제 2 교시

수학 영역

심상범 in Orbi

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$(-\sqrt{2})^4 \times (2^3)^{-\frac{2}{3}} = 2^2 \cdot 2^{-2} = 4 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{1}$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$에 대하여 $\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}}_{=f'(2)}$ 의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$이므로 $f'(2) = \boxed{12}$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

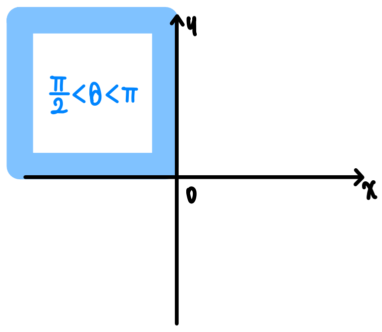
$\cos\theta = -\frac{2}{3}$

① $-\frac{4}{9}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 0

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$이므로 $\cos\theta < 0$이다.

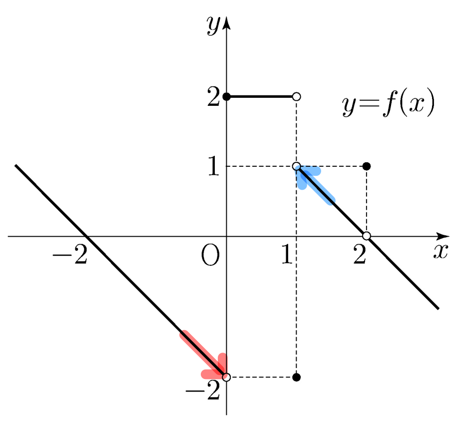
$\cos^2\theta = \frac{4}{9}$인데 $\cos\theta < 0$이므로 $\cos\theta = -\frac{2}{3}$이다.

$\rightarrow$ 그러므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$



$\sin^2\theta + \cos\theta = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} = \frac{5}{9} - \frac{6}{9} = \boxed{-\frac{1}{9}}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

-2　　1

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

첫 항과 공비가 양수이다.

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

$a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = \frac{3}{2}$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

등비수열 a_n의 모든 항이 양수이므로 a_1과 r은 양수이다. + 때마침 조건에서 $a_1 = \frac{1}{4}$

a_1을 알고 있으므로 r을 구해보자. $\xrightarrow{\text{How?}}$ $a_2 + a_3 = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2$으로 바꿔서 계산

$$a_2 + a_3 = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = \frac{1}{4} \cdot r + \frac{1}{4} \cdot r^2 = \frac{3}{2}$$
$$r + r^2 = 6$$
$$r^2 + r - 6 = 0$$
$$(r+3)(r-2) = 0$$
$$r = \cancel{-3} \text{ or } 2$$

공비가 양수이므로

등비수열 a_n의 첫 항이 $\frac{1}{4}$이고 공비가 2이므로 일반항은 $a_n = \frac{1}{4} \cdot 2^{n-1}$이다.

$a_6 = \frac{1}{4} \cdot 2^5 = 8$

$a_7 = \frac{1}{4} \cdot 2^6 = 16$

$\longrightarrow \boxed{a_6 + a_7 = 24}$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

나중에 쓰이겠지

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

유일하게 바로 그릴 수 있다.

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

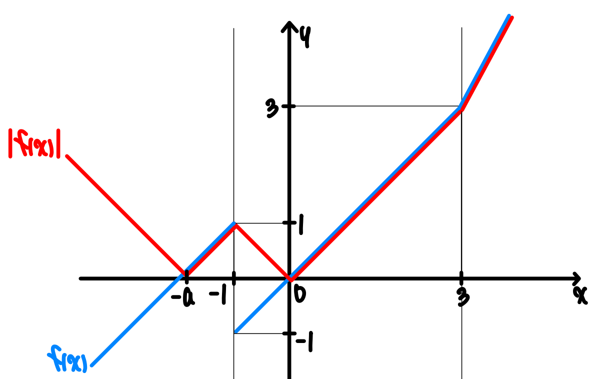
이걸 어떻게 볼까?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

단순히 $f(x)$가 연속이라면 쉬우나 $|f(x)|$이 연속인 것은 어떻게 봐야할까?

식으로만 처리하기에는 어려우니 $f(x)$의 $-1 \le x < 3$ 부분을 그려서 생각해보자.

유일하게 식이 모두 정해져있음



$f(x) = x + a$에서 $a > 0$이므로

$f(x)$가 연속이기 위해서는

위와 같이 만나야한다.

$$\lim_{x \to -1} x + a = 1$$

$a = 2$

$f(x) = bx - 2$에서 $b > 0$이므로

증가하는 함수이다.

$f(x)$가 연속이기 위해서는

위와 같이 만나야한다.

$$\lim_{x \to 3} bx - 2 = 3$$

$3b - 2 = 3$

$b = \frac{5}{3}$

$\boxed{a + b = \frac{11}{3}}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가

주기가 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$이다.

