제 2 교시 수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$(2^{2-\sqrt{2}})^{2+\sqrt{2}} = 2^2 = 4$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{1+3}{1} = 4$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2 + a_4 = 30, \quad a_4 + a_6 = \frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$30r^2 = \frac{15}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

$a_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = 30 \Rightarrow a_1 = 48$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = x^2 f(x)$$

라 하자. $f(2) = 1$, $f'(2) = 3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$

$g'(2) = 4f(2) + 4f'(2) = 16$

5. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$-\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

6. 함수 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$f'(x) = 6x^2 - 18x + a = 6(x-1)(x-2)$

$a=12,\ b=2$

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$a_n = dn$

$\sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d} = \frac{\sqrt{a_{16}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{3}{\sqrt{d}} = 2 \Rightarrow d = \frac{9}{4}$

$a_4 = 4d = 9$

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$4-t^3+\cancel{t}-2=-3t^3+\cancel{t} \Rightarrow t=-1$

$\therefore y=2x+4$

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

감소함수

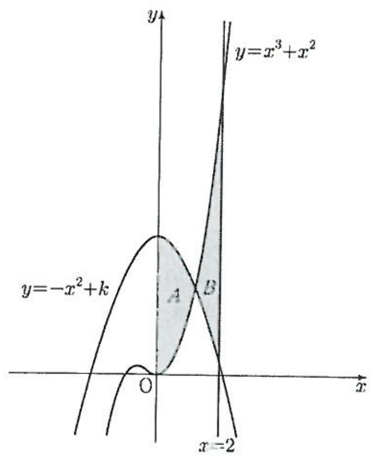
$M=f(-\frac{\pi}{6})=a+3=7 \Rightarrow a=4$

$m=f(b)=4-\sqrt{3}\tan 2b=3$

$\tan 2b=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2b=\frac{\pi}{6} \Rightarrow b=\frac{\pi}{12}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



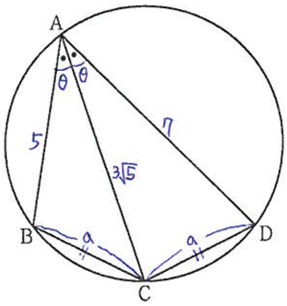
$\int_0^2 (x^3+2x^2-k)\,dx=0$

$4+\frac{16}{3}-2k=0 \Rightarrow k=\frac{14}{3}$

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AC}=3\sqrt{5},\ \overline{AD}=7,\ \angle BAC=\angle CAD$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$a^2=25+\cancel{45}-30\sqrt{5}\cos\theta=49+\cancel{45}-42\sqrt{5}\cos\theta$

$12\sqrt{5}\cos\theta=24 \Rightarrow \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$a^2=70-60=10$

$a=\sqrt{10}=2R\sin\theta \Rightarrow R=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{5}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$n-1\le x<n$일 때, $\lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-n+1)(x-n)\rvert$이다. (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

$0\le x<1 : \lvert f(x)\rvert=\lvert 6x(x-1)\rvert$

$1\le x<2 : \lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-1)(x-2)\rvert$

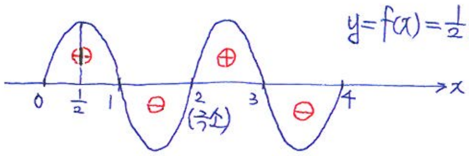
$2\le x<3 : \lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-2)(x-3)\rvert$

$3\le x<4 : \lvert f(x)\rvert=\lvert 6(x-3)(x-4)\rvert$

$g'(x)=f(x)+f(x)=2f(x)$

$g(2)=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_2^4 f(x)\,dx=0$

$y=f(x)=\frac{1}{2}g'(x)$



$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{6}\times1^3\right)=-\frac{1}{2}$

13. 자연수 $m(m \ge 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

n이 짝수 : $\pm\sqrt[n]{m^{12}}$
n이 홀수 : $\sqrt[n]{m^{12}}$
$m^{\frac{12}{n}}$ = (자연수)

