교사평경3

01

[확통] [01순열과조합] 교사평경 최근 3개년

05 확통

01 여러가지순열

01 중복순열

01 중복순열1 (기호와 뜻)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 22

1. ${}_2\Pi_3$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 23

2. ${}_n\Pi_2=25$일 때, 자연수 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 23

3. ${}_3\Pi_4$의 값은?

① 63 ② 69 ③ 75
④ 81 ⑤ 87

05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

03 중복순열3 (선택 후 배열)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 27

4. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는?

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다. (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432
④ 456 ⑤ 480

05 확통 01 여러가지순열

01 중복순열

05 중복순열5 (정수의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 7

5. 숫자 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만든 네 자리 자연수가 2100보다 작은 경우의 수는?

① 80 ② 85 ③ 90
④ 95 ⑤ 100

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 26

6. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 N의 개수는?

(가) N은 홀수이다.

(나) $10000 < N < 30000$

① 720 ② 730 ③ 740

④ 750 ⑤ 760

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 29

7. 숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 30

8. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오.

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.

(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 24

9. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는?

① 125 ② 150 ③ 175

④ 200 ⑤ 225

[출처]　　2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 29

10. 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만들려고 한다. 숫자 0과 1을 각각 1개 이상씩 선택하여 만들 수 있는 모든 자연수의 개수를 구하시오.

05 확통

01 여러가지순열

01 중복순열

06 중복순열6 (함수의 개수)

[출처]　　2021 모의_공공 평가원 고3 예비 확률과 통계 27

11. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f: X \to X$의 개수는?

> (가) $f(1)+f(2)+f(3) \geq 3f(4)$
>
> (나) $k=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(k) \neq f(4)$이다.

① 41　② 45　③ 49

④ 53　⑤ 57

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 28

12. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는?

(가) $f(2)<f(3)<f(4)$
(나) $f(1)>f(3)>f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104
④ 106 ⑤ 108

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 28

13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수는?

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404
④ 414 ⑤ 424

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 28

14. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \geq \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148
④ 158 ⑤ 168

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 25

15. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수는?

집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $x \times f(x) \leq 10$이다.

① 102 ② 105 ③ 108
④ 111 ⑤ 114

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 30

16. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

(가) $n(A) \leq 3$
(나) $n(A)=n(B)$
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

05 확통

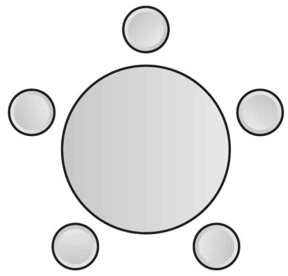
01 여러가지순열

02 원순열

01 원순열1 (원순열)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 9
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 14

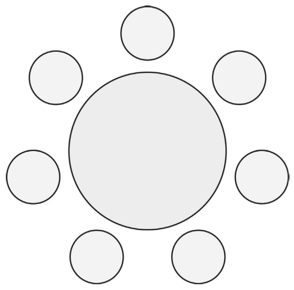
17. 다섯 명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생이 있다. 이 8명의 학생 중에서 A, B를 포함하여 5명을 선택하고 이 5명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, A와 B가 이웃하게 되는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 25

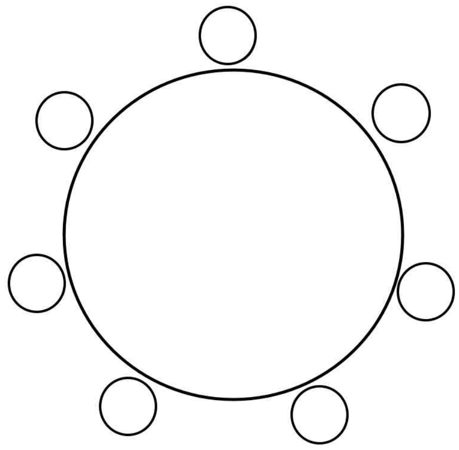
18. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A학교 학생 2명, B학교 학생 2명, C학교 학생 3명이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A학교 학생 2명이 서로 이웃하여 앉고 B학교 학생 2명도 서로 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 8

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 12

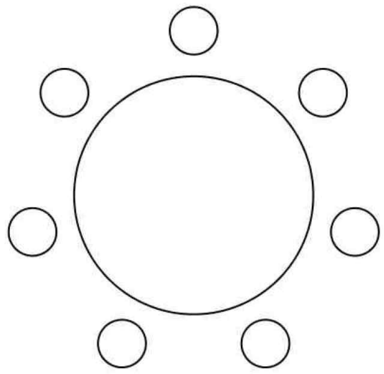
19. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명이 있다. 이 7명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 1학년 학생끼리 이웃하고 2학년 학생끼리 이웃하게 되는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 96　② 100　③ 104　④ 108　⑤ 112

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 6

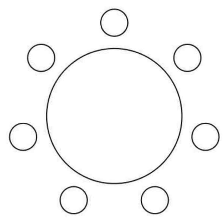
20. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 108 ② 120 ③ 132
④ 144 ⑤ 156

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

21. 그림과 같이 원형 탁자에 7개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. A, B, C를 포함한 7명의 학생이 모두 이 7개의 의자에 앉으려고 할 때, A, B, C 세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

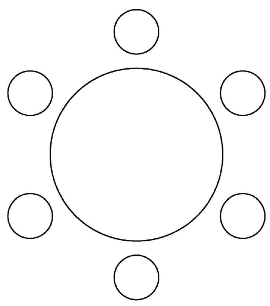


① 120 ② 132 ③ 144
④ 156 ⑤ 168

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 26

22. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

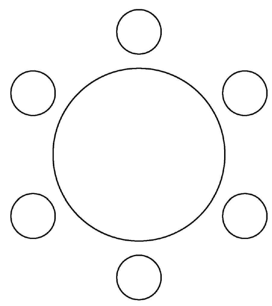
(가) A와 B는 이웃한다. (나) B와 C는 이웃하지 않는다.



[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 15

23. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

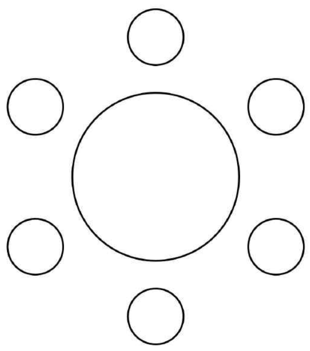
(가) A와 B는 이웃한다. (나) B와 C는 이웃하지 않는다.



① 32 ② 34 ③ 36
④ 38 ⑤ 40

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 24

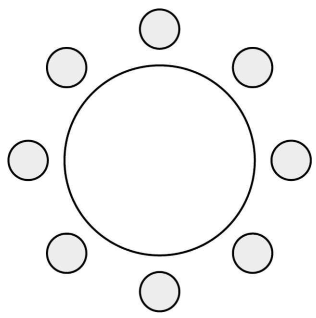
24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 있다. 이 6개의 공을 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 3의 배수가 적혀 있는 두 공이 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



① 48 ② 54 ③ 60
④ 66 ⑤ 72

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 25

25. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

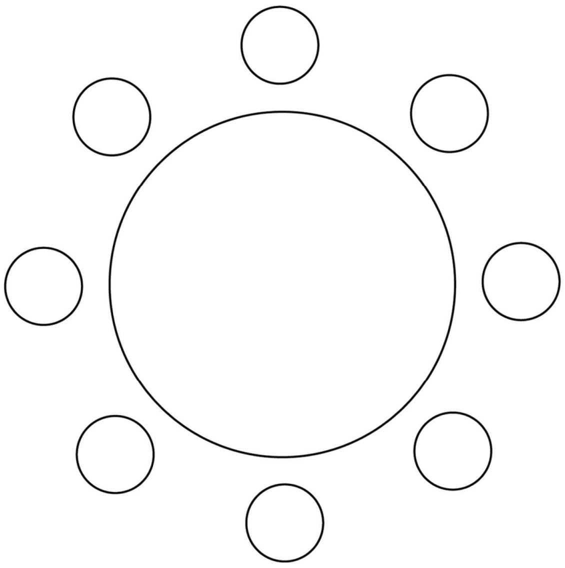


① 92 ② 96 ③ 100
④ 104 ⑤ 108

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 29

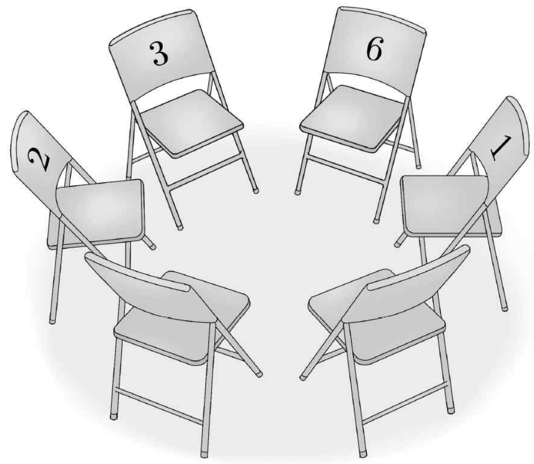
26. 두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 29

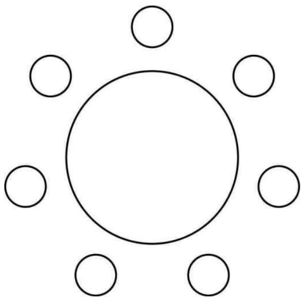
27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 25

28. A학교 학생 5명, B학교 학생 2명이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, B학교 학생끼리는 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

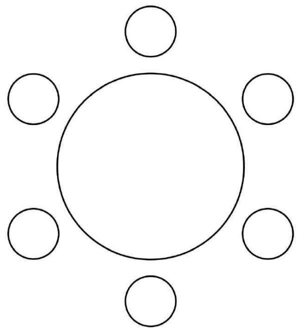
① 320 ② 360 ③ 400
④ 440 ⑤ 480



[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 26

29. 세 학생 A, B, C를 포함한 6명의 학생이 있다. 이 6명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, A와 C는 이웃하지 않고, B와 C도 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

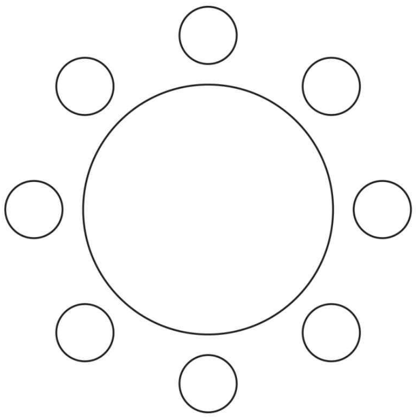


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 26

30. 학생 A를 포함한 4명의 1학년 학생과 학생 B를 포함한 4명의 2학년 학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

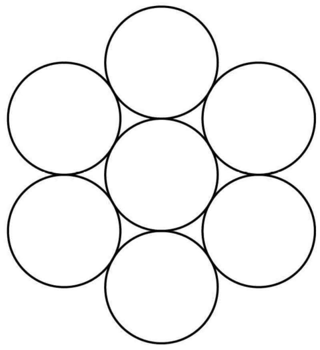
(가) 1학년 학생끼리는 이웃하지 않는다.
(나) A와 B는 이웃한다.

① 48 ② 54 ③ 60
④ 66 ⑤ 72



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 24

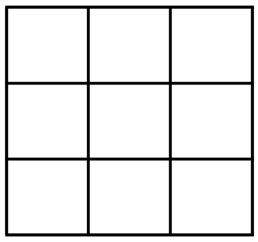
31. 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 7개의 원이 있다.



7개의 원에 서로 다른 7개의 색을 모두 사용하여 색칠하는 경우의 수를 구하시오. (단, 한 원에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 27

32. 그림과 같이 합동인 9개의 정사각형으로 이루어진 색칠판이 있다.



빨간색과 파란색을 포함하여 총 9가지의 서로 다른 색으로 이 색칠판을 다음 조건을 만족시키도록 칠하려고 한다.

(가) 주어진 9가지의 색을 모두 사용하여 칠한다.
(나) 한 정사각형에는 한 가지 색만을 칠한다.
(다) 빨간색과 파란색이 칠해진 두 정사각형은 꼭짓점을 공유하지 않는다.

색칠판을 칠하는 경우의 수는 $k\times 7!$이다. k의 값을 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

01 같은 것을 포함한 순열1 (배열)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 4

33. 6개의 문자 a, a, a, b, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 52 ② 56 ③ 60
④ 64 ⑤ 68

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 11

34. 흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열할 때, 흰 공은 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는?
(단, 같은 색의 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

① 295 ② 300 ③ 305

④ 310 ⑤ 315

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 7

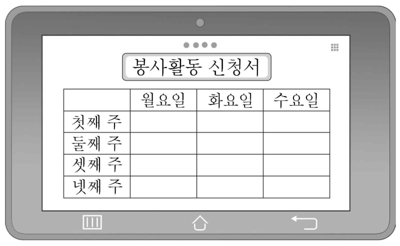
35. 6개의 문자 a, a, b, b, c, c를 일렬로 나열할 때, a끼리는 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는?

① 50 ② 55 ③ 60

④ 65 ⑤ 70

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 19

36. 매주 월요일부터 수요일까지 총 4주에 걸쳐 서로 다른 세 종류의 봉사활동 A, B, C를 반드시 하루에 한 종류씩 다음 규칙에 따라 신청하려고 한다.



