2016학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
정답 및 해설 (B형)

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	④	**2**	②	**3**	③	**4**	⑤	**5**	①
6	③	**7**	⑤	**8**	②	**9**	①	**10**	④
11	②	**12**	④	**13**	①	**14**	③	**15**	①
16	⑤	**17**	⑤	**18**	②	**19**	④	**20**	③
21	④	**22**	9	**23**	11	**24**	10	**25**	6
26	2	**27**	68	**28**	4	**29**	25	**30**	128

1. 정답 ④

$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $A+2B$의 $(1,2)$ 성분은 4

2. 정답 ②

$\log_2 5+\log_2\frac{4}{5}=\log_2 5\times\frac{4}{5}$

$=\log_2 4=2$

3. 정답 ③

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

4. 정답 ⑤

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ 이므로

$\cos\theta=\frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$

또는

$\cos\theta=-\frac{7}{5\sqrt{2}}$, $\sin\theta=-\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$\therefore \sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta=\frac{7}{25}$

5. 정답 ①

$\int_0^1 e^{x+4}=\left[e^{x+4}\right]_0^1=e^5-e^4$

6. 정답 ③

일차변환 f의 역변환 f^{-1}에 의하여 점 $(4,1)$이 점 (a,b)로 옮겨진다는 것은 일차변환 f에 의하여 점 (a,b)가 점 $(4,1)$로 옮겨진다는 것을 의미한다.

$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$이므로,

$2a=4$, $b=1$, 즉, $a=2$, $b=1$이 되어

$a+b=3$ 이다.

7. 정답 ⑤

$f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x$

$=\sqrt{11+a^2}\sin(x+\theta)$

(단, $\sin\theta=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{a^2+11}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+11}}$)

최댓값은 $\sqrt{a^2+11}$ 이므로

$\sqrt{a^2+11}=6$

$\therefore a=5\ (a>0)$

8. 정답 ②

첫째항이 a_1이고 공비가 3이라 하면

$S_n=\frac{a_1(3^n-1)}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_1(3^n-1)}{2}}{3^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 3^n-a_1}{2\cdot 3^n}=\frac{a_1}{2}=5$

따라서 $a_1=10$

9. 정답 ①

서로 다른 종류의 연필 5자루는 각각 학생에게 주어지는 경우가 4가지씩 이므로

${}_4\Pi_5=4^5=1024$ (가지)

10. 정답 ④

직선 OP의 기울기는 $2n$이다.

직선 PQ는 직선 OP에 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{1}{2n}$ 이다.

직선 PQ는 $\mathrm{P}(n, 2n^2)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{1}{2n}$ 인 직선이므로 직선 PQ의 방정식은

$y=-\frac{1}{2n}(x-n)+2n^2$ 이다.

점 Q는 직선 PQ의 x절편이므로 $\mathrm{Q}(4n^3+n,\ 0)$

따라서 $l_n=4n^3+n$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n}{n^3}$

$=4$

11. 정답 ②

방정식 $\frac{2}{f(x)-1}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$ 에서

분모는 0이 될 수 없으므로

$f(x)\neq 1$ 이고 $x\neq 1, x\neq -1$ 이다.

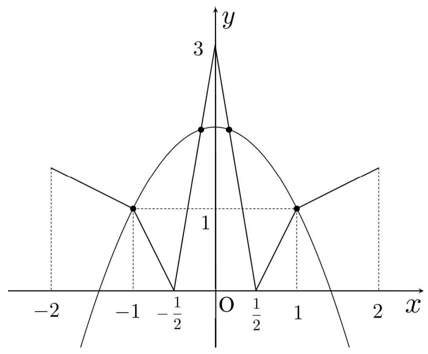
방정식을 정리하면

$\frac{2}{f(x)-1}=\frac{2}{1-x^2}$

$1-x^2=f(x)-1$

$f(x)=2-x^2$

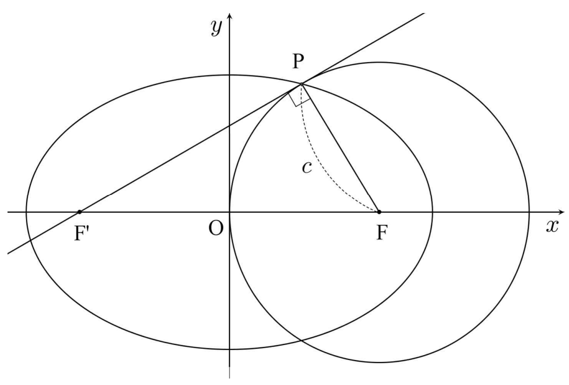
이 방정식의 실근은 연속함수 $y=f(x)$와 이차함수 $y=2-x^2$의 교점의 x좌표 이므로 그래프를 통해 실근의 개수를 찾도록 한다.



