바깥쪽 원통의 반지름의 길이 b에 대하여 정전용량 C는

$$C=\frac{k}{\log b-\log a}\quad (\text{단, } k\text{는 상수, } C\text{의 단위는 } F/m)$$

이라 한다. $b=2a$일 때의 정전용량 C_1과 $b=na$일 때의 정전용량 C_2에 대하여 $\dfrac{C_1}{C_2}>\dfrac{1}{\log 2}$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [3점]



① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

14. 함수 $f(x)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n & (|x|<1)\\ 0 & (|x|\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여

$\displaystyle\lim_{x\to -1+0} f(x)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 집합 M을

$$M=\left\{\begin{pmatrix} x & y\\ z & w\end{pmatrix}\,\middle|\, x,\ y,\ z,\ w\text{는 } x<y<z<w\text{인 실수}\right\}$$

라 하자. $X\in M$인 $X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$에 대하여 네 점 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$, $(a,\ c)$, $(b,\ d)$를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이를 $S(X)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

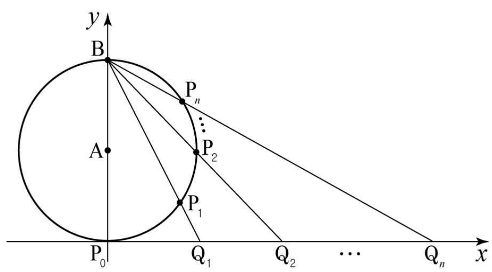
ㄱ. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$일 때, $S(A)=\frac{3}{2}$

ㄴ. $A\in M$이면 $S(kA)=k^2S(A)$ (단, k는 양의 실수)

ㄷ. $B=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 $A\in M$이면 $S(A+mB)=S(A)$ (단, m은 실수)

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 그림과 같이 중심이 $\mathrm{A}(0,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n은 다음 규칙을 만족한다.



(가) 점 P_0은 원점이고, 점 P_n은 제 1사분면의 점이다.

(나) 호 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1}=r\,l_n$이다.

(다) 점 Q_n은 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점이다.

$\mathrm{Q}_2(2,\ 0)$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n=\frac{8}{15}\pi$일 때, 상수 r의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

17. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+2n$의 두 교점을 A_n, B_n이라 하고 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은? [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

18. 자연수 n에 대하여

집합 $A_n=\left\{k \mid \log_k 3^n=\left[\log_k 3^n\right],\ k\text{는 자연수}\right\}$라 할 때, A_6의 모든 원소의 곱은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

① 3^6 ② 3^8 ③ 3^{10} ④ 3^{12} ⑤ 3^{14}

19. 수열 $\{a_n\}$이

$T_n=2a_1+3a_2+\cdots+(n+1)a_n=\frac{n}{2n+4}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$)

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}-T_n \qquad \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=\boxed{\text{(가)}}$

(우변)$=\frac{1}{(1+1)^2}-T_1=\boxed{\text{(가)}}$

이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m$$

이다. $n=m+1$일 때, ($\bigstar$)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}a_k&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m+a_{m+1}\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_m+\boxed{\text{(나)}}(T_{m+1}-T_m)\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}+\frac{m+3}{m+2}(T_{m+1}-T_m)\\&=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}+\frac{1}{(m+2)^2}\\&=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{(k+1)^2}-T_{m+1}\end{aligned}$$

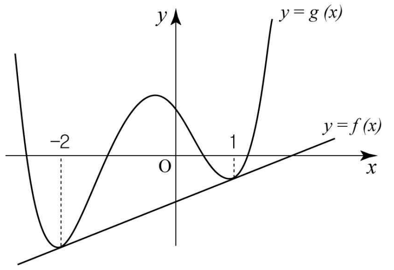
그러므로 $n=m+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\frac{\alpha}{f(2)}$의 값은? [3점]

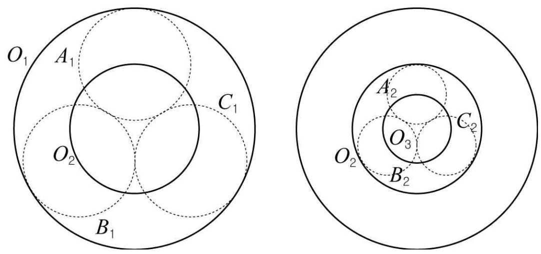
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. 그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은? [4점]



① $\frac{81}{16}$ ② $\frac{83}{16}$ ③ $\frac{85}{16}$ ④ $\frac{87}{16}$ ⑤ $\frac{89}{16}$

21. 반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

단답형(22 ~ 30)

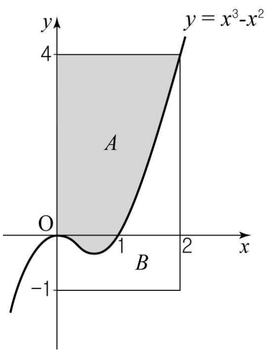
22. 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{ax}-b}{x-1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$ 가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

