[준킬러][수학1] 5수열1

03 수1 08 등차수열

01 등차수열의 일반항

06 중항1 (등차중항)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 11월 17

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 11월 17

1. 양수 x, y, z가 이 순서로 등차수열을 이루고

$a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}$일 때, $\dfrac{4a+c}{3b}$의 최솟값은?

(단, a, b, c는 1이 아닌 양수이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1

④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 07월 26

2. 0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}$일 때, $16xz^2+9y^2$의 최솟값을 구하시오. (단, x, y, z는 1이 아닌 양수이다.)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 26

3. 세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루고 다음 조건을 만족시킬 때, abc의 값을 구하시오.

(가) $\dfrac{2^a\times 2^c}{2^b}=32$

(나) $a+c+ca=26$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 14

4. 1보다 큰 세 자연수 a, b, c에 대하여 세 수 $\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 공차가 자연수인 등차수열을 이룬다. $\log abc = 15$일 때, $\log \dfrac{ac^2}{b}$의 최댓값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

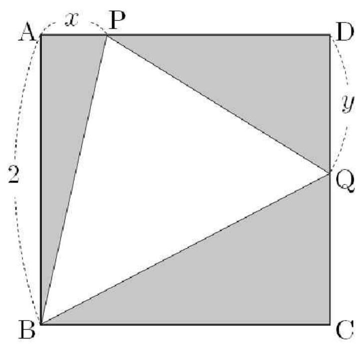
03 수1 08 등차수열

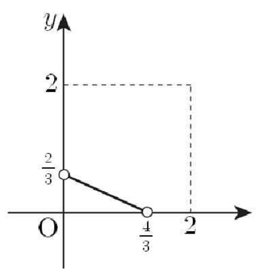
01 등차수열의 일반항

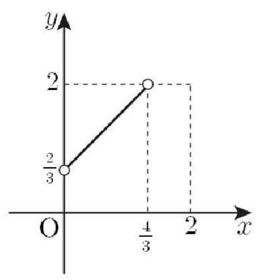
08 중항3 (중항의 활용)

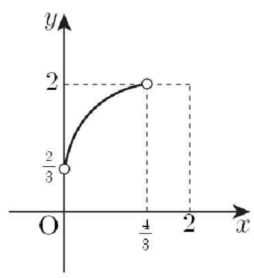
[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 17

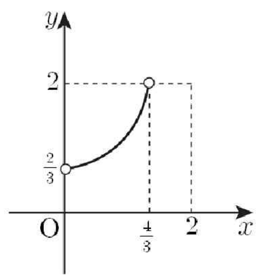
5. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 변 AD 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=x$, 변 CD 위의 점 Q에 대하여 $\overline{DQ}=y$라 하자. △ABP, △PQD, △QBC의 넓이가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x, y사이의 관계를 그래프로 나타내면?

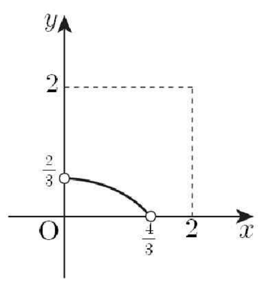


①


②


③


④


⑤


[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 11월

6. 그림과 같이 5행 5열로 이루어진 표에 네 개의 수가 적혀 있다. 각 행의 다섯 개의 수는 열의 순서대로, 각 열의 다섯 개의 수는 행의 순서대로 각각 등차수열을 이루도록 나머지 빈칸에 수를 적고자 한다. 3행 3열에 들어갈 수를 구하시오.

	1열	2열	3열	4열	5열
1행	0				
2행			27		
3행					74
4행		41			
5행					

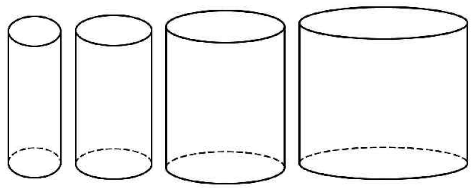
03 수1 08 등차수열

01 등차수열의 일반항

09 중항4 (등차수열을 이루는 수)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 06월 21

7. 그림과 같이 4개의 원기둥 모양의 물통 A, B, C, D는 밑면의 반지름의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 높이는 모두 같다.



각각의 물통에 매분 πL의 물을 넣어 가득 채울 때, 다음이 성립한다.

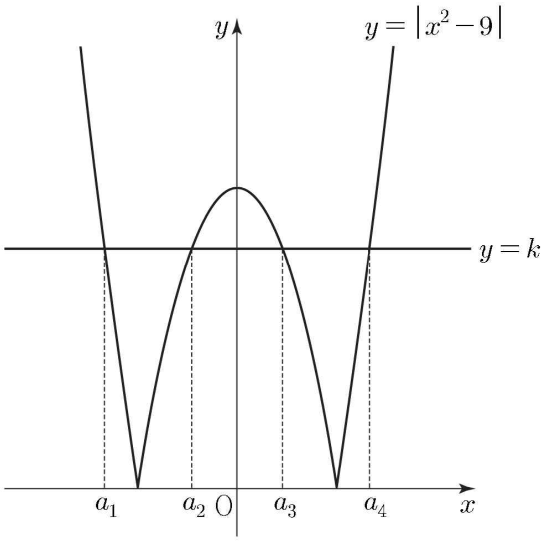
> (가) 물통 B를 채우는 데 걸리는 시간은 물통 A를 채우는 데 걸리는 시간보다 8분이 더 걸린다.
> (나) 물통 C를 채우는 데 걸리는 시간은 물통 B를 채우는 데 걸리는 시간보다 16분이 더 걸린다.

물통 D를 채우는 데 걸리는 시간은? (단, 물통의 두께는 고려하지 않는다.)

① 57분 ② 55분 ③ 53분
④ 51분 ⑤ 49분

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 20

8. 그림과 같이 함수 $y=|x^2-9|$의 그래프가 직선 $y=k$와 서로 다른 네 점에서 만날 때, 네 점의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. 네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 상수 k의 값은? (단, $a_1<a_2<a_3<a_4$)



① $\frac{34}{5}$ ② 7 ③ $\frac{36}{5}$

④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{38}{5}$

03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

02 합2 (합으로 표현된 관계식)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 14

9. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9=|S_3|=27$일 때, a_{10}의 값은?

① 23 ② 24 ③ 25

④ 26 ⑤ 27

03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

03 합3 (합에 대한 성질)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 22

10. n개의 항으로 이루어진 등차수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

이때 n의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 17

11. 등차수열$\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3=42$일 때, 다음 조건을 만족시키는 4이상의 자연수 k의 값은?

(가) $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$

(나) $S_k=k^2$

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 21

12. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_6+a_7=-\frac{1}{2}$

(나) $a_l+a_m=1$이 되도록 하는 두 자연수 l, $m(l<m)$의 모든 순서쌍 (l, m)의 개수는 6이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제14항까지의 합을 S라 할 때, $2S$의 값을 구하시오.

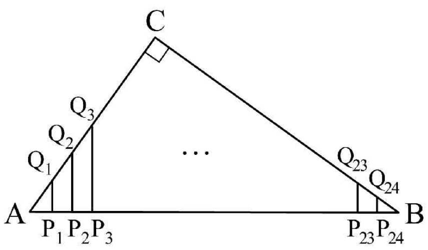
03 수1 08 등차수열

02 등차수열의 합

07 합의 활용2 (함수, 도형 또는 실생활)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 03월 30

13. 그림과 같이 $\overline{AC}=15$, $\overline{BC}=20$이고, $\angle C=90^{\circ}$인 직각 삼각형 ABC가 있다. 변 AB를 25등분하는 점 P_1, P_2, $\cdots$, P_{24}를 지나 변 AB에 수직인 직선을 그어 변 AC 또는 변 CB와 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_{24}라 하자.
$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}$ 의 값을 구하시오.



