수1킬러 29제

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고3 03월 18

1. 1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S라 하자. 이러한 S의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$이라 할 때, a_{100}의 값은?

① 268 ② 278 ③ 288
④ 298 ⑤ 308

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 30

2. 좌표평면에서 $a>1$인 자연수 a에 대하여 두 곡선 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$과 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 20 이상 40 이하가 되도록 하는 a의 개수를 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

3. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

> (가) $1 \le a \le 10,\ 1 \le b \le 100$
>
> (나) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$과 만나지 않는다.
>
> (다) 곡선 $y=2^x$이 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$와 적어도 한 점에서 만난다.

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

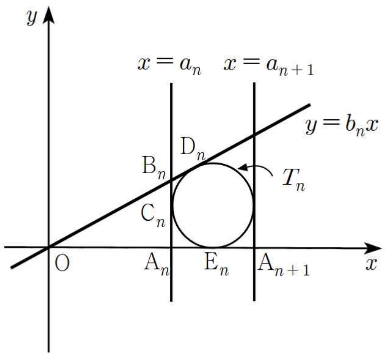
[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

4. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(Ⅰ) $a_1=2$이고 $a_n<a_{n+1}(n\geq 1)$이다.
(Ⅱ) $b_n=\frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1}{n+1}\right)$ $(n\geq 1)$이라 할 때,
좌표평면에서 네 직선 $x=a_n$, $x=a_{n+1}$, $y=0$, $y=b_nx$에 동시에 접하는 원 T_n이 존재한다.

다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

원점을 O라 하고, 원 T_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. 직선 $x=a_n$과 두 직선 $y=0$, $y=b_nx$의 교점을 각각 A_n, B_n이라 하고, 원 T_n과 세 직선 $x=a_n$, $y=b_nx$, $y=0$의 접점을 각각 C_n, D_n, E_n이라 하면 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_nb_n$이고



$\overline{\mathrm{OB}_n}=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^{\ 2}}$이다.

$$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}$$
$$=a_n\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^{\ 2}}+a_nb_n-r_n$$
$$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$$

$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로

$$r_n=\frac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{\boxed{(가)}+b_n^{\ 2}}\right)}{2}$$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+2r_n=(\boxed{(나)})\times a_n\ (n\geq 1)$

이때 $a_1=2$이고

$$a_n=\boxed{}\times a_{n-1}=\boxed{}\times a_{n-2}=\cdots=\boxed{}\times a_1$$

이므로

$$a_n=\boxed{(다)}$$

위의 과정에서 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(4)$의 값은?

① 54 ② 55 ③ 56
④ 57 ⑤ 58

[출처] 2015 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

5. $\triangle$ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=x$, $\overline{\mathrm{BC}}=x+1$, $\overline{\mathrm{AC}}=x+2$이고 $\angle\mathrm{B}=2\theta$, $\angle\mathrm{C}=\theta$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 06월 30

6. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수가 300 이상이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(2)\times f(3)\times f(4)$의 값을 구하시오.

(가) $a<n^k$이면 $b\leq\log_n a$이다.
(나) $a\geq n^k$이면 $b\leq-(a-n^k)^2+k^2$이다.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 03월 30

7. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 실수 전체의 집합의 두 부분집합 $A=\{a_k | 1 \le a_k \le 60,\ a_k$는 수열 $\{a_n\}$의 항 $\}$
$B=\{b_k | 1 \le b_k \le 60,\ b_k$는 수열 $\{b_n\}$의 항 $\}$
이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=1,\ a_{10}=55$
(나) $n(A\cap B)=n(A\cap B^C)=\frac{1}{2}\times n(A^C\cap B)$
(다) 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 125이다.

집합 B의 모든 원소의 합을 구하시오.
(단, 수열 $\{b_n\}$의 항은 유한개가 아니다.)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 29

8. 일반항이 $a_n=2n+1$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 집합 $A_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$는 $A_1=\{3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 A_k는 수열 $\{a_n\}$의 항들 중 $(2k+3)$개의 연속한 항들을 원소로 하는 집합이다.
(나) 집합 A_{k+1}의 가장 작은 원소는 집합 A_k의 가장 작은 원소보다 크다.
(다) $n(A_k-A_{k+1})=3$

예를 들어 $A_2=\{9,\ 11,\ 13,\ \cdots,\ 21\}$이다. $A_{15}\cap A_p=\varnothing$을 만족하는 15보다 큰 자연수 p의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 30

9. n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-p}$이

$$f(1)<f(5)<f(3)$$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자. 자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\dfrac{2x+n}{x+q}$이

$$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 21

10. 구간 $(0, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\frac{(k+1)x+3k+6}{3(x+1)}$$

이라 할 때, 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 a_n이라 하자.

함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는 $4n$이다.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은?

① 600 ② 610 ③ 620

④ 630 ⑤ 640

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 29

11. 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오.

> (가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$
>
> (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 30

12. $2 \le k < 500$인 자연수 k에 대하여 네 자연수 a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a, b, c, d는 2이상 k이하이다.
>
> (나) $a^{\frac{1}{b}} \times c^{\frac{1}{d}} = 24^{\frac{1}{5}}$

모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수가 59가 되도록 하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 30

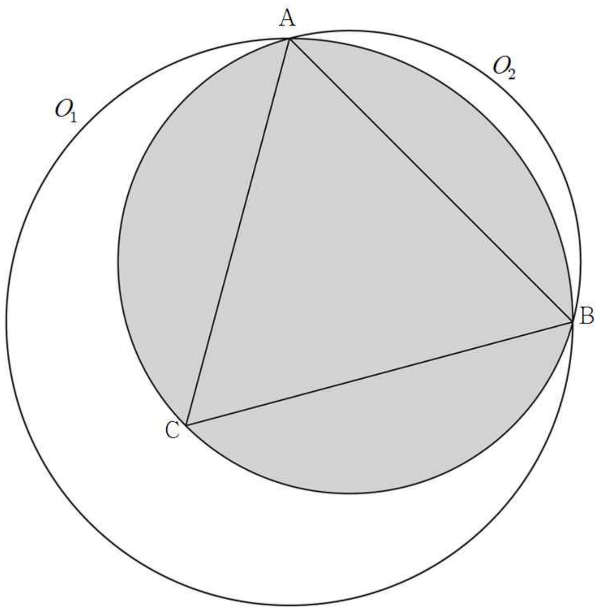
13. 두 양수 a, k $(k \ne 1)$에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\log_k(x-k+1)+2^{-a} & (x \ge k) \\ 2\log_{\frac{1}{k}}(-x+k+1)+2^{-a} & (x < k) \end{cases}$$

가 있다. $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $-\frac{3}{4}$, t, $\frac{5}{4}$이다. $30(a+k+t)$의 값을 구하시오. (단, $0 < t < 1$)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 29

14. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원 O_1이 있다. 원 O_1 위에 서로 다른 두 점 A, B를 $\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$가 되도록 잡고, 원 O_1의 내부에 점 C를 삼각형 ACB가 정삼각형이 되도록 잡는다. 정삼각형 ACB의 외접원을 O_2라 할 때, 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는 $p+q\sqrt{3}+r\pi$이다. $p+q+r$의 값을 구하시오. (단, p, q, r는 유리수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 29

15. 자연수 m에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합을 $A(m)$이라 하자.

> 3×2^m은 첫째항이 3이고 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이다.

예를 들어, 3×2^2은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열의 제 3항, 첫째항이 3이고 공비가 4인 등비수열의 제 2항이 되므로 $A(2)=3+2=5$이다. $A(200)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 30

16. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=x^2+n$$

이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나도록 하는 자연수 m의 최솟값을 a_n이라 하자. $a_n<a_{n+1}$을 만족시키는 33 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 30

17. 두 정수 l, m에 대하여 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n = 12+(n-1)l,\ b_n = -10+(n-1)m$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k| = \sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)=31$을 만족시키는 모든 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 30

18. 두 실수 $a(a \neq 0)$, b에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=a\sin\frac{\pi}{6}(x-1)+b$$

라 하고, 양수 t에 대하여 $0<x<t$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$f(0)=8$, $g(18)=5$일 때, $g(\alpha)=|a-b|$를 만족시키는 양수 α의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 30

19. 두 실수 $a(0<a<2\pi)$와 k에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-\frac{1}{2} & (0 \le x < a) \\ k\sin x-\frac{1}{2} & (a \le x \le 2\pi) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.
(나) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 3이다.

방정식 $|f(x)|=\frac{1}{4}$의 모든 실근의 합을 S라 할 때, $20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 30

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=b_n+2$

(나) $a_{2n+1}=b_n-1$

(다) $b_{2n}=3a_n-2$

(라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n=155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 21

21. 상수 k에 대하여 정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x-2} & (x<k) \\ -\log_2(x+2)-2 & (x\geq k) \end{cases}$$

가 일대일대응이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \log_2(2-x)+2 & (x<-k) \\ -2^{x-2}+2 & (x\geq -k) \end{cases}$$

라 할 때, $f(a)\leq b\leq g(a)$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? (단, $-2\leq a\leq 2$)

① 31 ② 33 ③ 35

④ 37 ⑤ 39

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 30

22. 두 자연수 a, b에 대하여 세 함수

$$f(x)=\cos\pi x,\ g(x)=\sin\pi x,\ h(x)=ax+b$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)\left(\dfrac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수는 홀수이다.
>
> (나) $0 \le x \le 4$일 때, 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

$\dfrac{a\times b}{\cos^2\pi t}$의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

23. 두 집합 X, Y를

$$X=\{\{a_n\}\mid\{a_n\}\text{은 모든 항이 자연수인 수열이고, } \log a_n+\log a_{n+1}=2n\},$$

$$Y=\{a_4 \mid \{a_n\}\in X\}$$

라 하자. 집합 Y의 모든 원소의 합이 $p\times 100$일 때, p의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 21

24. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a_1은 1이 아닌 양수이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_{2n-1}+a_{2n}=1$이고 $a_{2n}\times a_{2n+1}=1$이다.

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\dfrac{10}{3}$ ② 4 ③ $\dfrac{14}{3}$

④ $\dfrac{16}{3}$ ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

25. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$

④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 15

26. 함수

$$f(x) = \left| 2a\cos\frac{b}{2}x - (a-2)(b-2) \right|$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 10 이하의 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

(가) 함수 $f(x)$는 주기가 π인 주기함수이다.
(나) $0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 2a - 1$의 교점의 개수는 4이다.

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 30

27. 두 실수 a, b와 두 함수

$$f(x)=\sin x,\ g(x)=a\cos x+b$$

에 대하여 $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수

$$h(x)=\frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(나) $0<c<\frac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여

$h(c)=h(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다.

상수 $k\left(k>\frac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식 $h(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, $a+20\left(\frac{k}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 30

28. $\frac{12}{5}<k\le 4$인 상수 k와 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) n이 짝수이면

a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=-\frac{k}{2n}$와

곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이

만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

(나) n이 홀수이면

a_n은 $0 \le x \le 2$에서 직선 $y=\frac{k+1}{n}$과

곡선 $y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$이

만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$0<a_2<6$일 때, $\sum_{n=1}^{5}a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 21

29. 양수 a와 0이 아닌 실수 d에 대하여 첫째항이 모두 a이고, 공차가 각각 d, $-2d$인 두 등차수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1| = |b_7|$
>
> (나) $S_n = \sum_{k=1}^{n}(|a_k| - |b_k|)$라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n \leq 108$이고, $S_p = 108$인 자연수 p가 존재한다.

$S_n \geq 0$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 m이라 할 때, a_m의 값은?

① 46　　② 50　　③ 54
④ 58　　⑤ 62

수1킬러 29제(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.03

1. [정답] ④
2. [정답] 15
3. [정답] 196
4. [정답] ①
5. [정답] ③

6. [정답] 120
7. [정답] 435
8. [정답] 26
9. [정답] 320
10. [정답] ④

11. [정답] 117
12. [정답] **359**
13. [정답] **75**
14. [정답] **13**
15. [정답] **477**

16. [정답] **125**
17. [정답] **7**
18. [정답] **49**
19. [정답] 110
20. [정답] **79**

21. [정답] ①
22. [정답] **686**
23. [정답] **217**
24. [정답] ③
25. [정답] ①

26. [정답] ⑤
27. [정답] 59
28. [정답] 53
29. [정답] ③

수1킬러 29제(해설)

프로젝트 2023.01.03

1) [정답] ④

[해설]
S 중 가장 작은 수는 $1+3+\cdots+19=100$
S 중 가장 큰 수는 $81+83+\cdots+99=900$
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 100, 마지막항이 900이고, 공차가 2인 등차수열을 이룬다.
따라서 구하는 값은
$a_{100}=100+99\times2=298$

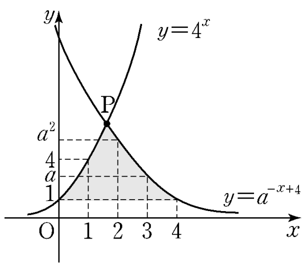
2) [정답] 15

[해설]
두 지수함수 $y=4^x$, $y=a^{-x+4}$의 교점을 $\mathrm{P}(\alpha,\ 4^\alpha)$이라 하면

$4^\alpha=a^{-\alpha+4}$, $\alpha=\dfrac{4\log a}{\log 4a}$ 교점의 위치에 따라 다음과 같은 경우로 나누어 생각하면

ⅰ) $1\le\alpha<2$일 때

$1\le\dfrac{4\log a}{\log 4a}<2$를 풀면 $\sqrt[3]{4}\le a<4$ …… ㉠



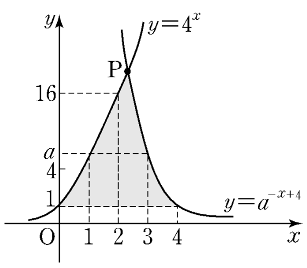
영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

$1+4+a^2+a+1$이므로 $20\le a^2+a+6\le40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족하는 자연수 a는 없다.