- 봉사활동 A, B, C를 각각 3회, 3회, 6회 신청한다.
- 첫째 주에는 봉사활동 A, B, C를 모두 신청한다.
- 같은 요일에는 두 종류 이상의 봉사활동을 신청한다.

다음은 봉사활동을 신청하는 경우의 수를 구하는 과정이다.

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청한 후
‘(i) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우’에서
‘(ii) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우’를 제외하면 된다.

첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청하는 경우의 수는 3!이다.

(i)의 경우 : 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 (가)이다.

(ii)의 경우 : 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 (나)이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는
3!×((가) − (나))이다.

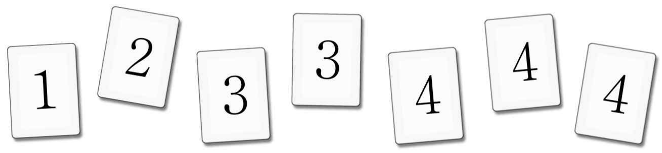
위의 (가), (나)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 825 ② 832 ③ 839

④ 846 ⑤ 853

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 27

37. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는?



① 180 ② 185 ③ 190
④ 195 ⑤ 200

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 23

38. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

02 같은 것을 포함한 순열2 (정해진 순서)

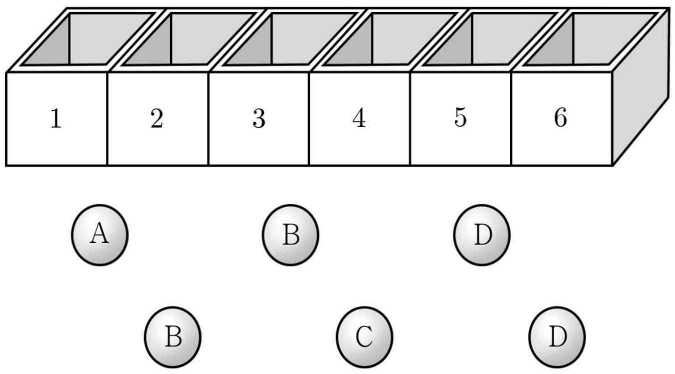
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 27

39. 3개의 문자 A, B, C를 포함한 서로 다른 6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 두 문자 B와 C 사이에 문자 A를 포함하여 1개 이상의 문자가 있도록 나열하는 경우의 수는?

① 180 ② 200 ③ 220
④ 240 ⑤ 260

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 27

40. 그림과 같이 A, B, B, C, D, D의 문자가 각각 하나씩 적힌 6개의 공과 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6개의 빈 상자가 있다.



각 상자에 한 개의 공만 들어가도록 6개의 공을 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? (단, 같은 문자가 적힌 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공은 문자 A 또는 문자 B가 적힌 공이다.
> (나) 문자 B가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수 중 적어도 하나는 문자 C가 적힌 공을 넣는 상자에 적힌 수보다 작다.

① 80 ② 85 ③ 90
④ 95 ⑤ 100

05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

03 같은 것을 포함한 순열3 (일부 선택 후 배열)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 14

41. 세 숫자 1, 2, 3만을 사용하여 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 세 숫자 1, 2, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하고 숫자 2를 반드시 짝수 번째 자리에만 오도록 놓는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음은 이것을 구하는 과정의 일부이다.

> 일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.
>
> (ⅰ) 숫자 2를 한번 사용한 경우
> 2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1$이다.
> 그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> (ⅱ) 숫자 2를 두 번 사용한 경우
> ⋮ (중략)
>
> (ⅲ) 숫자 2를 세 번 사용한 경우
> 2를 모든 짝수 번째 자리의 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 나열한 것이므로 그 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.
>
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는 290이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① 262 ② 267 ③ 272
④ 277 ⑤ 282

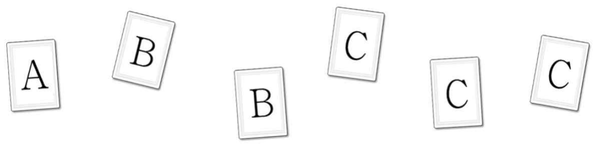
[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 8

42. 모든 자리의 수의 합이 10인 다섯 자리 자연수 중 숫자 1, 2, 3을 각각 한 번 이상 사용하는 자연수의 개수는?

① 120 ② 132 ③ 146
④ 158 ⑤ 170

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 10

43. A, B, B, C, C, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드 중에서 5장의 카드를 택하여 이 5장의 카드를 왼쪽부터 모두 일렬로 나열할 때, C가 적힌 카드가 왼쪽에서 두 번째의 위치에 놓이도록 나열하는 경우의 수는?
(단, 같은 문자가 적힌 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.)



① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 28

44. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는?

① 187 ② 190 ③ 193
④ 196 ⑤ 199

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 26

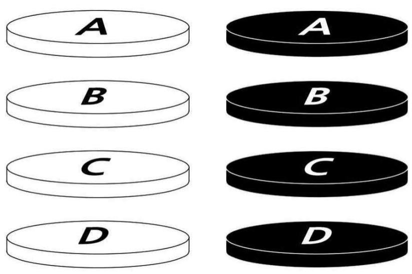
45. 세 문자 a, b, c 중에서 모든 문자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 5개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 135 ② 140 ③ 145
④ 150 ⑤ 155

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 30

46. 흰색 원판 4개와 검은색 원판 4개에 각각 A, B, C, D의 문자가 하나씩 적혀 있다. 이 8개의 원판 중에서 4개를 택하여 다음 규칙에 따라 원기둥 모양으로 쌓는 경우의 수를 구하시오. (단, 원판의 크기는 모두 같고, 원판의 두 밑면은 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 있으면 같은 문자가 적힌 원판끼리는 검은색 원판이 흰색 원판보다 아래쪽에 놓이도록 쌓는다.
> (나) 선택된 4개의 원판 중 같은 문자가 적힌 원판이 없으면 D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 쌓는다.



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 26

47. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

> (가) $a \times b \times c \times d = 8$
> (나) $a + b + c + d < 10$

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

04 같은 것을 포함한 순열4 (정수의 개수)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 24

48. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 홀수의 개수는?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

05 확통

01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

05 같은 것을 포함한 순열5 (함수의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 20

49. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

> ◦ $n(A) \geq 3$
>
> ◦ 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수이다.
>
> ◦ $n(A) > n(B)$

다음은 함수 f의 개수는 구하는 과정이다.

> (ⅰ) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는
> $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$
> 이다.
> $A=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는
> $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$
> 이다.
> $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1\}$인 경우 함수 f의 개수는 $\boxed{(가)}$이고,
> $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$인 경우
> 함수 f의 개수는 $\boxed{(나)}$이므로
> $n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
> $4\times\left(3\times\boxed{(가)}+3\times\boxed{(나)}\right)$이다.
>
> (ⅱ) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$뿐이므로 이 경우 $n(B)<4$를 만족시키는 함수 f의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.
>
> (ⅲ) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.
>
> (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는
>
> $4\times\left(3\times\boxed{(가)}+3\times\boxed{(나)}\right)+\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은?

① 164 ② 168 ③ 172
④ 176 ⑤ 180

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

50. 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는?

(가) $\log f(x)$는 일대일함수가 아니다. (나) $\log\{f(1)+f(2)+f(3)\}=2\log 2+\log 3$ (다) $\log f(4)+\log f(5)\le 1$

① 134 ② 140 ③ 146
④ 152 ⑤ 158

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 30

51. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$는 짝수이다. (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

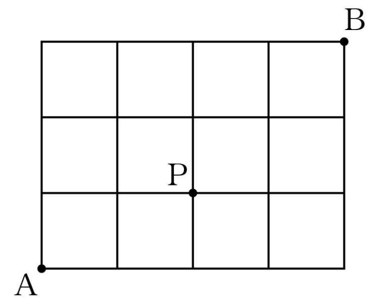
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

08 최단경로의 수1 (평면)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 24

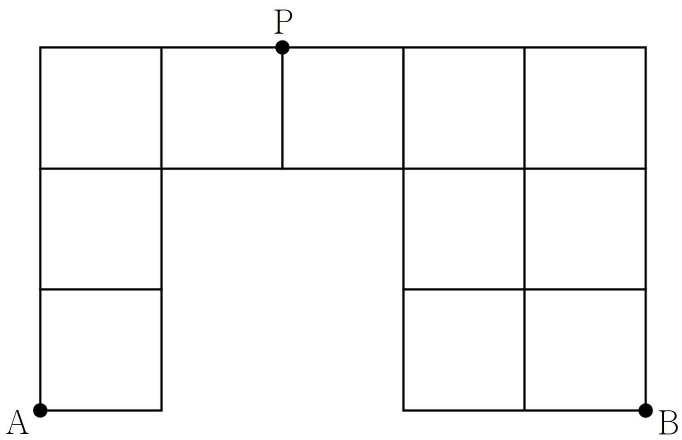
52. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 28

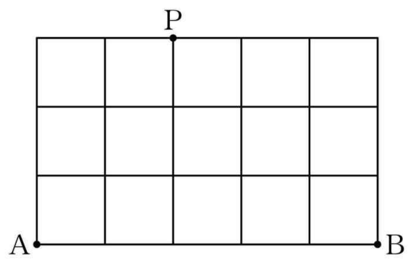
53. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 수는?



① 78 ② 82 ③ 86
④ 90 ⑤ 94

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 26

54. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? (단, 한 번 지난도로를 다시 지날 수 있다.)



① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

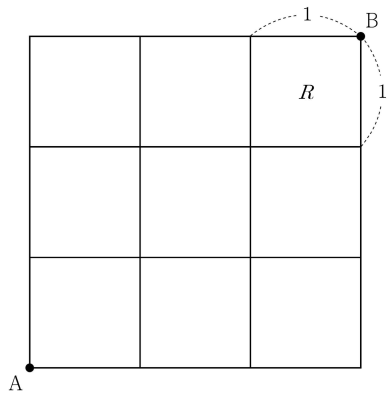
05 확통 01 여러가지순열

03 같은 것을 포함한 순열

09 최단경로의 수2 (추론)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 29

55. 그림과 같이 바둑판 모양의 도로망이 있다. 이 도로망은 정사각형 R와 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 9개로 이루어진 모양이다.



이 도로망을 따라 최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.

(가) 정사각형 R의 네 변을 모두 지나야 한다.
(나) 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나게 되는 정사각형은 오직 정사각형 R뿐이다.

05 확통 02 중복조합

01 중복조합

01 중복조합1 (계산)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 22

56. ${}_{3}\mathrm{H}_{5}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 22

57. ${}_{6}\Pi_{2}+{}_{2}\mathrm{H}_{6}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 2

58. ${}_4\Pi_2 + {}_4H_2$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 23

59. ${}_3H_6$ 의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 23

60. ${}_nH_2 = {}_9C_2$일 때, 자연수 n의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

05 확통 02 중복조합

01 중복조합

02 중복조합2 (기본적인 중복조합 적용)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

61. 다섯 개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5중에서 중복을 허락하여 3개의 수를 택할 때, 택한 세 수의 곱이 6이상인 경우의 수는?

① 23 ② 25 ③ 27
④ 29 ⑤ 31

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 25

62. 빨간색 볼펜 5자루와 파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루로 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 560 ② 570 ③ 580
④ 590 ⑤ 600

05 확통 02 중복조합

01 중복조합

03 중복조합3 (개수조건)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 29

63. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

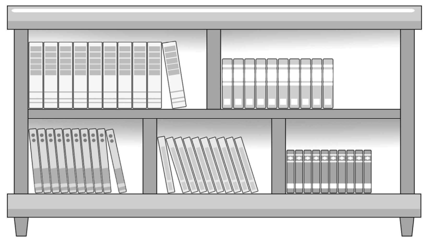
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 29

64. 어느 학교 도서관에서 독서프로그램 운영을 위해 철학, 사회과학, 자연과학, 문학, 역사 분야에 해당하는 책을 각 분야별로 10권씩 총 50권을 준비하였다. 한 학급에서 이 50권의 책 중 24권의 책을 선택하려고 할 때, 다음 조건을 만족시키도록 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 분야에 해당하는 책은 서로 구별하지 않는다.)

(가) 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에 해당하는 책은 4권 이상씩 선택한다.

(나) 문학 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.

(다) 역사 분야에 해당하는 책은 선택하지 않거나 4권 이상 선택한다.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 28

65. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 빵 3개와 같은 종류의 우유 4개를 남김없이 나누어 주려고 한다. 빵만 받는 학생은 없고, 학생 A는 빵을 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 우유를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 29

66. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 색 모자 6개와 흰 색 모자 6개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 각 학생은 1개 이상의 모자를 받는다.
>
> (나) 학생 A가 받은 검은색 모자의 개수는 4이상이다.
>
> (다) 흰색 모자보다 검은색 모자를 더 많이 받는 학생은 A를 포함하여 2명뿐이다.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 29

67. 흰 공 2개, 빨간 공 3개, 검은 공 3개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 흰 공을 받은 학생은 빨간 공과 검은 공도 반드시 각각 1개 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않고, 공을 하나도 받지 못하는 학생은 없다.)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 29
[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 29

68. 흰 공 4개와 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 25

69. 같은 종류의 공책 10권을 4명의 학생 A, B, C, D에게 남김없이 나누어 줄 때, A와 B는 각각 2권 이상의 공책을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 공책을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 76 ② 80 ③ 84
④ 88 ⑤ 92

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 26

70. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 78 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 102

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 26

71. 같은 종류의 연필 6자루와 같은 종류의 지우개 5개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 확률과 통계 30

72. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

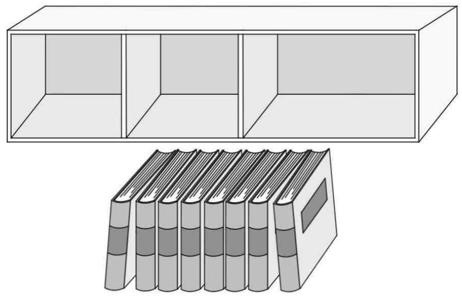
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 30

73. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 검은 공 4개, 흰 공 5개, 빨간 공 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.
(단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않는다.)