꼭짓점이 $(0,2)$이고 $(1,1), (-1,1)$을 지나는 이차함수를 그리면, 네 개의 점에서 만난다.

이 때, $x\neq 1, x\neq -1$ 이므로 방정식의 실근의 개수는 2개다.

12. 정답 ④



중심이 점 F이고, 반지름의 길이가 c인 원이 타원과 점 P에서 만나므로 $\overline{\mathrm{FP}}=c$

점 P는 타원위의 점이므로 타원의 정의에 의해, $\overline{\mathrm{FP}}=c$ 이고 장축의 길이가 4이므로, $\overline{\mathrm{F'P}}=4-c$

이 때, 점 P에서 원과 접하는 직선이 점 F'를 지나므로 직선 F'P와 선분 PF가 점 P에서 수직으로 만난다. 즉, 삼각형F'FP는 선분 F'F를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

따라서 $\overline{\mathrm{FP}}=c$, $\overline{\mathrm{F'P}}=4-c$, $\overline{\mathrm{F'F}}=2c$ 일 때, 피타고라스 정리에 의해

$(4-c)^2+c^2=(2c)^2$

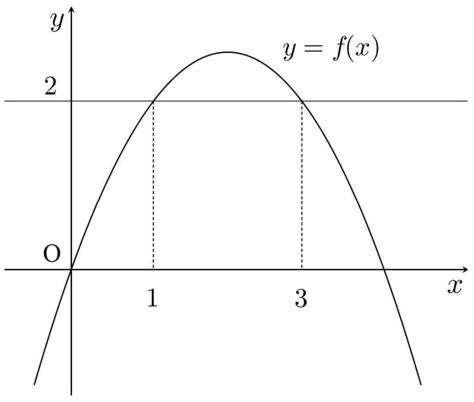
$16-8c+c^2+c^2=4c^2$

$2c^2+8c-16=0$

$c^2+4c-8=0$

$\therefore c=-2+2\sqrt{3}\ \ (c>0)$

13. 정답 ①



직선 $y=g(x)$가 x축에 평행하고, $(1,2)$를 지나므로 $y=g(x)$는 $y=2$이다. 함수 $y=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x$ 는 $x=2$에 대하여 대칭이므로 $y=2$와 $x=3$에서 만난다는 것을 알 수 있다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$에 의해 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3 \{f(x)-2\}dx = \int_1^3 \left\{2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-2\right\}dx$$

$$=\left[-2\sqrt{2}\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x-2x\right]_1^3$$

$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{2}-4$$

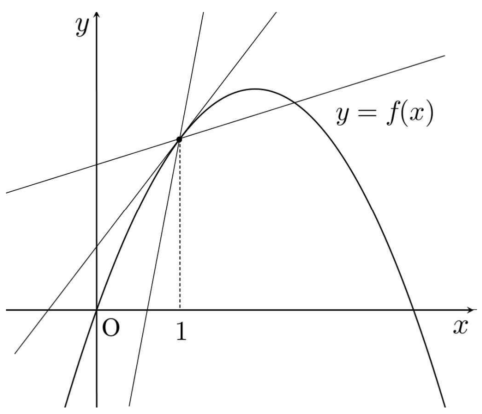
$$=\frac{16}{\pi}-4$$

14. 정답 ③

일차함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,4]$에서 $f(x)\le g(x)$를 만족한다.

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}x\ ,\quad f'(1)=\frac{\pi}{2}$$

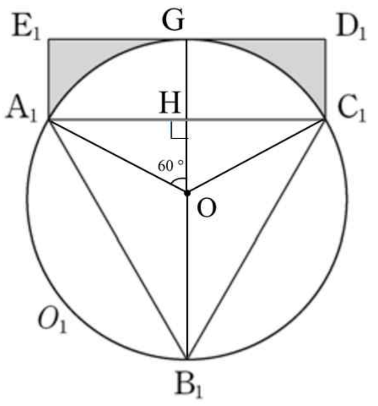
일차함수 $g(x)$의 기울기가 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기보다 크거나 작으면 아래 그림과 같이 $f(x)>g(x)$인 구간이 존재한다.