ⅱ) $2\le\alpha<3$일 때

$2\le\dfrac{4\log a}{\log 4a}<3$을 풀면 $4\le a<64$ …… ㉢

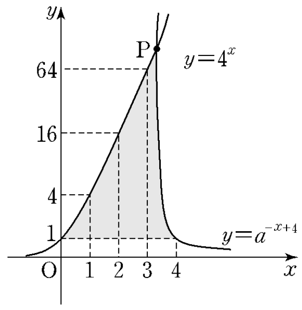


영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3, 4인 점의 개수의 합은

$1+4+16+a+1$이므로 $20\le a+22\le40$ …… ㉣

㉢, ㉣을 모두 만족하는 a의 범위는 $4\le a\le18$이므로 자연수 a의 개수는 15개이다.

ⅲ) $3\le\alpha<4$일 때



영역내 x좌표가 0, 1, 2, 3인 점의 개수의 합이

$1+4+16+64$이므로 조건을 만족하지 않는다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)으로부터 a의 개수는 15개이다.

3) [정답] 196

[해설]
$(x-a)^2+(y-b)^2=1=2^0$ …… ㉠

$(x-a)^2+(y-b)^2=4=2^2$ …… ㉡

곡선 $y=2^x$이 원 과 만나지 않는다. (다) 곡선 $y=2^x$이 원 ㉠과는 만나지 않고 원 ㉡과 적어도 한 점에서 만나므로

$a=1$일 때, $2^2<b\le2^3$

$a=2$일 때, $2^0<b\le2^1$ 또는 $2^3<b\le2^4$

$a=3$일 때, $2^1<b\le2^2$ 또는 $2^4<b\le2^5$

$a=4$일 때, $2^2<b\le2^3$ 또는 $2^5<b\le2^6$

$a=5$일 때, $2^3<b\le2^4$ 또는 $2^6<b\le100$

$a=6$일 때, $2^4\le b<2^5$

$a=2$일 때, $2^5\le b<2^6$

$a=2$일 때, $2^6\le b<100$

이어야 한다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$2^2+(2^0+2^3)+(2^1+2^4)+(2^2+2^5)+(2^3+36)+2^4+2^5+37$

$=(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^5)+37+(2^2+2^3+2^4+2^5)+36$

$=\dfrac{1(2^6-1)}{2-1}+\dfrac{2^2(2^4-1)}{2-1}+73=63+60+73=196$

4) [정답] ①

[해설]

점 B_n이 직선 $x=a_n$과 $y=b_nx$의 교점이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_nb_n$이고

$\overline{\mathrm{OB}_n}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}_n}^2+\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}^2}=\sqrt{(a_n)^2+(a_nb_n)^2}=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}$

$\therefore$ (가) $=p=1$

원 T_n이 x축에 접하므로 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}=r_n$이다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OD}_n}&=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n}\\&=\overline{\mathrm{OB}_n}+\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}\\&=\overline{\mathrm{OB}_n}+\left(\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}-\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}\right)\\&=a_n\sqrt{\boxed{1}+b_n^2}+a_nb_n-r_n\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{OE}_n}=a_n+r_n$

$\overline{\mathrm{OD}_n}=\overline{\mathrm{OE}_n}$이므로

$a_n\sqrt{1+b_n^2}+a_nb_n-r_n=a_n+r_n$

$\therefore\ r_n=\dfrac{a_n\left(b_n-1+\sqrt{1+b_n^2}\right)}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_{n+1}&=a_n+2r_n\\&=\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)\times a_n\end{aligned}$$

그런데 $b_n=\dfrac{1}{2}\left(n+1-\dfrac{1}{n+1}\right)$이므로

$\sqrt{1+b_n^2}=\dfrac{1}{2}\left(n+1+\dfrac{1}{n+1}\right)$

$\therefore\ b_n+\sqrt{1+b_n^2}=n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=\left(b_n+\sqrt{1+b_n^2}\right)\times a_n$

$=(\boxed{n+1}\times a_n\ (n\geq 1)$

$\therefore$ (나) $=f(n)=n$

이때 $a_1=2$이고

$a_n=\boxed{n}\times a_{n-1}$

$=\boxed{n(n-1)}\times a_{n-2}$

$\vdots$

$=\boxed{n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2}\times a_1$

이므로

$a_n=\boxed{2n!}$

$\therefore$ (다) $=g(n)=2n!$

$\therefore\ p+f(4)+g(4)=1+5+48=54$

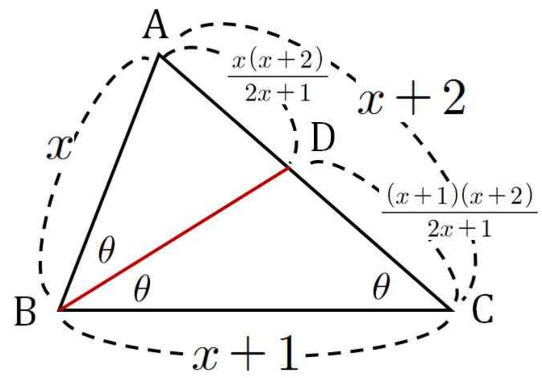
5) [정답] ③

[해설]

각 B를 이등분하는 선을 그어 선분AC와 만나는 점을 D라 하면, 삼각형의 각의 이등분선의 성질에 의하여

선분 $AD=\dfrac{x(x+2)}{2x+1}$ 선분 $CD=\dfrac{(x+1)(x+2)}{2x+1}$이다.

이 때 삼각형 ABD와 삼각형 ACB가 AA닮음 이므로



$x+2:x=2x+1:x+2$이 성립하며

이를 풀면 $x=4$이다.

그러므로 삼각형 ABC에 대하여 코사인 제이법칙을

사용하면, $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$이다.

[다른 풀이]

사인법칙과 삼각함수의 덧셈정리를 사용하여 푸는것도 가능하다.

사인법칙에 의하여 $\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+2}{\sin 2\theta}=\dfrac{x+1}{\sin 3\theta}$이며,

$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+2}{\sin 2\theta}$을 정리하면 $\cos\theta=\dfrac{x+2}{2x}$인 것을 알 수 있고,

$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{x+1}{\sin 3\theta}$을 정리하면 $4\cos^2\theta=\dfrac{2x+1}{x}$인 것을 알 수 있다.

이 때 두식을 연립하면 $x=4$이고 따라서 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$이다.

6) [정답] 120

[해설]

자연수 n에 대하여

$g_n(x)=\log_n x$,

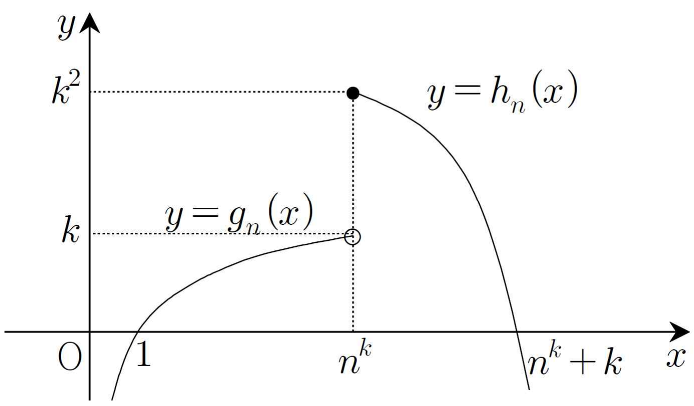
$h_n(x)=-(x-n^k)^2+k^2$ (k는 상수)

이라 하자.

$g_n(n^k)=\log_n n^k=k, h_n(n^k)=k^2$이므로

$x<n^k$에서 $y=g_n(x)$의 그래프와

$x\ge n^k$에서 $y=h_n(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) 조건 (가)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 부등식

$1\le x<n^k$, $y\le g_n(x)$

를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$1\le x<n$일 때, 0(개)

$n\le x<n^2$일 때,

$1\times(n^2-n)=n^2-n$(개)

$n^2\le x<n^3$일 때,

$2\times(n^3-n^2)=2n^3-2n^2$(개)

$n^3\le x<n^4$일 때,

$3\times(n^4-n^3)=3n^4-3n^3$(개)

……

$n^{k-1}\le x<n^k$일 때,

$(k-1)(n^k-n^{k-1})=(k-1)n^k-(k-1)n^{k-1}$(개)

이므로 개수의 총합은

$(k-1)n^k-(n+n^2+n^3+\cdots+n^{k-1})$

$=(k-1)n^k-\dfrac{n(n^{k-1}-1)}{n-1}$

$=(k-1)n^k-\dfrac{n^k-n}{n-1}$(개)

(ⅱ) 조건 (나)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 부등식

$n^k\le x<n^k+k$, $y\le h_n(x)$

를 만족시키는 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수와 같다.

$x=n^k$일 때, k^2(개)

$x=n^k+1$일 때, k^2-1^2(개)

$x=n^k+2$일 때, k^2-2^2(개)

……

$x=n^k+k-1$일 때, $k^2-(k-1)^2$(개)

이므로 개수의 총합은

$k\times k^2-\{1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2\}$

$=k^3-\dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6}$

$=\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$(개)

두 조건 (가), (나)를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수를 $A(n)$이라 하면 (ⅰ), (ⅱ)에 의해

$A(n)=(k-1)n^k-\dfrac{n^k-n}{n-1}+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 다음과 같다.

① $n=2$일 때,

$A(2)=(k-1)2^k-(2^k-2)+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

$=(k-2)2^k+2+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

$k=5$이면

$A(2)=96+2+95=193<300$

$k=6$이면

$A(2)=256+2+161=419>300$

이므로 $A(2)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

$\therefore f(2)=6$

② $n=3$일 때,

$A(3)=(k-1)3^k-\dfrac{3^k-3}{2}+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

$k=4$이면

$A(3)=243-39+50=254<300$

$k=5$이면

$A(3)=972-120+95=947>300$

이므로 $A(3)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

$\therefore f(3)=5$

③ $n=4$일 때,

$A(4)=(k-1)4^k-\dfrac{4^k-4}{3}+\dfrac{k(k+1)(4k-1)}{6}$

$k=3$이면

$A(4)=128-20+22=130<300$

$k=4$이면

$A(4)=768-84+50=734>300$

이므로 $A(4)>300$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 4이다.