> (가) 각 학생이 받는 공의 색의 종류의 수는 2이다.
> (나) 학생 A는 흰 공과 검은 공을 받으며 흰 공보다 검은 공을 더 많이 받는다.
> (다) 학생 A가 받는 공의 개수는 홀수이며 학생 A가 받는 공의 개수 이상의 공을 받는 학생은 없다.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 27

74. 그림과 같이 같은 종류의 책 8권과 이 책을 각 칸에 최대
5권, 5권, 8권을 꽂을 수 있는 3개의 칸으로 이루어진 책장이 있다. 이 책 8권을 책장에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는? (단, 비어 있는 칸이 있을 수 있다.)



① 31 ② 32 ③ 33
④ 34 ⑤ 35

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 28

75. 세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.)

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다. (나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173
④ 176 ⑤ 179

05 확통

02 중복조합

01 중복조합

05 중복조합5 (부정방정식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 12

76. 방정식 $x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는?

① 80 ② 90 ③ 100
④ 110 ⑤ 120

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 27

77. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c+d=6$
>
> (나) a, b, c, d중에서 적어도 하나는 0이다.

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

78. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오.

> (가) $ab(c+d+e)=12$
>
> (나) a, b, c, d, e중에서 적어도 2개는 짝수이다.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 27

79. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c=14$
>
> (나) $(a-2)(b-2)(c-2)\neq 0$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

80. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c+d+e=10$
>
> (나) ab는 홀수이다.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 확률과 통계 29

81. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

> (가) $a+b+c+d=12$
>
> (나) $a \neq 2$이고 $a+b+c \neq 10$이다.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 30

82. 다음 조건을 만족시키는 14 이하의 네 자연수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수를 구하시오.

> (가) $x_1+x_2+x_3+x_4=34$
>
> (나) x_1과 x_3은 홀수이고 x_2와 x_4는 짝수이다.

05 확통

02 중복조합

01 중복조합

06 중복조합6 (함수의 개수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 28

83. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오.

> (가) $f(3)\times f(6)$은 3의 배수이다.
>
> (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \leq f(x_2)$이다.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 13

84. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f\ :\ X \to X$의 개수는?

$f(2) \le f(3) \le f(4)$

① 64 ② 68 ③ 72
④ 76 ⑤ 80

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 28

85. 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\},\ Y=\{1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f\ :\ X \to Y$의 개수는?

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다. (나) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x)=1$이다.

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 29

86. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{-1, 0, 1, 2, 3\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to Y$의 개수를 구하시오.

(가) $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5)$ (나) $f(a)+f(b)=0$을 만족시키는 집합 X의 서로 다른 두 원소 a, b가 존재한다.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 확률과 통계 28

87. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는?

(가) $\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값은 자연수이다. (나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

① 84 ② 87 ③ 90
④ 93 ⑤ 96

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 확률과 통계 29

88. 두 집합

$X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to Y$의 개수를 구하시오.

> (가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여
> $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.
> (나) $f(1) \le 3$
> (다) $f(3) \le f(1)+4$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 확률과 통계 28

89. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8$

을 만족시키는 함수 f의 개수는?

① 137 ② 141 ③ 145
④ 149 ⑤ 153

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 확률과 통계 30

90. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여
> $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고,
> $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
> (다) $f(6)=f(5)+6$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 확률과 통계 29

91. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오.

> (가) $f(f(1))=4$
> (나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

05 확통 02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

03 중복조합식 활용3 (부등식)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 확률과 통계 29

92. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a \le b+1 \le c \le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오.

05 확통 02 중복조합

02 중복조합의 활용 (식 활용)

06 중복조합식 활용6 (연립)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 25

93. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $|a^2-b^2|=5$

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 확률과 통계 28

94. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는?

(가) $a+b+c+d+e=10$ (나) $\lvert a-b+c-d+e \rvert \le 2$

① 359 ② 363 ③ 367
④ 371 ⑤ 375

[확통] [01순열과조합] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

확통 3개년 2022.12.29

1. [정답] 8
2. [정답] ⑤
3. [정답] ④
4. [정답] ③
5. [정답] ①

6. [정답] ④
7. [정답] 150
8. [정답] 97
9. [정답] ②
10. [정답] 115

11. [정답] ⑤
12. [정답] ③
13. [정답] ④
14. [정답] ①
15. [정답] ③

16. [정답] 260
17. [정답] ④
18. [정답] 96
19. [정답] ①
20. [정답] ④

21. [정답] ③
22. [정답] 36
23. [정답] ③
24. [정답] ①
25. [정답] ②

26. [정답] 288
27. [정답] 48
28. [정답] ⑤
29. [정답] ③
30. [정답] ⑤

31. [정답] 840
32. [정답] 8
33. [정답] ③
34. [정답] ⑤
35. [정답] ③

36. [정답] ④
37. [정답] ⑤
38. [정답] ②
39. [정답] ④
40. [정답] ①

41. [정답] ①
42. [정답] ③
43. [정답] ④
44. [정답] 199
45. [정답] ④

46. [정답] 708
47. [정답] ④
48. [정답] ②
49. [정답] ④
50. [정답] ⑤

51. [정답] 720
52. [정답] ④
53. [정답] ⑤
54. [정답] ①
55. [정답] 40

56. [정답] 21
57. [정답] 43
58. [정답] ③
59. [정답] ③
60. [정답] ④

61. [정답] ④
62. [정답] ①
63. [정답] 114
64. [정답] 396
65. [정답] 37

66. [정답] 201
67. [정답] 72
68. [정답] 168
69. [정답] ③
70. [정답] ③

71. [정답] ①

72. [정답] 218
73. [정답] **51**
74. [정답] ③
75. [정답] ④

76. [정답] ⑤
77. [정답] **74**
78. [정답] **31**
79. [정답] **84**
80. [정답] **50**

81. [정답] 332
82. [정답] 206
83. [정답] **327**
84. [정답] ⑤
85. [정답] ②

86. [정답] 65
87. [정답] ②
88. [정답] 105
89. [정답] ④
90. [정답] 100

91. [정답] 115
92. [정답] 55
93. [정답] ①
94. [정답] ④

[확통] [01순열과조합] 교사평경 최근 3개년(해설)

확통 3개년 2022.12.29

1) [정답] 8

[해설]

$_{2}\Pi_{3}=2^{3}=8$

2) [정답] ⑤

[해설]

$_{n}\Pi_{2}=n^{2}=25$에서 $n=5$

3) [정답] ④

[해설]

$_{3}\Pi_{4}=3^{4}=81$

4) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 양 끝에 나열되는 문자는 X, Y 중에서 중복을 허락하여 정하면 되므로

양 끝에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

$_{2}\Pi_{2}=2^{2}=4$

조건 (나)에서 문자 a의 위치를 정하는 경우의 수는 4

나머지 3곳에 나열할 문자는 b, X, Y 중 에서 중복을 허락하여 정하면 되므로

나머지 3곳에 나열되는 문자를 정하는 경우의 수는

$_{3}\Pi_{3}=3^{3}=27$

따라서 구하는 경우의 수는 $4\times4\times27=432$

5) [정답] ①

[해설]

천의 자리의 수가 1인 네 자리 자연수의 개수는

$_{4}\Pi_{3}=4^{3}=64$

천의 자리의 수가 2이고 백의 자리의 수가 0인 네 자리 자연수의 개수는 $_{4}\Pi_{2}=4^{2}=16$

따라서 구하는 경우의 수는 $64+16=80$

6) [정답] ④

[해설]

만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1 또는 2이므로

만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 중복순열의 수와 같으므로 $_{5}\Pi_{3}=5^{3}=125$

일의 자리의 수가 될 수 있는 수는 1또는 3또는 5이므로

일의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는 $2\times125\times3=750$

7) [정답] 150

[해설]

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ⅱ) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!}=12$이므로

(ⅱ)의 경우의 수는 $2\times12=24$

(ⅲ) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!}=4$이므로

(ⅲ)의 경우의 수는 $2\times4=8$

(ⅳ) 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\,2!}=6$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1인 경우의 수는 $12+24+8+6=50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times50=150$

8) [정답] 97

[해설]

(ⅰ) 1, 2, 3에서만 선택한 후 나열하는 경우
1, 2, 3 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우에서 2, 3 중에서만 선택하여 나열하는 경우를 제외하면 되므로 구하는 경우의 수는
$_3\Pi_4 - {_2\Pi_4} = 3^4 - 2^4 = 65$

(ⅱ) 1, 4, □, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1과 4의 위치를 정하는 경우의 수는
$2\times({_4C_2}-3)=6$이고, □에 들어갈 수를 정하는 경우의 수는 $2^2=4$이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times4=24$

(ⅲ) 1, 1, 4, □ 또는 1, 4, 4, □에서 □에 2 또는 3이 있도록 선택한 후 나열하는 경우
1, 1, 4를 나열하는 경우는 11□4, 4□11이고, □에 2 또는 3을 나열할 수 있으므로 경우의 수는 $2\times2=4$이다.
1, 4, 4, □인 경우는 1, 1, 4, □인 경우와 같은 방법으로 생각하면 경우의 수는 4이다.
그러므로 구하는 경우의 수는 $4+4=8$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$65+24+8=97$

9) [정답] ②

[해설]
네 자리의 자연수가 4000 이상인 홀수이려면
천의 자리의 수는 4, 5 중의 하나이고, 일의 자리의 수는 1, 3, 5중의 하나이며,
십의 자리와 백의 자리의 수는 각각 1, 2, 3, 4, 5 중의 하나이어야 한다. 따라서 구하는 자연수의 개수는
$2\times3\times{_5\Pi_2}=2\times3\times25=150$

10) [정답] 115

[해설]
구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서
중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 만든
모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서
숫자 0 또는 숫자 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.
(i) 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택한 후 일렬로 나열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
만의 자리의 수가 될 수 있는 수는
1 또는 2이므로
만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 2⋯⋯㉠
남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는
서로 다른 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $_3\Pi_4=3^4=81$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡에 의하여
$2\times81=162$
(ii) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_2\Pi_5=2^5=32$
(iii) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
만의 자리의 수가 될 수 있는 수는 2이므로
만의 자리의 수를 정하는 경우의 수는 1⋯⋯㉢
남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
$_2\Pi_4=2^4=16$⋯⋯㉣
㉢, ㉣에 의하여
$1\times16=16$
(iv) 숫자 0,1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
자연수 22222의 1개다.
따라서 (i) (iv)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
$162-(32+16-1)=115$

11) [정답] ⑤

[해설]
(i) $f(4)=1$이면 $f(1)+f(2)+f(3)\ge3$
$f(1),\ f(2),\ f(3)\in\{2,3,4\}$에서 $3^3=27$가지
(ii) $f(4)=2$이면 $f(1)+f(2)+f(3)\ge6$
$f(1),\ f(2),\ f(3)\in\{1,3,4\}$에서
$1+1+1=3,\ 1+1+3=5$이므로
이것을 제외하면 $3^3-(1+3)=23$가지
(iii) $f(4)=3$이면 $f(1)+f(2)+f(3)\ge9$
$f(1),\ f(2),\ f(3)\in\{1,2,4\}$에서
$4+4+4=12,\ 4+4+2=10,\ 4+4+1=9$
$1+3+3=7$가지
(iv) $f(4)=4$이면 $f(1)+f(2)+f(3)\ge12$

$f(1),\ f(2),\ f(3) \in \{1, 2, 3\}$에서

$3+3+3=9$이므로 만족하는 경우는 없다.

$\therefore 27+23+7=57$

12) [정답] ③

[해설]

(ⅰ) $f(3)=4$ 또는 $f(3)=10$인 경우

$f(3)=4$이면 $f(2)=f(5)=2$이고,

$f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=10$이면 $f(1)=f(4)=12$이고,

$f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_4\Pi_2=32$

(ⅱ) $f(3)=6$ 또는 $f(3)=8$인 경우

$f(3)=6$이면 $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 8, 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

$f(3)=8$이면 $f(1)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 10, 12 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같고, $f(2)$와 $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복순열의 수와 같다.