그러므로, 일차함수 $g(x)$의 기울기는 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선의 기울기인 $f'(1)=\frac{\pi}{2}$과 같아야 한다.

그러므로, $g(3)=\frac{\pi}{2}(3-1)+2=\pi+2$

15. 정답 ①



원 O_1의 중심을 O, 점 O에서 선분 A_1C_1, 선분 E_1D_1에 내린 수선의 발을 각각 H, G라고 하자. 점 O는 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 외심이자 무게중심이므로 $\angle A_1OC_1=120^\circ$ 이고 $\angle A_1OH=60^\circ$ 이다.

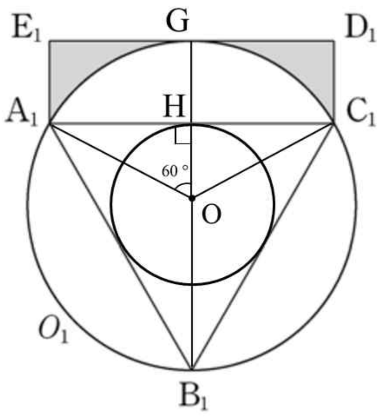
$\overline{OA_1}=2$ 이므로 삼각비에 의해 $\overline{OH}=1$, $\overline{HA_1}=\sqrt{3}$ 이고 $\overline{A_1C_1}=2\sqrt{3}$ 이다.

$\overline{OG}=2$ 이므로 $\overline{GH}=1$ 이고 따라서

사각형 $E_1A_1C_1D_1$의 넓이는 $2\sqrt{3}$

활꼴 A_1GC_1의 넓이는 부채꼴 OA_1C_1의 넓이에서 삼각형 OA_1C_1의 넓이를 빼면 된다. 따라서 활꼴의 넓이는 $\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ 이다.

∴ 색칠된 부분의 넓이 $=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$



삼각형 $A_1B_1C_1$에 내접하는 원의 반지름은 선분 OH의 길이와 같기 때문에 1이다.

R_1에 그려진 원 O_1의 반지름의 길이는 2이므로 닮음비는 $2:1$이고 넓이비는 $4:1$이다. 따라서 색칠되는 영역의 넓이는 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열을 이룬다.

$$\therefore\ \frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi$$

16. 정답 ⑤

함수 $(g\circ f)(x)$는

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}2^{ax}+2^{-ax} & (x<1)\\ 2^{-3x+4}+2^{3x-4} & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+0} 2^{-3x+4}+2^{3x-4}=\frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 1-0} 2^{ax}+2^{-ax}=2^a+2^{-a}$$

$$g(f(1))=g(1)=\frac{5}{2}$$

연속이 되기 위해서는 $x=1$에서의 좌극한값, 우극한값, 함숫값이 같아야 한다.

$2^a=t$라고 하면 $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$

$2t^2-5t+2=0$

$(2t-1)(t-2)=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

$t=\frac{1}{2}$일 때 $a=-1$, $t=2$일 때, $a=1$

∴ -1

17. 정답 ⑤

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$

이다. 위 식의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2(S_{n+1}+1)=n+\log_2(S_n+1)$ 이다.

$b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면 $b_1=1$이고

$b_{n+1}=\boxed{\ n\ }+b_n$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=\frac{n^2-n+2}{2}\qquad (n\ge 1)$$

이므로

$$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\qquad (n\ge 1)$$

이다. 그러므로 $a_1=1$이고, $n\ge 2$일 때

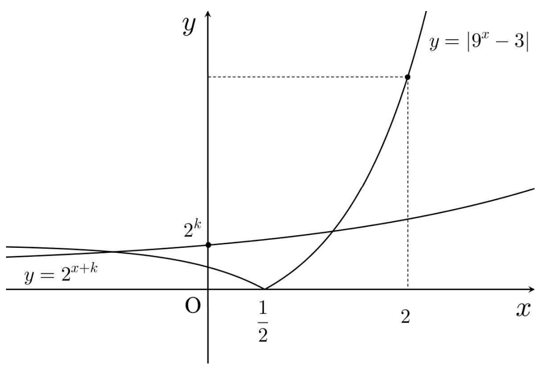
$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}$$

$$=2^{\boxed{\frac{n^2-3n+4}{2}}}\times(2^{n-1}-1)$$

이다.