$\therefore f(4)=4$

$\therefore f(2)\times f(3)\times f(4)=6\times5\times4=120$

7) [정답] 435

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하자.
$a_{10}=a_1+9d_1$이므로 조건 (가)에서
$55=1+9d_1$
$d_1=6$
따라서
$a_n=1+(n-1)6$
$=6n-5$
$A=\{1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55\}$이므로
$n(A)=10$
조건 (나)에서
$n(A\cap B)=n(A\cap B^C)$이고,
$n(A)=n(A\cap B)+n(A\cap B^C)$
이므로
$n(A\cap B)=5$
만약 집합 A의 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열했을 때, 인접한 두 수가 $A\cap B$의 원소이면 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이므로 집합 A의 모든 원소는 집합 B의 원소가 된다.
따라서 $n(A\cap B)=10$이므로 $n(A\cap B)=5$에 모순이다.
인접하지 않은 항으로 5개의 원소를 선택하는 경우는 다음 두 가지 경우이다.
(i) $A\cap B=\{7, 19, 31, 43, 55\}$인 경우 모든 원소의 합은
$\dfrac{5(7+55)}{2}=155$이므로 조건 (다)에 모순이다.
(ii) $A\cap B=\{1, 13, 25, 37, 49\}$인 경우 모든 원소의 합은
$\dfrac{5(1+49)}{2}=125$이므로 조건 (다)를 만족시킨다.
따라서 $A\cap B=\{1, 13, 25, 37, 49\}$이다.
한편, $n(A\cap B)=\dfrac{1}{2}\times n(A^C\cap B)=5$이므로 $n(A^C\cap B)=10$
따라서
$n(B)=n(A\cap B)+n(A^C\cap B)$
$=5+10$
$=15$
공차가 6인 등차수열의 항을 원소로 갖는 집합 A의 원소의 개수가 10이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차가 6이상이면 집합 B의 원소의 개수는 10 이하이다.
따라서 수열 $\{b_n\}$의 공차는 6보다 작다.
이때 $n(A\cap B)=5$, $n(A^C\cap B)=10$이고,
수열 $\{b_n\}$은 등차수열이므로 집합 B의 원소를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을
$1, c_1, c_2, 13, c_3, c_4, 25, c_5, c_6, 37, c_7, c_8, 49, c_9, c_{10}$
이라 할 수 있다.
등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d_2라 하면
$13-1=12$
$=3d_2$이므로
$d_2=4$
$B=\{1, 5, 9, 13, \cdots, 53, 57\}$
따라서 집합 B의 모든 원소의 합은 첫째항이 1이고 공차가 4인 등차수열의 제 1항부터 제 15항까지의 합과 같으므로
$\dfrac{15(1+57)}{2}=435$

8) [정답] 26

[해설]
주어진 조건을 만족하는 집합 A_k를 구하여 차례대로 나열해보면
$A_1=\{3, 5, 7, 9, 11\}$
$A_2=\{9, 11, 13, \cdots, 21\}$
$A_3=\{15, 17, 19, \cdots, 31\}$
$A_4=\{21, 23, 25, \cdots, 41\}$
$\vdots$
$A_k=\{6k-3, 6k-1, 6k+1, \cdots, 10k+1\}$ 이다.
따라서 $A_{15}=\{87, 89, 91, \cdots, 151\}$이다.
$p>15$에서 $A_{15}\cap A_p=\varnothing$을 만족하려면 집합 A_p의 가장 작은 원소 $(6p-3)$이 집합 A_{15}의 가장 큰 원소 보다 커야 하므로 $6p-3>151$이어야 한다.
$p>\dfrac{154}{6}=25.6\cdots$이므로 자연수 p의 최솟값은 26이다.

9) [정답] 320

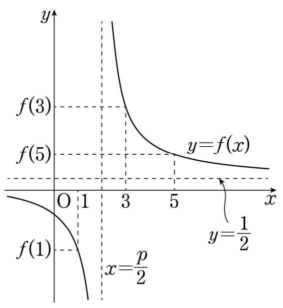
[해설]

$$f(x)=\frac{x+2n}{2x-p}=\frac{\frac{1}{2}(2x-p)+\frac{p}{2}+2n}{2x-p}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{p}{2}+2n}{2x-p}$$

이고 $\frac{p}{2}+2n>0$ 이므로

$f(1)<f(5)<f(3)$ …… ㉠

이 성립하려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\frac{p}{2}<3$ 이어야 하므로 $2<p<6$ 에서

자연수 p 의 최솟값 m 은 3

함수 $g(x)=\frac{2x+n}{x+q}=\frac{2(x+q)+n-2q}{x+q}=2+\frac{n-2q}{x+q}$

이므로 곡선 $y=g(x)$ 의 두 점근선의 방정식은

$x=-q,\ y=2$

$p=3$ 일 때 $f(x)=\frac{x+2n}{2x-3}$ 에 대하여

$x_1=f(1)=-2n-1$

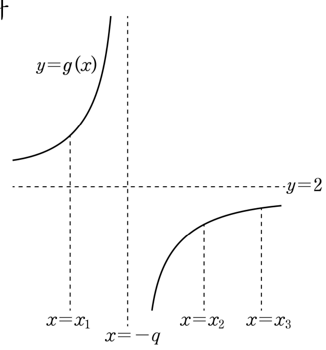
$x_2=f(5)=\frac{2n+5}{7}$

$x_3=f(3)=\frac{2n+3}{3}$

이라 하면 ㉠으로부터 $x_1<x_2<x_3$

이때 문제의 조건에서
$g(x_2)<g(x_3)<g(x_1)$ 이 성립해야 하므로

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같아야 한다.



그러므로 $x_1<-q<x_2$ 이고

$n-2q<0$ 이어야 한다.

즉 $-2n-1<-q<\frac{2n+5}{7}$ 이고

$q>\frac{n}{2}$ 이어야 하므로

$\frac{n}{2}<q<2n+1$

(i) $n=2l-1$ (l 은 자연수)일 때

$\frac{2l-1}{2}<q<2(2l-1)+1$ 에서

$l-\frac{1}{2}<q<4l-1$ 이므로 $q=l,\ l+1,\ \cdots,\ 4l-2$

그러므로 정수 q 의 개수는 $3l-1$

(ii) $n=2l$ (l 은 자연수)일 때

$\frac{2l}{2}<q<2\times2l+1$ 에서

$l<q<4l+1$ 이므로

$q=l+1,\ l+2,\ \cdots,\ 4l$

그러므로 정수 q 의 개수는 $3l$

(i), (ii)에 의하여 $a_{2l-1}=3l-1,\ a_{2l}=3l$

따라서

$\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{l=1}^{10}(a_{2l-1}+a_{2l})$

$=\sum_{l=1}^{10}(3l-1+3l)$

$=\sum_{l=1}^{10}(6l-1)$

$=6\sum_{l=1}^{10}l-\sum_{l=1}^{10}1$

$=6\times\frac{10\times11}{2}-10$

$=330-10=320$

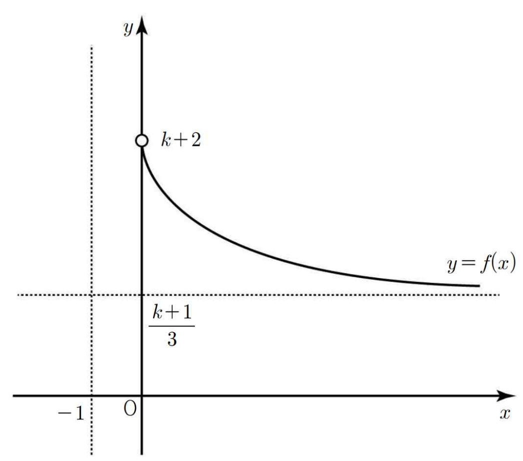
10) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\frac{(k+1)x+3k+6}{3(x+1)}=\frac{(k+1)(x+1)+2k+5}{3(x+1)}$

$=\frac{2k+5}{3(x+1)}+\frac{k+1}{3}$ 이므로

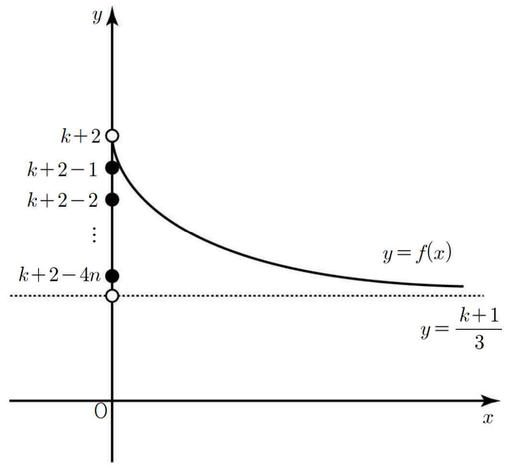
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$ 의 치역은

$$\left\{y \,\middle|\, \frac{k+1}{3} < y < k+2\right\}$$

이다. 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는 $4n$이므로 $\frac{k+1}{3}$보다 크고 $k+2$보다 작은 정수의 개수가 $4n$이면 된다.



위의 그림에서

$$(k+2-4n)-1 \le \frac{k+1}{3} < k+2-4n$$

이므로

$$6n-\frac{5}{2} < k \le 6n-1$$

이고, 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록

하는 자연수 k는 $6n-1$, $6n-2$이다.

그러므로 모든 자연수 k의 값의 합은 $(6n-1)+(6n-2)=12n-3$이므로 $a_n=12n-3$이다.

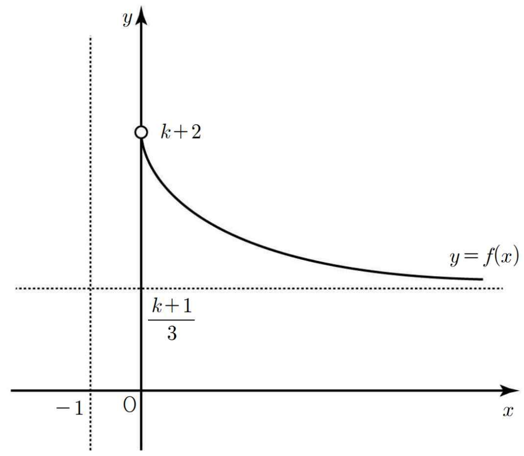
따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(12n-3)=630$이다.

[다른 풀이]

$$f(x)=\frac{(k+1)x+3k+6}{3(x+1)}=\frac{(k+1)(x+1)+2k+5}{3(x+1)}$$

$=\frac{2k+5}{3(x+1)}+\frac{k+1}{3}$ 이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$의 치역은

$$\left\{y \,\middle|\, \frac{k+1}{3} < y < k+2\right\}$$

이다. 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는 $4n$이므로 $\frac{k+1}{3}$

보다 크고 $k+2$보다 작은 정수의 개수가 $4n$이면 된다.

(ⅰ) $k=3m-1$(m은 자연수)

$\frac{k+1}{3}$ 보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+1=\frac{k+4}{3}$ 이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는

$$k+2-\left(\frac{k+4}{3}\right)=4n$$

이다. $\frac{3k+6-k-4}{3}=4n$에서 $\frac{2k+2}{3}=4n$이므로 $k=6n-1$이다.

그러므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 $6n-1$이다.

(ⅱ) $k=3m-2$(m은 자연수)

$\frac{k+1}{3}$ 보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{k+2}{3}$ 이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는

$$k+2-\left(\frac{k+2}{3}\right)=4n$$

이다. $\frac{3k+6-k-2}{3}=4n$에서 $\frac{2k+4}{3}=4n$이므로 $k=6n-2$이다.

그러므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 $6n-2$이다.

(ⅲ) $k=3m$(m은 자연수)

$\frac{k+1}{3}$ 보다 큰 가장 작은 정수는 $\frac{k+1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{k+3}{3}$ 이므로 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수는

$$k+2-\left(\frac{k+3}{3}\right)=4n$$

이다. $\dfrac{3k+6-k-3}{3}=4n$에서 $\dfrac{2k+3}{3}=4n$이므로

$k=\dfrac{12n-3}{2}=6n-\dfrac{3}{2}$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 함수 $f(x)$의 치역의 원소 중 정수의 개수가 $4n$이 되도록 하는 자연수 k의 값의 합은 $12n-3$이므로 $a_n=12n-3$이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(12n-3)=630$이다.

11) [정답] 117

[해설]

조건 (가)와 조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$이므로

$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$ …… ㉠

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r (r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0,\ b_2<0,\ b_3>0,\ b_4<0,\ b_5>0$이므로 ㉠에서

$-2(b_2+b_4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20$ …… ㉡

$b_1r(1+r^2)=-20$

이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 한다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$

이다. ㉡에서

$r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\dfrac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10,\ r=-1$ 또는 $b_1=2,\ r=-2$

(ⅰ) $b_1=10,\ r=-1$일 때,

$\sum_{n=1}^{5} b_n=10$이므로

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$ 이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_n+\sum_{n=1}^{5} b_n=27$

$\sum_{n=1}^{5} a_n+10=27$

$\sum_{n=1}^{5} a_n=17$

이때, $\sum_{n=1}^{5} a_n=5a_3=17$에서

$a_3=\dfrac{17}{5}$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 정수이다.

따라서 $b_1=10,\ r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $b_1=2,\ r=-2$일 때

$\sum_{n=1}^{5} b_n=\dfrac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$

조건(가)에서

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

이므로

$\sum_{n=1}^{5} a_n+22=27$

$\sum_{n=1}^{5} a_n=5$

이때, $\sum_{n=1}^{5} a_n=5a_3=5$에서

$a_3=1$

또, $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=\dfrac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|}=62$

조건 (다)에서 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

이므로

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+\sum_{n=1}^{5}|b_n|=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|+62=81$

$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19$ …… ㉢

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$a_3=1$

이므로 $a_1>a_2>a_3>0\ge a_4>a_5$

이다. 이때,

$a_1=1-2d$

$a_2=1-d$

$a_4=1+d$

$a_5=1+2d$

이므로 ㉢에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=19$

$d=-3$

따라서 $a_1=1-2\times(-3)=7$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1=7,\ d=-3,\ b_1=2,\ r=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항a_n

$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$b_n=2\times(-2)^{n-1}$

따라서

$a_7+b_7=-11+128=117$

12) [정답] **359**

[해설]

(ⅰ) $a=c$일 때,

① $k<24$일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍은 존재하지 않는다.