그러므로 구하는 함수의 개수는

$2\times{}_2\Pi_2\times{}_3\Pi_2=72$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$32+72=104$

13) [정답] ④

[해설]

조건 (나)와 조건 (다)에서 $f(3)\neq 1,\ f(4)\neq 6$

조건 (가)에서 $f(3)+f(4)$가 5의 배수인 $f(3),\ f(4)$의

순서쌍 $(f(3),\ f(4))$는 (4, 1), (2, 3), (3, 2), (6, 4), (5, 5)

(ⅰ) $f(3)=4,\ f(4)=1$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

$f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

즉 함수 f의 개수는 $9\times25=225$

(ⅱ) $f(3)=2,\ f(4)=3$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

$f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $3^2=9$

즉 함수 f의 개수는 $1\times9=9$

(ⅲ) $f(3)=3,\ f(4)=2$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

$f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

즉 함수 f의 개수는 $4\times16=64$

(ⅳ) $f(3)=6,\ f(4)=4$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5^2=25$

$f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $2^2=4$

즉 함수 f의 개수는 $25\times4=100$

(ⅴ) $f(3)=5,\ f(4)=5$인 경우

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 $4^2=16$

$f(5),\ f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1^2=1$

즉 함수 f의 개수는 $16\times1=16$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$$225+9+64+100+16=414$$

14) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에 의하여

$f(1)\geq 1$

$f(2)\geq \sqrt{2}>1$

$f(3)\geq \sqrt{3}>1$

$f(4)\geq \sqrt{4}=2$

$f(5)\geq \sqrt{5}>2$

이고 조건 (나)에 의하여 치역으로 가능한 경우는 {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}

이다.

(ⅰ) 치역이 {1, 2, 3}인 경우

$f(1)=1,\ f(5)=3$이므로 {2, 3, 4}에서 {2, 3}으로의 함수 중에서 치역이 {3}인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_3-1=2^3-1=7$

(ⅱ) 치역이 {1, 2, 4}인 경우

(ⅰ)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 7이다.

(ⅲ) 치역이 {1, 3, 4}인 경우

$f(1)=1$이므로 {2, 3, 4, 5}에서 {3, 4}로의 함수 중에서 치역이 {3}, {4}인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=14$

(ⅳ) 치역이 $\{2,\ 3,\ 4\}$인 경우

((ⅳ)-①) $f(5)=3$인 경우

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $\{2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 치역이 $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$인 함수를 제외하면 되므로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

${}_3\Pi_4-\{3+({}_2\Pi_4-2)\times 2\}$

$=3^4-\{3+(2^4-2)\times 2\}$

$=81-31$

$=50$

((ⅳ)-②) $f(5)=4$인 경우

((ⅳ)-①)의 경우와 마찬가지로 조건을 만족시키는 함수의 개수는 50이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$7+7+14+50\times 2=128$

15) [정답] ③

[해설]

함수 $f:X\to Y$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.

(i) $x\leq 3$일 때

$x\times f(x)\leq 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2 또는 3이다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

(ii) $x\geq 4$일 때

$x\times f(x)\leq 10$을 만족시키는 $f(x)$의 값은 1 또는 2이다.

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$27\times 4=108$

16) [정답] 260

[해설]

조건 (다)에서 함수 f는 상수함수일 수 없으므로

$n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$

(i) $n(A)=2$인 경우

집합 A를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

$A=\{1,\ 2\}$인 경우를 생각하면 조건 (다)에서

$f(1)=2,\ f(2)=1$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2 중 하나이므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, $n(A)=2$인 경우 함수 f의 개수는

$10\times 8=80$

(ii) $n(A)=3$인 경우

집합 A를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우를 생각하면 조건 (다)에서

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$뿐이므로

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는2

$f(4)$, $f(5)$의 값은 1, 2, 3중 하나이므로 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수

${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, $n(A)=3$인 경우 함수 f의 개수는 $10\times 2\times 9=180$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는 $80+180=260$

17) [정답] ④

[해설]

두 학생 A, B를 제외한 나머지 6명의 학생 중 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

${}_6C_3=\dfrac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}=20$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명의 학생이 일정한 간격으로 원 모양의 탁자에 둘러 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times 6\times 2=240$

18) [정답] **96**

[해설]

A학교 학생 2명과 B학교 학생 2명을 각각 한 학생으로 생각하여 5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{5}=4!=24$

이 각각에 대하여 A학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2, B학교 학생 2명이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 구하는 경우의 수는 $24\times2\times2=96$

19) [정답] ①

[해설]

1학년 2명, 2학년 2명은 이웃해야 하므로 하나로 묶어서 생각한다.

즉, 1학년 1명, 2학년 1명, 3학년 3명의 총 5명을 원탁에 앉히는 경우의 수와 같으므로 $(5-1)!=24$(가지)
…… ㉠

그런데, 1학년 2명과 2학년 2명의 묶음 안에서도 배열을 생각해야 하므로 $2!\times2!=4$(가지)
…… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 $24\times4=96$

20) [정답] ④

[해설]

먼저 A, B, C를 제외한 4사람을 먼저 원순열로 배치한다.

따라서 그 경우는 $(4-1)!=6$(가지)

4명 사이에 3곳을 택하여 A, B, C가 끼워 들어간다.

따라서 경우는 $_4P_3=24$(가지)

따라서 A, B, C세 명 중 어느 두 명도 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는 $6\times25=144$(가지)

21) [정답] ③

[해설]
먼저 A, B, C를 제외한 4사람의 원순열로 배치하고, 그 각각에 대하여 4사람이 사이 칸 중 3곳을 택하여 A, B, C의 자리를 정한다.

$\therefore\ \frac{4!}{4}\times{}_4P_3=6\times24=144$

22) [정답] **36**

[해설]

A와 B가 이웃하는 전체의 경우에서 B와 C가 이웃하는 경우를 제외한다.

(ⅰ) A와 B가 이웃하는 경우
$(5-1)!\times2=48$

(ⅱ) A와 B가 이웃하면서 동시에 C가 B와 이웃하는 경우
$2\times(4-1)!=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $48-12=36$(가지)

23) [정답] ③

[해설]

A와 B가 이웃하는 전체의 경우에서 B와 C가 이웃하는 경우를 제외한다.

(ⅰ) A와 B가 이웃하는 경우
$(5-1)!\times2=48$

(ⅱ) A와 B가 이웃하면서 동시에 C가 B와 이웃하는 경우
$2\times(4-1)!=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $48-12=36$(가지)

24) [정답] ①

[해설]
3, 6이 이웃하므로 한 덩어리로 묶어 원탁에 나열하면 4!
3, 6이 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 2!
따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$4!\times2!=48$

25) [정답] ②

[해설]

[출제의도] 원순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

같은 학급의 대표 2명을 한 사람으로 보고 4명을 배열하는 원순열의 수는 $(4-1)!=6$이다.

각 학급 대표 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 $2^4=16$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16=96$

26) [정답] 288

[해설]

[출제의도] 원순열을 이용하여 추론하기

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우
A, B를 한 학생으로 생각하고,
D, C, E를 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!,
D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로
구하는 경우의 수는
$24\times2!\times2!=96$

(ii) C가 A또는 B중 한 명과 이웃하는 경우
D 또는 E중 한 명과 C, A, B의
총 4명을 한 학생으로 생각하여
5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 2!, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!이므로
구하는 경우의 수는 $24\times{}_2C_1\times2!\times2!=192$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$96+192=288$

27) [정답] 48

[해설]
6개의 의자를 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=5!=120$
서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되는 두 수는 2, 6 또는 3, 4이다.
(i) 2, 6이 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우
2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 5개를 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=4!=24$
이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
그러므로 이 경우의 수는 $24\times2=48$
(ii) 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 이웃하게 배열하는 경우
마찬가지로 이 경우의 수도 48이다.
(iii) 2, 6이 적혀 있는 두 의자와 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 각각 모두 이웃하게 배열하는 경우 2, 6이 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자를 1개로 생각하여 의자 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는
$(4-1)!=3!=6$
이 각각에 대하여 2, 6이 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸고, 3, 4가 적혀 있는 두 의자의 자리를 서로 바꾸는 경우의 수는
$2!\times2!=4$
그러므로 이 경우의 수는
$6\times4=24$
(i), (ii), (iii)에 의하여 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되도록 배열하는 경우의 수는
$48+48-24=72$
따라서 구하는 경우의 수는 $120-72=48$

28) [정답] ⑤

[해설]
A학교 학생 5명을 배열하는 원순열의 수는 $(5-1)!=24$
A학교 학생 사이에 B학교 학생 2명의 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
따라서 구하는 경우의 수는 $24\times20=480$

29) [정답] ③

[해설]
A와 C가 이웃하지 않고, B와 C도 이웃하지 않는 경우는
(i) A, B는 이웃하면서 위의 조건을 만족하는 경우와
(ii) A, B, C 모두 이웃하지 않는 경우
로 나눌 수 있다.
(i) A, B는 이웃하는 경우
(A, B)와 C가 이웃하지 않아야 하므로
(1) A, B, C를 제외한 3명을 원 모양의 탁자에 배열하는 경우의 수 2!
(2) 배열된 3명의 사이사이의 3자리 중 2자리에 (A, B)와 C를 배열하는 경우의 수 ${}_3P_2$
(3) A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수 2!
이상에서 구하는 경우의 수는
$2!\times{}_3P_2\times2!=24$
(ii) A, B, C 모두 이웃하지 않는 경우
(1) A, B, C를 제외한 3명을 원 모양의 탁자에

배열하는 경우의 수 $2!$

(2) 배열된 3명의 사이사이에 A, B, C를 배열하는 경우의 수 $3!$

이상에서 구하는 경우의 수는

$2!\times 3!=12$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 $24+12=36$이다.

[다른 풀이]

6명을 원 모양의 탁자에서 배열하는 경우의 수는 $5!=120$

A와 C가 이웃하지 않고, B와 C도 이웃하지 않는 경우의 여사건은 A와 C가 이웃하거나 B와 C가 이웃하는 경우이다.

A와 C가 이웃하는 경우의 수는 $4!\times 2!=48$

B와 C가 이웃하는 경우의 수는 $4!\times 2!=48$

A와 C가 이웃하면서 B와 C도 이웃하는 경우의 수는 A와 B 사이에 C가 와야 하므로 $2!\times 3!=12$

따라서 A와 C가 이웃하거나 B와 C가 이웃하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

이므로 구하는 경우의 수는 $120-84=36$이다.

30) [정답] ⑤

[해설]

조건 (가)에서 4명의 1학년 학생과 4명의 2학년 학생은 원 모양의 탁자에 교대로 둘러앉아야 한다.

4명의 1학년 학생이 앉는 경우의 수는 서로 다른 4개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$(4-1)!=6$

조건 (나)에서 A와 B는 이웃하므로 학생 B가 앉는 경우의 수는 2

학생 B를 제외한 3명의 2학년 학생이 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $6\times 2\times 6=72$

31) [정답] 840

[해설]

가운데 원에 색칠하는 경우의 수는 7

가운데 원에 칠한 색을 제외한 6가지 색을 모두 사용하여 가운데 원을 제외한 나머지 6개의 원을 색칠하는 경우의 수는

$$(6-1)!=5!$$

따라서 구하는 경우의 수는 $7\times 5!=840$

32) [정답] 8

[해설]

회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보므로 빨간색을 칠할 정사각형은 그림과 같이 A, B, C중에서 택할 수 있다.

A	B	
	C	

(ⅰ) A에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 5이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ⅱ) B에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 칠할 수 있는 경우의 수는 3이다.

나머지 7개의 정사각형에 남은 7개의 색을 칠하는 경우의 수는 $7!$이다.

(ⅲ) C에 빨간색을 칠하는 경우

파란색을 어떤 정사각형에 칠해도 빨간색이 칠해진 정사각형과 꼭짓점을 공유하므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$$(3+5)\times 7!=8\times 7!$$

따라서 $k=8$

33) [정답] ③

[해설]

6개의 문자 중에서 같은 문자인 a가 3개, b가 2개 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\dfrac{6!}{3!\times 2!}=60$

34) [정답] ⑤

[해설]

흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{8!}{2!\times 2!\times 4!}=420$

흰 공 2개를 하나로 보고 7개의 공을 일렬로 나열하는

경우의 수는 $\frac{7!}{2!\times4!}=105$

따라서 구하는 경우의 수는 $420-105=315$

35) [정답] ③

[해설]

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!2!2!}=90$$

a끼리 이웃하도록 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$90-30=60$$

36) [정답] ④

[해설]

규칙에 따라 봉사활동을 신청하는 경우는 첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청한 후

'(ⅰ) 첫째 주를 제외한 3주간의 봉사활동을 신청하는 경우'에서

'(ⅱ) 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우'를 제외하면 된다.

첫째 주에 봉사활동 A, B, C를 모든 신청하는 경우의 수는 $3!$이다.

(ⅰ)의 경우 : 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 5회 신청하는 경우의 수는 $\boxed{\frac{9!}{2!\times2!\times5!}}$이다.

(ⅱ)의 경우 : 첫째 주에 봉사활동 C를 신청한 요일과 같은 요일에 모두 봉사활동 C를 신청하는 경우의 수는 봉사활동 A, B, C를 각각 2회, 2회, 2회 신청하는 경우의 수 $\boxed{\frac{6!}{2!\times2!\times2!}}$과 같다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해 구하는 경우의 수는

$3!\times(\boxed{756}-\boxed{90})$이다.

$$p=756,\ q=90$$

$$\therefore p+q=756+90=846$$

37) [정답] ⑤

[해설]

[출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$이다.