[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 03월 25

14. 선미는 문제 수가 x인 수학책을 첫째 날에는 15문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 아홉 째 날까지 문제를 풀고 나면 24문제가 남게 된다. 또, 첫째 날에는 30문제를 풀고 둘째 날부터 매일 문제 수를 d만큼씩 증가시키면서 풀어 일곱째 날까지 문제를 풀고 나면 39문제가 남게 된다. 선미가 풀고자 하는 이 수학책의 문제 수 x의 값을 구하시오.

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 27

15. 수학자 드 므와브르에 대하여 다음과 같은 일화가 전해지고 있다.

> 드 므와브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 깨닫고, 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하여 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였다. 그런데, 놀랍게도 그날에 수면하는 상태에서 생을 마쳤다.

드 므와브르가 매일 밤 12시에 잠든다고 가정할 때, 처음 이 사실을 알게 된 날의 수면 시간이 14시간이었다면 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어있는 시간의 합은?

① 197 ② 205 ③ 214
④ 224 ⑤ 235

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 29

16. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x)=\begin{cases} 3^{x} & (0 \le x < 2) \\ 3^{-(x-4)} & (2 \le x < 4) \end{cases}$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

닫힌 구간 $[0, 40]$에서 방정식 $f(x)-5=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

03 수1　　08 등차수열

03 등차수열의 추론과 함수적 해석

01 추론1 (등차수열의 결합과 합성)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 16

17. 두 실수 a, b와 수열 $\{c_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(m+2)$개의 수
>
> a, $\log_2 c_1$, $\log_2 c_2$, $\log_2 c_3$, $\cdots$, $\log_2 c_m$, b
>
> 가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
>
> (나) 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제 m항까지의 항을 모두 곱한 것은 32이다.

$a+b=1$일 때, 자연수 m의 값은?

① 6　② 8　③ 10

④ 12　⑤ 14

03 수1 08 등차수열

03 등차수열의 추론과 함수적 해석

02 추론2 (함수적 해석)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 21

18. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_3=40,\ a_8=30$일 때,

$|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|$이 최소가 되는 자연수 n의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 30

19. 첫째항이 60인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$	(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 29

20. 첫째항이 50, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{16} < T_{17}$
(나) $T_{17} > T_{18}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 29

21. 첫째항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_9 = S_{18}$이다. 집합 T_n을

$$T_n = \{S_k \mid k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$$

이라 하자. 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 15

22. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은?

① 372 ② 377 ③ 382
④ 387 ⑤ 392

03 수1 08 등차수열

03 등차수열의 추론과 함수적 해석

03 추론3 (추론과 해석)

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

23. 백의 자리의 수, 십의 자리의 수, 일의 자리의 수가 이 순서대로 등차수열을 이루는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 03월 30

24. 모든 항이 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$과 1보다 큰 자연수 m에 대하여 다항식

$$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$$

이 있다.

$$P(1)=5P(-1)$$

을 만족시키는 다항식 $P(x)$에서 자연수 m의 값을 k라 하자. 다항식 $a_{k+1}x^k+a_kx^{k-1}+\cdots+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어질 때, $\dfrac{a_1}{a_{k+1}}$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 20

25. 두 수 2와 4 사이에 n개의 수 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n을 넣어 만든 $(n+2)$개의 수 2, a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, 4가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 집합 $A_n=\{2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 4\}$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, n은 자연수이다.)

<보 기>

ㄱ. n이 홀수이면 $3\in A_n$

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $A_n\subset A_{2n+1}$

ㄷ. 집합 $A_{2n+1}-A_n$의 모든 원소의 합을 S_n이라 할 때, $S_6+S_{13}=63$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 13

26. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$|S_3| = |S_6| = |S_{11}| - 3$$

을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은?

① $\frac{31}{5}$ ② $\frac{33}{5}$ ③ 7
④ $\frac{37}{5}$ ⑤ $\frac{39}{5}$

03 수1 08 등차수열

03 등차수열의 추론과 함수적 해석

04 추론4 (추론과 정수론)

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 06월 29

27. 네 자연수 a_1, a_2, a_3, a_4가 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$를 만족한다. $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}(n=1, 2, 3)$이라 할 때, 세 자연수 b_1, b_2, b_3은 이 순서대로 첫째항과 공차가 같은 등차수열을 이룬다. $a_4 = 144$일 때, $a_1 + b_1$의 값을 구하시오.

03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

01 일반항1 (관계식)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

28. 모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n b_n = \frac{(a_{n+1})^2 + 4(b_{n+1})^2}{5}$$

를 만족시킬 때, 공비의 최댓값은?

① $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 1

03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

04 일반항4 (등차수열과 등비수열)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 27

29. 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 1보다 작은 등비수열 $\{b_n\}$이

$$a_1 + a_8 = 8,\ b_2 b_7 = 12,\ a_4 = b_4,\ a_5 = b_5$$

를 모두 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오.

03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

06 중항2 (등차중항과 등비중항)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 27

30. <보기>의 함수 중에서 그 그래프 위의 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, p)$, $\mathrm{B}(b, q)$, $\mathrm{C}(c, r)$를 선택하되, x좌표 a, b, c는 차례로 등차수열을 이루고 y좌표 p, q, r는 차례로 등비수열을 이루게 할 수 있는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x$ ㄴ. $g(x)=\dfrac{1}{x}$ ㄷ. $h(x)=2^{x}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 30

31. 두 실수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합을 k라 하자. $48k$의 값을 구하시오.

(가) $ab<0$
(나) 세 수 a, b, ab를 적절히 배열하여 등비수열을 만들 수 있다.
(다) 세 수 a, b, ab를 적절히 배열하여 등차수열을 만들 수 있다.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 03월 30

32. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) a_7, a_8, a_k가 이 순서대로 등비수열을 이루도록 하는 8보다 큰 자연수 k가 존재한다.

$a_k=144$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

① 66 ② 67 ③ 68
④ 69 ⑤ 70

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 21

33. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$ (나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여 세 항 $a_2,\ a_k,\ a_{3k-1}$이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오.

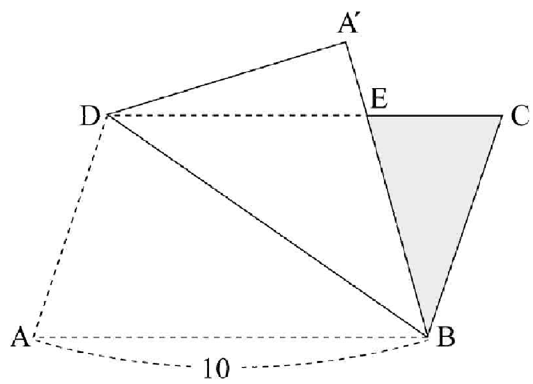
03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

07 중항3 (등비중항의 활용)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 11

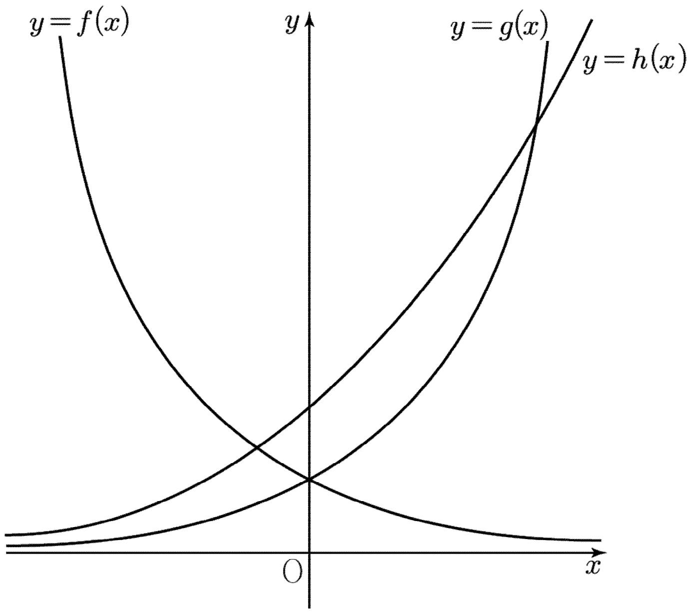
34. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$인 평행사변형 ABCD가 있다. 이 도형을 대각선 BD를 따라 접어서 생기는 삼각형 EBC의 넓이가 평행사변형 ABCD의 넓이의 $\frac{1}{5}$이고, $\overline{\mathrm{CE}}$, $\overline{\mathrm{EB}}$, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, 선분 AD의 길이는?