$x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다.

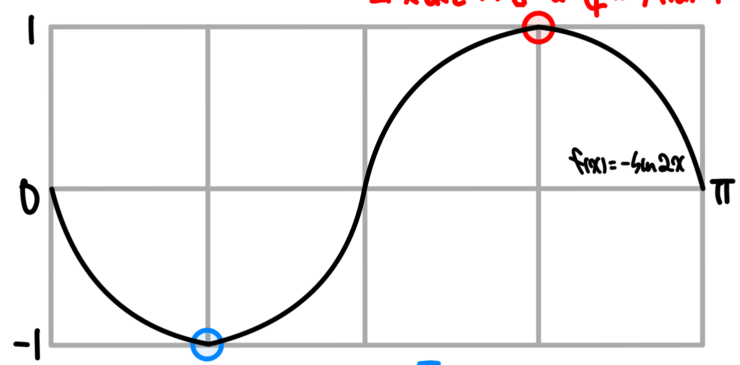
곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

결국 두 점이 모두 필요하다.

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

주어진 식의 주기가 π인데 정의된 구간의 길이가 π이므로 식을 4×2 사각형을 이용하여 그려보자.

최댓값인 지점 : $a = \frac{3}{4}\pi$, $f(a) = 1$



최솟값인 지점 : $b = \frac{\pi}{4}$, $f(b) = -1$

기울기를 구하기 위해 필요한 두 점은 $(\frac{3}{4}\pi, 1)$과 $(\frac{\pi}{4}, -1)$이다.

$$\boxed{\text{기울기} : \frac{1-(-1)}{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}}$$

f(x)의 종류를 특정짓지 않았으므로 큰 힌트가 될수도

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 5$이다.

미분계수 = 기울기로 해석해볼수도?

① 21　　② 22　　③ 23　　④ 24　　⑤ 25

f(x)에 대해 주어진 조건들을 정리해보자면 [실수 전체의 집합에서 미분가능 / $f(1)=3$ / $1<x<5$에서 $f'(x)\ge 5$] 이다.

문제에서 물어본 값은 f(5)의 최솟값이다.

$f(1)=3$이므로 좌표평면에 그려보자.

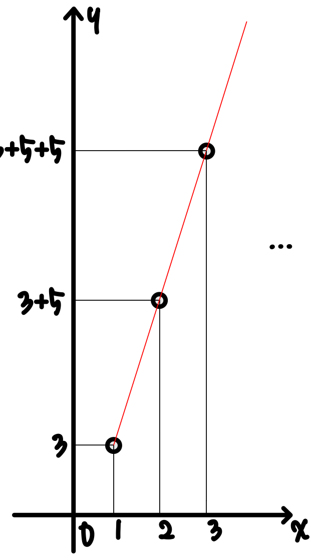
$1<x<5$에서 $f'(x)\ge 5$라는 조건을 해석해보면

$1<x<5$에서 기울기가 5보다 크다고 볼 수 있다.

우리가 구하는 것은 f(5)의 최솟값이므로

기울기가 최소이어야 한다.

그렇다면 $1<x<5$에서 기울기는 5이어야 한다.



$f(1)=3$

$f(2)=3+5$

$f(3)=3+5+5$

$f(4)=3+5+5+5$

$\boxed{f(5)=3+5+5+5+5=23}$

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\ge 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\ge g(x)$$

식 그대로 쓰기보다는 변형해서 쓸까?

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

$f(x)=x^3-x+6$와 $g(x)=x^2+a$을 직접하기는 어려우므로 비교하기 쉽게 바꾸자.

$$f(x)\ge g(x)$$

$$x^3-x+6\ge x^2+a$$

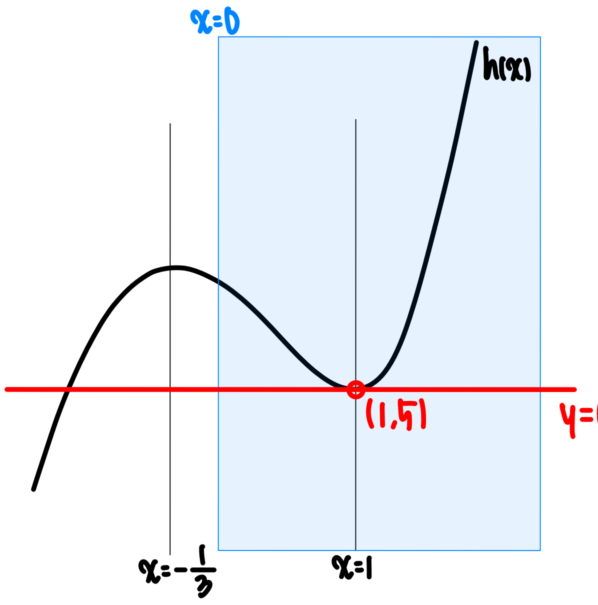
$$\underline{x^3-x^2-x+6}\ge \underline{a}$$

$y=x^3-x^2-x+6$와 $y=a$의 그래프로 보자.