□에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2가 적힌 2장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_2-5\times2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

38) [정답] ②

[해설]

5개의 문자 중 a의 개수가 3이므로 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

39) [정답] ④

[해설]

3개의 문자 A, B, C를 같은 문자 X라 하고, 6개의 문자를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3!}=6\times5\times4=120$$

가운데 문자 X에 문자 A를 놓고 첫 번째 문자 X와 세 번째 문자 X에 두 문자 B, C를 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $120\times2=240$

40) [정답] ①

[해설]

조건 (가)에서

(i) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 A가 적힌 공인 경우

조건 (나)에서 남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는 3개의 문자 B, B, C를 X, X, X로 놓고

5개의 문자 D, D, X, X, X를 일렬로 나열한 후

X의 자리에 왼쪽부터 순서대로 B, B, C 또는 B, C, B를 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times3!}\times2=20$

(ii) 숫자 1이 적힌 상자에 넣는 공이 문자 B가 적힌 공인 경우

남은 5개의 공을 상자에 넣는 경우의 수는 5개의 문자 A, B, C, D, D를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$20+60=80$

41) [정답] ①

[해설]

일곱 자리의 자연수를 만들 때, 짝수 번째 자리는 세 군데이므로 숫자 2는 많아야 세 번 사용할 수 있다.

(i) 숫자 2를 한 번 사용한 경우

2를 십의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{6!}{5!1!}+\frac{6!}{4!2!}+\frac{6!}{3!3!}+\frac{6!}{2!4!}+\frac{6!}{1!5!}=\boxed{62}$이다.

2를 짝수 번째 자리에 한 번 오도록 놓는 경우의 수는 세 군데 중 한 군데를 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$이다.

그러므로 숫자 2를 한 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times62=\boxed{186}$이다.

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이므로 나머지 자리에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3을 나열하여 만든 것이다.

그러므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{1!3!}=\boxed{14}$이다.

그러므로 $p=62$, $q=186$, $r=14$

따라서 $p+q+r=262$

[다른 풀이]

(iii) 숫자 2를 세 번 사용한 경우

2를 모든 짝수 번째 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 홀수 번째 자리에 1, 3을 모두 한 번 이상씩 사용하여 만든 것이다.

즉, 구하려는 값은 1, 3을 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열하는 경우의 수에서 1을 네 개, 3을 네 개 선택한 경우의 수 2를 뺀 값이므로

${}_2\Pi_4-2=2^4-2=\boxed{14}$이다.

[보충 설명]

(ii) 숫자 2를 두 번 사용한 경우

2, 2를 십의 자리와 천의 자리에 오도록 놓으면 조건을 만족시키도록 만들 수 있는 자연수는 나머지 자리에 1, 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 3, 3, 3 또는 1, 3, 3, 3, 3을 나열한 것이므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{4!1!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{1!4!}=30$이다.

2를 짝수 번째 자리에 두 번 오도록 놓는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이다.

그러므로 숫자 2를 두 번 사용했을 때 일곱 자리의 자연수를 만들 수 있는 경우의 수는 $3\times30=90$이다.

42) [정답] ③

[해설]

모든 자리의 수의 합이 10인 다섯 자리 자연수 중 숫자 1, 2, 3을 각각 한 번 이상 사용해야 하므로

5개의 숫자를 1, 2, 3, a, b라고 하면 $a+b=4$

(i) 1, 2, 3, 0, 4이면 $4\times4!=96$

(ii) 1, 2, 3, 1, 3이면 $\frac{5!}{2!2!}=30$

(iii) 1, 2, 3, 2, 2이면 $\frac{5!}{3!}=20$

(i)~(iii)에서 숫자 1, 2, 3을 각각 한 번 이상 사용하는 자연수의 개수는 $96+30+20=146$

43) [정답] ④

[해설]

나열하는 카드에 적힌 문자의 종류에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) B와 C인 경우
C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$이다.

(ii) A와 B와 C인 경우
C가 적힌 카드가 2장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 1장과 B가 적힌 카드 2장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다.
C가 적힌 카드가 3장일 때, C가 적힌 카드 1장을 두 번째에 나열하고 C가 적힌 남은 카드 2장과 B가 적힌 카드 1장 및 A가 적힌 카드 1장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$이다.
따라서 이 경우의 수는 $12+12=24$이다.

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6+24=30$이다.

44) [정답] 199

[해설]
이 주사위를 네 번 던질 때 나온 눈의 수가 4이상인 경우의 수를 n이라 하자.
(i) $n=0$, 즉 점수가 $1+1+1+1=4$인 경우
1의 눈만 네 번 나와야 하고, 이 경우의 수는 1
(ii) $n=1$, 즉 점수가 $0+1+1+2=4$인 경우
1의 눈이 두 번, 2의 눈이 한 번 나와야 하고, 이 경우의 수는 점수 0, 1, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
이 각각에 대하여 4 이상의 눈이 한 번 나오는 경우의 수는 3이므로 이 경우의 수는 $12\times3=36$
(iii) $n=2$, 즉 점수가 $0+0+1+3=4$ 또는 $0+0+2+2=4$인 경우
㉠ 1의 눈이 한 번, 3의 눈이 한 번 나올 때, 점수 0, 0, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
㉡ 2의 눈이 두 번 나올 때, 점수 0, 0, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$
㉠, ㉡의 각각에 대하여 4이상의 눈이 두 번 나오는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$ 이므로 이 경우의 수는 $(12+6)\times9=162$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $1+36+162=199$

45) [정답] ④

[해설]
(i) 한 개의 문자를 3개 선택하는 경우 ${}_3C_1\times\frac{5!}{3!}=60$
(ii) 두 개의 문자를 각각 2개씩 선택하는 경우
${}_3C_2\times\frac{5!}{2!\times2!}=90$
따라서 경우의 수는 $90+60=150$

46) [정답] 708

[해설]
(i) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYY꼴인 경우
4개의 문자 중 X, Y에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $6\times6=36$
(ii) 4개의 원판에 적힌 문자가 XXYZ꼴인 경우
4개의 문자 중 X에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
Y, Z에 해당하는 문자를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2=3$
Y, Z에 해당하는 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=4$
4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
그러므로 구하는 경우의 수는 $4\times3\times4\times12=576$
(iii) 4개의 원판에 적힌 문자가 모두 다른 경우
각각의 원판의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=16$
D가 적힌 원판이 맨 아래에 놓이도록 4개의 원판을 쌓는 경우의 수는 $3!=6$
그러므로 구하는 경우의 수는 $16\times6=96$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $36+576+96=708$

47) [정답] ④

[해설]
조건 (가)를 만족시키는 네 자연수는
1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2
이때 조건 (나)를 만족시키는 경우는
1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2
(i) 네 자연수 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 네 자연수 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$12+4=16$

48) [정답] ②

[해설]
(i) 일의 자리의 수가 1인 경우
1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$
(ii) 일의 자리의 수가 3인 경우
1, 1, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$
따라서 구하는 경우의 수는 $20+10=30$

49) [정답] ④

[해설]
(i) $n(A)=3$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{3, 4, 5\}$

이다.
$A=\{1, 2, 3\}$인 경우 $n(B)<3$이므로 집합 B는

$\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$

이다.

(a) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우
집합 A의 원소인 1, 2, 3이 1에 대응하는 경우의 수는 1이고, 4, 5가 2, 3에 하나씩 대응하는 경우의 수는 2이므로 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인
함수 f의 개수는 $1\times2=\boxed{2}$이다.

(b) $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우
$\{f(1), f(2), f(3)\}=\{1, 2\}$이고
4, 5가 1, 2, 3에 대응하되 적어도 하나가 3에 대응하는 경우이므로
$A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는
$({}_2\Pi_3-2)\times({}_3\Pi_3-{}_2\Pi_2)=6\times5=\boxed{30}$이다.

(a), (b)와 같은 경우가 각각 3가지이므로
$n(A)=3$, $n(B)<3$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
$4\times(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30})$이다.

(ii) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는 $\{1, 2, 4, 5\}$뿐이므로 이 경우 $X-A=\{3\}$에 의해 $n(B)=3$이므로 집합 B는 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$이다.
$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4\}$인 경우
$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 어떠한 두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로
1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하는 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=3\times12=36$이다.
그러므로 $n(A)=4$, $n(B)<4$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
$4\times36=\boxed{144}$이다.

(iii) $n(A)=5$인 경우 함수 f는 일대일대응이고 $n(B)=5$이므로 조건 $n(A)>n(B)$를 만족시키는 함수 f는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$4\times(3\times\boxed{2}+3\times\boxed{30})+\boxed{144}$이다.

따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로 $p+q+r=176$

50) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에서 f가 일대일함수가 아니고,
조건 (나)에서
$\log\{f(1)+f(2)+f(3)\}=\log12$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=12$ …… ㉠
조건 (다)에서
$\log f(4)f(5)\le1$
$\therefore f(4)f(5)\le10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족하는 경우는 다음과 같다.
(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 5, 5, 2인 경우의

수는 $\frac{3!}{2!}=3$

$f(4)$, $f(5)$의 값이 대응되는 전체 경우의 수가 $5^2=25$
$f(4)f(5)>10$을 만족하는 경우의 수는
(1) $f(4)$, $f(5)$의 값이 모두 4 이상인 경우의 수가

$2^2=4$

(2) $f(4)$, $f(5)$의 값이 3, 5 또는 4, 5에 대응되는 경우의 수가 $2!\times2=4$

따라서 $f(4)f(5)\leq10$을 만족하는 경우의 수는

$25-(4+4)=17$

이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $3\times17=51$

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 5, 4, 3인 경우의 수는 $3!=6$

$f(4)f(5)\leq10$을 만족하는 경우의 수는 (i)에서 $f(4)$, $f(5)$가 1, 2에 대응되는 경우는 함수 f가 일대일함수이므로 조건 (가)에 어긋나므로 이 경우를 제외하면 $25-(4+4+2)=15$

이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $6\times15=90$

(iii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$에 대응되는 값이 4, 4, 4인 경우의 수는 1

$f(4)f(5)\leq10$을 만족하는 경우의 수는 (i)에서 17

이상에서 조건을 만족하는 경우의 수는 $1\times17=17$

(i)~(iii)에서 조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$51+90+17=158$이다.

51) [정답] 720

[해설]

함수 $f:X\to X$의 개수는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수와 같다.

조건 (가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 중 홀수의 개수를 n이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$이다.

(i) $n=0$일 때

치역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$일 때

조건 (나)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고 홀수인 두 함숫값이 서로 다르면 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개다.

(a) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_2=3$ ……㉠

치역의 세 원소 중 홀수를 a, 두 짝수를 b, c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는 문자 a, a, b, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{2!\times2!}+\dfrac{5!}{2!\times2!}=60$……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$3\times60=180$

(b) 치역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개인 경우

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1=6$ ……㉢

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}=20$ ……㉣

㉢, ㉣에 의하여

$6\times20=120$

(a), (b)에 의하여 $180+120=300$

(iii) $n=4$일 때

짝수인 함숫값이 1개이므로 조건 (나)에서 치역의 세 원소 중 홀수인 원소는 2개, 짝수인 원소는 1개다.

집합 X의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1=6$ ……㉤

치역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b, 짝수를 c라 하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, b, b, c 또는 문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{2!\times2!}+\dfrac{5!}{3!}=70$……㉥

㉤, ㉥에 의하여

$6\times70=420$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여

구하는 함수 f의 개수는 $300+420=720$

52) [정답] ④

[해설]

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b라 하자.

A 지점에서 P 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 1개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{3!}{2!\times1!}=3$ 이다.

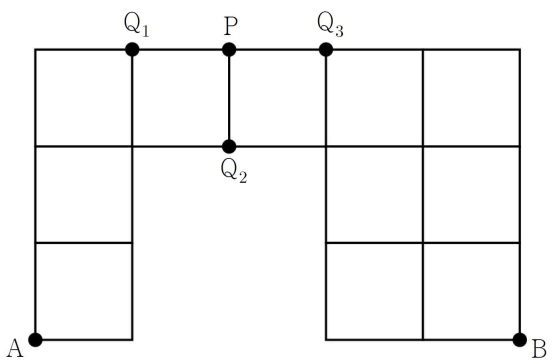
P지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 2개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3\times6=18$

53) [정답] ⑤

[해설]



그림과 같이 세 지점 Q_1, Q_2, Q_3을 정하면

A지점에서 출발하여 P지점까지 가기 위해서는

Q_1지점 또는 Q_2지점 중 한 지점을 지나야 하고

P지점에서 출발하여 B지점까지 가기 위해서는

Q_2지점 또는 Q_3지점 중 한 지점을 지나야 한다.

그러므로 A지점에서 출발하여 P지점을 지나

B지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단거리로 가는 경우의 각각의 경우의 수는 다음과 같다.

(ⅰ) $A\to Q_1\to P\to Q_2\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=24$

(ⅱ) $A\to Q_1\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{4!}{1!\times3!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=40$

(ⅲ) $A\to Q_2\to P\to Q_3\to B$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{3!}{1!\times2!}\times1\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=30$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는

$24+40+30=94$

54) [정답] ①

[해설]
오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b, 아래쪽으로 한 칸 가는 것을 c라 하자.
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 2개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times3!}=10$이다.