18. 정답 ②



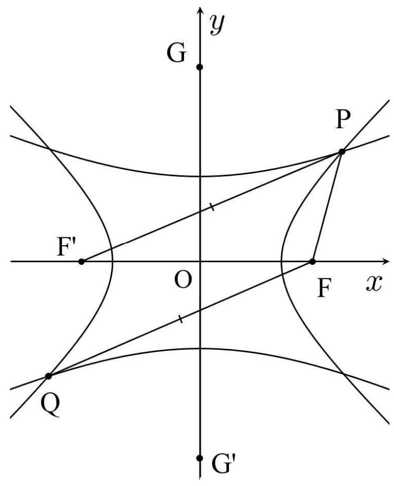
위 그림과 같이 조건 $x_1<0$을 만족하려면 두 함수의 $x=0$에서의 함숫값 2와 2^k 중 2^k이 2보다 커야하므로 $2^k>2 \Leftrightarrow k>1$

또한 조건 $0<x_2<2$를 만족하려면 두 함수의 $x=2$에서의 함숫값 78과 2^{k+2} 중 78이 2^{k+2}보다 커야하므로 $2^{k+2}<78 \Leftrightarrow k<\log_2 78-2$ 이다.

즉, $1<k<\log_2 78-2=4.\times\times\times\cdots$ 에 대하여 주어진 조건을 만족하는 자연수 k의 값은 2, 3, 4이므로

$\therefore\ 2+3+4=9$

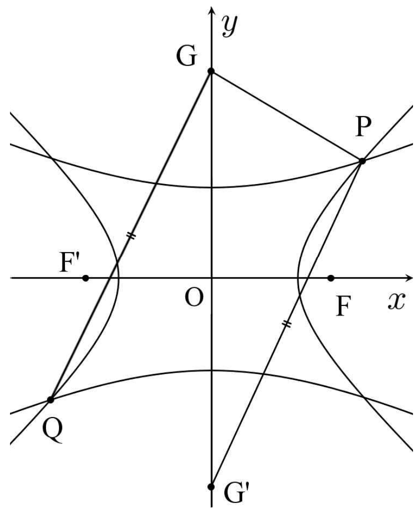
19. 정답 ④



두 쌍곡선이 모두 원점에 대하여 대칭이므로, 제1사분면의 교점인 P와 제3사분면의 교점인 Q 또한 원점에 대하여 대칭이다. 그러므로, $\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'P}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PF}}=a$라고 하자.
쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로 $\overline{\mathrm{PF'}}-a=2$
따라서 $\overline{\mathrm{PF'}}=a+2$

주어진 조건이 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=4$ 이므로
$\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{QF}}=a(a+2)=4$
$a^2+2a-4=0$
$\therefore\ a=-1+\sqrt{5}$



마찬가지로 대칭성을 이용하면 $\overline{\mathrm{QG}}=\overline{\mathrm{PG'}}$ 이다.

$\overline{\mathrm{PG}}=b$ 라고 하자.
쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로 $\overline{\mathrm{PG'}}-b=2$
따라서 $\overline{\mathrm{PG'}}=b+2$

주어진 조건이 $\overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=8$ 이므로
$\overline{\mathrm{PG}}\times\overline{\mathrm{QG}}=b(b+2)=8$
$b^2+2b-8=(b+4)(b-2)=0$
$\therefore\ b=2$

사각형 PGQF 의 둘레의 길이는
$a+(a+2)+b+(b+2)=2(a+b+2)$
$=2(3+\sqrt{5})=6+2\sqrt{5}$

20. 정답 ③

$\log t$의 지표를 $h(t)$라고 하자.
$\log t=h(t)+f(t)$

먼저 조건 (가)에서 $1\le t<100$ 이므로 가능한 $h(t)$의 값은 0 또는 1이다.

다음은 조건 (나)를 살펴보자.