① $2\sqrt{11}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{46}$
④ $\sqrt{47}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 14

35. 세 지수함수 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $g(x)=4^x$, $h(x)=2^{x+2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



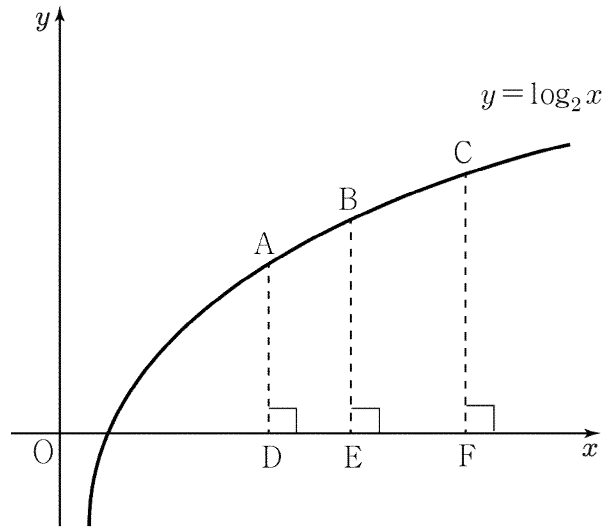
양수 k에 대하여 $x=k$에서의 함숫값 $f(k)$, $g(k)$, $h(k)$를 크기 순서대로 나열하였을 때, 이 순서대로 등비수열을 이루는 k의 값은?

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$

④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 19

36. 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. 세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 공차가 양수인 등차수열을 이루고 점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점일 때, 원점 O에 대하여 $\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

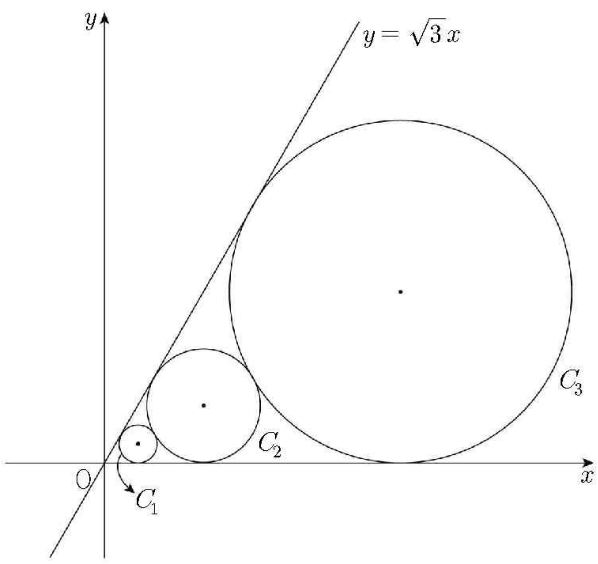


① 61 ② 62 ③ 63

④ 64 ⑤ 65

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 29

37. 그림과 같이 세 원 C_1, C_2, C_3은 직선 $y=\sqrt{3}x$와 x축에 동시에 접하고, 원 C_2는 두 원 C_1, C_3과 각각 외접하고 있다. 세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이루고 원 C_1의 중심과 원 C_3의 중심 사이의 거리는 12일 때, 세 원의 넓이의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심은 제 1사분면에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 03월 28

38. 두 함수 $f(x)=k(x-1)$, $g(x)=2x^2-3x+1$에 대하여

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$

가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(가) 세 수 $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

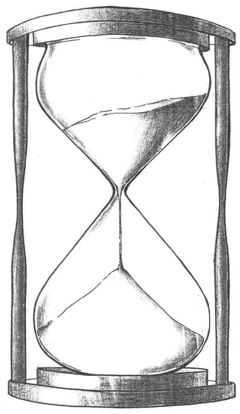
03 수1 09 등비수열

01 등비수열의 일반항

08 중항4 (등비수열을 이루는 수)

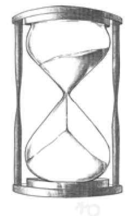
[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 25

39. 모래시계 A, B, C에 들어 있는 모래의 양은 각각 3^a, 9^b, 27^c이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c이다. a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 3^a, 9^b, 27^c도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C로 잴 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C라 할 때, $t_A+t_B+t_C$의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어진 후 뒤집지 않는다.)



[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 25

40. 모래시계 A, B, C에 들어 있는 모래의 양은 각각 3^a, 9^b, 27^c이고 매 초당 모래가 위에서 아래로 일정하게 떨어지는 양은 각각 a, b, c이다. a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 3^a, 9^b, 27^c도 이 순서대로 등비수열을 이루며, 두 수열의 공비는 같다. 모래시계 A, B, C로 잴 수 있는 시간(초)을 각각 t_A, t_B, t_C라 할 때, $t_A+t_B+t_C$의 값을 구하시오. (단, 모래가 다 떨어진 후 뒤집지 않는다.)



[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 04월 29

41. 서로 다른 세 자연수 a, b, c가 다음 세 조건을 모두 만족시킬 때, $a+b+c$의 값은?

(가) a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $b-a=n^2$(단, n은 자연수이다.)
(다) $\log_6 a+\log_6 b+\log_6 c=3$

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

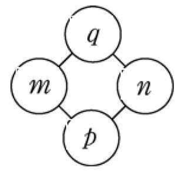
03 수1 09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

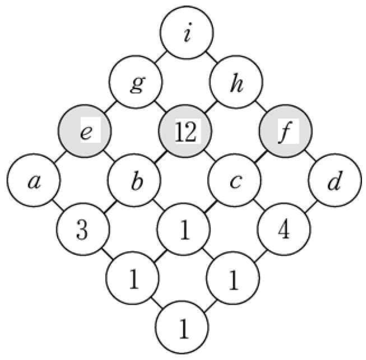
02 추론2 (정수론)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 09월 21

42. 두 자연수 m과 n의 최대공약수를 p, 최소공배수를 q라 할 때, 이런 관계를 만족시키는 수를 [그림 1]과 같이 나타내기로 하자.
[그림 2]는 [그림 1]의 관계를 만족시키도록 수를 연결하여 나타낸 것이다. 세 자연수 e, 12, f가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $e+f$의 값을 구하시오.



[그림 1]



[그림 2]

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 30

43. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = b_1 = 6$
(나) 수열 $\{a_n\}$은 공차가 p인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공비가 p인 등비수열이다.

수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되도록 하는 1보다 큰 모든 자연수 p의 합을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 28

44. 10보다 크고 100보다 작은 두 자연수 m, n이 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 값을 구하시오.

(가) $\log_m n$은 유리수이다.
(나) 세 수 m, n, 256은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고1 11월 29

45. $r>1$인 실수 r에 대하여 전체집합

$$U=\{r^k \mid k\text{는 102 이하의 자연수}\}$$

의 부분집합 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{r,\ r^{31},\ r^{100}\} \subset A$
(나) 집합 A의 원소들을 작은 수부터 차례대로 배열한 수열은 등비수열이다.
(다) 전체집합 U의 모든 원소들의 합은 집합 A의 모든 원소들의 합의 91배이다.