$h(x)=x^3-x^2-x+6$

$h'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$

$x=1$에서 극소　$x=-\frac{1}{3}$에서 극대

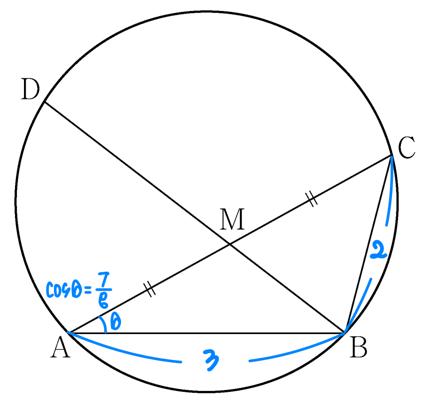


$y=a$가 여기일때 a가 최대이다.

$\boxed{a=5}$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]

모두 그림에 써놓자.　어떻게 쓰일까?



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$　　② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$　　③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$　　④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$　　⑤ $\sqrt{10}$

$\angle BAC=\theta$의 cos값을 알고 있고

$\overline{AC}>3$이라는 조건도 있으므로

$\triangle ABC$에서 코사인 법칙을 사용해보자.

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\theta$

$2^2=3^2+\overline{AC}^2-2\cdot 3\cdot\overline{AC}\cdot\frac{7}{8}$

$4=9+\overline{AC}^2-\frac{21}{4}\cdot\overline{AC}$

$4=9+\overline{AC}^2-\frac{21}{4}\cdot\overline{AC}$　$\overline{AC}$를 구해보기 위해 $\overline{AC}=a$로 치환

$0=a^2-\frac{21}{4}a+5$

$0=4a^2-21a+20$

$0=(a-4)(4a-5)\rightarrow \underline{a=\overline{AC}=4}$ or $\cancel{\frac{5}{4}}$　$\overline{AC}>3$

$\overline{AC}=4$이므로 $\overline{AM}=\overline{MC}=2$이다.

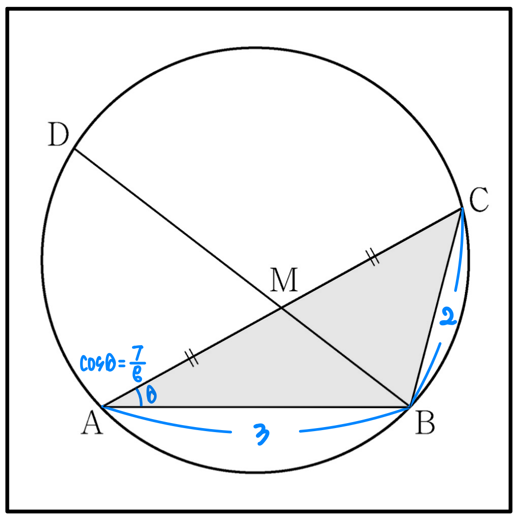
그렇다면 $\triangle ABM$에서 코사인 법칙을 사용해보자.

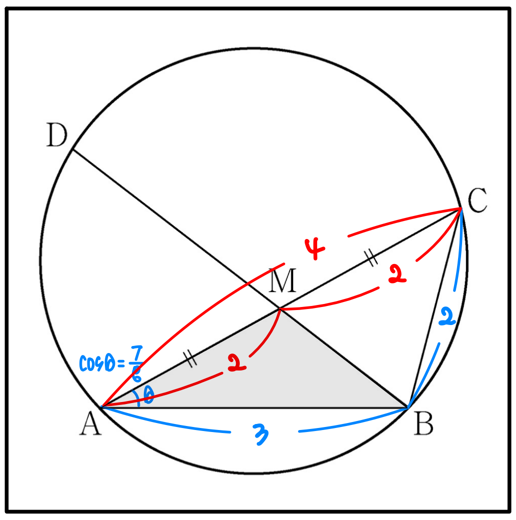
$\overline{BM}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AM}\cdot\cos\theta$

$\overline{BM}^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{7}{8}$

$\overline{BM}^2=\frac{5}{2}$

$\underline{\overline{BM}=\frac{\sqrt{10}}{2}}$





보조선으로 A와 D를 이어보자.

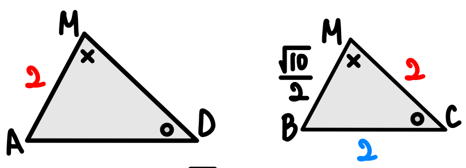
그렇다면 ∠BCA와 ∠BDA가 호 AB를 공통으로 가진다.