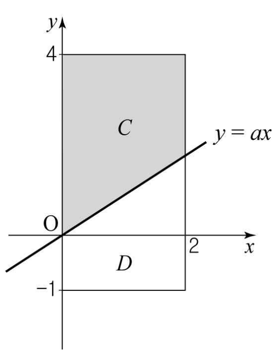
23. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3\frac{1}{n}$의 값을 구하시오. [3점]

24. 한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$이다. 이때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

25. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가
$f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$을 만족할 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 그림과 같이 네 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 4)$, $(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 내부가 곡선 $y=x^3-x^2$에 의하여 나누어지는 두 부분을 A, B, 직선 $y=ax$에 의하여 나누어지는 두 부분을 C, D라 하자. 영역 A의 넓이와 영역 C의 넓이가 같을 때, $300a$의 값을 구하시오. [4점]



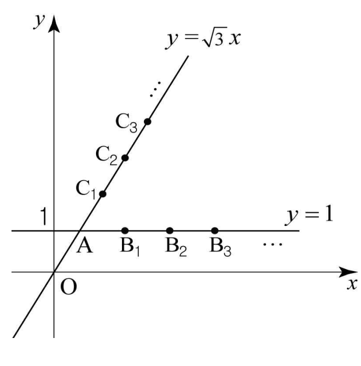


27. 원점 O를 출발하여 수직선 위를 16초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가

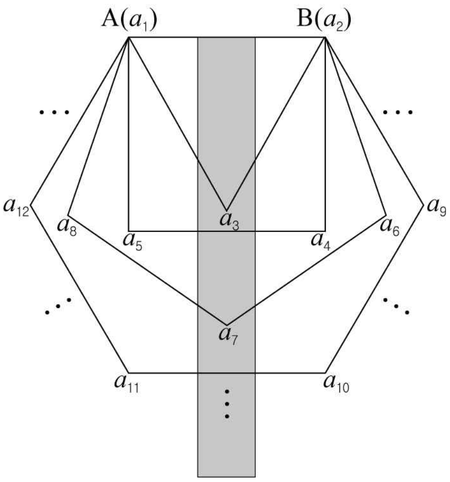
$$v(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t-1 & (0\le t<2)\\ -t^2+10t-16 & (2\le t<8)\\ 2-\frac{1}{4}t & (8\le t\le 16)\end{cases}$$

일 때, 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 점 A는 두 직선 $y=1$과 $y=\sqrt{3}x$의 교점이다. 자연수 n에 대하여 $y=1$ 위에 $\overline{\mathrm{AB}_n}=n$인 점을 B_n, $y=\sqrt{3}x$ 위에 $\overline{\mathrm{AC}_n}=n$인 점을 C_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n$의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $a_n>6$를 만족하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, B_n, C_n은 제 1사분면의 점이다.) [4점]

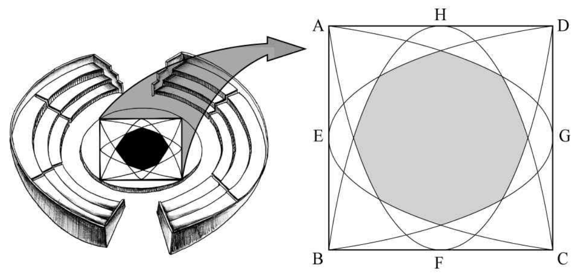


29. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하는 정n각형을 차례로 그린다. 등차수열 $\{a_k\}$에 대하여 선분 AB의 양 끝점에 각각 a_1, a_2를 대응시키고, 정삼각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 a_3, 정사각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 두 꼭짓점에 a_4, a_5를 대응시킨다. 이와 같은 과정을 계속하여 정n각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 시계방향으로 a_k를 대응시키자. $a_1+a_2+a_3=3$, $a_1+a_2+a_6+a_7+a_8=33$일 때, 어두운 부분에 배열된 숫자들 중 정십오각형의 꼭짓점에 대응되는 수를 구하시오. [4점]



30. [그림1]은 무대 디자이너 길섭이가 야외공연 무대디자인 공모전에 출품한 작품이다. [그림1]의 중앙무대를 확대하면 [그림2]와 같고, 중앙 무대를 디자인하는 과정은 다음과 같다.

(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD를 그리고 각 변의 중점을 각각 E, F, G, H라 한다.
(2) 변 BC를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 두 점 B, C를 지나며 점 H를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프와 두 점 A, D를 지나며 점 F를 꼭짓점으로 하는 이차함수의 그래프를 그린다.
(3) 변 AB를 좌표평면 위의 x축과 평행하게 놓고 (2)와 같은 방법으로 세 점 A, B, G를 지나는 이차함수와 세 점 C, D, E를 지나는 이차함수의 그래프를 추가로 그린다.



[그림1] [그림2]

[그림2]의 어두운 부분의 넓이를 $\dfrac{p\sqrt{2}+q}{3}$라 할 때, $p-q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.