실수 r의 값을 구하시오.

03 수1 09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

03 활용1 (도형과 함수)

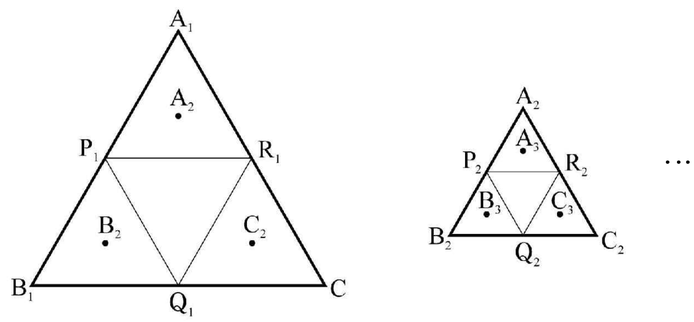
[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 8

46. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 것이다. 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이고, 모든 자연수 n에 대하여 점 (n, a_n)은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$ ③ $2-\log_3 2$
④ $3-\log_3 2$ ⑤ $4-\log_3 2$

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 06월 12

47. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하고, 세 삼각형 $A_1P_1R_1$, $B_1Q_1P_1$, $C_1R_1Q_1$의 무게중심을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 또, 삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 변 A_2B_2, B_2C_2, C_2A_2의 중점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하고, 세 삼각형 $A_2P_2R_2$, $B_2Q_2P_2$, $C_2R_2Q_2$의 무게 중심을 각각 A_3, B_3, C_3이라 하자.

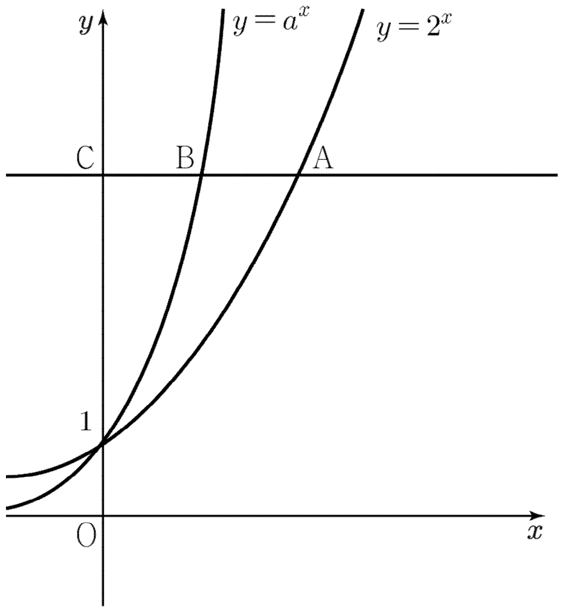


이와 같은 과정을 계속하여 삼각형을 그려나갈 때, 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이를 l_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} l_n$의 값은?

① $\frac{705}{128}$ ② $\frac{735}{128}$ ③ $\frac{765}{128}$
④ $\frac{795}{128}$ ⑤ $\frac{825}{128}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 21

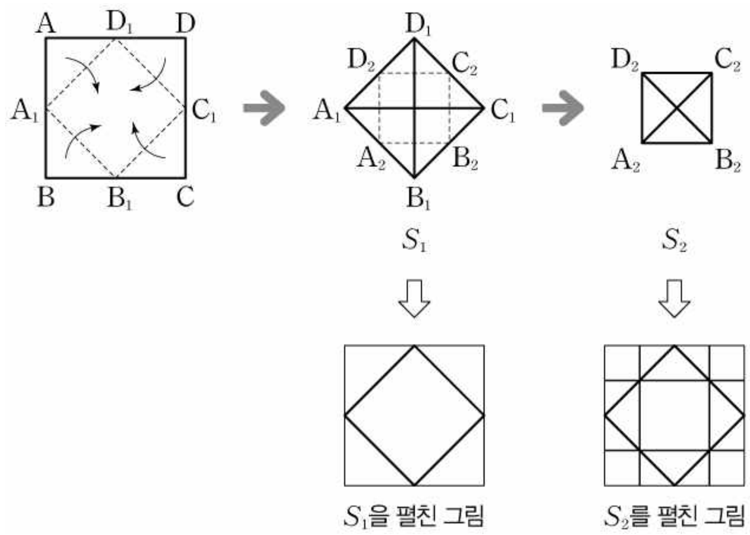
48. 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$과 $y=a^x(a>2)$에 대하여 y축 위의 점 C를 지나고 x축과 평행한 직선이 두 곡선과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.
자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{CB}}:\overline{\mathrm{BA}}=1:n$을 만족시키는 a의 값을 $f(n)$이라 할 때, $f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(10)=2^m$이다.
m의 값은?
(단, 점 C의 y좌표는 1보다 크다.)



① 65　② 67　③ 69
④ 71　⑤ 73

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월

49. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 모양의 종이 ABCD에서 각 변의 중점을 각각 $\mathrm{A_1, B_1, C_1, D_1}$이라 하고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}, \overline{\mathrm{B_1C_1}}, \overline{\mathrm{C_1D_1}}, \overline{\mathrm{D_1A_1}}$을 접는 선으로 하여 네 점 A, B, C, D가 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_1이라 하자.
S_1에서 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 각 변의 중점을 각각 $\mathrm{A_2, B_2, C_2, D_2}$라 하고 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}, \overline{\mathrm{B_2C_2}}, \overline{\mathrm{C_2D_2}}, \overline{\mathrm{D_2A_2}}$를 접는 선으로 하여 네 점 $\mathrm{A_1, B_1, C_1, D_1}$이 한 점에서 만나도록 접은 모양을 S_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 모양을 S_n이라 하고, S_n을 정사각형 모양의 종이 ABCD와 같도록 펼쳤을 때 접힌 모든 선들의 길이의 합을 l_n이라 하자. 예를 들어 $l_1=4\sqrt{2}$이다. l_5의 값은?
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)

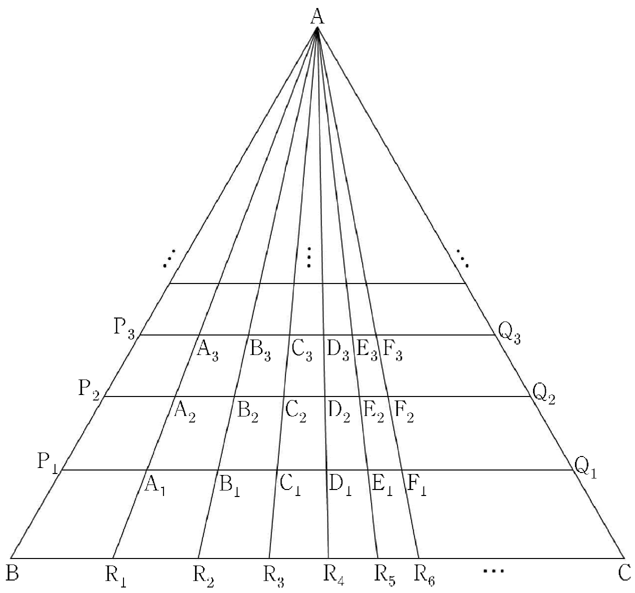


① $24+28\sqrt{2}$　② $28+28\sqrt{2}$　③ $28+32\sqrt{2}$
④ $32+32\sqrt{2}$　⑤ $36+32\sqrt{2}$

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 29

50. 한 변의 길이가 66인 정삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 세 선분 AB, AC, CB를 5 : 1로 내분하는 점을 각각 P_1, Q_1, R_1이라 하고, 세 선분 AP_1, AQ_1, CR_1을 5 : 1로 내분하는 점을 각각 P_2, Q_2, R_2라 하고, 세 선분 AP_2, AQ_2, CR_2를 5 : 1로 내분하는 점을 각각 P_3, Q_3, R_3이라 하자.
이와 같은 방법으로 세 선분 AP_{k-1}, AQ_{k-1}, CR_{k-1}을 5 : 1로 내분하는 점을 각각 P_k, Q_k, R_k($k=4, 5, 6, \cdots$)라 하자.
자연수 n에 대하여 선분 AR_1과 선분 P_nQ_n의 교점을 A_n, 선분 AR_2와 선분 P_nQ_n의 교점을 B_n, 선분 AR_3과 선분 P_nQ_n의 교점을 C_n, 선분 AR_4와 선분 P_nQ_n의 교점을 D_n, 선분 AR_5와 선분 P_nQ_n의 교점을 E_n, 선분 AR_6과 선분 P_nQ_n의 교점을 F_n이라 하자.