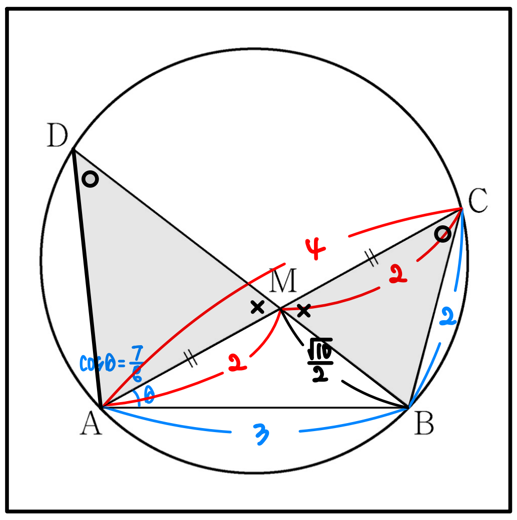
(∠BCA = ∠BDA = ○라고 표기하자)

∠AMD와 ∠BMC는 서로 맞꼭지각이므로 같다.

(∠AMD = ∠BMC = ×라고 표기하자)

△AMD와 △BMC는 2개의 각이 같으므로 닮음이다.





$2:\frac{\sqrt{10}}{2}=\overline{MD}:2$

$\boxed{\overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

둘 다 0에서 시작

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

P Q

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

t=0를 제외하고 $x_1(t)=0$이 되는 순간

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

점 P와 Q의 움직임을 알아봐야 한다.
시간 t에 대한 속도 식이 있으므로 움직임을 알아보자.

P

$x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+2t+C$ $x_1(0)=0$이므로 $C=0$

$v_1(t)=-t+2$

Q

$x_2(t)=\frac{3}{2}t^2+C$ $x_2(0)=0$이므로 $C=0$

$v_2(t)=3t$

o 점 P가 원점으로 돌아오는 시점 t에서는 $x_1(t)=0$이다.

$x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+2t=0$

$-\frac{1}{2}t(t-4)=0$

$t=\cancel{0}$ or 4 → 그렇다면 $t=0$ ~ 4에서 점 Q의 이동거리를 구해보자.

$t=0$ ~ 4에서 $v_2(t)$의 부호는 바뀌지 않으므로 $x_2(4)-x_2(0)$으로 구하자.

$x_2(4)-x_2(0)=\frac{3}{2}\cdot 4^2-0=\boxed{24}$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

항 하나만 알면 끝

(가) $a_5\times a_7<0$

곱이 음수=서로 부호가 다르다. + 공차가 3인 등차수열이니 $a_7>a_5$
→ $a_5<0,\ a_7>0$

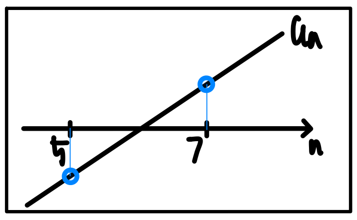
(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

바로 무언가가 보이지는 X

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

문제의 수열 a_n은 공차가 3인 등차수열이다.
그렇다면 점점 커지는 수열이다.

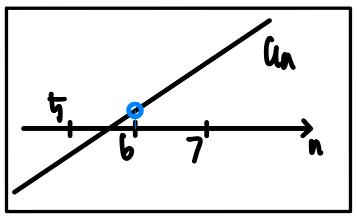
(가)에서 $a_5\times a_7<0$이라는데 a_n은 점점 커지는 수열이므로 $a_5<0,\ a_7>0$이다. 그림으로!



하지만 그림을 보면 a_6의 부호는 알 수 없다.
그렇다고 명확한 힌트도 없으므로 경우의 수를 나누자. +(나)에 적용

① $a_6\geq 0$

$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$



$|a_7|+\cancel{|a_8|}+|a_9|+\cancel{|a_{10}|}+|a_{11}|+\cancel{|a_{12}|}=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cancel{|a_8|}+\cancel{|a_{10}|}+\cancel{|a_{12}|}$

+ + + − − + or 0

$(a_1+6\cdot 3)+(a_1+8\cdot 3)+(a_1+10\cdot 3)=6-(a_1+3)-(a_1+3\cdot 3)+(a_1+5\cdot 3)$

$3a_1+72=-a_1+9$

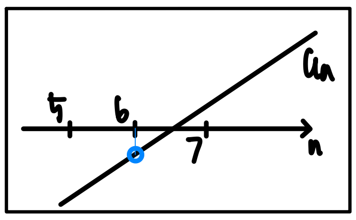
$4a_1=-63$

$a_1=-\frac{63}{4}$ → $a_6=a_1+5\cdot 3=-\frac{3}{4}<0$

전제와 다르다.