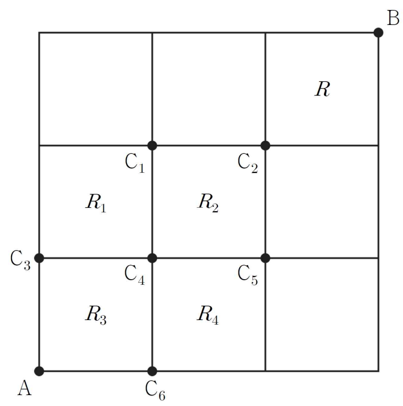
P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 3개의 a와 3개의 c를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $10\times20=200$

55) [정답] 40

[해설]



그림과 같이 6개의 점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6과 4개의 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4가 있다.

최단거리로 A지점에서 출발하여 B지점을 지나 다시 A지점까지 돌아올 때, 조건 (가)를 만족시키려면 $A\to C_2\to B\to C_2\to A$의 순서로 이동해야 한다.

또한 조건 (나)를 만족시키려면 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.

(ⅰ) $C_2\to B\to C_2$의 순서로 이동하는 경우

(C_2에서 B로 가는 경우의 수)

$\times$(B에서 C_2로 가는 경우의 수)

$=2\times1=2$

(ⅱ) $A\to C_2$, $C_2\to A$의 순서로 이동하는 경우

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

(a) 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_3 \to C_1 \to C_2$, $C_2 \to C_1 \to C_3 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(b) 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(c) 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times2)=8$

(d) 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_6 \to C_5 \to C_2$, $C_2 \to C_5 \to C_6 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(1\times2\times1)\times(1\times1\times1)=2$

(e) 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \to C_4 \to C_2$, $C_2 \to C_4 \to A$의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

$(2\times2)\times(1\times1)=4$

(a)~(e)에 의하여

$A \to C_2$, $C_2 \to A$의 순서로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는 $36-\{(2+8+8+2)-4\}=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$2\times20=40$

56) [정답] **21**

[해설]

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

57) [정답] **43**

[해설]

${}_6\Pi_2+{}_2H_6=6^2+{}_7C_6=36+{}_7C_1=36+7=43$

58) [정답] ③

[해설]

${}_4\Pi_2=4^2=16$, ${}_4H_2={}_{4+2-1}C_2={}_5C_2=10$이므로

${}_4\Pi_2+{}_4H_2=16+10=26$

59) [정답] ③

[해설]

${}_3H_6={}_{3+6-1}C_6={}_8C_6={}_8C_2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$

60) [정답] ④

[해설]

${}_nH_2={}_{n+2-1}C_2={}_9C_2$에서 $n+1=9$, $n=8$

61) [정답] ④

[해설]

모든 경우의 수는 ${}_5H_3={}_7C_3=35$

택한 세 수의 곱이 6미만인 경우는

(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4),

(1, 1, 5), (1, 2, 2)

즉, 6가지

택한 세 수의 곱이 6이상인 경우의 수는 모든 경우에서 6미만이 나오는 경우를 빼면 되므로 $35-6=29$

62) [정답] ①

[해설]

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는 $56\times10=560$

63) [정답] 114

[해설]

(ⅰ) 검은색 볼펜을 안 뽑는 경우
파란색 볼펜을 뽑는 개수를 x개, 빨간색 볼펜을 뽑는 개수를 y개라 하면 $x+y=5$
그런데, $x \le 4$, $y \le 4$이므로 $x=5$, $y=0$과 $x=0$, $y=5$인 경우는 제외해야 한다.
따라서 경우의 수는
(파, 빨)$=(4,\ 1)$, $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(1,\ 4)$
2명의 학생에게 나누어주어야 하므로

㉠ (파, 빨)$=(4,\ 1)$, $(1,\ 4)$인 경우
각각 $5\times2=10$가지이므로 20(가지)

㉡ (파, 빨)$=(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$인 경우
각각 $4\times3=12$가지이므로 24(가지)

㉠, ㉡에서 총 경우의 수는 44(가지)

(ⅱ) 검은색 볼펜을 1자루 뽑는 경우
파란색 볼펜을 뽑는 개수를 x개, 빨간색볼펜을 뽑는 개수를 y개라 하면 $x+y=4$
따라서 경우의 수는
(파, 빨)$=(4,\ 0)$, $(3,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(0,\ 4)$
2명의 학생에게 나누어주어야 하므로

㉠ (파, 빨)$=(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우
각각 $5\times1=5$가지, 검은색을 주는 경우가 2가지이므로
$5\times2\times2=20$(가지)

㉡ (파, 빨)$=(3,\ 1)$, $(1,\ 3)$인 경우
각각 $4\times2=8$가지, 검은색을 주는 경우가 2가지이므로
$8\times2\times2=32$(가지)

㉢ (파, 빨)$=(2,\ 2)$인 경우 $3\times3=9$가지, 검은색을 주는
경우가 2가지이므로 $9\times2=18$(가지)

㉠, ㉡, ㉢에서 총 경우의 수는 70(가지)

(ⅰ), (ⅱ)에서 총 경우의 수는 $44+70=114$(가지)

64) [정답] 396

[해설]

철학, 사회과학, 자연과학 분야에 해당하는 책은 반드시 선택해야 하므로 최소 3개 분야에서 최대 5개 분야에 해당하는 책을 선택할 수 있다. 철학, 사회과학, 자연과학 각각의 분야에서 선택한 책의 권수를 순서대로 a, b, c(a, b, c는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.

(ⅰ) 3개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
$a+b+c=24$에서
$a=4$일 때, $b+c=20$을 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 1
$a=5$일 때, $b+c=19$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 2
⋮
$a=10$일 때, $b+c=14$를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 7
따라서 구하는 경우의 수는 $1+2+\cdots+7=28$

(ⅱ) 4개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 또는 역사 분야 중 한 분야를 선택하는 경우의 수는 2이고 선택된 분야에서 선택한 책의 권수를 d (d는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$
(a', b', c', d'은 6 이하의 음이 아닌 정수)
라 하면 $a+b+c+d=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'=8$
방정식 $a'+b'+c'+d'=8$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수는 서로 다른 4개에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수
${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$에서 a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 7인 경우의 수 ${}_4C_1\times{}_3H_1=12$와 a', b', c', d' 중 어느 하나의 값이 8인 경우의 수 4를 뺀 것과 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
$2\times(165-12-4)=298$

(ⅲ) 5개 분야에 해당하는 책을 선택하는 경우
문학 분야와 역사 분야에서 선택한 책의 권수를 각각 d, e(d, e는 4 이상 10 이하의 자연수)라 하자.
$a=a'+4$, $b=b'+4$, $c=c'+4$, $d=d'+4$, $e=e'+4$
(a', b', c', d', e'은 6 이하의 음이 아닌 정수)
라 하면 $a+b+c+d+e=24$에서
$(a'+4)+(b'+4)+(c'+4)+(d'+4)+(e'+4)=24$
$a'+b'+c'+d'+e'=4$
방정식 $a'+b'+c'+d'+e'=4$을 만족시키는 6 이하의 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 모든 순서쌍

(a', b', c', d', e')의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 ${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$28+298+70=396$

65) [정답] **37**

[해설]

A가 반드시 빵을 1개 이상 받는 경우의 수는 A에게 빵 1개와 우유 1개를 먼저 주고, 남은 빵 2개와 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수와 같다.

(ⅰ) A에게 남은 빵 2개를 주는 경우
남은 우유 3개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = 10$이다.

(ⅱ) A에게 남은 빵 2개 중 1개를 주는 경우
남은 빵 1개를 B 또는 C에게 나누어 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$이다.

(ⅲ) A에게 남은 빵을 주지 않는 경우
남은 빵 2개를 B 또는 C 중 한 명에게 모두 주는 경우의 수는 2이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개 주고 남은 우유 2개를 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수가 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$이므로 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$이다.
또 남은 빵 2개를 학생 B와 C에게 각각 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 1이고, 빵을 준 학생에게 우유를 1개씩 주고 남은 우유 1개를 세 명의 학생에게 주는 경우의 수가 3이므로 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$이다.
따라서 A에게 남은 빵을 주지 않는 경우의 수는 $12+3=15$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$10+12+15=37$

66) [정답] **201**

[해설]

조건 (나)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

조건 (다)에 의하여 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 1명 나와야 하므로

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 1개 받는 경우

㉡ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 안 받는 경우

㉢ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받고 한 명만 흰 모자를 안 받는 경우

따라서 각각의 경우를 구하면 다음과 같다.

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 1개 받는 경우
검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우 나머지 흰색 모자 3개를 세 학생에게 나누어주면 되므로
${}_3H_3 = 10$

㉡ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받고 흰 모자를 안 받는 경우
검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3
각각에 대하여 다른 두 학생에게 흰색 모자 1개씩을 나누어 주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는
검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우 나머지 흰색 모자 4개를 세 학생에게 나누어주는 경우의 수에서 학생 A가 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 되므로 ${}_3H_4 - 1 = 14$

㉠, ㉡에서 경우의 수는 $3 \times (14+10) = 72$

㉢ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받고 한 명만 흰 모자를 안 받는 경우
검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는 3
이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는 2
이 각각에 대하여 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어주면 안 되고, 다른 두 학생에게는 흰색 모자를 1개 이상씩 나누어주어야 한다. 즉, 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 학생 A가 4개를 모두 받는 한 가지 경우를 제외해야 하므로

$${}_3H_4 - 1 = 14$$

따라서 경우의 수는 $3 \times 2 \times 14 = 84$

(ⅱ) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우
조건 (다)에 의하여 검은색 모자를 더 많이 받는 학생이 1명 나와야 한다.
다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의

수는 3
모든 학생이 한 개이상의 모자를 받아야 하므로 다른 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고, 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 나머지 흰색 모자를 4개를 나누어주는 경우의 수를 구하면

$${}_3H_4=15$$

따라서 경우의 수는 $3\times15=45$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 총 경우의 수는

$$72+84+45=201$$

67) [정답] **72**

[해설]

3명의 학생을 A, B, C라 하자.

(ⅰ) 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받는 경우
흰 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

흰 공 2개를 모두 받은 학생이 A일 때, 학생 A는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다. 학생 A에게 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2\times{}_3H_2=36$$

학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 빨간 공 2개와 검은 공 2개를 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수이므로 ${}_2H_2\times{}_2H_2=9$
같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수도 ${}_2H_2\times{}_2H_2=9$
학생 B와 C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는

$${}_1H_2\times{}_1H_2=1$$

그러므로 1명의 학생이 흰 공 2개를 모두 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3\times(36-2\times9+1)=57$

(ⅱ) 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받는 경우
흰 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

흰 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 학생 A, B는 빨간 공과 검은 공을 각각 적어도 1개씩 받아야 한다.
학생 A, B에게 각각 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 주고, 남은 빨간 공 1개와 검은 공 1개를 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3H_1\times{}_3H_1=9$
학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는

$${}_2H_1\times{}_2H_1=4$$

그러므로 2명의 학생이 흰 공을 1개씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는 $3\times(9-4)=15$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는 $57+15=72$

68) [정답] **168**

[해설]

세 상자에 서로 같은 흰 공 4개를 나누어 넣는 경우는

$$(4,\ 0,\ 0),\ (3,\ 1,\ 0),\ (2,\ 2,\ 0),\ (2,\ 1,\ 1)$$

(ⅰ) 흰 공을 (4, 0, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 4개 넣을 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공이 들어가지 않은 상자에 2개 이상씩 넣어야 하므로

$$y=y'+2,\ z=z'+2\ (\text{단},\ y',\ z'\geq 0)$$

식에 대입하면 $x+y'+z'=2$
즉, ${}_3H_2={}_4C_2=6$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_3H_2=3\times6=18$$

(ⅱ) 흰 공을 (3, 1, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공을 A, B, C에 나누어 넣고, 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공 1개 넣은 상자에 1개 이상 흰 공 2개 넣은 상자에 2개 이상 넣는 경우이므로

$$y=y'+1,\ z=z'+2\ (\text{단},\ y',\ z'\geq 0)$$

식에 대입하면 $x+y'+z'=3$
즉, ${}_3H_3={}_5C_2=10$이므로 구하는 경우의 수는

$$3!\times{}_3H_3=6\times10=60$$

(ⅲ) 흰 공을 (2, 2, 0)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 0개인 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공이 안 들어간 상자에 2개 이상 넣는 경우이므로

$$z=z'+2\ (\text{단},\ z'\geq 0)$$

식에 대입하면 $x+y+z'=4$
즉, ${}_3H_4={}_6C_2=15$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_3H_4=3\times15=45$$

(ⅳ) 흰 공을 (2, 1, 1)으로 나누어 넣는 경우
흰 공 2개 들어가는 상자를 선택한 후 검은 공 6개를 나누어 넣는 경우는 $x+y+z=6$에서 흰 공 1개씩 들어간 상자에 1개 이상 넣는 경우이므로

$$y=y'+1,\ z=z'+1\ (\text{단},\ y',\ z'\geq 0)$$

식에 대입하면 $x+y'+z'=4$
즉, ${}_3H_4={}_6C_2=15$이므로 구하는 경우의 수는

$${}_3C_1\times{}_3H_4=3\times15=45$$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의해서 $18+60+45+45=168$

69) [정답] ③

[해설]
A와 B에게 각각 공책을 2권씩 먼저 나누어 준 후 남은 6권의 공책을 4명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_6={}_{4+6-1}C_6={}_9C_6={}_9C_3=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

70) [정답] ③

[해설]

세 명의 학생 중 한 명은 3가지 색의 카드를 모두 받아야 하므로 카드의 개수가 적은 노란색 카드부터 나누어 주면 된다.