$12=2^2\times3^1 \Rightarrow$ 양의 약수 : $3\times2=6$개
$24=2^3\times3^1 \Rightarrow$ 양의 약수 : $4\times2=8$개
$36=2^2\times3^2 \Rightarrow$ 양의 약수 : $3\times3=9$개

$$f(m)=\begin{cases}5 & (m=2,3,5,6,7)\\ 7 & (m=4,9)\\ 8 & (m=8)\end{cases}$$

$\therefore 5\times5+7\times2+8=47$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases}x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ f(x) & (-1\le x\le 1)\end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to0+} g(x+t)\times\lim_{t\to2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$ $h(1)=g(1+)\times g(3+)=1\times3=3$

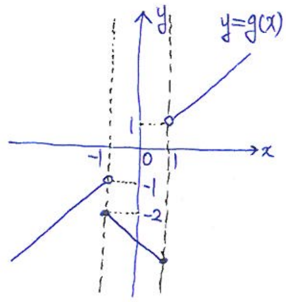
ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

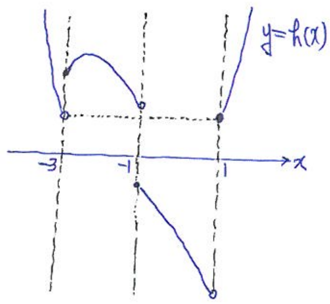
$h(x)=g(x+)\times g(x+2+)$

ㄴ. $$h(x)=\begin{cases}x(x+2) & (x<-3)\\ xf(x+2) & (-3\le x<-1)\\ f(x)(x+2) & (-1\le x<1)\\ x(x+2) & (x\ge1)\end{cases}$$



ㄷ. $f(x)=-(x+3)$

$$h(x)=\begin{cases}x(x+2) & (x<-3)\\ -x(x+5) & (-3\le x<-1)\\ -(x+3)(x+2) & (-1\le x<1)\\ x(x+2) & (x\ge1)\end{cases}$$



15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

i) a_6이 3의 배수일 때

$a_6=120$, $a_7=40$, $a_8=160$, $a_9=200=M$

ii) $a_6=3k+1$

$a_5=39-3k$, $a_6=3k+1=13-k \Rightarrow k=3$, $a_7=40$, $a_8=3k+41$, $a_9=3k+81=90$

iii) $a_6=3k+2$

$a_4=6k-36$, $a_5=38-3k=2k-12 \Rightarrow k=10$, $a_6=3k+2$, $a_7=40$, $a_8=3k+42$, $a_9=k+14=24=m$

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 10

$3x+2=4x-8 \Rightarrow x=10$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 15

$f(x)=x^4-x^2+3 \Rightarrow f(2)=16-4+3=15$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

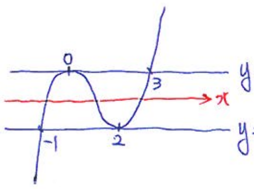
일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값을 구하시오. [3점] 22

$3\sum a_k + 25 = 55 \Rightarrow \sum a_k = 10$

$10 + \sum b_k = 32 \Rightarrow \sum b_k = 22$

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점] 7

$2x^2(x-3)+k=0$



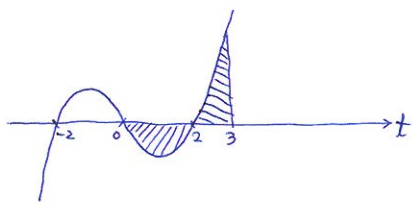
$\therefore\ 0<k<8$ (7개)

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\le t\le 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\ge 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점] 17

$t\ge 2:\ v(t)=3t^2+4t-20\ (\because v(2)=0)$

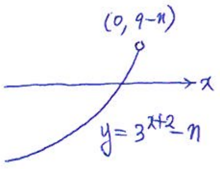


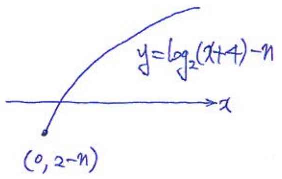
$S=\frac{2}{4}\times 2^4+\int_2^3(3t^2+4t-20)\,dt = 8+(19+10-20)=17$