$\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_3D_3}+\overline{D_4E_4}+\overline{E_5F_5}=25-\dfrac{5^b}{6^a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 자연수이다.)



03 수1 09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

04 활용2 (실생활)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 14

51. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

> (가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
> (나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\dfrac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.)

① $\dfrac{101}{2}a$ ② $\dfrac{111}{2}a$ ③ $\dfrac{121}{2}a$
④ $\dfrac{131}{2}a$ ⑤ $\dfrac{141}{2}a$

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 14

52. 다음은 어느 회사의 연봉에 관한 규정이다.

(가) 입사 첫째 해 연봉은 a원이고, 입사 19년째 해까지의 연봉은 해마다 직전 연봉에서 8%씩 인상된다.
(나) 입사 20년째 해부터의 연봉은 입사 19년째 해 연봉의 $\frac{2}{3}$로 한다.

이 회사에 입사한 사람이 28년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은? (단, $1.08^{18}=4$로 계산한다.)

① $\frac{101}{2}a$ ② $\frac{111}{2}a$ ③ $\frac{121}{2}a$
④ $\frac{131}{2}a$ ⑤ $\frac{141}{2}a$

03 수1 09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

05 활용3 (원리합계)

[출처] 2005 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

53. 정확히 10년 전(120개월 전) A씨는 집을 사면서 집값의 일부를 빌려, 20년 간 매달 월이율 r(연이율 $1200r$%)의 월 복리로 계산하여 돈을 빌린 지 한 달 후부터 매달 일정 금액 P만큼씩 240회로 나누어 원금과 이자를 갚되 중도에 일시 상환할 경우에는 일시 상환 금액의 2%를 수수료로 추가 지불하기로 하였다. 그런데 A씨는 오늘 오전 120회째 상환금 P를 납부한 직후 B씨에게 집을 팔면서 다음 달 상환금부터는 B씨가 지불하기로 하고 상환 통장을 B씨에게 넘겨주었다. 한편, B씨는 집을 산 그날 오후 마음이 변하여, 남은 10년 간의 상환액을 일시 상환하고자 한다. B씨가 오늘 수수료와 함께 납부해야할 금액을 P와 r를 이용하여 나타낸 것은?

① $1.02P(1+r)\left[(1+r)^{120}-1\right]$
② $1.02P(1+r)\left[1-(1+r)^{-120}\right]$
③ $\frac{1.02P}{r}\left[(1+r)^{120}-1\right]$
④ $\frac{1.02P}{r}\left[1-(1+r)^{-120}\right]$
⑤ $\frac{1.02P}{1+r}\left[(1+r)^{120}-1\right]$

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 04월 14

54. 1월 초에 1000만원을 월이율 0.5%, 1개월 마다 복리로 계산하는 예금 상품에 가입하고, 1월부터 그 해 12월까지 매월 말에 50만원씩 찾았다. 그 해 12월 말에 통장에 남아있는 금액은? (단, $1.005^{12}=1.0617$으로 계산한다.)

① 426만 7000원 ② 432만 7000원
③ 438만 7000원 ④ 444만 7000원
⑤ 450만 7000원

03 수1

09 등비수열

03 등비수열의 추론과 활용

06 활용4 (상용로그)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 09월 19

55. 현주는 이번 달 휴대전화의 사용 요금으로 20,000원을 납 부하였다. 매월 사용 요금이 3%씩 증가한다고 할 때, 9개월 후에 현주가 납부할 휴대전화 사용 요금을 주어진 상용로그 표를 이용하여 구하면?

<상용로그표>

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27

① 약 25,400원 ② 약 25,560원 ③ 약 26,080원
④ 약 26,400원 ⑤ 약 28,380원

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

56. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_4,\ a_3^{\log_2 3} = 27$$

일 때, 집합 $\left\{n \,\middle|\, \log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n} \text{은 자연수}\right\}$의 모든 원소의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

01 시그마의 뜻1 (표현과 나열)

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 11월 9

57. $0 \le x \le 4$에서 함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{3} |x-k|$로 정의할 때, $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

58. 좌표평면 위에 5개의 점 $\mathrm{P}_1(-2,\ 1)$, $\mathrm{P}_2(-1,\ 2)$, $\mathrm{P}_3(0,\ 3)$, $\mathrm{P}_4(1,\ 2)$, $\mathrm{P}_5(2,\ 4)$가 있다. 점 $\mathrm{P}_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$의 x좌표를 x_i, y좌표를 y_i라 할 때, $\sum_{i=1}^{5}(ax_i+b-y_i)^2$의 값이 최소가 되도록 하는 두 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

03 수1

10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

02 시그마의 뜻2 (등차수열)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 29

59. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$은

$$a_{26}=30,\quad \sum_{n=1}^{13}\left\{(a_{2n})^2-(a_{2n-1})^2\right\}=260$$

을 만족시킨다. a_{11}의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 28

60. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1+a_2+a_3=159$

(나) $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=96$인 자연수 m에 대하여

$\sum_{k=1}^{m} a_k=425$ (단, $m>3$)

a_{11}의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 11월 15

61. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10

④ 11 ⑤ 12

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 10월 17

62. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) S_n은 n에 대한 이차식이다.

(나) $S_{10}=S_{50}=10$

(다) S_n은 $n=30$에서 최댓값 410을 갖는다.

50보다 작은 자연수 m에 대하여 $S_m>S_{50}$을 만족시키는 m의 최솟값을 p, 최댓값을 q라 할 때, $\sum_{k=p}^{q} a_k$의 값은?

① 39 ② 40 ③ 41

④ 42 ⑤ 43

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 21

63. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{n=1}^{5} a_n = 2\left|\sum_{n=1}^{10} a_n\right|$

(나) $a_3 a_6 > 0$

$\frac{a_{21}}{a_1}$ 의 값은?

① -5 ② $-\frac{17}{4}$ ③ $-\frac{7}{2}$

④ $-\frac{11}{4}$ ⑤ -2

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 28

64. 첫째항이 자연수이고 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오.

(가) $|a_5| + |a_6| = |a_5 + a_6| + 2$

(나) $\sum_{n=1}^{6} |a_n| = 37$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 21

65. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{14}의 값은?

(가) $\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$을 만족시키는 자연수 m이 존재한다.

(나) $2\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n| = 90$

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 19

66. 다음은 공차가 1보다 크고 $a_3+a_5=2$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-5|a_k|)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차를 구하는 과정이다.