(ⅰ) 노란색 카드를 나누어 주는 경우의 수
세 명의 학생에게 중복을 허용하여 나누어 주는 경우이므로

$${}_3H_1={}_3C_1=3$$

(ⅱ) 파란색 카드를 나누어 주는 경우의 수
3가지 색을 모두 받아야 하는 학생이 존재해야 하므로 파란색 카드 중 1장을 노란색 카드를 받은 학생에게 먼저 나누어 준 후 남은 1장을 세 명의 학생에게 중복을 허용하여 나누어 주는 경우이므로 ${}_3H_1={}_3C_1=3$

(ⅲ) 빨간색 카드를 나누어 주는 경우의 수
파란색 카드와 마찬가지로 1장의 카드를 먼저 나누어 준 후 남은 3장을 세 명의 학생에게 중복을 허용하여 나누어 주는 경우이므로 ${}_3H_3={}_5C_3=10$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$$3\times3\times10=90$$

71) [정답] ①

[해설]

세 명의 학생에게 연필을 하나씩 나누어 주고 남은 3자루의 연필을 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3={}_{3+3-1}C_3={}_5C_3=10$$

5개의 지우개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5={}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$$

따라서 구하는 경우의 수는
$10\times21=210$

72) [정답] 218

[해설]
A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면
$a+b+c+d=14\cdots\cdots$ ㉠
조건 (가)에서
$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$
(a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉠에서
$a'+b'+c'+d'=10\ \cdots\cdots$ ㉡
방정식 ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

$${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$$

한편, 네 명의 학생이 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는 다음과 같다.
$a=2a''+1,\ b=2b''+1,\ c=2c''+1,\ d=2d''+1$
(a'', b'', c'', d''은 음이 아닌 정수)로 놓으면 ㉠에서
$a''+b''+c''+d''=5\ \cdots\cdots$ ㉢
㉢을 만족시키는 순서쌍 (a'', b'', c'', d'')의 개수는

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

따라서 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 경우의 수는
$286-56=230$
한편, 두 조건 (가), (다)를 만족시키는 동시에 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우는 각 학생이 받은 사인펜의 개수가 10, 2, 1, 1일 때뿐이고, 이 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
따라서 주어진 세 조건을 모두 만족시키는 경우의 수는
$230-12=218$

73) [정답] **51**

[해설]
학생 A가 받은 검은 공의 개수와 흰 공의 개수를 각각 b, w라 하자.
조건 (가), (나)를 만족시키는 순서쌍 $(b,\ w)$ 중 학생 A가 홀수 개의 공을 받은 경우는

(4, 3), (4, 1), (3, 2), (2, 1)

(ⅰ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 3)$일 때

흰 공 2개, 빨간 공 5개가 남으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(4,\ 1)$일 때

흰 공 4개와 빨간 공 5개가 남으므로 세 명의 학생 B, C, D에게 흰 공과 빨간 공을 각각 1개씩 나누어 주고

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개를 나누어 주는 경우의 수는 다음과 같다.

흰 공 1개를 받은 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

세 명의 학생 B, C, D에게 빨간 공 2개를 나누어 줄 때, 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로 경우의 수는

${}_3H_2-1={}_4C_2-1=5$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times5=15$

(ⅲ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(3,\ 2)$일 때

검은 공 1개, 흰 공 3개, 빨간 공 5개가 남으므로 다음의 (1)과 (2)의 경우로 나누어 볼 수 있다.

(1) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 흰 공을 받는 경우

검은 공과 흰 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

검은 공과 흰 공을 받는 학생이 B일 때

남은 흰 공 2개와 빨간 공 5개는 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D에게 나누어 준다.

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 주고 남은 빨간 공 3개를 나누어 줄 때, 한 명의 학생에게 빨간 공 3개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로

경우의 수는 ${}_2H_3-2={}_4C_3-2=2$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times2=6$

(2) 세 명의 학생 B, C, D 중에서 한 명의 학생이 검은 공과 빨간 공을 받는 경우

검은 공과 빨간 공을 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

검은 공과 빨간 공을 받는 학생이 B일 때

두 명의 학생 C, D에게 흰 공 1개, 빨간 공 1개씩을 각각 나누어 준다.

남은 흰 공 1개, 빨간 공 2개에 대하여 흰 공은 학생 B를 제외한 두 명의 학생 C, D중에서 한 명을 택하여 나누어 주고, 빨간 공은 세 명의 학생 B, C, D중에서 한 명을 택하여 나누어 준다.

이 때, 마지막에 흰 공을 받는 학생에게 빨간 공 2개를 모두 나누어 주는 경우를 제외해야 하므로 경우의 수는

$2\times({}_3H_2-1)=2\times({}_4C_2-1)=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 $3\times10=30$

(ⅳ) 순서쌍 $(b,\ w)$가 $(2,\ 1)$일 때

조건 (다)를 만족시키지 않는다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

구하는 경우의 수는 $15+6+30=51$

74) [정답] ③

[해설]

8권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{3+8-1}C_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

첫 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수는 먼저 첫 번째 칸에 6권의 책을 꽂고 남은 2권의 책을 3개의 칸에 남김없이 나누어 꽂는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6$

마찬가지로 두 번째 칸에 6권 이상의 책을 꽂는 경우의 수도 6이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $45-6-6=33$

75) [정답] ④

[해설]

(ⅰ) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

남은 3개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$10\times(8-1)=70$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

남은 4개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $5\times(16-1)=75$

(iii) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우 5개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_{2}\Pi_{5}=2^5=32$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는 $32-1=31$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$70+75+31=176$

76) [정답] ⑤

[해설]

$x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$로 놓으면 방정식 $x+y+z+w=11$을 만족시키는 자연수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는 방정식 $x'+y'+z'+w'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.

방정식 $x'+y'+z'+w'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 $x',\ y',\ z',\ w'$ 중에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{7}={}_{4+7-1}\mathrm{C}_{7}={}_{10}\mathrm{C}_{7}=120$$

77) [정답] **74**

[해설]

(i) (가)조건에서 방정식 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 6개를 선택하는 중복조합이므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{6}={}_{4+6-1}\mathrm{C}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{6}={}_{9}\mathrm{C}_{3}=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$$

(ii) (나)조건에서 여사건을 이용하면

$a\geq1,\ b\geq1,\ c\geq1,\ d\geq1$을 만족하는 경우이므로

$a=a'+1,\ b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$

$\therefore a'+b'+c'+d'=2$

즉, 방정식 $a'+b'+c'+d'=2$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a',\ b',\ c',\ d'$의 모든 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수는 $a',\ b',\ c',\ d'$에서 중복을 허락하여 2개를 선택하는 중복조합이므로

$${}_{4}\mathrm{H}_{2}={}_{4+2-1}\mathrm{C}_{2}={}_{5}\mathrm{C}_{2}=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $84-10=74$(개)

78) [정답] **31**

[해설]

$12=2^2\times3$이고 $c+d+e\geq3$이므로

(가)조건에서 $ab(c+d+e)=12$을 만족하는 경우는 다음 4가지 경우이다.

(i) $c+d+e=3,\ ab=4$이면 (나)조건에서 적어도 짝수가 2개이어야 하므로

$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)=(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1)$

즉, 1(가지)

(ii) $c+d+e=4,\ ab=3$이면

이 경우는 짝수가 적어도 2개인 경우가 없다.

(iii) $c+d+e=6,\ ab=2$이면

$(a,\ b)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ 즉 2(가지)이고

$(c,\ d,\ e)$에서 짝수가 적어도 1가지는 나오므로

${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}=10$(가지)

따라서 만족하는 경우의 수는

$2\times10=20$(가지)

(iv) $c+d+e=12,\ ab=1$이면

$(a,\ b)=(1,\ 1)$ 즉, 1(가지)

적어도 짝수가 2개이려면 $c,\ d,\ e$는 모두 짝수인 경우에만 만족하므로

$2c'+2d'+2e'=12$, 즉 $c'+d'+e'=6$

따라서 경우의 수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{3}={}_{5}\mathrm{C}_{3}=10$(가지)

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $1+10+20=31$(가지)

79) [정답] **84**

[해설]

(가)를 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_{3}\mathrm{H}_{14}={}_{16}\mathrm{C}_{2}=120$

(나)에서 $a\neq2,\ b\neq2,\ c\neq2$

(i) $a,\ b,\ c$중 1개가 2인 경우

$a=2$일 때, $b+c=12$를 만족시키는 b와 c의 모든 순서쌍 $(b,\ c)$의 개수는 ${}_{2}\mathrm{H}_{12}-2=11$

$b=2,\ c=2$인 경우의 수도 각각 11이므로

$a,\ b,\ c$중 1개가 2인 경우의 수는 $11\times3=33$

(ii) $a,\ b,\ c$중 2개가 2인 경우

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$를 구하면 $(2,\ 2,\ 10),\ (2,\ 10,\ 2),\ (10,\ 2,\ 2)$의 세 가지 경우가 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 $120-(33+3)=84$

80) [정답] 50

[해설]

(나)에서 ab가 홀수인 경우는 다음과 같다.

(가)에서 $a+b+c+d+e=10$을 적용하면

(ⅰ) $(a,\ b)=(1,\ 1)$일 때, $c+d+e=8$
그런데 $c,\ d,\ e$가 자연수이므로
$c'=c+1,\ d'=d+1,\ e'=e+1$이라 하면
$c'+d'+e'=5$
$\therefore {}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

(ⅱ) $(a,\ b)=(1,\ 3),\ (3,\ 1)$일 때, $c+d+e=6$
(ⅰ)과 마찬가지로 $c'+d'+e'=3$
$\therefore 2\times{}_3H_3=2\times{}_5C_3=2\times{}_5C_2=20$

(ⅲ) $(a,\ b)=(1,\ 5),\ (3,\ 3),\ (5,\ 1)$일 때, $c+d+e=4$
(ⅰ)과 마찬가지로 $c'+d'+e'=1$
$\therefore 3\times{}_3H_1=3\times{}_3C_1=9$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는 $21+20+9=50$

81) [정답] 332

[해설]

(가)에서 ${}_4H_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$

(나)에서

$a=2$이면 $b+c+d=10$ -- ${}_3H_{10}={}_{12}C_2=66$

$a+b+c=10$이면 --- ${}_3H_{10}={}_{12}C_2=66$

$a=2,\ a+b+c=10$이면

$a=2,\ d=2,\ b+c=8$ -- 9가지

$\therefore 455-(66+66-9)=332$

82) [정답] 206

[해설]

6 이하의 음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$에 대하여

$x_1=2y_1+1,\ x_2=2y_2+2,$

$x_3=2y_3+1,\ x_4=2y_4+2$라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4=34$에서

$(2y_1+1)+(2y_2+2)+(2y_3+1)+(2y_4+2)=34$

$y_1+y_2+y_3+y_4=14$ …… ㉠

구하는 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는

음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의 모든

순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$에서

$y_k\ge 7$인 4이하의 자연수 k가 존재하는

순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$를 제외한 개수와 같다.

(ⅰ) 방정식 $y_1+y_2+y_3+y_4=14$를 만족시키는
음이 아닌 네 정수 $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의
모든 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
14개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=\frac{17\times16\times15}{3\times2\times1}=680$$

(ⅱ) $y_k\ge 7$인 k의 값이 1개인 경우
$y_1\ge 7$이라 하자.
$z_1=y_1-7$이라 하면 방정식 ㉠은
$z_1+y_2+y_3+y_4=7$
방정식 $z_1+y_2+y_3+y_4=7$을 만족시키는
음이 아닌 네 정수 $z_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$의 모든
순서쌍 $(z_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
서로 다른 4개에서 중복을 허락하여
7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_3=120$
이때 $y_l\ge 7$인 2이상 4이하의 자연수 l이
존재하는 순서쌍 $(z_1,\ y_1,\ y_3,\ y_4)$는
$(0,\ 7,\ 0,\ 0),\ (0,\ 0,\ 7,\ 0),\ (0,\ 0,\ 0,\ 7)$의
3가지이므로 $120-3=117$
같은 방법으로 $y_k\ge 7$인 2이상 4 이하의
자연수 k가 존재하는 순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의
개수도 각각 117이다.
따라서 $y_k\ge 7$인 k의 값이 1개인
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$의 개수는
$4\times117=468$

(ⅲ) $y_k\ge 7$인 k의 값이 2개인 경우
순서쌍 $(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4)$는
$(7,\ 7,\ 0,\ 0),\ (7,\ 0,\ 7,\ 0),\ (7,\ 0,\ 0,\ 7),$

$(0,\ 7,\ 7,\ 0)$, $(0,\ 7,\ 0,\ 7)$, $(0,\ 0,\ 7,\ 7)$

의 6가지이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해

구하는 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는

$680-(468+6)=206$

83) [정답] **327**

[해설]

(ⅰ) $f(3)$이 3의 배수인 경우

① $f(3)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

그러므로 $6\times20=120$

② $f(3)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$을 선택하는 경우의 수는

$${}_1H_3={}_3C_3=1$$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②에 의하여 $f(3)$이 3의 배수인 경우의 수는

$120+21=141$

(ⅱ) $f(6)$이 3의 배수인 경우

① $f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_5={}_7C_5=21$$

② $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_6H_5={}_{10}C_5=252$$

①, ②에 의하여 $f(6)$이 3의 배수인 경우의 수는

$21+252=273$

(ⅲ) $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우

① $f(3)=f(6)=3$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_1H_2={}_2C_2=1$$

그러므로 $6\times1=6$

② $f(3)=3$, $f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

그러므로 $6\times10=60$

③ $f(3)=f(6)=6$인 경우

$f(1)$, $f(2)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

$f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는

$${}_1H_2={}_2C_2=1$$

그러므로 $21\times1=21$

①, ②, ③에 의하여 $f(3)$, $f(6)$이 모두 3의 배수인 경우의 수는 $6+60+21=87$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$141+273-87=327$

84) [정답] ⑤

[해설]

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 대응에서 $f(2)\le f(3)\le f(4)$을 만족해야 한다.