① $n=4$일 때
$h(t^4)+f(t^4)=\log t^4$
$=4\log t$
$=4h(t)+4f(t)$

i) $0\le 4f(t)<1 \Rightarrow 0\le f(t)<\frac{1}{4}$

$f(t^4)=4f(t)$ 이므로 $f(t)=\frac{1}{6}$

ii) $1\le 4f(t)<2 \Rightarrow \frac{1}{4}\le f(t)<\frac{2}{4}$

$f(t^4)=4f(t)-1$ 이므로 $f(t)=\frac{1}{3}$

iii) $2\le 4f(t)<3 \Rightarrow \frac{1}{2}\le f(t)<\frac{3}{4}$

$f(t^4)=4f(t)-2$ 이므로 $f(t)=\frac{1}{2}$

iv) $3\le 4f(t)<4 \Rightarrow \frac{3}{4}\le f(t)<1$

$f(t^4)=4f(t)-3$ 이므로 $f(t)=\frac{2}{3}$
주어진 범위를 만족시키지 못하므로 불가능

① $n=5$일 때
$h(t^5)+f(t^5)=\log t^5$
$=5\log t$
$=5h(t)+5f(t)$

i) $0\le 5f(t)<1 \Rightarrow 0\le f(t)<\frac{1}{5}$

$f(t^5)=5f(t)$ 이므로 $f(t)=\frac{1}{7}$

ii) $1\le 5f(t)<2 \Rightarrow \frac{1}{5}\le f(t)<\frac{2}{5}$

$f(t^5)=5f(t)-1$ 이므로 $f(t)=\frac{2}{7}$

iii) $2\le 5f(t)<3 \Rightarrow \frac{2}{5}\le f(t)<\frac{3}{5}$

$f(t^5)=5f(t)-2$ 이므로 $f(t)=\frac{3}{7}$

iv) $3\le 5f(t)<4 \Rightarrow \frac{3}{5}\le f(t)<\frac{4}{5}$

$f(t^5)=5f(t)-3$ 이므로 $f(t)=\frac{4}{7}$
주어진 범위를 만족시키지 못하므로 불가능

iv) $4\le 5f(t)<5 \Rightarrow \frac{4}{5}\le f(t)<1$

$f(t^5)=5f(t)-4$ 이므로 $f(t)=\frac{5}{7}$
주어진 범위를 만족시키지 못하므로 불가능

가능한 가수 $f(t)$는 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$ 이다.

따라서 $\log t=0+\frac{1}{6}$, $1+\frac{1}{6}$
$=0+\frac{1}{3}$, $1+\frac{1}{3}$
$\cdots$
$=0+\frac{3}{7}$, $1+\frac{3}{7}$

$\therefore$ 12개

21. 정답 ④

$f(x)$의 도함수 $f'(x)$는
$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$
역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$가 실수 전체에서 증가함수거나 감소함수여야 하고 $f(x)$가 증가함수이면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$, 감소함수면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

$e^{x+1}(x^2+nx+1)\ge -a$
또는
$e^{x+1}(x^2+nx+1)\le -a$

$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)$ 라고 하면
함수 $h(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 위치관계를 알아보아야 한다.

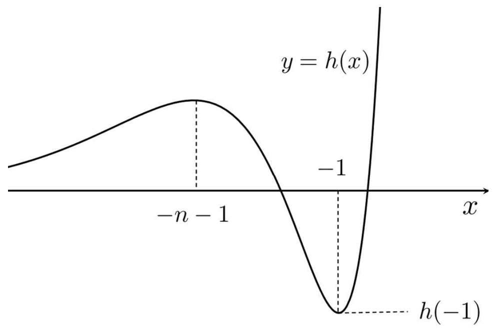
$h(x)$의 그래프의 개형을 알아보자.

$h'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+(n+1)\}$
$=e^{x+1}(x+n+1)(x+1)$

x	$-\infty$	$\cdots$	$-n-1$	$\cdots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$e^{-n}(n+2)$	$\searrow$

x	-1	$\cdots$	∞
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	$2-n$	$\nearrow$	∞

$n \geq 2$ 이므로 $h(-1)=2-n \leq 0$ 이고 그래프 개형은 다음과 같다.



$x \to \infty$ 일 때, $h(x)$도 무한히 증가하기 때문에 모든 실수 x에 대하여 $e^{x+1}(x^2+nx+1) \leq -a$ 가 되도록 하는 $-a$값은 존재할 수 없다.
따라서

$$e^{x+1}(x^2+nx+1) \geq -a$$

를 만족하는 $-a$의 최댓값을 구해야 한다.

$h(x)$의 최솟값은 $x=-1$일 때, $2-n$이다.
최솟값이 $-a$보다 크거나 같아야 하므로

$2-n \geq -a$

$n-2 \leq a$

$\therefore\ g(n)=n-2$

$1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족하는 n은
$n=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

$\therefore\ 52$

22. 정답 9

양변을 제곱하면

$7x+1=(x-1)^2$

$\Leftrightarrow\ x(x-9)=0$

$\Leftrightarrow\ x=0,\ x=9$

그런데 $x \geq 1$이므로 $x=0$은 무연근이 되어

$\therefore\ 9$

23. 정답 11

수열 a_n의 공차를 d라고 하면 첫째항이 2이므로
$a_7+a_{11}=(2+6d)+(2+10d)=20$
따라서 공차 d는 1이다.