② $24\le k<500$일 때,

$$a^{\frac{1}{b}}\times c^{\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{b}}\times 24^{\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{5}}$$

따라서 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{b+d}{bd}=\dfrac{1}{5}$이므로 $bd=5(b+d)$이고

$bd-5b-5d=0$이 되어 $(b-5)(d-5)=25$이다.

$b-5$	1	5	25
$d-5$	25	5	1

$(b,\ d)=(6,\ 30),\ (10,\ 10),\ (30,\ 6)$이다.

$24\le k<30$이면 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는 $(24,\ 10,\ 24,\ 10)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 1이다.

$30\le k<500$이면 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는 $(24,\ 6,\ 24,\ 30)$, $(24,\ 10,\ 24,\ 10)$, $(24,\ 30,\ 24,\ 6)$이므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 3이다.

(ⅱ) $a\ne c$일 때,

$$24^{\frac{1}{5}}=(2\times12)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\times12^{\frac{1}{5}}$$
$$=(2^p)^{\frac{1}{5p}}\times(12^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$24^{\frac{1}{5}}=(3\times8)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\times8^{\frac{1}{5}}$$
$$=(3^p)^{\frac{1}{5p}}\times(8^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$$24^{\frac{1}{5}}=(4\times6)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\times6^{\frac{1}{5}}$$
$$=(4^p)^{\frac{1}{5p}}\times(6^q)^{\frac{1}{5q}} \quad \cdots\cdots ㉢$$

의 세 가지 경우가 있다.

한편, 두 자연수 p, q의 값이 커지면 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수도 증가한다.

2^p, 3^p, 4^p, 6^q, 8^q, 12^q의 값은 각각 2이상 k이하이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서

$3^4=81,\ 2^7=128,\ 12^2=144,\ 6^3=216,$

$3^5=243,\ \cdots$

을 이용하여 조건을 만족하는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수가 59인 경우를 찾아보자.

① $81\le k<128$일 때,

㉠에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ q=1,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 5q=5$이다.

그런데 $a=2^p$, $c=12^q$인 경우와 $a=12^q$, $c=2^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $6\times1\times2=12$이다.

㉡에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 5q=5,\ 10$이다.

그런데 $a=3^p$, $c=8^q$인 경우와 $a=8^q$, $c=3^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $4\times2\times2=16$이다.

㉢에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 5q=5,\ 10$이다.

그런데 $a=4^p$, $c=6^q$인 경우와 $a=6^q$, $c=4^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times2\times2=12$이다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)의 ①에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3+12+16+12=43$이므로 조건에 맞지 않다.

마찬가지의 방법으로 구하면

② $128 \le k < 144$일 때,

㉠에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ q=1,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,\ 5q=5$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $7\times1\times2=14$이다.

㉡에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $4\times2\times2=16$이다.

㉢에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times2\times2=12$이다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)의 ②에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3+14+16+12=45$이므로 조건에 맞지 않다.

③ $144 \le k < 216$일 때,

㉠에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,$ $5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $7\times2\times2=28$이다.

㉡에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $4\times2\times2=16$이다.

㉢에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times2\times2=12$이다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)의 ③에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3+28+16+12=59$이다.

그러므로 k의 최솟값 m은 144이다.

④ $216 \le k < 243$일 때,

㉠에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30,\ 35,$

$5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $7\times2\times2=28$이다.

㉡에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ q=1,\ 2,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 5q=5,\ 10$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $4\times2\times2=16$이다.

㉢에서 $p=1,\ 2,\ 3,\ q=1,\ 2,\ 3,$

즉, $5p=5,\ 10,\ 15,\ 5q=5,\ 10,\ 15$이다.

그러므로 조건에 맞는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3\times3\times2=18$이다.

따라서 (ⅰ)과 (ⅱ)의 ④에서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $3+28+16+18=65$이므로 조건에 맞지 않다.

그러므로 k의 최댓값 M은 215이다.

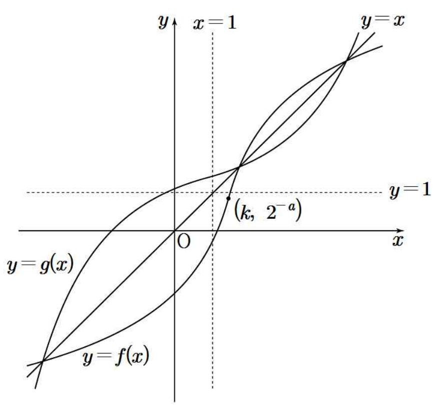
따라서 $M+m=215+144=359$이다.

13) [정답] **75**

[해설]

(ⅰ) $k>1$일 때,

$0<\frac{1}{k}<1$이고 $0<2^{-a}<1<k$이므로 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



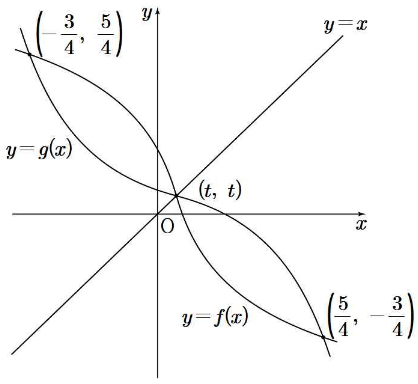
방정식 $f(x)=g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 세 교점의 x좌표이다. 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(k,\ 2^{-a})$을 지나며 $1<k<t$이므로 $0<t<1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $0<k<1$일 때

$\frac{1}{k}>1$이고 방정식 $f(x)=g(x)$의 해가 $-\frac{3}{4},\ t,\ \frac{5}{4}$이므로

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4},\ f(t)=t,\ f\left(\frac{5}{4}\right)=-\frac{3}{4}$이다.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$$2\log_{\frac{1}{k}}\left(\frac{7}{4}+k\right)+2^{-a}=\frac{5}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$2\log_{k}\left(\frac{9}{4}-k\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡$-$㉠에서 $2\log_k\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=-2$

$$\left(\frac{9}{4}-k\right)\left(\frac{7}{4}+k\right)=\frac{1}{k},\ 16k^3-8k^2-63k+16=0$$

$$\begin{aligned}&16k^3-8k^2-63k+16\\ &=16k^3-8k^2+k-64k+16\\ &=\left(16k^3-8k^2+k\right)-(64k-16)\\ &=k(4k-1)^2-16(4k-1)\\ &=(4k-1)\left(4k^2-k-16\right)\\ &=0\end{aligned}$$

$$\therefore k=\frac{1}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{257}}{8}$$

$0<k<1$이므로 $k=\frac{1}{4}$이고

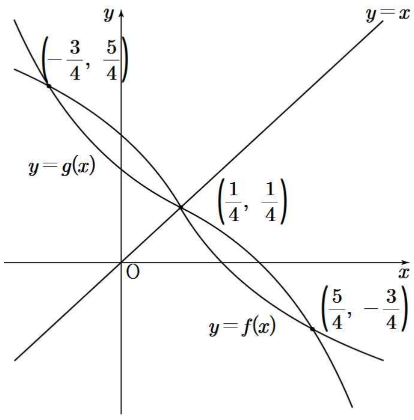
$$f\left(\frac{5}{4}\right)=2\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+1\right)+2^{-a}=-\frac{3}{4}$$

$2^{-a}=\frac{1}{4}$이므로 $a=2$이다.

따라서 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\log_{\frac{1}{4}}\left(x+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x\ge\frac{1}{4}\right)\\ 2\log_4\left(-x+\frac{5}{4}\right)+\frac{1}{4} & \left(x<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이다. $y=f(x)$의 그래프는 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$을 지나므로 $t=\frac{1}{4}$이다.



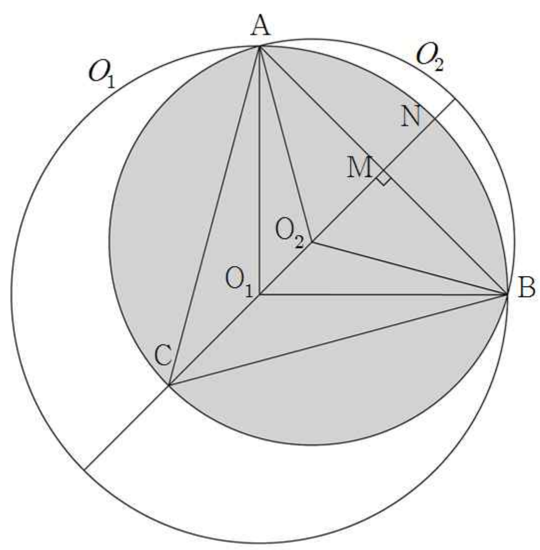
그러므로 $30(a+k+t)=30\times\left(2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=75$이다.

[참고]

$$\begin{aligned}&16k^3-8k^2-63k+16\\ &=16k^3-4k^2-4k^2-63k+16\\ &=4k^2(4k-1)-\left(4k^2+63k-16\right)\\ &=4k^2(4k-1)-(4k-1)(k+16)\\ &=(4k-1)\left(4k^2-k-16\right)\end{aligned}$$

14) [정답] **13**

[해설]



원 O_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$, 원 O_2의 중심을 $\mathrm{O_2}$, 직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 선분 AB와 만나는 점을 M이라 하고, 직선 $\mathrm{O_1O_2}$가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서

점 M에 가까운 점을 N이라 하자.

$\overline{\mathrm{O_1A}}=6$, $\overline{\mathrm{AM}}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{O_1A}}:\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{2}:1$이므로 $\qquad \angle\mathrm{MO_1A}=\frac{\pi}{4}$

원 O_1에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_1NA}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi\cdots\cdots ㉠$$

$\angle \mathrm{MO_2A}=\frac{\pi}{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{O_2A}}=2\sqrt{6}$

원 O_2에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 $\mathrm{O_2AC}$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{2}{3}\pi=8\pi\cdots\cdots ㉡$$

$\overline{\mathrm{O_1O_2}}=\overline{\mathrm{O_1M}}-\overline{\mathrm{O_2M}}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 이므로

삼각형 $\mathrm{AO_1O_2}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 6\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times\sin\frac{\pi}{4}=9-3\sqrt{3}\cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$p+q\sqrt{3}+r\pi=2\times\left\{\frac{9}{2}\pi+8\pi-(9-3\sqrt{3})\right\}$$
$$=-18+6\sqrt{3}+25\pi$$

따라서 $p+q+r=13$

15) [정답] **477**

[해설]

$A(200)$은 조건의 등비수열에서 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 k의 값의 합이다.

공비를 2^p이라 하면 $2^{200}=(2^p)^{\frac{200}{p}}$ 이고 $\frac{200}{p}$은 자연수이어야 하므로 p는 200의 양의 약수이다.

그러므로 $3\times 2^{200}=3\times(2^p)^{\frac{200}{p}}$ 은 첫째항이 3이고 공비가 2^p인 등비수열의 제$\left(\frac{200}{p}+1\right)$항이다.

$200=2^3\times 5^2$이므로 200의 모든 양의 약수는

$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ 5,\ 2\times 5,\ 2^2\times 5,\ 2^3\times 5,\ 5^2,$

$2\times 5^2,\ 2^2\times 5^2,\ 2^3\times 5^2$

따라서

$A(200)$

$=(2^3\times 5^2+1)+(2^2\times 5^2+1)+\cdots+(2+1)+(1+1)$

$=(2^3\times 5^2+2^2\times 5^2+\cdots+2+1)+12$

$=465+12$

$=477$

16) [정답] **125**

[해설]

함수 $f(x)=x^2+n$의 그래프와 직선 $y=mx$가 만나기 위해서는

이차방정식 $x^2-mx+n=0$의 판별식

$D=m^2-4n\geq 0$에서 $m^2\geq 4n$

$n=1$이면 $m^2\geq 4$이므로 $a_1=2$

$n=2$이면 $m^2\geq 8$이므로 $a_2=3$

$n=3$이면 $m^2\geq 12$이므로 $a_3=4$

$n=4$이면 $m^2\geq 16$이므로 $a_4=4$

이를 바탕으로 추론하면

$4\times 5<5^2<4\times 7$이므로

$a_n=5$를 만족시키는 n은 5, 6

$4\times 7<6^2\leq 4\times 9$이므로

$a_n=6$을 만족시키는 n은 7, 8, 9

$\vdots$

$4\times 26<11^2<4\times 31$이므로 $a_n=11$을 만족시키는 n은 26, 27, 28, 29, 30

$4\times 31<12^2\leq 4\times 36$이므로 $a_n=12$를 만족시키는 n은 31, 32, 33, 34, 35, 36

$a_n<a_{n+1}$을 만족시키는 33 이하의 모든 n의 값은

1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30

따라서 모든 n의 값의 합은 125

17) [정답] **7**

[해설]

$a_n+b_n=2+(n-1)(l+m)$이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 정수 $l+m$인 등차수열이다.