$a_3+a_5=2$에서 $a_4=\boxed{(가)}$ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하고 $\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2$과 $\sum_{k=1}^{5}\|a_k\|$를 각각 d에 대한 식으로 나타내면 $\sum_{k=1}^{5}a_k{}^2=15d^2-10d+5$ $\sum_{k=1}^{5}\|a_k\|=\boxed{(나)}$ 따라서 $\sum_{k=1}^{5}(a_k{}^2-5\|a_k\|)$의 값이 최소가 되도록 하는 수열 $\{a_n\}$의 공차는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나)에 알맞은 식을 $f(d)$라 할 때, $f(p+2q)$의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25
④ 27 ⑤ 29

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 20

67. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=0,\ \sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=30$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 21

68. 공차가 자연수 d이고 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 d의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다. (나) $a_{2m}=-a_m$이고 $\sum_{k=m}^{2m}\|a_k\|=128$인 자연수 m이 존재한다.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

69. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$
④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

03 시그마의 뜻3 (등비수열)

[출처] 2008 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

70. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{12} a_k = 100$과 $\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = 10$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{12} \log a_k$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 26

71. 첫째항과 공비가 모두 자연수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $5 \le a_2 \le 6$, $42 \le a_4 \le 96$일 때, $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 28

72. 첫째항이 2이고 공비가 정수인 등비수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이 다음 조건을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

(가) $4 < a_2 + a_3 \le 12$
(나) $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 17

73. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은?

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$
(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

04 시그마의 성질1 (기본성질)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 27

74. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$과 자연수 m이

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k+1} = 240, \quad \sum_{k=1}^{m} (a_k + m) = 360$$

을 만족시킬 때, a_m의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

01 시그마의 뜻과 성질

05 시그마의 성질2 (식 변형)

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

75. 두 수 a, b가

$$a = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{2k(2k-1)}$$

$$b = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(100+k)(201-k)}$$

일 때, $\left[\frac{a}{b}\right]$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 150 ② 152 ③ 154
④ 156 ⑤ 158

03 수1 10 수열의합

02 자연수의 거듭제곱의 합

05 자연수의 거듭제곱의 합4 (나열된 수)

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

76. $a_1=\frac{9}{8}$ 이고 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\frac{9}{8}\left(\frac{9}{8}+9\right)\left(\frac{9}{8}+9+9^2\right)\cdots\left(\frac{9}{8}+9+9^2+\cdots+9^n\right)$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{10}\frac{\log a_k}{k}=\log A$ 일 때, A 의 값은?

① $\frac{3^{65}}{2^{30}}$ ② $\frac{3^{60}}{2^{25}}$ ③ $\frac{2^{65}}{3^{30}}$

④ $\frac{2^{60}}{3^{25}}$ ⑤ $\frac{3^{60}}{2^{30}}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 16

77. 수열 $\{a_n\}$의 각 항이

$$a_1=1$$
$$a_2=1+3$$
$$a_3=1+3+5$$
$$\vdots$$
$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$\vdots$$

일 때, $\log_4\left(2^{a_1}\times2^{a_2}\times2^{a_3}\times\cdots\times2^{a_{12}}\right)$의 값은?

① 315 ② 320 ③ 325

④ 330 ⑤ 335

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

01 소거형1 (시그마의 성질)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 06월 28

78. 첫째항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k,\ T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$

이다. $S_{10}=25$, $\frac{1}{T_5}=\frac{54}{5}$일 때, a_6의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

03 소거형3 (기타)

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 17

79. 첫째항이 3이고 공비가 $r(r>1)$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$의 각 항이

$$b_1=\log_{a_1}a_2$$
$$b_2=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)$$
$$b_3=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)\times(\log_{a_3}a_4)$$
$$\vdots$$
$$b_n=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)\times(\log_{a_3}a_4)\times\cdots\times(\log_{a_n}a_{n+1})$$
$$\vdots$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k=120$이다. $\log_3 r$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 21

[출처] 2022 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

80. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = \log_2 \sqrt{\dfrac{2(n+1)}{n+2}}$ 이다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 150 ② 154 ③ 158

④ 162 ⑤ 166

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

81. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{\sqrt{9n^2-3n-2}+6n-1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$

일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값은?

① 110 ② 114 ③ 118

④ 122 ⑤ 126

03 수1 10 수열의합

03 여러가지 수열

06 여러가지 수열3 (군수열)

[출처] 2002 모의_공공 교육청 고2 11월 8

82. 오른쪽 그림과 같은 표 안의 각 빈 칸에 가로줄의 수와 세로줄의 수의 곱을 써넣기로 한다. 예를 들어 ㉠, ㉡, ㉢ 에는 각각 2, 12, 60을 써넣는다. 어두운 부분의 빈 칸에 써넣을 모든 수들의 합은?

×	1	2	3	4	⋯	20
1		㉠				
2						
3				㉡		
4						
⋮						
20			㉢			

① 44000 ② 44100 ③ 44200

④ 44300 ⑤ 44400

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 24

83. 2 이상의 자연수 n에 대하여 분모는 2^n꼴이고, 분자는 분모보다 작은 홀수인 모든 분수로 이루어진 다음 수열에서 첫째 항부터 제126항까지의 합을 구하시오.

$$\frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\ \cdots$$

[출처] 2004 모의_공공 교육청 고2 06월 12

84. 다음 규칙에 따라 자연수를 나열한다.

규칙 1: 제1행에는 자연수를 차례로 나열한다.
규칙 2: 제n행에 나열된 수 k가 n의 배수이면 한 칸 아래에 $k+1$을 쓰고, 그렇지 않으면 k를 쓴다.

위의 규칙에 따라 자연수를 나열하면 다음과 같다.

	제1열	제2열	제3열	제4열	제5열	제6열	제7열	제8열	$\cdots$
제1행	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
제2행	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
제3행	3	3	5	5	7	7	9	9	$\cdots$
제4행	4	4	5	5	7	7	10	10	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

<보기> 중 옳은 것을 모두 고르면?

<보 기>

ㄱ. 제5행에서 제8열의 수는 10이다.
ㄴ. 제6열에서 7은 6번 나타난다.
ㄷ. 제22열에서 처음으로 24가 나타나는 행은 제23행이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 27

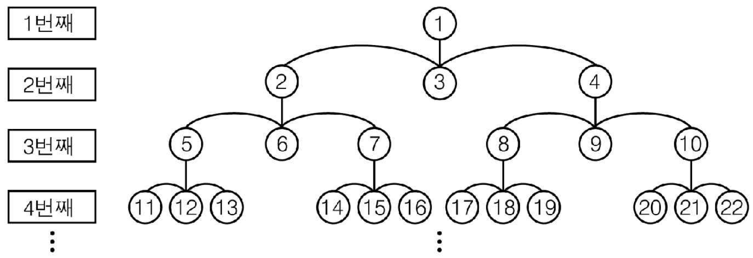
85. 다음과 같이 각 행의 등식이 성립하도록 □안에 자연수를 넣으려고 한다.

> 제 1행에 있는 3개의 □안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 1인 등차수열을 이룬다.
> 제 2행에 있는 5개의 □안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 2인 등차수열을 이룬다.
> 제3행에 있는 7개의 □안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 3인 등차수열을 이룬다.
> ⋮
> 제 n행에 있는 $(2n+1)$개의 □안에 들어가는 수는 왼쪽부터 차례대로 공차가 n인 등차수열을 이룬다.
>
> 제1행 $\square+\square=\square$
> 제2행 $\square+\square+\square=\square+\square$
> 제3행 $\square+\square+\square+\square=\square+\square+\square$
> ⋮
> 제n행 $\square+\square+\square+\cdots+\square=\square+\square+\cdots+\square$

제 n행의 맨 왼쪽의 수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오.

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 11월 26

86. 그림과 같은 규칙으로 위에서부터 차례로 숫자를 써내려간다. 예를 들어 17은 위에서 4번째, 왼쪽에서 7번째에 위치하고 있다. 2008은 위에서 m번째, 왼쪽에서 n번째에 위치한다고 할 때, $m+n$의 값을 구하시오.