② $a_6<0$

$\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$



$|a_7|+\cancel{|a_8|}+|a_9|+\cancel{|a_{10}|}+|a_{11}|+\cancel{|a_{12}|}=6+|a_2|+|a_4|+|a_6|+\cancel{|a_8|}+\cancel{|a_{10}|}+\cancel{|a_{12}|}$

+ + + − − −

$(a_1+6\cdot 3)+(a_1+8\cdot 3)+(a_1+10\cdot 3)=6-(a_1+3)-(a_1+3\cdot 3)-(a_1+5\cdot 3)$

$3a_1+72=-3a_1-21$

$6a_1=-93$

$a_1=-\frac{93}{6}$ → $a_6=a_1+5\cdot 3=-\frac{1}{2}$

전제를 만족

$\boxed{a_{10}=a_1+9\cdot 3=\frac{23}{2}}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다.

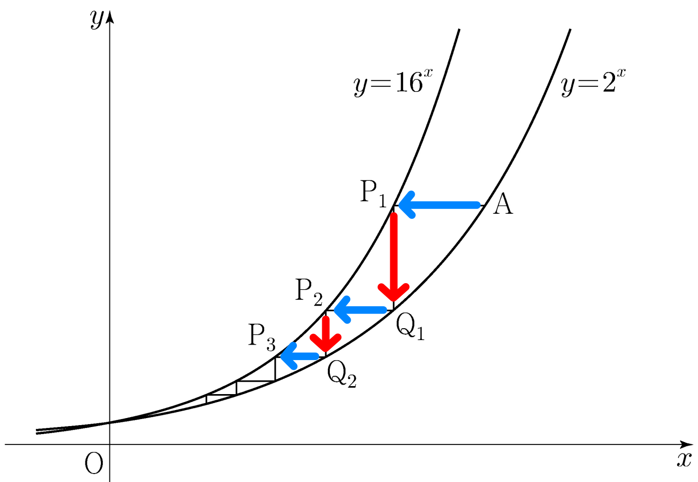
점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

$x_6<\frac{1}{k}$, $x_5>\frac{1}{k}$

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



A의 x좌표 P₁의 x좌표

ㅇ각각의 시행을 분석해보자.
x좌표에 대해 물어보므로
시행들 중에 x좌표에 집중해보자.

ㅇ이 시행에서 두 점의 y좌표가 같다. 이를 수식으로 표현하면 $2^{x}=2^{4x}=(16^x)$이다.
식이 성립하기 위해서는 P_1의 x좌표가 A의 x좌표의 $\frac{1}{4}$이어야 한다.

← : x좌표가 $\frac{1}{4}$배가 된다.

ㅇ이 시행에서는 두 점의 x좌표가 같다.
x좌표가 유지된다는 특징이 있다.

↓ : x좌표가 유지된다.

점 Q_n의 x좌표를 x_n이라고 정의하므로 x_n을 식으로 써보자.

Q_n에서 Q_{n+1}으로 가려면 ←와 ↓를 거친다.
그렇다면 x좌표가 $\frac{1}{4}$배가 되고 유지되므로 $\frac{1}{4}$배가 되는 것이다. → 첫 항이 16이고 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열

$$x_n=64\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n=4^3\cdot4^{-n}=4^{3-n}$$

$x_n<\frac{1}{k}$를 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되어야 하므로 $x_6<\frac{1}{k}$이면서 $x_5\geq\frac{1}{k}$이어야 한다.

$x_6<\frac{1}{k}$
$4^{3-6}<\frac{1}{k}$
$\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$
$k<64$

$x_5\geq\frac{1}{k}$
$4^{3-5}\geq\frac{1}{k}$
$\frac{1}{16}\geq\frac{1}{k}$
$k\geq16$

$16\leq k<64$
이를 만족하는 k는 48개이다.

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

힌트를 많이 준 조건

$$g(x)=\begin{cases}-\int_0^x f(t)\,dt & (x<0)\\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\geq0)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$ O
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. ✕
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. O

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(0)=0$

$g(x)$는 $f(x)$로 이루어져있으므로 $g(x)$를 살펴보자.
$g(x)$가 3차함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능해야 한다.
유일하게 미분가능이 의심되는 $x=0$ 근처를 체크해보자.

$$\lim_{x\to0^-}g'(x)=\lim_{x\to0^+}g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(-\int_0^x f(t)\,dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)$$
$$-f(0)=f(0)$$
$$0=2f(0)$$
$$0=f(0)$$