$l+m\geq 0$이라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은 첫째항이 2이고 공차가 $l+m$인 등차수열이다.

공차 $l+m$이 정수이므로

$\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=\frac{10\{2\times2+9(l+m)\}}{2}=31$에서 $l+m=\frac{11}{45}$을 만족시키는 두 정수 l, m은 존재하지 않는다.

$l+m\le-2$라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은 첫째항과 제2항이 각각 2, $|a_2+b_2|$이고, 제 2항부터 공차가 $|l+m|$인 등차수열이다.

공차 $|l+m|$이 정수이므로

$\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=2+\frac{9(2|a_2+b_2|+8|l+m|)}{2}=31$에서

$|a_2+b_2|+4|l+m|=\frac{29}{9}$를 만족시키는 두 정수 l, m은 존재하지 않는다.

$l+m=-1$이라 하면 수열 $\{|a_n+b_n|\}$은 첫째항, 제 2항, 제 3항이 각각 2, 1, 0이고, 제 3항부터 공차가 1인 등차수열이다.

이때 $\sum_{k=1}^{10}|a_k+b_k|=2+1+\frac{8\times(2\times0+7\times1)}{2}=31$

따라서 $l+m=-1$

$m=-l-1$에서 $b_n=-10+(n-1)(-l-1)$

$|a_3|=|12+2l|$, $|b_3|=|-12-2l|$이므로 두 정수 l, m에 관계없이 $|a_3|=|b_3|$이 성립한다.

(ⅰ) $l\ge0$일 때

$m<0$이고 모든 자연수 k에 대하여 $a_k>0$, $b_k<0$이다.

$|a_k|-|b_k|=a_k+b_k=3-k$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)=\sum_{k=1}^{10}(3-k)=-25$$

(ⅱ) $-4\le l\le-1$일 때

① $l=-1$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

$=2+1++(-1)+(-2)+(-3)+(-4)$
$+(-5)+(-6)+(-7)$

$=-25$

② $l=-2$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

$=2+1++(-1)+(-2)+(-3)+(-4)$
$+(-1)+2+5$

$=-1$

③ $l=-3$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

$=2+1++(-1)+(-2)+3+4+5+6+7$

$=25$

④ $l=-4$인 경우

$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

$=2+1++(-1)+2+3+4+5+6+7$

$=29$

(ⅲ) $-11\le l\le-5$일 때

$|a_1|-|b_1|=2$, $|a_2|-|b_2|=(12+l)-(11+l)=1$

이고, $k\ge3$인 자연수 k에 대하여

$|a_k|-|b_k|$

$=\{-12-(k-1)l\}+\{10+(k-1)(l+1)\}$

$=k-3\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)$

$=2+1+\sum_{k=3}^{10}(k-3)=31$

(ⅳ) $l\le-12$일 때

$|a_1|-|b_1|=2$,

$|a_2|-|b_2|=(-12-l)-(-11-l)=-1$

이고, $k\ge3$인 자연수 k에 대하여

$|a_k|-|b_k|$

$=\{-12-(k-1)l\}-\{-10-(k-1)(l+1)\}$

$=k-3$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(|a_k|-|b_k|)=2+(-1)+\sum_{k=3}^{10}(k-3)=29$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 모든 순서쌍 $(l,\ m)$은

$(-11,\ 10)$, $(-10,\ 9)$, $(-9,\ 8)$, $\cdots$, $(-5,\ 4)$

이므로 개수는 7이다.

18) [정답] **49**

[해설]

함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|}=12$이고,

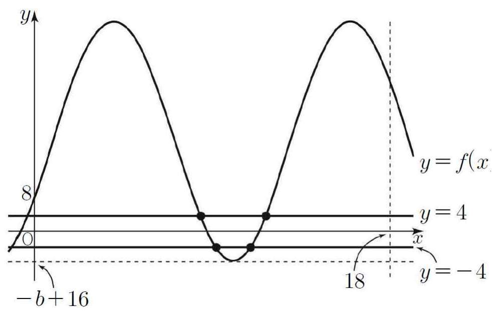
$f(0)=-\frac{1}{2}a+b=8$에서

$a=2b-16$

$g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수이므로 $g(t)$의 값은 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<t$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합과 같다.

(ⅰ) $a>0$일 때

$b>8$이므로 $f(18)=2b-8>8$이고, 함수 $f(x)$의 주기는 12이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



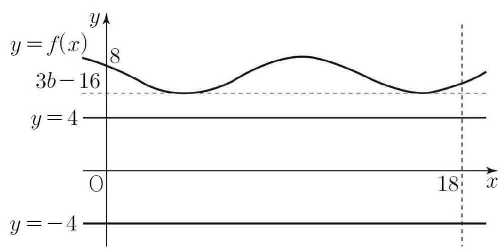
그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값인 $-b+16$이 -4보다 작을 때 $g(18)$의 값은 최대이고 그 값은 4이다.

따라서 $a>0$일 때 $g(18)=5$를 만족시키는 두 실수 a, b가 존재하지 않는다.

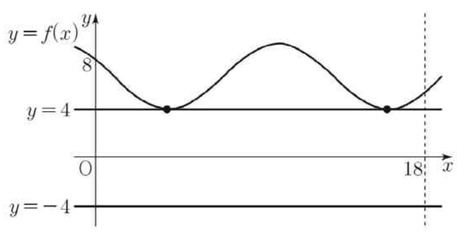
(ⅱ) $a<0$일 때

$b<8$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값인 $3b-16$의 범위에 따른 $g(18)$의 값은 다음과 같다.

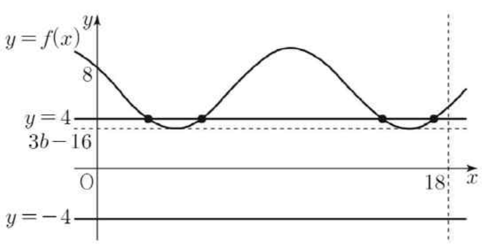
(a) $4<3b-16<8$일 때 $g(18)=0$



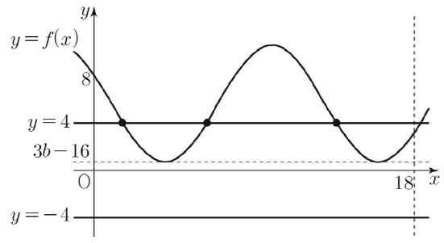
(b) $3b-16=4$일 때 $g(18)=2$



(c) $2<3b-16<4$일 때 $f(18)>4$이므로 $g(18)=4$

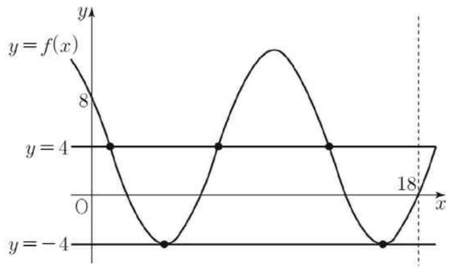


(d) $-4<3b-16\le 2$일 때 $0<f(18)\le 4$이므로

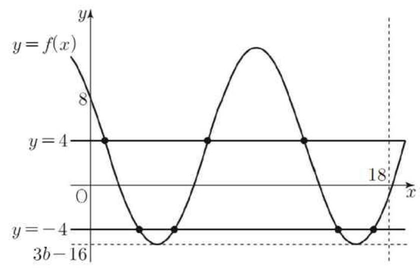


$g(18)=3$

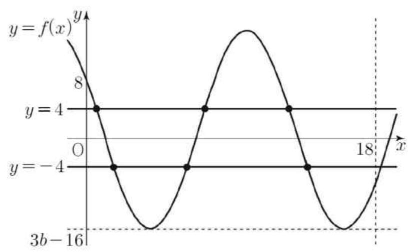
(e) $3b-16=-4$일 때 $f(18)=0$이므로 $g(18)=5$



(f) $-19<3b-16<-4$일 때 $-4<f(18)<0$이므로 $g(18)=7$

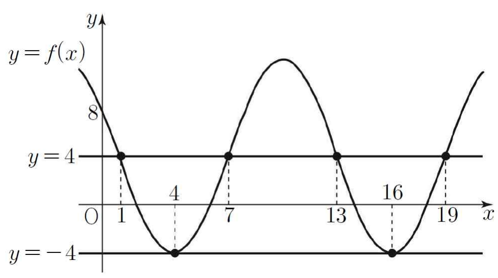


(g) $3b-16\le -10$일 때 $f(18)\le -4$이므로 $g(18)=6$



(ⅰ), (ⅱ)에서 $3b-16=-4$, 즉 $a=-8$, $b=4$일 때 $g(18)=5$이다.

그러므로 $f(x)=-8\sin\frac{\pi}{6}(x-1)+4$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(1)=f(7)=f(13)=4$이고 $f(4)=-4$이므로 $7<p\le 13$인 실수 p에 대하여 $0<x<p$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=4$, $y=-4$와 만나는 점의 개수는 각각 2, 1이다.

그러므로 $g(\alpha)=|a-b|=12$, 즉 $0<x<\alpha$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=4$와 만나는 점의 개수와 $0<x<\alpha$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=-4$와 만나는 점의 개수의 합이 12가 되도록 하는 양수 α의 값의 범위는

$$7+12\times3<\alpha\le13+12\times3$$

$$43<\alpha\le49$$

따라서 양수 α의 최댓값은 49이다.

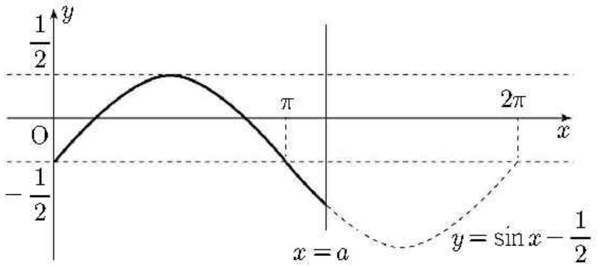
19) [정답] 110

[해설]

$\pi<a<2\pi$라 하면 함수 $y=\sin x-\frac{1}{2}$의 그래프에서

$\pi<x<a$일 때 $\sin x-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이므로 $\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}$이다.

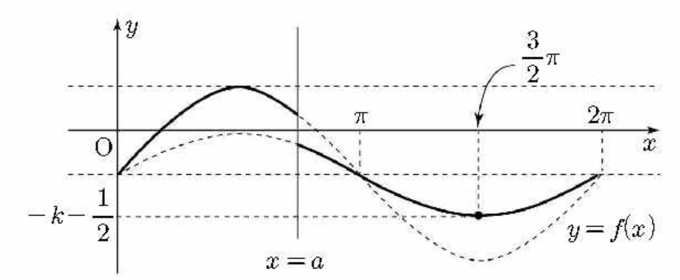
따라서 조건 (가)를 만족시키지 않는다.



따라서 $0<a\le\pi$이다. ……㉠

(i) $k>0$인 경우

$a\le x\le2\pi$에서 함수 $y=k\sin x-\frac{1}{2}$은 $x=\frac{3}{2}\pi$일 때 최솟값 $k\sin\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{2}=-k-\frac{1}{2}$을 갖는다.

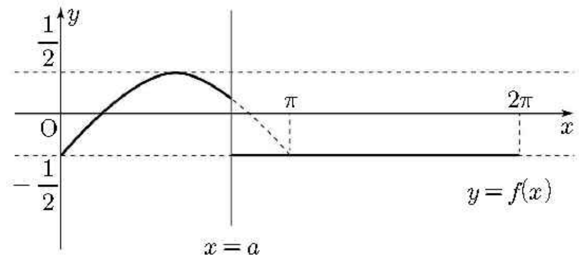


따라서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 $k+\frac{1}{2}$이고, $k+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $k=0$인 경우

함수 $f(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<a)\\ -\frac{1}{2} & (a\le x\le2\pi)\end{cases}$ 이고

방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 2 이하이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



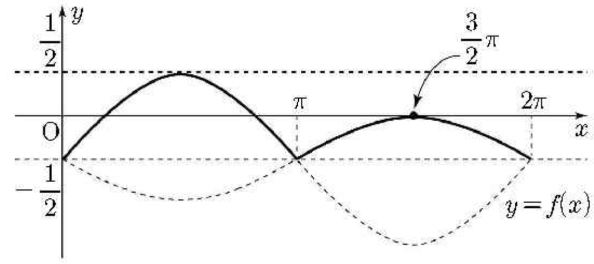
(iii) $k<0$인 경우

$0<a<\pi$이면 $\sin a>0$이므로

$f(a)=k\sin a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $|f(a)|>\frac{1}{2}$이고 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 ㉠에 의해 $a=\pi$이다.