[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 17

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 17

87. 그림과 같이 제 1 행에는 1 개, 제 2 행에는 2 개, ⋯ , 제 n 행에는 n 개의 직사각형을 나열하고 그 안에 다음과 같은 규칙으로 수를 적었다.

(가) 제 1 행의 직사각형에는 1 을 적는다.

(나) 제 $n+1$ 행의 왼쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 왼쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 큰 수를 적는다.

(다) 제 $n+1$ 행의 오른쪽 끝 직사각형에는 제 n 행의 오른쪽 끝 직사각형에 적힌 수보다 1 이 작은 수를 적는다.

(라) 제 $n+1$ 행의 안쪽 직사각형에는 그 직사각형에 인접한 제 n 행의 두 직사각형에 적힌 수의 합을 적는다.

제 1 행	1				
제 2 행	2	0			
제 3 행	3	2	-1		
제 4 행	4	5	1	-2	
제 5 행	5	9	6	-1	-3
⋮	⋮				

제 n 행의 맨 왼쪽으로부터 k 번째 직사각형에 적힌 수를 $\langle n, k\rangle$ 로 나타내자. 예를 들어 $\langle 4, 2\rangle = 5$ 이다. 이 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\langle 10, 1\rangle + \langle 10, 10\rangle = 2$

ㄴ. $\langle 11, 2\rangle + \langle 11, 10\rangle = 20$

ㄷ. $\langle 12, 3\rangle + \langle 12, 4\rangle + \cdots + \langle 12, 10\rangle = 2024$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

88. 그림과 같이 자연수 1, 2, 3, 4, ⋯를 나선 모양으로 차례로 적을 때, 1000과 이웃한 8개의 수 중에서 가장 작은 것은?

17	16	15	14	13
18	5	4	3	12
19	6	1	2	11
20	7	8	9	10
21	22	⋯	⋯	⋯

① 868 ② 872 ③ 876

④ 880 ⑤ 884

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 20

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 21

89. 자연수 n에 대하여 다음과 같이 모든 자연수를 작은 것부터 n행에 n개씩 차례로 나열하였다. 이때 n행에 있는 n의 배수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2 = 2$, $a_5 = 15$이다.

1 행	1					
2 행	2	3				
3 행	4	5	6			
4 행	7	8	9	10		
5 행	11	12	13	14	15	
6 행	16	17	18	19	20	21
⋮		⋮				⋱

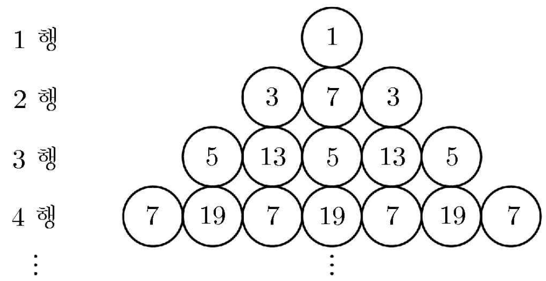
수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

① 4800 ② 4820 ③ 4840
④ 4860 ⑤ 4880

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 29

90. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 1행에는 1개, 2행에는 3개, $\cdots$, n행에는 $(2n-1)$개의 크기가 같은 원을 나열하고 그 안에 다음 규칙에 따라 숫자를 써넣는다.

> (가) 1행의 원 안에는 1을 써 넣는다.
> (나) $n \ge 2$일 때, n행의 홀수 번째 놓인 원 안에는 $(2n-1)$을 써넣는다. n행의 짝수 번째 놓인 원 안에는 $(n-1)$행과 n행에 놓인 원 중에서, n행의 짝수 번째 놓인 원과 접하는 세 원 안에 쓰인 수의 합을 써넣는다.



1행부터 10행까지 나열된 원 안에 써넣은 모든 수의 합을 S라 할 때, $\frac{S}{10}$의 값을 구하시오.

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

01 항등식과 수열1 (합과 일반항의 관계)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 18

91. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{20} a_n = p$라 할 때, 등식

$$2a_n + n = p \quad (n \geq 1)$$

가 성립한다. a_{10}의 값은? (단, p는 상수이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$

④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 1

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 25

92. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = 2n^2 - n$$

을 만족시킨다. $a_{10} + a_{11} = 20$일 때, $a_9 + a_{12}$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 28

93. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$$

을 만족시킨다. $a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

02 항등식과 수열2 (주어진 일반항)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 12

94. 자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=\left[\dfrac{n}{m}\right]$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

<보 기>

ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=2$이다.

ㄴ. $m=3$일 때, $\sum_{k=1}^{100} a_k=1683$이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{mn} a_k=\dfrac{n(mn-m+2)}{2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 10 수열의합

04 항등식과 수열, 활용

03 항등식과 수열3 (일반항 구하기)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 03월 21

95. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n\,(n\geq 1)$$

이라 하자. $b_{10}=715$일 때, $\sum_{n=1}^{10}\dfrac{b_n}{n(n+1)}$의 값은?

① 30 ② 35 ③ 40
④ 45 ⑤ 50

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 19

96. 자연수 n에 대하여 두 실수 a와 b가

$$2^a = 5^b = 10^n$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $n=1$ 이면 $a-1=\log_2 5$ 이다.

ㄴ. $n=2$ 이면 $(a-2)(b-2)=4$ 이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} \frac{(a-n)(b-n)}{n}=210$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[준킬러][수학1] 5수열1(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] ④
2. [정답] 24
3. [정답] 80
4. [정답] ④
5. [정답] ④

6. [정답] 44
7. [정답] ⑤
8. [정답] ③
9. [정답] ①
10. [정답] 13

11. [정답] ③
12. [정답] 35
13. [정답] 150
14. [정답] 375
15. [정답] ②

16. [정답] 400
17. [정답] ③
18. [정답] 22
19. [정답] 61
20. [정답] 33

21. [정답] 273
22. [정답] ①
23. [정답] 45
24. [정답] 23
25. [정답] ⑤

26. [정답] ①
27. [정답] 5
28. [정답] ③
29. [정답] 18
30. [정답] ③

31. [정답] 84
32. [정답] ②
33. [정답] 117
34. [정답] ③
35. [정답] ①

36. [정답] ①
37. [정답] 835
38. [정답] 8
39. [정답] 27
40. [정답] 27

41. [정답] ①
42. [정답] 25
43. [정답] 11
44. [정답] 80
45. [정답] 9

46. [정답] ⑤
47. [정답] ③
48. [정답] ①
49. [정답] ①
50. [정답] 22

51. [정답] ④
52. [정답] ④
53. [정답] ④
54. [정답] ④
55. [정답] ③

56. [정답] ②
57. [정답] ⑤
58. [정답] 3
59. [정답] 24
60. [정답] 26

61. [정답] ④
62. [정답] ①
63. [정답] ④
64. [정답] 13
65. [정답] ④

66. [정답] ④
67. [정답] 25
68. [정답] 170
69. [정답] ③
70. [정답] ③

71. [정답] 242
72. [정답] 162

73. [정답] ①
74. [정답] 29
75. [정답] ①

76. [정답] ①
77. [정답] ③
78. [정답] 27
79. [정답] ④
80. [정답] ④

81. [정답] ②
82. [정답] ②
83. [정답] 63
84. [정답] ③
85. [정답] 225

86. [정답] 485
87. [정답] ⑤
88. [정답] ③
89. [정답] ③
90. [정답] 247

91. [정답] ③
92. [정답] 18
93. [정답] 58
94. [정답] ③
95. [정답] ②

96. [정답] ⑤

[준킬러][수학1] 5수열1(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] ④

[해설]

$a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}=c^{\frac{1}{z}}=k$에서

$a=k^x$, $b=k^y$, $c=k^z$ x, y, z가 등차수열이므로,

a, b, c는 등비수열을 이룬다.