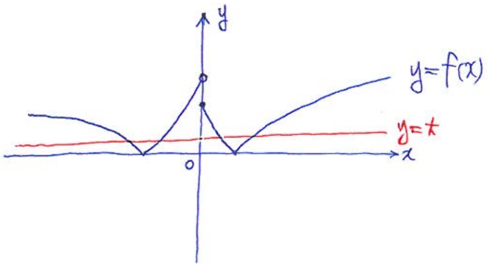
21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점] 33







$$\left.\begin{cases} 9-n>0 \\ 2-n<0 \end{cases}\right) \Rightarrow 2<n<9$$

$\therefore$ $n=3, 4, 5, 6, 7, 8$ (합 : 33)

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점] 13

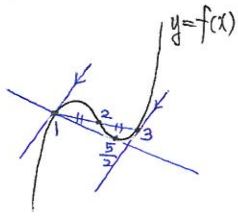
(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$$

$g(x)$의 값은 2개인데 연속이고 최솟값을 가지므로 큰 값이다.



근과 계수 : $1+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=6$

$f(x)=x^3-6x^2+ax-3$

$g(1)=\lim_{x\to 1} g(x)=3$

$f(3)=3a-30=6 \Rightarrow a=12$

$\therefore$ $f(x)=x^3-6x^2+12x-3=(x-2)^3+5 \Rightarrow f(4)=13$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시 수학 영역(확률과 통계) 홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

$_5C_3 \times 3^2 = 90$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

i) 4 ? ? ? $\Rightarrow$ $5\times5\times3=75$

ii) 5 ? ? ? $\Rightarrow$ $5\times5\times3=75$

$\oplus$ 150

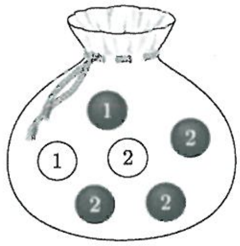
25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

$1-\frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3}=1-\frac{9\times8\times7}{14\times13\times12}=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



흰 : 1, 2
검 : 1, 2, 2, 2

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2+{}_4C_3-{}_1C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}$
$=\frac{12+4-3}{20}=\frac{13}{20}$

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다.
이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $P(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

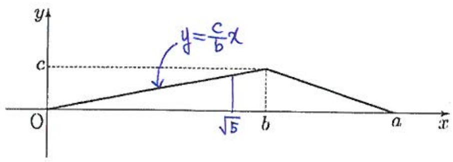
① 70　② 74　③ 78　④ 82　⑤ 86

$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 9.8 \Rightarrow \sigma = 10$

$b-a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \le 6 \Rightarrow \sqrt{n} \ge 8.6$

$n \ge 73.96 \Rightarrow n \ge 74$

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$P(X \le b) - P(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $P(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$　② 6　③ $\frac{13}{2}$　④ 7　⑤ $\frac{15}{2}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}ac = 1 \Rightarrow ac = 2 \\ \frac{bc}{2} - \frac{(a-b)c}{2} = \frac{2bc-2}{2} = bc - 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow bc = \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{c}{b}\sqrt{5} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 5c \end{cases}$$

$5c^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2},\ a = 4$

※ $P(X \le b) + P(X \ge b) = 1 \Rightarrow P(X \le b) = \frac{5}{8} = \frac{1}{2}bc$

※ $P(X \le b) = \frac{5}{8} \Rightarrow b = \frac{5}{8}a$

단답형

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 49 [4점]

$1+2+3+4+5+6=21$ (홀)

1회 2회 3회

i) 홀 홀 홀

ii) 홀 짝 짝

$\therefore \dfrac{3\times2^2+3\times3^2}{3^3+3\times3^3}=\dfrac{13}{36}$

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점] 100

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
(나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
(다) $f(6)=f(5)+6$

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)\le f(7)\le f(8)\le f(9)\le f(10)$, $f(5)\xrightarrow{+6}f(6)$

4	10
3	9
2	8
1	7

i) $f(5)=4,\ f(6)=10 \Rightarrow (4+3+2+3+2)\times1=14$

ii) $f(5)=3,\ f(6)=9 \Rightarrow (3+2+1+2+1)\times({}_2H_4-1)=36$

$\therefore 2\times(14+36)=100$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{x(2+2)}{x} \longrightarrow 4$

24. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

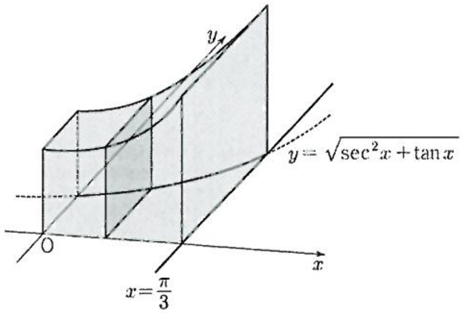
$\frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{9} \times 7 = \frac{14}{9}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$a_n = 3\times 2^{2n-1} \Rightarrow a_2 = 3\times 8 = 24$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}$ $\left(0\le x\le \frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$ ④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

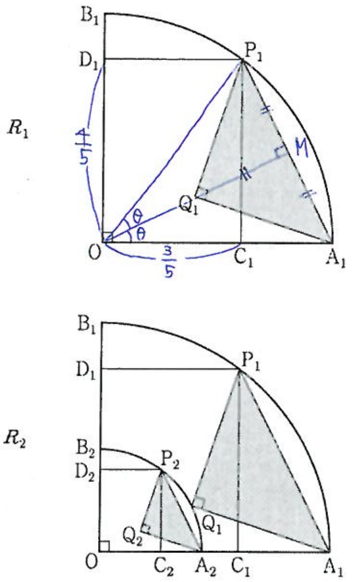
$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)\,dx$

$=\left[\tan x-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{3}-\ln\frac{1}{2}$

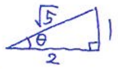
$=\sqrt{3}+\ln 2$

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3 : 4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{9}{40}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{11}{40}$　④ $\frac{3}{10}$　⑤ $\frac{13}{40}$

$\tan 2\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2}$

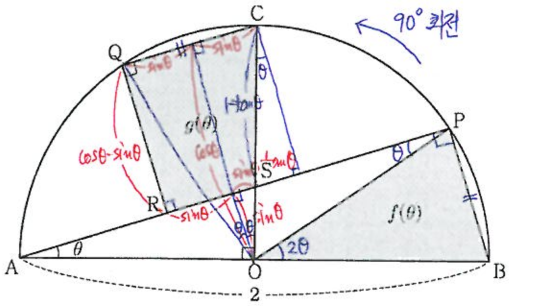


$\overline{A_1M} = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{5}$

$\overline{OQ_1} = \cos\theta - \frac{1}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5} =$

$\therefore \dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+} \frac{3f(\theta) - 2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

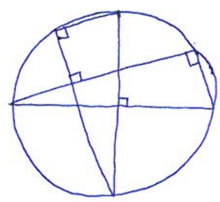


① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f(\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta = \sin\theta\cos\theta$

$g(\theta) = \frac{1}{2}(3\sin\theta + \sin\theta\tan\theta)(\cos\theta - \sin\theta)$

$= \frac{1}{2}\left(3\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)(\cos\theta - \sin\theta)$

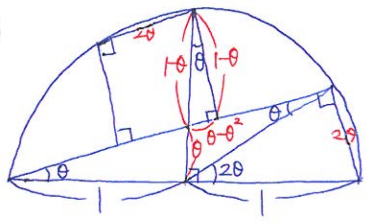


$\therefore 3f(\theta) - 2g(\theta) = \cancel{3sc} - \left(\cancel{3sc} - 3s^2 + s^2 - \frac{s^3}{c}\right)$

$= 2\sin^2\theta + \frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} \Rightarrow 2$

※ $g(\theta) = 2\sin\theta(\cos\theta - \sin\theta) - \frac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta)^2\tan\theta$

※



$f(\theta) \fallingdotseq \theta$

$g(\theta) \fallingdotseq 2\theta(1-\theta) - \frac{1}{2}(1-\theta)(\theta-\theta^2)$