조건 (나)에 의해 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이다.

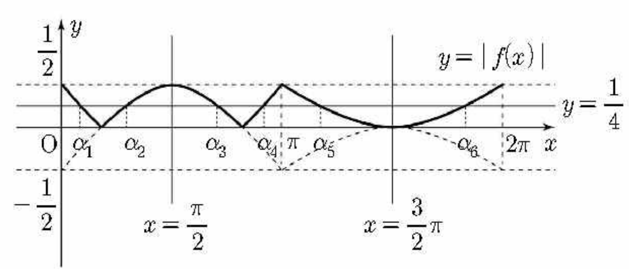


즉 $k\times(-1)-\frac{1}{2}=0$이므로 $k=-\frac{1}{2}$이다. 따라서 구하는 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\frac{1}{2} & (0\le x<\pi)\\ -\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2} & (\pi\le x\le2\pi)\end{cases}$$

이다.

함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6이라고 하자.



$\frac{\alpha_1+\alpha_4}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\alpha_5+\alpha_6}{2}=\frac{3\pi}{2}$이므로

$S=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=\pi+\pi+3\pi=5\pi$

이다. 따라서

$$20\left(\frac{a+S}{\pi}+k\right)=20\left(\frac{\pi+5\pi}{\pi}-\frac{1}{2}\right)=20\times\frac{11}{2}=110$$

이다.

20) [정답] **79**

[해설]

두 조건 (가)와 (나)로부터 $a_{2n}+a_{2n+1}=2b_n+1$

두 조건 (다)와 (라)로부터 $b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+1$

$$\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(a_{2n}+a_{2n+1})-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(2b_n+1)-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}b_n+31$$

$$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(b_{2n}+b_{2n+1})+31$$

$$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(2a_n+1)+31$$

$$=a_1+b_1+2\sum_{n=1}^{15}a_n+15+31$$

$$=a_1+b_1+2a_1+2\sum_{n=1}^{7}(2b_n+1)+46$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4\sum_{n=1}^{7}b_n+14+46$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+4\sum_{n=1}^{3}(2a_n+1)+60$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8\sum_{n=1}^{3}a_n+12+60$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+8(2b_1+1)+72$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+16b_1+8+72$$

$$=11a_1+21b_1+80=155 \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

조건 (가)와 (다)에서

$$a_{4n}=b_{2n}+2=(3a_n-2)+2=3a_n,$$

$$b_{4n}=3a_{2n}-2=3(b_n+2)-2=3b_n+4$$

이므로

$$a_{48}=3a_{12}=9a_3=9(b_1-1)=9,\ b_1=2$$

㉠에 의하여 $a_1=3$

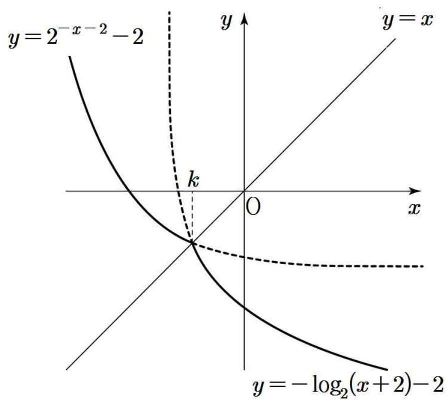
따라서 $b_{32}=3b_8+4=9b_2+16=9(3a_1-2)+16=79$

21) [정답] ①

[해설]

두 곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$와 $y=2^{-x-2}-2$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

정의역과 공역이 각각 실수 전체의 집합인 함수 $f(x)$가 일대일대응이므로 상수 k의 값은 두 곡선의 교점의 x좌표이다.



곡선 $y=-\log_2(x+2)-2$와 x축의 교점의 x좌표가 $-\frac{7}{4}$이므로 $k>-\frac{7}{4}$이다.

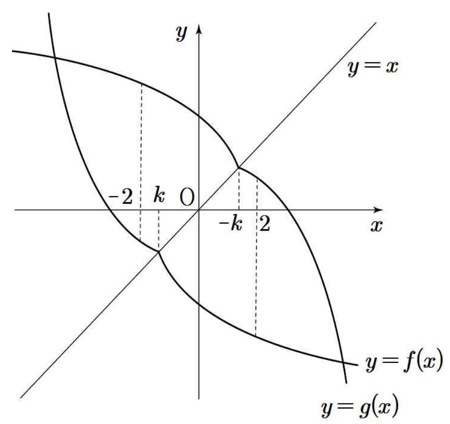
$k\geq-1$이라 가정하면 $k=-\log_2(k+2)-2$이므로

$$k=-\log_2(k+2)-2\leq-\log_2\{(-1)+2\}-2=-2$$

가 되어 모순이므로 $k<-1$이다.

따라서 k의 값의 범위는 $-\frac{7}{4}<k<-1$이다.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(ⅰ) $-2\leq x<k$일 때,

$f(x)=2^{-x-2}-2$, $g(x)=\log_2(2-x)+2$이고

$f(-2)=-1$, $g(-2)=4$이므로

$(-2,\ -1)$, $(-2,\ 0)$, $(-2,\ 1)$, $(-2,\ 2)$, $(-2,\ 3)$, $(-2,\ 4)$: 6개

(ⅱ) $k\leq x<-k$일 때,

$f(x)=-\log_2(x+2)-2$, $g(x)=\log_2(2-x)+2$이고

① $f(-1)=-2$, $3<g(-1)<4$이므로

$(-1,\ -2)$, $(-1,\ -1)$, $(-1,\ 0)$, $(-1,\ 1)$, $(-1,\ 2)$, $(-1,\ 3)$: 6개

② $f(0)=-3$, $g(0)=3$이므로

$(0,\ -3)$, $(0,\ -2)$, $(0,\ -1)$, $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(0,\ 3)$: 7개

③ $-4<f(1)<-3$, $g(1)=2$이므로

$(1,\ -3)$, $(1,\ -2)$, $(1,\ -1)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$: 6개

(ⅲ) $-k\le x\le 2$일 때,

$f(x)=-\log_2(x+2)-2$, $g(x)=-2^{x-2}+2$이고

$f(2)=-4$, $g(2)=1$이므로

$(2,\ -4)$, $(2,\ -3)$, $(2,\ -2)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$: 6개

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $6+6+7+6+6=31$

따라서 $f(a)\le b\le g(a)$를 만족시키는 정수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 31

22) [정답] 686

[해설]

$$(f\circ h)(x)=\cos(a\pi x+b\pi)$$
$$=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$$

이고 $(h\circ g)(x)=a\sin\pi x+b$이다.

두 자연수 a, b에 대하여

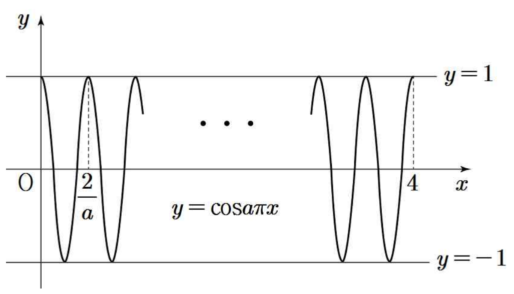
$$(h\circ g)\left(\frac{3}{2}\right)=a\sin\frac{3}{2}\pi+b=-a+b$$

는 정수이므로 조건 (가)의 방정식의 실근이 존재하기 위한 $-a+b$의 값은 -1 또는 0 또는 1이다.

함수 $(f\circ h)(x)=\begin{cases}\cos a\pi x & (b\text{는 짝수})\\ -\cos a\pi x & (b\text{는 홀수})\end{cases}$의 그래프는

주기가 $\frac{2}{a}$이므로

(ⅰ) b가 짝수인 경우



① $-a+b=1$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

② $-a+b=0$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

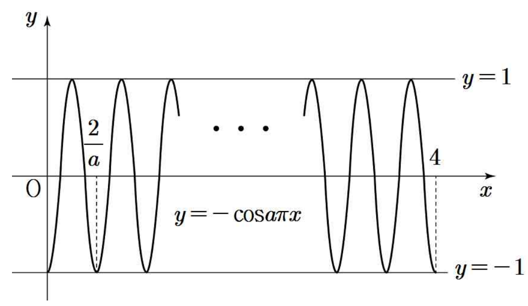
③ $-a+b=-1$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=1$이다.

$b=a+1$이므로 a는 홀수이다.

(ⅱ) b가 홀수인 경우



① $-a+b=1$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a$

② $-a+b=0$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $4a$

③ $-a+b=-1$일 때

두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수는 $2a+1$

따라서 두 함수 $y=(f\circ h)(x)=\cos a\pi x$와 $y=-a+b$의 그래프의 교점의 개수가 홀수이려면 $-a+b=-1$이다.

$b=a-1$이므로 a는 짝수이다.

조건 (나)에서 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 해는

(ⅰ) a가 홀수, b가 짝수인 경우

$b=a+1$이므로 (나)의 방정식은

$\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a+1)=a(\sin\pi t+1)+1$

이고 $a(\sin\pi t+1)+1\ge 1$이므로 $\cos a\pi t=1$이다.

$0\le x\le 4$일 때, 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$이고 함수 $y=\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\le x\le 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$이 되어 자연수 a는 존재하지

않는다.

(ii) a가 짝수, b가 홀수인 경우

$b=a-1$이므로 (나)의 방정식은

$$-\cos a\pi x = a\sin\pi t+(a-1)=a(\sin\pi t+1)-1$$

이고 $a(\sin\pi t+1)-1\geq -1$이므로 서로 다른 실근의 개수에

따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나눌 수 있다.

① $a\sin\pi t+(a-1)=-1$인 경우

$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=-1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2a+1$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $(2a+1)\times 2=4a+2=56$이 되어 자연수 a는 존재하지 않는다.

② $-1<a\sin\pi t+(a-1)<1$인 경우

$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=a\sin\pi t+(a-1)$의 서로 다른 실근의 개수는 $4a$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $4a\times 2=8a=56$이 되어 짝수 a는 존재하지 않는다.

③ $a\sin\pi t+(a-1)=1$인 경우

$0\leq x\leq 4$일 때, $-\cos a\pi x=1$의 서로 다른 실근의 개수는 $2a$이고 함수 $y=-\cos a\pi x$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서 $0\leq x\leq 4$일 때, 서로 다른 모든 실근의 합은 $2a\times 2=4a=56$이다.

그러므로 $a=14$, $b=13$이다.

$(h\circ g)(t)=a\sin\pi t+b=14\sin\pi t+13=1$에서 방정식 $(f\circ h)(x)=(h\circ g)(t)$의 서로 다른 모든 실근의 합이 56이 되도록 하는 실수 t는 $\sin\pi t=-\dfrac{6}{7}$을 만족시키므로

$\cos^2\pi t=\dfrac{13}{49}$이다.

따라서 $\dfrac{a\times b}{\cos^2\pi t}=\dfrac{14\times 13}{\frac{13}{49}}=686$

23) [정답] **217**

[해설]

$\log a_n+\log a_{n+1}=2n$에서 $a_na_{n+1}=10^{2n}$

$a_1a_2=10^2$, $a_2a_3=10^4$, $a_3a_4=10^6$에서

$$a_2=10^2\times\frac{1}{a_1},\ a_3=10^2\times a_1,\ a_4=10^4\times\frac{1}{a_1}$$

조건에서 $\{a_n\}$는 모든 항이 자연수이므로 a_2가 자연수가 되려면 a_1은 $100=2^2\times 5^2$의 약수이므로 가능한 a_1은 총 9가지다.

(i) $a_1=1$일 때 $a_4=10^4\times 1=10000$

(ii) $a_1=2$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{2}=5000$

(iii) $a_1=2^2$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{2^2}=2500$

(iv) $a_1=5$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{5}=2000$

(v) $a_1=2\times 5$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{10}=1000$

(vi) $a_1=2^2\times 5$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{20}=500$

(vii) $a_1=5^2$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{25}=400$

(viii) $a_1=2\times 5^2$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{50}=200$

(ix) $a_1=2^2\times 5^2$일 때 $a_4=10^4\times\dfrac{1}{100}=100$

(i)~(ix)에서 만족하는 값을 모두 더하면 21700

즉, $p\times 100=217\times 100$에서 $p=217$

24) [정답] ③

[해설]

조건 (가), (나)에 의해

$a_2=1-a_1$

$a_3=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{1-a_1}$

$a_4=1-a_3=-\dfrac{a_1}{1-a_1}$

$a_5=\dfrac{1}{a_4}=1-\dfrac{1}{a_1}$

$a_6=1-a_5=\dfrac{1}{a_1}$

$a_7=\dfrac{1}{a_6}=a_1$

$a_8=1-a_7=1-a_1=a_2$

$\vdots$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$을 만족시킨다.