(ⅰ) $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4

즉 4(가지)

(ⅱ) $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4의 4개 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3={}_{4+3-1}C_3={}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20(\text{가지})$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는

$4\times20=80$

85) [정답] ②

[해설]

구하고자 하는 함수의 개수를 치역에 따라 분류하면

(ⅰ) 치역이 $\{1\}$인 경우

조건을 성립하며 경우의 수는 1가지이다.

(ⅱ) 치역이 $\{1,\ 2\}$인 경우

(가)조건에 의해 $f(1)=1$이고

(1) $f(2)=1$일 때

$x=2$인 경우

$f(f(f(2)))=f(f(1))=f(1)=1$ 이고

$x\ge 3$인 경우도

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(2))=1$ 이므로

주어진 조건을 만족한다.

3이상의 정의역이 1, 2에 대응하는 개수를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$$x_1+x_2=6\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_2H_{6-1}={}_6C_5=6$가지이다.

(2) $f(2)=2$일 때

$f(f(f(2)))=2$이므로 모순

(ⅲ) 치역이 $\{1,\ 3\}$인 경우

(1) $f(2)=1,\ f(3)=1$인 경우

$f(f(f(x)))$는 $f(f(1))=1$ 또는 $f(f(3))=1$이므로 성립

4이상의 정의역이 1, 3에 대응하는 개수를 각각 $x_1,\ x_2$라 하면

$$x_1+x_2=5\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_2H_{5-1}={}_5C_4=5$가지이다.

(2) $f(2)=1,\ f(3)=3$인 경우

$f(f(f(3)))=3$이므로 모순

(3) $f(2)=3$인 경우

(가)에 의해 $f(3)\ge f(2)=3$ 즉, $f(3)=3$이므로

$f(f(f(2)))=3$이므로 모순

(ⅳ) 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$인 경우

3이상의 정의역이 1, 2, 3에 각각 대응하는 개수를 $x_1,\ x_2,\ x_3$라 하면

$$x_1+x_2+x_3=6\ (x_1\ge 0,\ x_2\ge 1,\ x_3\ge 1\text{인 정수})$$

이므로 ${}_3H_{6-2}={}_6C_4=15$가지이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 조건을 만족시키는 모든 함수 $f:X\to Y$의 개수는 $1+6+5+15=27$가지

86) [정답] 65

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 -1과 1을 적어도 1개씩 선택하거나, 0을 적어도 2개 선택해야 한다.

(ⅰ) -1과 1을 적어도 1개씩 선택하는 경우

-1과 1을 1개씩 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(ⅱ) 0을 적어도 2개 선택하는 경우

0을 2개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_{5+3-1}C_3={}_7C_3=35$

(ⅲ) 위의 (ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키는 경우

-1을 1개, 0을 2개, 1을 1개 선택한 후 Y의 원소 중에서 중복을 허락하여 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_5H_1={}_{5+1-1}C_1={}_5C_1=5$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$35+35-5=65$

87) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$\sqrt{f(1)\times f(2)\times f(3)}$의 값이 자연수인 경우는 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중 하나의 수가 1 또는 4이고 나머지 두 수가 서로 같은 경우이다.

조건 (나)에 의하여

(i) $f(3)=1$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 1,\ 1)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_5H_3$

그러므로 $1\times{}_5H_3={}_7C_3=35$

(ii) $f(3)=2$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 2,\ 2)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_4H_3$

그러므로 $1\times{}_4H_3={}_6C_3=20$

(iii) $f(3)=3$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 3,\ 3)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_3H_3$

그러므로 $1\times{}_3H_3={}_5C_3=10$

(iv) $f(3)=4$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 1,\ 4)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(3,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 4,\ 4)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_2H_3$

그러므로 $5\times{}_2H_3=5\times{}_4C_3=20$

(v) $f(3)=5$인 경우

순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은 $(1,\ 5,\ 5)$, $(4,\ 5,\ 5)$

순서쌍 $(f(4),\ f(5),\ f(6))$의 개수는 ${}_1H_3$

그러므로 $2\times{}_1H_3=2\times{}_3C_3=2$

따라서 (ⅰ) (v)에 의하여 함수 f의 개수는

$35+20+10+20+2=87$

88) [정답] 105

[해설]

조건 (가)를 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_6H_4={}_9C_4=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$

(ⅰ) 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우

$f(1)\geq4$인 함수 f의 개수는 ${}_3H_4={}_6C_4=15$

(ⅱ) 조건 (다)를 만족시키지 않는 경우

$f(3)-f(1)>4$에서

$f(1)=1,\ f(3)=6$이어야 하므로

$f(4)=6,\ 1\leq f(2)\leq6$

이때 함수 f의 개수는 6

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족하는 경우는 없다.

따라서 구하는 함수의 개수는 $126-(15+6)=105$

89) [정답] ④

[해설]

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=8$을 만족시키는 경우의 수는 $f(n)\ (1\leq n\leq4)$에서 중복을 허락하여 8번 뽑는 경우의 수에서 $f(n)$의 값이 7 또는 8이 되는 경우의 수를 제외한 수와 같다.

$$\begin{aligned}\therefore {}_4H_8-({}_4C_1\times{}_3C_1+{}_4C_1)&={}_{11}C_8-16\\&={}_{11}C_3-16\\&=\frac{11\times10\times9}{3\times2\times1}-16\\&=165-16=149\end{aligned}$$

90) [정답] 100

[해설]

조건 (나)에서 $f(1)=1,\ f(10)=10$

(ⅰ) $f(5)=1,\ f(6)=7$인 경우

$f(2)=f(3)=f(4)=1$이므로 1가지

$f(7),\ f(8),\ f(9)$를 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) $f(9)=9$일 때

$f(7),\ f(8)$이 될 수 있는 값은 7, 8, 9이므로

${}_3H_2-1=5$ ($f(8)=7$인 경우 제외)

(2) $f(9)=10$일 때

$f(7),\ f(8)$이 될 수 있는 값은 7, 8, 9, 10이므로

${}_4H_2-1=9$ ($f(8)=7$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times(5+9)=14$

(ⅱ) $f(5)=2,\ f(6)=8$인 경우

$f(2),\ f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2이므로

${}_2H_3=4$

$f(7),\ f(8),\ f(9)$가 될 수 있는 값은 8, 9, 10이므로

${}_3H_3-1=9$ ($f(9)=8$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times9=36$

(ⅲ) $f(5)=3,\ f(6)=9$인 경우

$f(7),\ f(8),\ f(9)$가 될 수 있는 값은 9, 10이므로

${}_2H_3=4$

$f(2),\ f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

${}_3H_3-1=9$ ($f(2)=3$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times9=36$

(ⅳ) $f(5)=4,\ f(6)=10$인 경우

$f(7)=f(8)=f(9)=10$이므로 1가지

$f(2),\ f(3),\ f(4)$를 정하는 경우의 수는 다음과 같다.

(1) $f(2)=1$일 때

$f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

${}_4H_2-1=9$ ($f(3)=4$인 경우 제외)

(2) $f(2)=2$일 때

$f(3),\ f(4)$가 될 수 있는 값은 2, 3, 4이므로

${}_3H_2-1=5$ ($f(3)=4$인 경우 제외)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times(9+5)=14$

이상에서 함수 f의 개수는

$14+36+36+14=100$

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $f(1)=1,\ f(10)=10$

(ⅰ) $f(5)=1,\ f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),f(3),f(4))$는

(1, 1, 1)

의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),f(8),f(9))$는

(7, 8, 9), (7, 8, 10), (7, 9, 9), (7, 9, 10), (7, 10, 10),
(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10), (8, 10, 10),
(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10), (10, 10, 10)

의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$1\times14=14$

(ii) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우

$f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$

의 $4(={}_2H_3={}_4C_3)$개가 존재한다.

$f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(8, 8, 9)$, $(8, 8, 10)$, $(8, 9, 9)$, $(8, 9, 10)$, $(8, 10, 10)$, $(9, 9, 9)$, $(9, 9, 10)$, $(9, 10, 10)$, $(10, 10, 10)$

의 9개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$4\times9=36$

(iii) $f(5)=3$, $f(6)=9$인 경우

$f(5)=3$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$

의 9개가 존재한다.

$f(6)=9$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(9, 9, 9)$, $(9, 9, 10)$, $(9, 10, 10)$, $(10, 10, 10)$

의 4 $(={}_2H_3={}_4C_3)$개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$9\times4=36$

(iv) $f(5)=4$, $f(6)=10$인 경우

$f(5)=4$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는

$(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 4)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$

의 14개가 존재한다.

$f(6)=10$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(10, 10, 10)$

의 1개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는

$14\times1=14$

이상에서 구하는 함수 f의 개수는

$14+36+36+14=100$

91) [정답] 115

[해설]

$f(1)=1$이면 조건 (가)에서 $f(1)=4$이므로 모순이다.

(i) $f(1)=2$인 경우

조건 (가)에서 $f(2)=4$

$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 5

이 경우 함수 f의 개수는 $10\times5=50$

(ii) $f(1)=3$인 경우

조건 (가)에서 $f(3)=4$

$f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $5\times5=25$

이 경우 함수 f의 개수는 $2\times25=50$

(iii) $f(1)=4$인 경우

조건 (가)에서 $f(4)=4$

$f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 4,5 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_3C_2=3$

$f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 5

이 경우 함수 f의 개수는 $3\times5=15$

(iv) $f(1)=5$인 경우

조건 (가)에서 $f(5)=4$

이 경우는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는 $50+50+15=115$

92) [정답] 55

[해설]

c가 5 이하의 자연수이므로 $1\le b\le4$이다.

(i) $b=1$인 경우

$a\le2\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_4H_2$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_4H_2={}_2C_1\times{}_5C_2=2\times10=20$

(ii) $b=2$인 경우

$a\le3\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_3H_2$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3H_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

(iii) $b=3$인 경우

$a\le4\le c\le d$에서 a를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 ${}_2H_2$이다.

그러므로 구하는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_2H_2={}_4C_1\times{}_3C_2=4\times3=12$

(ⅳ) $b=4$인 경우

$a \le 5 \le c \le d$에서 a를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1$이고, c, d를 택하는 경우의 수는 1이다.

그러므로 구하는 경우의 수는 ${}_5C_1 \times 1=5$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$20+18+12+5=55$

93) [정답] ①

[해설]

조건 (나)에서

$a^2-b^2=-5$ 또는 $a^2-b^2=5$

즉,

$(b-a)(b+a)=5$ 또는 $(a-b)(a+b)=5$

이고 a, b는 자연수이므로

$b-a=1$, $b+a=5$

또는

$a-b=1$, $a+b=5$

따라서, $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$이다.

또한, 조건 (가)에서

$a+b+c+d+e=12$

이므로 $c+d+e=7$이고 c, d, e는 자연수이므로

$c=c'+1$, $d=d'+1$, $e=e'+1$ (c', d', e'은 음이 아닌 정수)

로 놓으면

$(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=7$

$c'+d'+e'=4$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 (c', d', e')의 개수는

${}_3H_4={}_{3+4-1}C_4={}_6C_4={}_6C_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times15=30$

94) [정답] ④

[해설]

조건 (가)의 $a+b+c+d+e=10$과

조건 (나)의 $-2 \le a-b+c-d+e \le 2$에서

$8 \le 2a+2c+2e \le 12$,

$4 \le a+c+e \le 6$

(i) $a+c+e=4$일 때

$b+d=6$이고, 구하는 모든 순서쌍

(a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=4$, $b+d=6$을 만족시키는

음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_4\times{}_2H_6={}_6C_4\times{}_7C_6=15\times7=105$

(ii) $a+c+e=5$일 때

$b+d=5$이고, 구하는 모든 순서쌍

(a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=5$, $b+d=5$를 만족시키는

음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_5\times{}_2H_5={}_7C_5\times{}_6C_5=21\times6=126$

(iii) $a+c+e=6$일 때

$b+d=4$이고, 구하는 모든 순서쌍

(a, b, c, d, e)의 개수는

두 방정식 $a+c+e=6$, $b+d=4$를 만족시키는

음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3H_6\times{}_2H_4={}_8C_6\times{}_5C_4=28\times5=140$

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍의

개수는 $105+126+140=371$