$= (1-\theta)\left(\frac{3}{2}\theta + \frac{1}{2}\theta^2\right)$

$= \frac{3}{2}\theta - \theta^2 - \frac{1}{2}\theta^3 \fallingdotseq \frac{3}{2}\theta - \theta^2$

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
(나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_{0}^{14} g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점] 26

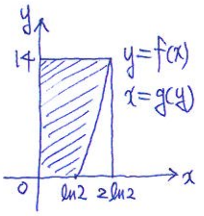
(가) 수렴이므로 $c=-6$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{ae^{2x}+be^{x}}{e^{x}}=\lim_{x\to-\infty}(ae^{x}+b)=b=1$

$f(x)=ae^{2x}+e^{x}-6$

(나) $f(\ln 2)=4a-4=0 \Rightarrow a=1$

$f(x)=e^{2x}+e^{x}-6=14 \Rightarrow e^{x}=4 \Rightarrow x=2\ln 2$



$\int_{0}^{14} g(y)\,dy=28\ln 2-\int_{\ln 2}^{2\ln 2} f(x)\,dx$

$=28\ln 2-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x\right]_{\ln 2}^{2\ln 2}$

$=28\ln 2-(6+2-6\ln 2)$

$=-8+34\ln 2$

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin \pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

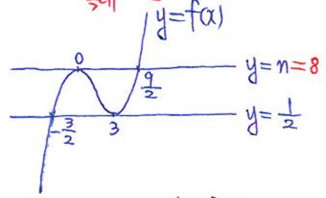
(가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
(나) 열린구간 $(0, 3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 31

$h(x)=e^{\sin \pi f(x)}-1 \Rightarrow h'(x)=e^{\sin \pi f(x)}\times \pi f'(x)\cos \pi f(x)$

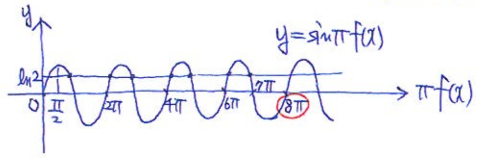
$h(0)=0 \Rightarrow \sin \pi f(0)=0 \Rightarrow f(0)=n$ (정수)

$h'(0)=\pi \underbrace{f'(0)}_{\text{극대}} \overset{\oplus}{\cos n\pi}=0 \Rightarrow f'(0)=0$



$h(x)=1 \Leftrightarrow e^{\sin \pi f(x)}=2 \Leftrightarrow \sin \pi f(x)=\ln 2$

$\left(\frac{\pi}{2}<\pi f(x)<n\pi\right)$



$f(x)=ax^{2}(2x-9)+8 \Rightarrow f(3)=-27a+8=\frac{1}{2} \Rightarrow a=\frac{5}{18}$

$\therefore f(x)=\frac{5}{18}x^{2}(2x-9)+8 \Rightarrow f(2)=-\frac{50}{9}+8=\frac{22}{9}$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A(2, 2, −1)을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C(−2, 1, 1)에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

B(2,−2,1)

$\overline{BC}=\sqrt{4^2+3^2+0^2}=5$

24. 초점이 $F\left(\frac{1}{3}, 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a, 2)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$y^2=\frac{4}{3}x \Rightarrow 4=\frac{4}{3}a \Rightarrow a=3$

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$

접선 : $\frac{2x}{a^2}+\frac{y}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow a^2=4b^2$

$\frac{2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=2,\ a^2=8$

$c^2=a^2-b^2=6 \Rightarrow 2c=2\sqrt{6}$

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

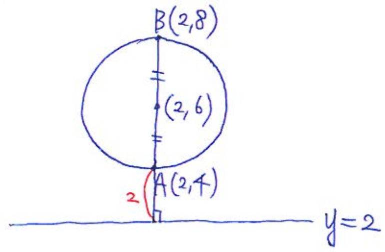
에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\ (t\text{는 실수})$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

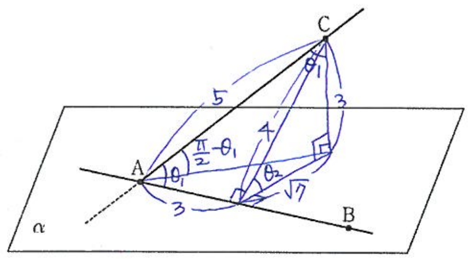
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