$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\geq 0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$이므로

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되기 위해서는

a_1, a_2, $\cdots$, a_{14}중에서 음수인 모든 항의 합이 -5이어야 한다.

(i) $0<a_1<1$일 때

$a_2>0$, $a_3>0$, $a_4<0$, $a_5<0$, $a_6>0$

이므로

$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=-5$

$a_4=s$라 하면

$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=s+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s}$

$=2s+\frac{2}{s}=-5$

$2s^2+5s+2=0$, $(2s+1)(s+2)=0$에서

$s=-\frac{1}{2}$ 또는 $s=-2$

$s=-\frac{a_1}{1-a_1}$이므로 $a_1=\frac{1}{3}$ 또는 $a_1=\frac{2}{3}$

(ii) $a_1>1$일 때

$a_2<0$, $a_3<0$, $a_4>0$, $a_5>0$, $a_6>0$

이므로

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=-5$

$a_2=t$라 하면

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=t+\frac{1}{t}+t+\frac{1}{t}+t$

$=3t+\frac{2}{t}=-5$

$3t^2+5t+2=0$, $(3t+2)(t+1)=0$에서

$t=-\frac{2}{3}$ 또는 $t=-1$

$t=1-a_1$ 이므로 $a_1=\frac{5}{3}$ 또는 $a_1=2$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}+2=\frac{14}{3}$

25) [정답] ①

[해설]

먼저 a_5의 값을 구해보자.

(i) $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$일 때, $a_6=-2a_5-2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5-2=0$

즉, $a_5=-2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$일 때, $a_6=2a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$3a_5=0$ 즉, $a_5=0$

(iii) $\frac{1}{2}<a_5\le 1$일 때, $a_6=-2a_5+2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-a_5+2=0$ 즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a_5=0$

이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\le a_{n+1}\le 1$일 때,

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1} \text{ 또는 } a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$$

(i) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0$, $a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0$, $a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고,

$a_2=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며,

이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$$

26) [정답] ⑤

[해설]

(i) $(a-2)(b-2)=0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\frac{b}{2}x\right|$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{b}{2}}=\frac{2\pi}{b}$이므로

조건 (가)에서

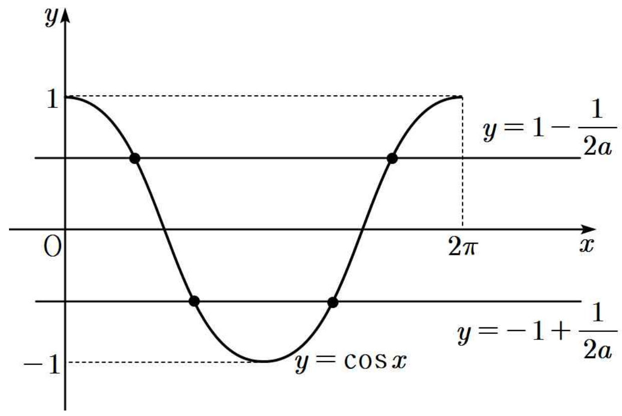
$\dfrac{2\pi}{b}=\pi \qquad \therefore b=2$

$|2a\cos x|=2a-1$에서

$2a\cos x=2a-1$ 또는 $2a\cos x=-2a+1$

이므로

$\cos x=1-\dfrac{1}{2a}$ 또는 $\cos x=-1+\dfrac{1}{2a}$



자연수 a에 대하여 $0<1-\dfrac{1}{2a}<1$,

$-1<-1+\dfrac{1}{2a}<0$이므로 $0\le x\le 2\pi$에서

$\cos x=1-\dfrac{1}{2a}$와 $\cos x=-1+\dfrac{1}{2a}$은 각각 2개의 근을 가지므로 10 이하의 자연수 a에 대하여 항상 4개의 실근을 갖는다.

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 10이다.

(ii) $(a-2)(b-2)\neq 0$일 때,

함수 $f(x)=\left|2a\cos\dfrac{b}{2}x-(a-2)(b-2)\right|$의 주기는

$\dfrac{2\pi}{\frac{b}{2}}=\pi$에서 $b=4$

$f(x)=|2a\cos 2x-2(a-2)|$이므로

$|2a\cos 2x-2(a-2)|=2a-1$에서

$2a\cos 2x-2a+4=-2a+1$ 또는

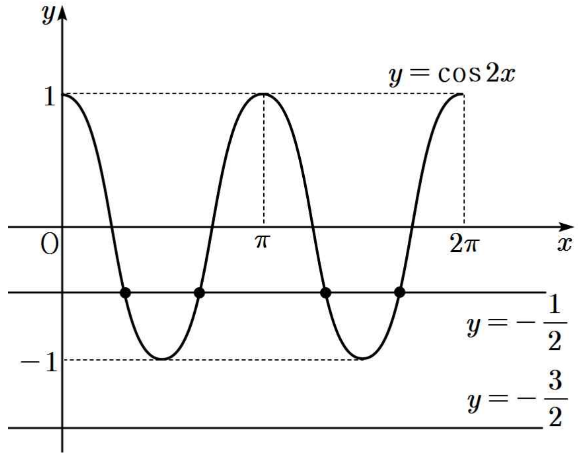
$2a\cos 2x-2a+4=2a-1$

$\therefore 2a\cos 2x=-3$ 또는 $2a\cos 2x=4a-5$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서

(1) $a=1$일 때,

$\cos 2x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$

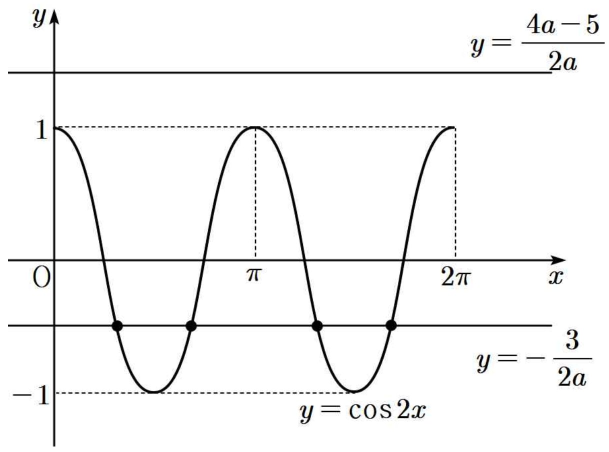


$\cos 2x=-\dfrac{3}{2}$을 만족하는 x의 값은 존재하지 않고,

$\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$을 만족하는 x의 값은 4개 존재하므로 조건을 만족한다.

(2) $a\ge 3$일 때,

$\cos 2x=-\dfrac{3}{2a}$ 또는 $\cos 2x=\dfrac{4a-5}{2a}$



$4a-5>2a$에서 $\dfrac{4a-5}{2a}>1$이므로

$\cos 2x=\dfrac{4a-5}{2a}$를 만족하는 x의 값은 존재하지 않는다.

$2a>3$에서 $-1<-\dfrac{3}{2a}<0$이므로 $\cos 2x=-\dfrac{3}{2a}$를 만족하는 x의 값은 4개 존재한다.

모두 4개의 실근을 가지므로 조건을 만족한다.

따라서 $b=4$이고 $a=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 9개다.

(i), (ii)에서 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $10+9=19$개다.

27) [정답] 59

[해설]

$f(x)=\sin x$이고 $g(x)=a\cos x+b$이다.

함수 $h(x)$는

$h(x)=\begin{cases} g(x) & (f(x)\le g(x)) \\ f(x) & (f(x)>g(x)) \end{cases}$이다.

조건 (나)에서 $0<c<\frac{\pi}{2}$인 어떤 실수 c에 대하여

$h(c)=h(c+\pi)=\frac{1}{2}$이므로

$f(c)=\frac{1}{2}$ 또는 $g(c)=\frac{1}{2}$이고

$f(c+\pi)=\frac{1}{2}$ 또는 $g(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다.

한편, $0<c<\frac{\pi}{2}$이면

$f(c+\pi)=\sin(c+\pi)=-\sin c<0$이므로

$f(c+\pi)\neq\frac{1}{2}$이다.

따라서 $g(c+\pi)=\frac{1}{2}$이다. ……㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여

대칭이므로 $g(\pi-c)=\frac{1}{2}$이다. ……㉡

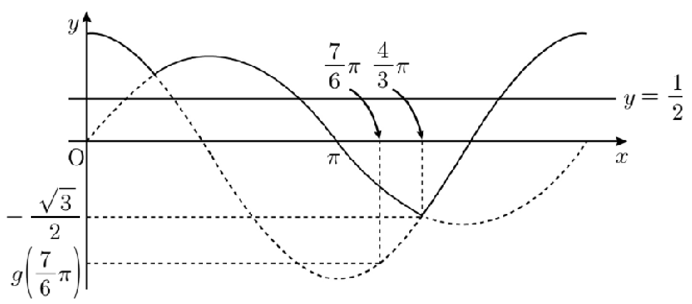
$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $g(x)=\frac{1}{2}$의 실근의 개수는

최대 2이므로 ㉠, ㉡에 의하여 $g(c)\neq\frac{1}{2}$이다.

따라서 $f(c)=\frac{1}{2}$이고 $\sin c=\frac{1}{2}$에서 $c=\frac{\pi}{6}$이다.

㉠에 의하여 $g\left(\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이다. ……㉢

(i) $a>0$인 경우



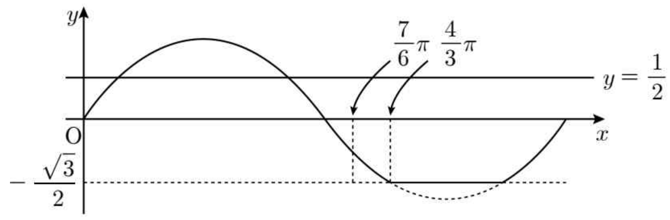
함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다.

$g\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이고 $a>0$일 때 $g\left(\frac{4}{3}\pi\right)>g\left(\frac{7}{6}\pi\right)$이므로

$g\left(\frac{7}{6}\pi\right)<-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(ii) $a=0$인 경우 $(g(x)=b)$



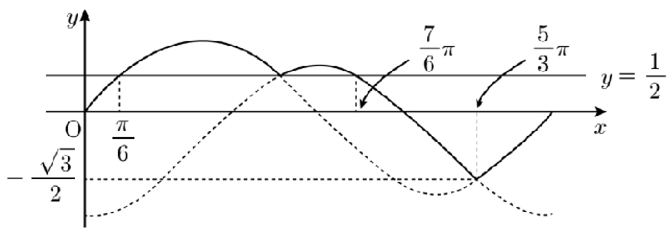
함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 하므로

$g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 함수 $g(x)$가 상수함수이므로

$g\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 이는 ㉢과 모순이다.

(iii) $a<0$인 경우



함수 $h(x)$의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$이 되기 위하여 함수

$y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{3}\pi,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$을 지나야 한다. 즉

$g\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. ……㉣

㉢, ㉣에 의하여 연립방정식

$$\begin{cases} a\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+b=\frac{1}{2} \\ a\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+b=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

을 풀면 $a=-1,\ b=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

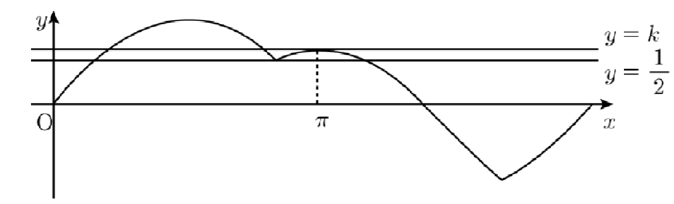
따라서 $g(x)=-\cos x+\frac{1-\sqrt{3}}{2}$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

방정식 $h(x)=k\left(k>\frac{1}{2}\right)$가 서로 다른 세 실근을 가지는

경우는 그림과 같이 직선 $y=k$가 점 $(\pi,\ g(\pi))$를 지날

때이다.



$g(\pi)=-\cos\pi+\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

즉 $k=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서

$\frac{k}{b}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{-2}=-\sqrt{3}$

이므로 $a+20\left(\frac{k}{b}\right)^2=-1+20\times3=59$

28) [정답] 53

[해설]

$y=2\sin\left(n\pi x+\frac{\pi}{2}\right)+\left|k\sin^2(n\pi x)-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|k\{1-\cos^2(n\pi x)\}-(k-1)\right|$

$=2\cos(n\pi x)+\left|1-k\cos^2(n\pi x)\right|$

$0\le x\le 2$에서 $t=\cos(n\pi x)$라 할 때,

함수 $f(t)=2t+\left|1-kt^2\right|(-1\le t\le 1)$이라 하자.