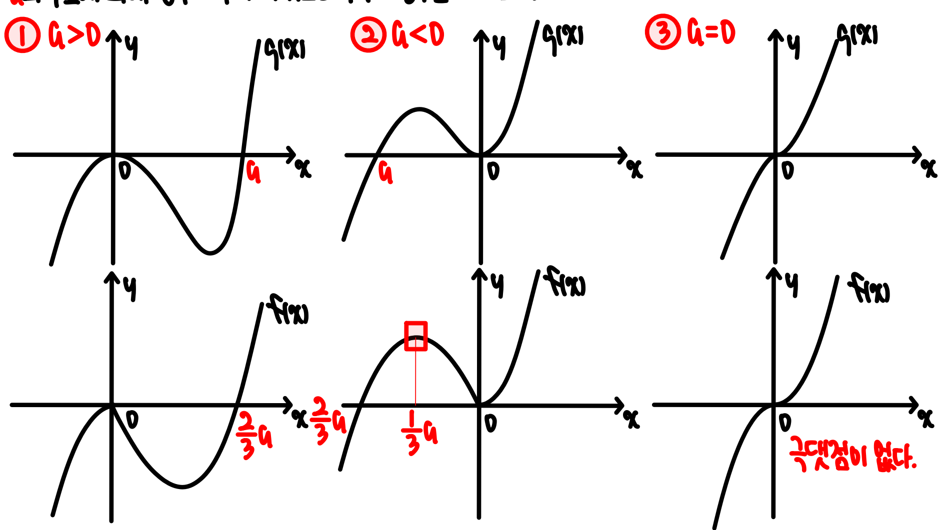
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.

위에서 구한 $f(0)=0$을 더 활용해보자.
$g(x)$의 관점에서 $g(0)=0$이고 $g'(0)=0$이므로 $g(x)$는 x^2을 인수로 가진다.

$\boxed{\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^+}g(x)=0}$ $\boxed{\lim_{x\to0^-}g'(x)=\lim_{x\to0^+}g'(x)=0}$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 3차함수이므로 $g(x)=x^2(x-a)$로 쓸 수 있다.
a의 부호에 의해 경우의 수가 나뉘므로 각각의 경우를 따져보자.

① $a>0$ ② $a<0$ ③ $a=0$



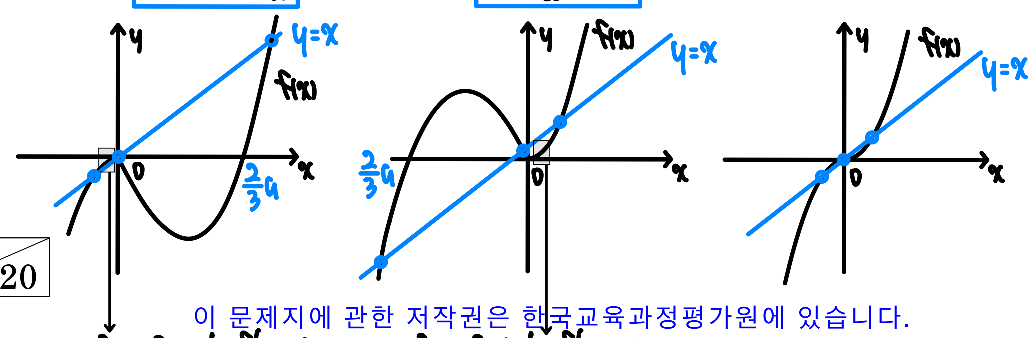
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

이번에도 위와 같이 a의 경우의 수로 나눠보자.

① $a>0$ $\boxed{2<3-2a<4 + \text{전제조건} \rightarrow 0<a<\frac{1}{2}}$

② $a<0$ $\boxed{2<3-2a<4 + \text{전제조건} \rightarrow -\frac{1}{2}<a<0}$

③ $a=0$



이곳의 기울기는 $\lim_{x\to0^-}f'(x)=2a<1$ 이곳의 기울기는 $\lim_{x\to0^+}f'(x)=-2a<1$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.
사소하지만 중요하게 쓰일수도

$a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

→ 향후 행방은 전 항의 부호가 결정한다.

이다. 수열 a_n은 나름의 규칙을 가진다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]
a_{22}까지 구해보기보다는 규칙성에 집중하자.

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

문제의 주인공은 수열 a_n이므로 살펴보자.

□ $a_1=0$이다.

□ a_{n+1}은
- $a_n \le 0$이라면 a_n에 $\frac{1}{k+1}$을 더해준다.
- $a_n > 0$이라면 a_n에 $\frac{1}{k}$을 빼준다.

→ 규칙성을 찾기 위해 a_n을 나열해보자.

$a_1=0$

$a_1 \le 0$이므로 $a_2=a_1+\frac{1}{k+1}$

$a_2=\frac{1}{k+1}$

k가 자연수이므로 $a_2=\frac{1}{k+1}>0$이다.

$a_2>0$이므로 $a_3=a_2-\frac{1}{k}$

$a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$

$\frac{1}{k}>\frac{1}{k+1}$이므로 $a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\le 0$

$a_3 \le 0$이므로 $a_4=a_3+\frac{1}{k+1}$

$a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}$

a_4의 부호는 알 수 없으므로 경우의 수를 나눠보자.