$\therefore\ a_{10}=2+9\times1=11$

24. 정답 10

포물선 $y^2=20x$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x+10$

$\therefore\ 10$

25. 정답 6

$x=t^2+1$ 이므로 $\frac{dx}{dt}=2t$

$y=\frac{2}{3}t^3+10t-1$ 이므로 $\frac{dy}{dt}=2t^2+10$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t^2+10}{2t}$$

$$\therefore\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=6$$

26. 정답 2

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ay\\ 2x-y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1-a\\ -3 & 4a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지므로
$4a+1+3(-1-a)=0$

$\therefore\ a=2$

27. 정답 68

조건 (가)를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는 ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$ 가지 이다.
조건 (나)에서 $x \neq u$인 경우를 직접 세지 않고 $x=u$인 경우를 세서 전체 경우에서 빼주면 된다.

$x=u$이면 $2x+y+z=6$

$x=0$일 때, $y+z=6$ ${}_2H_6=7$

$x=1$일 때, $y+z=4$ ${}_2H_4=5$

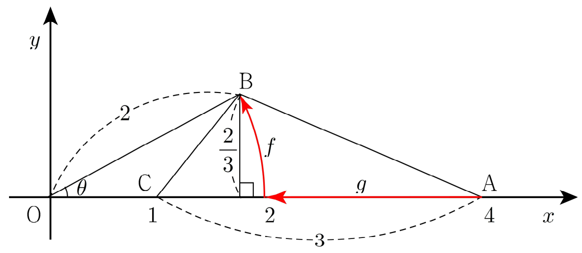
$x=2$일 때, $y+z=2$ ${}_2H_2=3$

$x=3$일 때, $y+z=0$ ${}_2H_0=1$

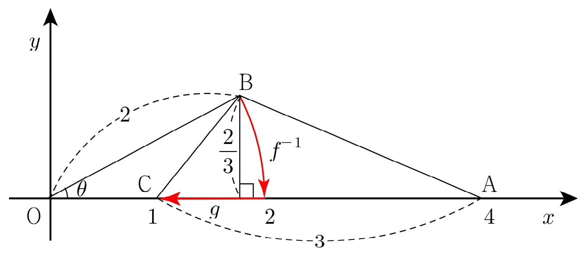
$\therefore\ 84-16=68$

28. 정답 4

일차변환 f는 원점을 중심으로 θ만큼 회전하는 회전변환이고, 일차변환 g는 원점으로부터의 거리를 $\frac{1}{2}$로 축소하는 닮음변환이다. 그러므로 합성변환 $f \circ g$에 의하여 점 A가 옮겨지는 점 B와, 합성변환 $g \circ f^{-1}$에 의하여 점 B가 옮겨지는 점 C의 위치는 다음 그림과 같다.



<그림1>

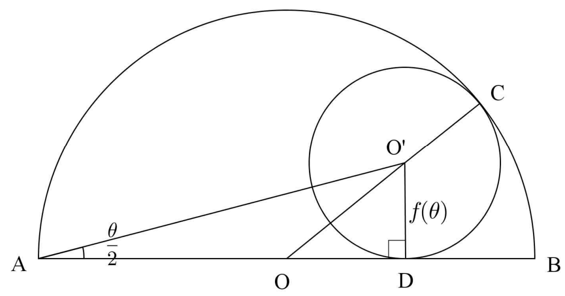


<그림2>

$\overline{AC}=3$ 인 삼각형 ABC 의 넓이가 1이므로, 점 B의 y좌표는 $\frac{2}{3}$이다. 그리고 $\overline{OB}=2$ 이므로

$\sin\theta=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$ 이고, $p=3,\ q=1$ 이므로
$p+q=4$ 이다.

29. 정답 25



선분 AB의 중점을 O, 내접하고 있는 작은 원의 중심을 O′이라 하자. 선분 AD의 길이를 x라고 하면 직각삼각형 ADO′에서 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{f(\theta)}{x}$ 이므로

$$x=\frac{f(\theta)}{\tan\frac{\theta}{2}}=f(\theta)\times\cot\frac{\theta}{2}$$

선분 OD의 길이를 y라고 하면

$$y=x-\frac{1}{2}=f(\theta)\times\cot\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}$$

$\overline{OO'}=\frac{1}{2}-f(\theta)$ 이고 삼각형 ODO′은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의해

$$\{f(\theta)\}^2+\left(f(\theta)\times\cot\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}-f(\theta)\right)^2$$

$$\{f(\theta)\}^2\times\cot^2\frac{\theta}{2}+\left(1-\cot\frac{\theta}{2}\right)f(\theta)=0$$

$$f(\theta)\left(f(\theta)+\tan^2\frac{\theta}{2}-\tan\frac{\theta}{2}\right)=0$$

$$\therefore\ f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}\quad(\because f(\theta)>0)$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100\alpha=25$

30. 정답 128

먼저 (나)조건의 두 식을 해석해보도록 하자.