$1-kt^2=0,\ t=-\frac{1}{\sqrt{k}}$ 또는 $t=\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$f(t)=\begin{cases}-kt^2+2t+1 & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\ kt^2+2t-1 & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 또는 } \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le1\right)\end{cases}$$

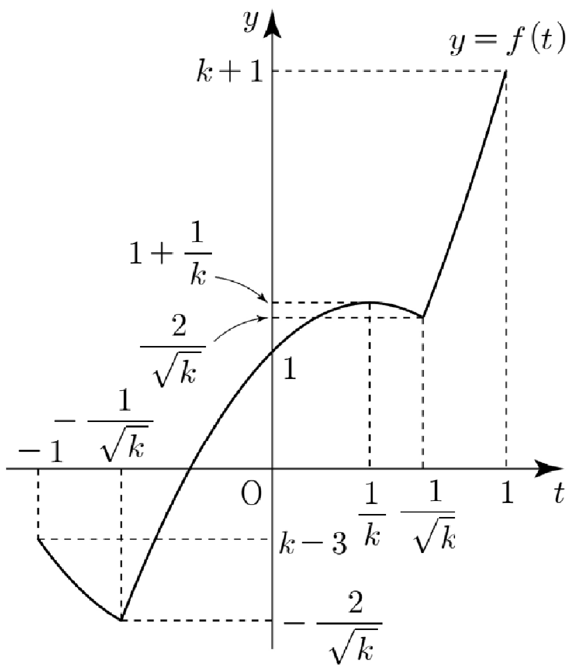
$$=\begin{cases}-k\left(t-\frac{1}{k}\right)^2+\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\le t\le\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\\ k\left(t+\frac{1}{k}\right)^2-\left(1+\frac{1}{k}\right) & \left(-1\le t<-\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ 또는} \frac{1}{\sqrt{k}}<t\le1\right)\end{cases}$$

$f(-1)=k-3,\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{k}},$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{2}{\sqrt{k}},\ f(1)=k+1$

$k\le4$이므로 $1\le\frac{2}{\sqrt{k}}$

함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



조건 (가)에 의하여 a_2는

$f(t_0)=-\frac{k}{4}$인 실수 $t_0(-1\le t_0\le1)$에 대하여

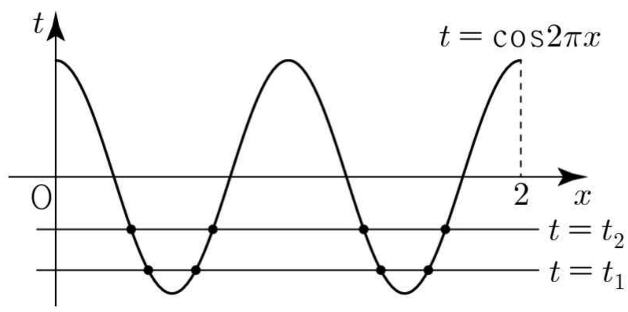
곡선 $t=\cos2\pi x$와 직선 $t=t_0$이 만나는 서로 다른 점의 개수와 같다.

$\frac{12}{5}<k\le4$에서 $-\frac{2}{\sqrt{k}}\le-\frac{k}{4}<k-3$

(I) $-\frac{2}{\sqrt{k}}<-\frac{k}{4}$인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$인 실수 t를

$t_1,\ t_2(-1<t_1<t_2<0)$이라 하면



$0\le x\le2$에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos2\pi x$와 두 직선 $t=t_1,\ t=t_2$가

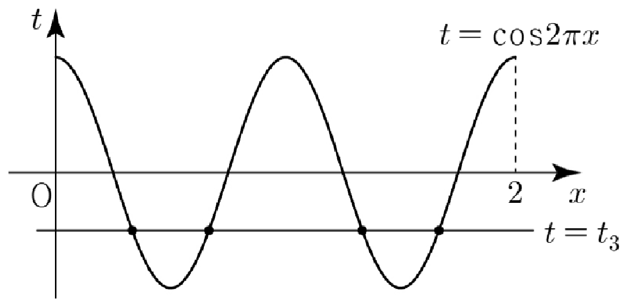
만나는 서로 다른 점의 개수 $a_2=(2+2)\times2=8$

$0<a_2<6$을 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $-\frac{2}{\sqrt{k}}=-\frac{k}{4}$인 경우

$f(t)=-\frac{k}{4}$인 실수 t를

$t_3=-\frac{1}{\sqrt{k}}(-1<t_3<0)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

주기가 1인 곡선 $t=\cos 2\pi x$와 직선 $t=t_3$이 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_2=2\times 2=4$ ······㉠

(I), (II)에 의하여

$0<a_2<6$을 만족시키는 k의 값은

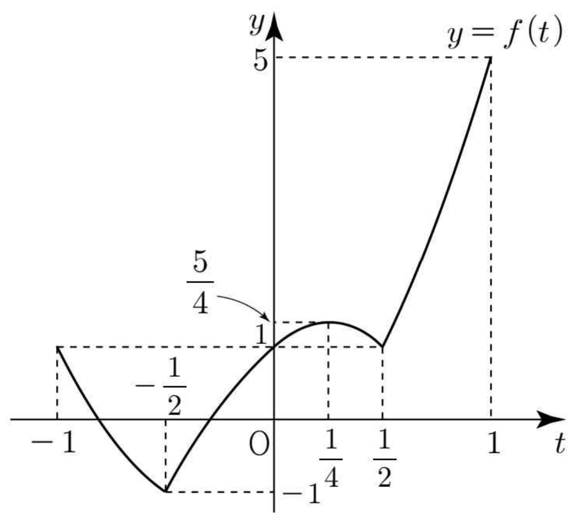
$-\dfrac{2}{\sqrt{k}}=-\dfrac{k}{4}$, $k=4$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$0 \le x \le 2$에서 $t=\cos(n\pi x)(-1\le t\le 1)$일 때,

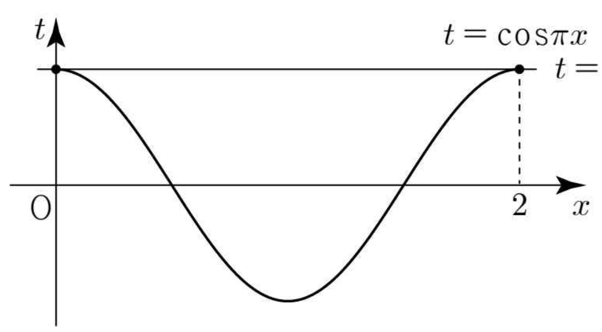
$$f(t)=\begin{cases} -4\left(t-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{5}{4} & \left(-\dfrac{1}{2}\le t\le \dfrac{1}{2}\right) \\ 4\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{5}{4} & \left(-1\le t<-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<t\le 1\right) \end{cases}$$

함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(i) $n=1$인 경우

조건 (나)에 의하여 $f(t)=5$인 실수 t는 1



$0 \le x \le 2$에서

주기가 2인 곡선 $t=\cos\pi x$와

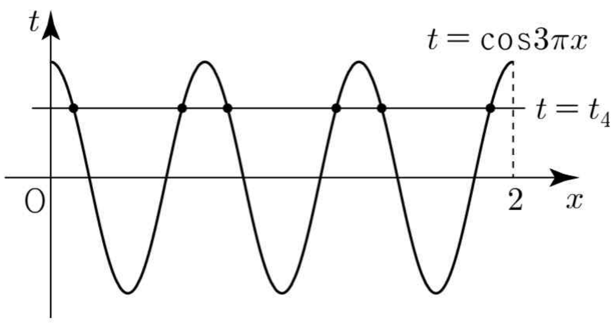
직선 $t=1$이 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_1=2$

(ii) $n=2$인 경우

㉠에 의하여 $a_2=4$

(iii) $n=3$인 경운

조건 (나)에 의하여 $f(t)=\dfrac{5}{3}$인 실수 t를 $t_4(0<t_4<1)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

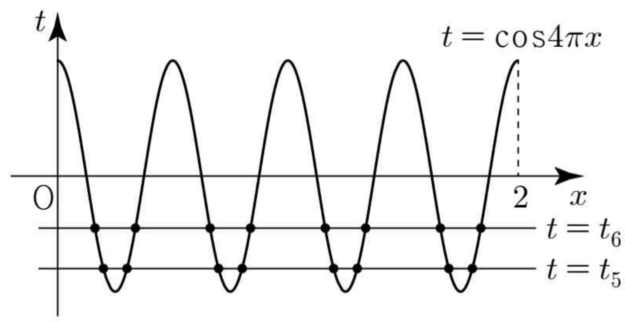
주기가 $\dfrac{2}{3}$인 곡선 $t=\cos 3\pi x$와

직선 $t=t_4$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $a_3=2\times 3=6$

(iv) $n=4$인 경우

조건 (가)에 의하여 $f(t)=-\dfrac{1}{2}$인 실수 t를

t_5, $t_6(-1<t_5<t_6<0)$이라 하면



$0 \le x \le 2$에서

주기가 $\dfrac{1}{2}$인 곡선 $t=\cos 4\pi x$와

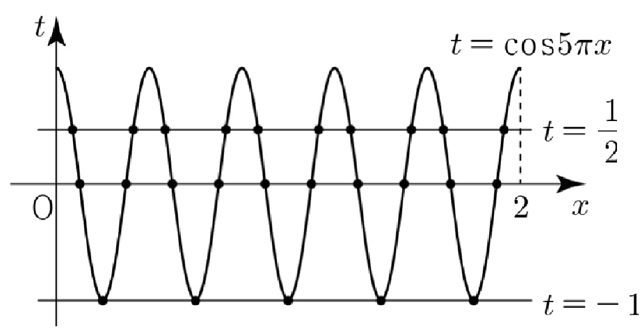
두 직선 $t=t_5$, $t=t_6$이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_4=(2\times 4)\times 2=16$

(v) $n=5$인 경우

조건 (나)에 의하여

$f(t)=1$인 실수 t는 -1, 0, $\dfrac{1}{2}$



$0 \le x \le 2$에서

주기가 $\dfrac{2}{5}$인 곡선 $t=\cos 5\pi x$와

세 직선 $t=-1$, $t=0$, $t=\dfrac{1}{2}$이 만나는

서로 다른 점의 개수 $a_5=5+(2\times5)\times2=25$

(i)~(v)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=2+4+6+16+25=53$$

29) [정답] ③

[해설]

$a_n=a+(n-1)d,\ b_n=a+(n-1)(-2d)$

조건 (가)에서 $|a|=|a-12d|$

$a=a-12d$ 또는 $a=-a+12d$

$d\neq0$이므로 $a=-a+12d,\ a=6d$

$a_n=6d+(n-1)d=(n+5)d$

$b_n=6d-2(n-1)d=(-2n+8)d$

a는 양수이므로 $d>0$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$

$1\leq n\leq3$일 때, $b_n>0$

$n\geq4$일 때, $b_n\leq0$이므로

수열 $\{c_n\}$을 $c_n=|a_n|-|b_n|$이라 하면

$$c_n=\begin{cases}(n+5)d-(-2n+8)d & (1\leq n\leq3)\\(n+5)d-(2n-8)d & (n\geq4)\end{cases}$$

$$c_n=\begin{cases}3(n-1)d & (1\leq n\leq3)\\(13-n)d & (n\geq4)\end{cases}$$

$1\leq n\leq13$일 때 $c_n\geq0$이고 $c_{13}=0$

$n\geq14$일 때 $c_n<0$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}(|a_k|-|b_k|)=\sum_{k=1}^{n}c_k$의 값이 최대가 되는

$n=12$ 또는 $n=13$

$$S_{12}=S_{13}=\sum_{n=1}^{13}c_n$$

$$=\sum_{n=1}^{3}3(n-1)d+\sum_{n=4}^{13}(13-n)d$$

수열 $\{c_n\}$은

$$c_n=\begin{cases}6(n-1) & (1\leq n\leq3)\\2(13-n) & (n\geq4)z\end{cases}$$

$c_1=0,\ c_2=6,\ c_3=12$

$c_4=-c_{22},\ c_5=-c_{21},\ c_6=-c_{20},\ \cdots,$

$c_{12}=-c_{14},\ c_{13}=0,$

$c_{23}=-20,$

$n\geq24$에서 $c_n<0$이므로

$S_{22}=(c_1+c_2+c_3)+(c_4+c_5+c_6+\cdots+c_{22})$

$=(0+6+12)+0=18$

$S_{23}=S_{22}+c_{23}=18+(-20)=-2$

$n\geq23$일 때 $S_n<0$

따라서 $S_n\geq0$을 만족시키는 자연수 n의

최댓값 $m=22$이고 $a_{22}=(22+5)\times2=54$