$a_4>0\ (k>1)$

$a_5=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$

$a_5=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}=2\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=2a_3$이다.

$a_3\le 0$이므로 $a_5 \le 0$이다.

$a_6=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}$

$a_4\le 0\ (k\le 1)$

k는 자연수이므로 $k=1,\ a_4=0$

$a_4=0$

$a_5=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{2}{2}-\frac{2}{1}=-1$

$a_6=a_5+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$a_7=a_6+\frac{1}{2}=0$

이렇게 3개가 반복이다.
a_n은 3을 주기로 반복

$a_8=a_7-1=-1$

⋮

$a_{22}=a_{19}=a_{16}=\cdots=a_1=0$이므로 $\boxed{k=1}$

a_6의 부호는 알 수 없으므로 경우의 수를 나눠보자.

$a_6>0\ (k>2)$

$a_6=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$

⋮

위의 방식을 반복하면 $a_{22}=0$을 만족하는 k는 아래와 같다.

$\boxed{k=3}$이면 $a_8=0$이고 주기가 7이다.

$a_{22}=a_{15}=a_8=a_1=0$

$\boxed{k=10}$이면 $a_{22}=0$이다.

$\boxed{1+3+10=14}$

$a_6\le 0\ (k\le 2)$

k는 자연수이고 앞에서 $k=1$은 체크했으므로 $k=2,\ a_6=0$

$a_6=0$

$a_7=a_6+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{3}$

$a_8=a_7-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$

$a_9=a_8+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$a_{10}=a_9-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$

$a_{11}=a_{10}+\frac{1}{3}=0$

이렇게 5개가 반복이다.
a_n은 5를 주기로 반복

$a_{12}=a_{11}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$a_{22}=a_{17}=a_{12}=\cdots=a_2\ne 0$이므로 $k\ne 2$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>-2$ $x>2$

$x>2$

$\log_2(x+2)(x-2)=5$

$\log_2(x^2-4)=5$

$x^2-4=32$

$x^2=36$

$\boxed{x=6}$ or $\cancel{-6}$ 진수조건 불만족

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3+6x^2$이고 $f(0)=-1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]
적분상수가 -1이네?

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 8x^3+6x^2\,dx=2x^4+2x^3+C$

$f(0)=-1$이므로 $C=-1$

$=2x^4+2x^3-1$

$f(2)=2\cdot 2^4+2\cdot 2^3-1=\boxed{15}$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=\sum_{k=1}^{10}4k+\sum_{k=1}^{10}a$

$=4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}a$

$=4\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\cdot 11}{\cancel{2}}+10a$

$=220+10a=250$

$10a=30$

$\boxed{a=3}$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$ 는 $x=1$ 에서 극소이다.

$f'(1)=0$, 도함수가 $-\rightarrow+$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$이면서 $x=1$을 지나면서 도함수의 부호가 음수에서 양수가 되어야 한다.

$f(x)=x^4+ax^2+b$

$f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(1)=4+2a=0$

$f'(1)=0$이므로

$a=-2 \longrightarrow f(x)=x^4-2x^2+b$

함수 $f(x)$의 극댓값이 4라는 조건이 있으므로 극대가 될 수 있는 곳을 찾아보자.

$f'(a)=0$인 a중에서

$f(x)=x^4-2x^2+b$

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$x=-1, 0, 1$에서 $f'(x)=0$이다.

$f(x)$가 $x=1$에서 극소이므로 $x=0$에서는 극대이다.

극대나 극소는 각각 연속으로 나올 수 없다.

$f(0)=b=4$

$\boxed{a+b=2}$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여

중심축과 한 점만 있으면 완성

함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$ 는 $x=1$ 과 $x=4$ 에서 극소이다.

극점 체크는 도함수로

$f(0)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)$가 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 중심축과 한 점만 있다면 식을 쓸 수 있다.
그러나 아직 주어진 힌트가 없으므로 다른 조건들을 먼저 보자.

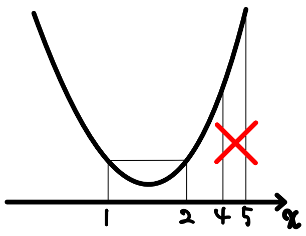
함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$가 $x=1, 4$에서 극소이므로
함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 $x=1, 4$에서 0이 되어야 하고 부호가 $-\rightarrow+$가 되어야 한다.