(나)조건의 $f(k+t)=f(k)\ (0<t\le 1)$ 은 $k\le x\le k+1$ 인 x에 대하여 함숫값이 $f(k)$로 일정하다는 것을 말한다.
($f(k+0)=f(k)$ 이므로 $t=0$일 때에도 성립)
즉, 길이가 1인 구간 $k\le x\le k+1$ 에서 함수 $f(x)$가 다음과 같은 상수함수이다.

$$f(x)=f(k)\ (k\le x\le k+1)$$

한편, (나)조건의 $f(k+t)=2^t\times f(k)\ (0<t\le 1)$ 에서 $k+t=x$로 치환하면

$$f(x)=2^{x-k}\times f(k)\quad (k<x\le k+1)$$

이 되고, $f(k+0)=2^0\times f(k)$ 이므로 $t=0$일 때에도 위 식이 성립하므로, $k\le x\le k+1$ 인 x에 대하여 함숫값이 $f(k)$에서 $2f(k)$로 증가하는 밑이 2인 지수함수의 그래프의 일부분임을 의미한다.
즉, 길이가 1인 구간 $k\le x\le k+1$ 에서 함수 $f(x)$가 다음과 같은 지수함수이다.

$$f(x)=2^{x-k}\times f(k)\quad (k\le x\le k+1)$$

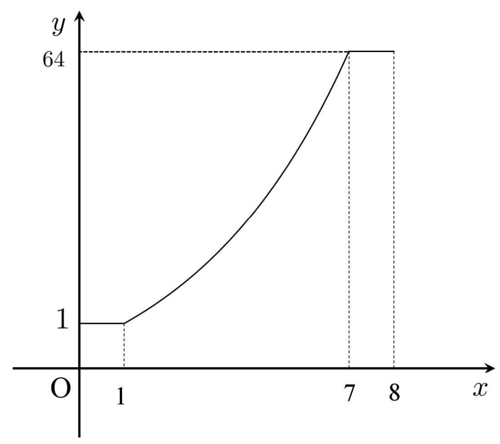
0에서 8까지 구간의 길이가 8이므로 (나)조건의 두 종류의 식이 총 8번 나타날 수 있다. 그런데 $\int_0^8 f(x)dx$가 최댓값을 가지려면 함숫값이 유지되는 상수함수 구간보다 함숫값이 증가하는 지수함수 구간이 나타나는 경우가 최대한 많아야 한다. 그러나 지수함수 구간이 8번 모두 연속해서 나타난다면 $f(8)=2^8f(1)=256>100$ 이 되고, 열린 구간 $(0,8)$의 모든 점에서 미분가능하게 되어 (가)조건과 (다)조건 모두를 만족하지 않는다.

지수함수 구간이 한 번씩 나타날수록 함숫값은 2배씩 증가하므로 (가)조건을 만족하면서 지수함수 구간이 나타날 수 있는 최대 횟수는 다음 조건에 의하여 6번이 된다.

$$2^kf(0)\le 100$$
$$k\le \log_2 100=6.\times\times\times\cdots$$
$$k\le 6$$

또한, 지수함수 구간이 6번 나타나고 상수함수 구간이 2번 나타나면서 미분불가능한 점이 2개 존재하기 위해서는 다음과 같이 크게 두 가지의 경우 중 하나여야 한다.