$(x,y)=(1,2)+t(1,0)=(t+1,\ 2)$



27. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$



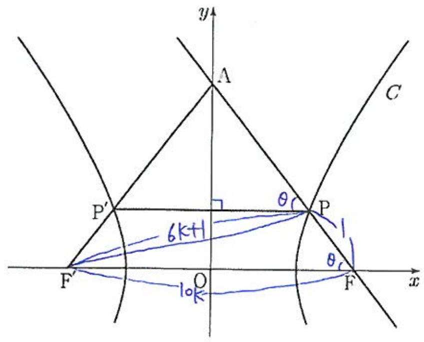
$\cos\theta_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$

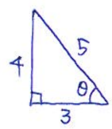
28. 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)\ (c>0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF'과 만나는 점을 P'이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PP'}} = 5:6, \quad \overline{\mathrm{PF}} = 1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$





$a = 3k,\ b = 4k,\ c = 5k$

$(6k+1)^2 = 100k^2 + 1 - 20k\cos\theta$

$36k^2 + 12k + \cancel{1} = 100k^2 + \cancel{1} - 12k$

$64k^2 = 24k \Rightarrow k = \frac{3}{8}$

$\therefore 6k = \frac{9}{4}$

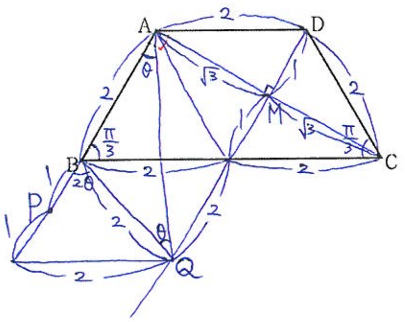
단답형

29. 평면 α 위에 $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = 2$, $\angle ABC = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오. [4점] 12

(가) $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BP})$

(나) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 6$

(다) $2 \times \angle BQA = \angle PBQ < \frac{\pi}{2}$



(가) $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DM}$

(나) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

(다) $\theta = 30^\circ$

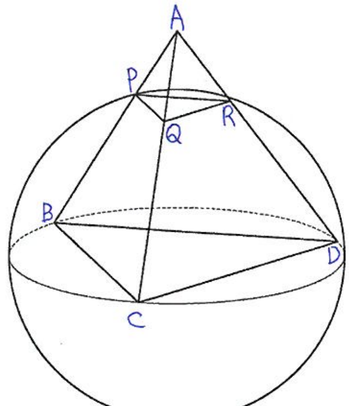
$\therefore \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP}) \cdot \overrightarrow{DQ}$

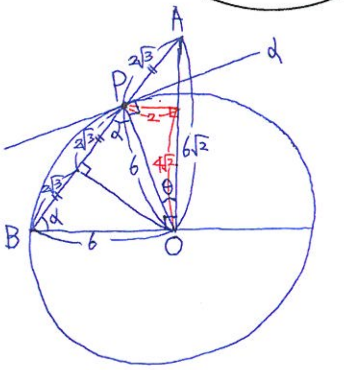
$= 4 \times 4 \times \cos 60^\circ + 4 \times 1$

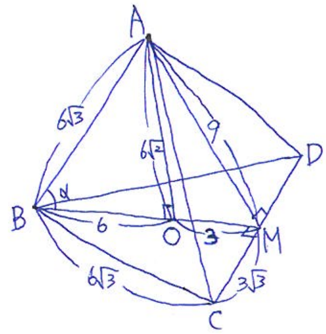
$= 12$

※ $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{DQ} = \overline{DQ} \times \overline{MQ} = 4 \times 3 = 12$

30. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자. 구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q, 구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고, 점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자. 구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점] 24







$\cos\theta = \frac{36+72-12}{2 \times 6 \times 6\sqrt{2}} = \frac{96}{72\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\triangle PQR = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$

$\therefore k = 3\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{6} \Rightarrow k^2 = 24$

※ $\cos\theta = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.