$g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$

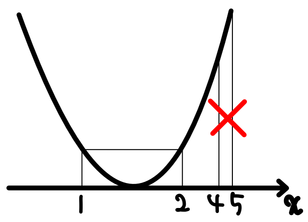
$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$$\begin{cases} g'(1)=|f(2)|-|f(1)|=0 \rightarrow |f(1)|=|f(2)| \\ g'(4)=|f(5)|-|f(4)|=0 \rightarrow |f(4)|=|f(5)| \end{cases}$$

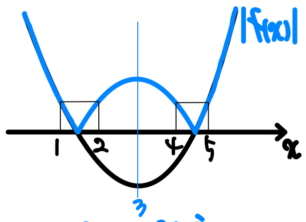
$g(x)$에 대한 조건을 해석해보니 $|f(x)|$에 대한 조건이다.
$f(x)$에 절댓값이 붙어있으므로 $f(x)$와 x축과의 관계의 경우의 수를 나눠보자.



$|f(4)|=|f(5)|$가 ×



$|f(4)|=|f(5)|$가 ×



이렇다면 $f(x)$의 중심축은 $x=3$이다.

$f(x)=2(x-3)^2+k$

위에서 $|f(1)|=|f(2)|$이였으므로 대입해보자.

$f(1)>0, f(2)<0$

$|8+k|=|2+k|$

$8+k=-(2+k)$

$k=-5$

$\boxed{f(0)=2(-3)^2-5=13}$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

n은 자연수입니다... 이 친구는 정수

어느정도는 노가다로 구할수도?

이 문제에서 가장 중요한 것은 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$이 정수가 되어야 한다는 것이다.

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$을 쉽게 보기 위해 k로 치환해보자. $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$

k는 정수

$$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$$
$$\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{k}{4}$$
$$64^{\frac{k}{4}}=\frac{3}{4n+16}$$
$$2^{\frac{3}{2}k}=\frac{3}{4n+16}$$

일단 식 정리를 해보자.....

그런데 어쩌지?

n이 자연수라니까 n에 대해 정리해보자.

$$2^{\frac{3}{2}k}(4n+16)=3$$
$$2^{\frac{3}{2}k+2}\cdot n+2^{\frac{3}{2}k+4}=3$$
$$2^{\frac{3}{2}k+2}\cdot n=3-2^{\frac{3}{2}k+4}$$
$$n=3\cdot 2^{-\frac{3}{2}k-2}-2^2$$

어떻게 해야 자연수가 될까?

① k는 음수이어야 한다.

② k는 짝수이어야 한다.

$k=-2$ $n=2$

$k=-4$ $n=44$

$k=-6$ $n=380$

이렇게만 조건 성립

$k=-8$ $n=3068$

$\boxed{2+44+380=426}$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

기억해두자 큰 힌트

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

$g(-3)=0$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점] $\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^+}g(x)$

> $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는
>
> 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

→ $t=-3, 6$이 아니라면 존재한다고 볼 수도 있네?

주어진 식 $\displaystyle\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$이 바로 해석하기 어려우므로 유리화해서 보자.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}=\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}\cdot\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|+\cancel{\{g(t)\}^2}-\cancel{|g(t)|^2}}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$

극한 식에서 값이 존재하지 않는다면 분모가 0이 된다는 것이다.

위의 식은 극한 식인데 $t=-3, 6$일때는 값이 존재하지 않는다.

관점을 바꿔보면 $t=-3, 6$을 제외하면 값이 존재한다고 해석할 수 있다. → 식 하나하나를 뜯어보자.

$$\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\}}$$

→ ② 값이 존재하기 위해서는 $g(x)$는 $x=-3$ 근처에서 인수로 $(x+3)^2$이 필요

① 어쨌피 무조건 양수이므로 상관 ×

③ $g(-3)=0$이므로 $2|g(t)|$이다.

$t=-3, 6$일때는 값이 존재하지 않아야 하므로 $g(-3)=g(6)=0$

+

$t=-3, 6$에서만 값이 존재하지 않으므로 $g(x)=0$의 실근은 $-3, 6$뿐이다.

이 식에서 힌트를 얻었으니 다른 조건을 보자.

$g(x)=\begin{cases}(x+3)\underbrace{(x+3)(x+k)}_{f(x)}\\ (x+a)\underbrace{(x-b+3)(x-b+k)}_{f(x-b)}\end{cases}$

→ $g(x)=0$의 실근은 $-3, 6$뿐이므로 $x<0$에서 정의된 이 식의 실근은 -3뿐이다.

$k=3$이다.

→ $g(6)=0$이므로 대입해보면 $g(6)=(6+a)(6-b+3)^2=0$

① ~~$a=-6$~~ a는 양수이다. ② $b=9$

→ $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to0^-}g(x)=\lim_{x\to0^+}g(x)$이다.

$$\lim_{x\to0^-}(x+3)^3=\lim_{x\to0^+}(x+a)(x-6)^2$$
$$27=36a$$
$$a=\frac{3}{4}$$

$\boxed{g(4)=\frac{19}{\cancel{4}}\cdot\cancel{2^2}=19}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.