*case*1) 양 끝의 두 구간 $0\le x\le 1$, $7\le x\le 8$ 에서 상수함수이고, 구간 $1\le x\le 7$ 에서 지수함수여서 $x=1$, $x=7$ 에서 미분불가능한 경우



$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)dx&=\int_0^1 f(0)\,dx+\int_1^7 2^{x-1}dx+\int_7^8 f(7)dx\\&=\int_0^1 1\,dx+\int_1^7 2^{x-1}+\int_7^8 64\,dx\\&=1+\left[\frac{2^{x-1}}{\ln 2}\right]_1^7+64\\&=1+\frac{63}{\ln 2}+64=65+\frac{63}{\ln 2}\end{aligned}$$

*case*2) 구간 $1\le x\le 7$ 의 사이에서 상수함수가 2번 연속 나타나서 상수함수가 시작되는 점과 끝나는 점, 두 점에서 미분불가능한 경우

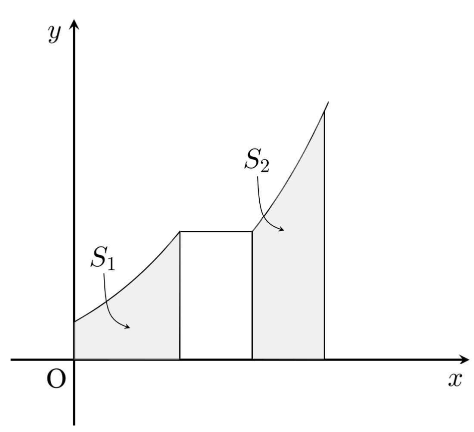
이 경우에는 상수함수가 2번 연속 나타나는 구간이

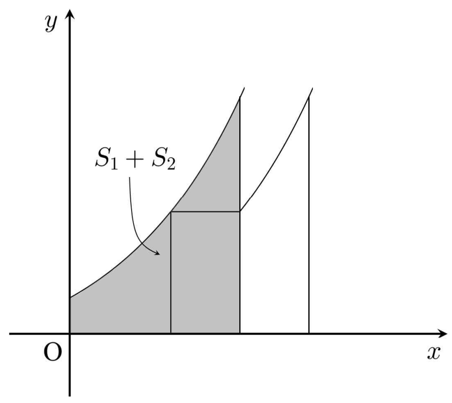
$$\begin{aligned}&f(x)=f(1)=2\quad(1\le x\le 3)\\&f(x)=f(2)=4\quad(2\le x\le 4)\\&f(x)=f(3)=8\quad(3\le x\le 5)\\&f(x)=f(4)=16\quad(4\le x\le 6)\\&f(x)=f(5)=32\quad(5\le x\le 7)\end{aligned}$$

이렇게 세부적으로 5가지의 경우가 있는데, 아래 그림과 같이 상수함수 구간의 오른쪽 지수함수 구간의 그래프를 평행이동하여 왼쪽의 지수함수 그래프와 연결하면 연속이고 미분가능한 하나의 지수함수 그래프가 되고, 이때, 지수함수 구간에서의 적분값은 5가지 경우 중 어떠한 경우에도

$$\int_0^6 2^x dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^6=\frac{63}{\ln 2}$$

로 일정하며, 상수함수 구간에서의 적분값이 경우에 따라 달라진다.

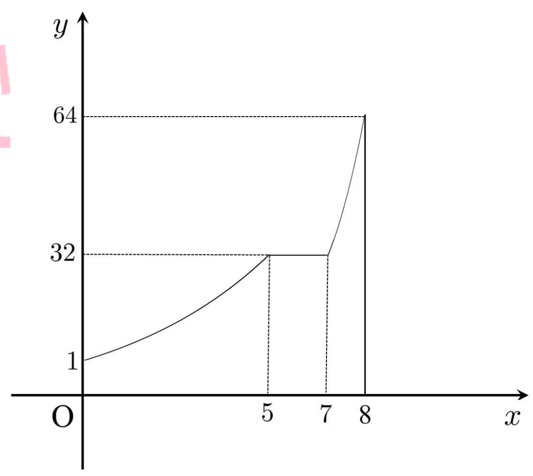




각각의 경우에 상수함수의 적분값은

$$\int_1^3 2dx=4$$
$$\int_2^4 4dx=8$$
$$\int_3^5 8dx=16$$
$$\int_4^6 16dx=32$$
$$\int_5^7 32dx=64$$

이고



위 그림과 같이 구간 $5\le x\le 7$ 에서 함수 $f(x)=32$일 때, 상수함수의 적분값이 64로 최대가 되고, 이 때,

$$\int_0^8 f(x)dx=64+\frac{63}{\ln 2}$$

이다.

*case*1)의 최댓값과 *case*2)의 최댓값을 비교해보면 *case*1)의 최댓값이 더 크기 때문에 $\int_0^8 f(x)dx$의 최댓값은

$$\int_0^8 f(x)dx=65+\frac{63}{\ln 2}$$

가 되고, 이때 $p=65$, $q=63$ 이므로

$$p+q=128$$

이다.