$b^2=ac$, $\dfrac{4a+c}{3b}\geq 2\sqrt{\dfrac{4ac}{9b^2}}=\dfrac{4}{3}$

(단, 등호는 $\dfrac{4a}{3b}=\dfrac{c}{3b}$일때 성립한다.)

2) [정답] 24

[해설]

$x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{2}{\gamma}}=k$라고 하면,

$x=k^{\alpha}$, $y^{-1}=k^{\beta}$, $z^2=k^{\gamma}$이고

α, β, γ가 등차수열이면 k^{α}, k^{β}, k^{γ}가 등비수열이므로

$(k^{\beta})^2=k^{\alpha}k^{\gamma}$

$\therefore$ $(y^{-1})^2=xz^2$

$\dfrac{1}{y^2}=xz^2$

$\therefore$ $16xz^2+9y^2=\dfrac{16}{y^2}+9y^2$

$\geq 2\sqrt{\dfrac{16}{y^2}\cdot 9y^2}=24$

(단, 등호는 $y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $xz^2=\dfrac{3}{4}$일 때 성립한다.)

$\therefore$ $16xz^2+9y^2$의 최솟값은 24

3) [정답] 80

[해설]

세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면, $a=b-d$, $c=b+d$

(가)에서

$\dfrac{2^a\times 2^c}{2^b}=2^{a+c-b}=2^{(b-d)+(b+d)-b}=2^b=32$

$\therefore b=5$

(나)에서

$a+c+ca=(5-d)+(5+d)+(5+d)(5-d)$

$=35-d^2=26$

$\therefore d=\pm 3$

그러므로 $a=2$, $b=5$, $c=8$ 또는 $a=8$, $b=5$, $c=2$

따라서 $abc=80$

4) [정답] ④

[해설]

$\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log b=\log a+\log c$

$\log b^2=\log ac$, $b^2=ac$

$\log abc=\log b^3=15$이므로

$\log b=5$

$\log a+\log b+\log c=15$를 만족시키고 공차가 자연수인 등차수열 $\log a$, $\log b$, $\log c$의 순서쌍 $(\log a, \log b, \log c)$는 $(4, 5, 6)$, $(3, 5, 7)$, $(2, 5, 8)$, $(1, 5, 9)$이다.

$\log\dfrac{ac^2}{b}=\log\dfrac{ac}{b}+\log c$

$=\log b+\log c=5+\log c$

따라서 $\log c=9$ 일 때, $\log\dfrac{ac^2}{b}$ 의 최댓값은

$5+9=14$

5) [정답] ④

[해설]

$\triangle$ABP, $\triangle$PQD, $\triangle$QBC의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면

$S_1=x$, $S_2=\dfrac{1}{2}y(2-x)$, $S_3=2-y$

S_1, S_2, S_3이 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

$y(2-x)=x+(2-y)$

$y=\dfrac{-x-2}{x-3}=\dfrac{-5}{x-3}-1$

(단, $0<x<2$, $0<y<2$)

6) [정답] 44

[해설]
표의 3행 3열의 수를 a라 하면 등차중항에 의하여 표는 아래와 같다.

	1열	2열	3열	4열	5열
1행	0				
2행	$a-37$		27		
3행	$2a-74$		a		74
4행	$109-2a$	41	$2a-27$		
5행					

$(a-37)+(109-2a)=2(2a-74)$
따라서 $a=44$

7) [정답] ⑤

[해설]
물통 A, B, C, D의 반지름의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로
a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$(단, a, d는 양의 실수)
라 하고, 물통의 높이를 h라 하자.
물통 A, B, C, D의 부피는 각각
$a^2h\pi$, $(a+d)^2h\pi$, $(a+2d)^2h\pi$, $(a+3d)^2h\pi$
이고, 물통에 매분 πL의 물을 넣어 물통 A, B, C, D를 채우는 데 걸리는 시간은 각각
$\frac{a^2h\pi}{\pi}=a^2h$
$\frac{(a+d)^2h\pi}{\pi}=(a+d)^2h$
$\frac{(a+2d)^2h\pi}{\pi}=(a+2d)^2h$
$\frac{(a+3d)^2h\pi}{\pi}=(a+3d)^2h$
이다. 조건 (가), (나)에 의해
$(a+d)^2h=a^2h+8$
$(a+2d)^2h=(a+d)^2h+16$
두 식을 연립하면 $adh=2$, $d^2h=4$이다.
a와 d는 모두 양수이므로 $d=2a$, $h=\frac{1}{a^2}$
따라서 물통 D를 채우는 데 걸리는 시간은
$(a+3d)^2h=(7a)^2\cdot\frac{1}{a^2}=49$(분)

[다른 풀이]
물통 A를 채우는 데 걸리는 시간을 t(분)이라 놓자.
물통의 높이와 물통에 들어가는 물의 양이 일정하므로 물통의 부피의 비는 밑면의 넓이의 비와 같고 물통을 채우는 데 걸리는 시간의 비와 같다.
따라서
$\frac{(a+d)^2}{a^2}=\frac{t+8}{t}\cdots$㉠
$\frac{(a+2d)^2}{(a+d)^2}=\frac{t+24}{t+8}\cdots$㉡
㉠, ㉡을 변끼리 곱하면
$\frac{(a+2d)^2}{a^2}=\frac{t+24}{t}\cdots$㉢
㉠, ㉢에서
$3\times\frac{(a+d)^2}{a^2}-\frac{(a+2d)^2}{a^2}=\frac{3(t+8)}{t}-\frac{t+24}{t}$
$\frac{2a^2+2ad-d^2}{a^2}=2$
$2a^2+2ad-d^2=2a^2$
$d(2a-d)=0$
$d\neq0$이므로 $d=2a$
㉠에 대입하면 $\frac{9a^2}{a^2}=\frac{t+8}{t}$
$9=\frac{t+8}{t}$
$\therefore\ t=1$
물통 D를 채우는 데 걸리는 시간을 t_{D}라 하면
$\frac{t_D}{t}=\frac{(a+3d)^2}{a^2}=49$

8) [정답] ③

[해설]
함수 $y=|x^2-9|$의 그래프는 y축 대칭이므로
$a_2=-a_3$
이 등차수열의 공차는 $a_3-a_2=2a_3$이므로
$a_4=a_3+2a_3=3a_3$
점 $(a_3,\ k)$는 곡선 $y=-x^2+9$ 위의 점이므로
$-a_3{}^2+9=k\cdots\cdots$㉠
점 $(a_4,\ k)$는 곡선 $y=x^2-9$ 위의 점이므로
$a_4{}^2-9=9a_3{}^2-9=k\cdots\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $10k=72$
따라서 $k=\frac{36}{5}$

9) [정답] ①

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_9=27$이므로

$$\frac{9(2a+8d)}{2}=27 \qquad \therefore a+4d=3$$

$$|S_3|=27\text{이므로 } \left|\frac{3(2a+2d)}{2}\right|=27,\ |a+d|=9$$

$$\therefore a+d=9 \text{ 또는 } a+d=-9$$

(ⅰ) $a+d=9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=9$를 연립하여 풀면 $a=11$, $d=-2$가 되어 공차가 양수라는 조건에 맞지 않는다.

(ⅱ) $a+d=-9$인 경우

$a+4d=3$과 $a+d=-9$를 연립하여 풀면

$a=-13$, $d=4$

따라서 $a_{10}=-13+9\times4=23$

10) [정답] 13

[해설]

(가)와 (나)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=26$, $a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=134$

이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=160$

$4(a_1+a_n)=160$ $\therefore$ $a_1+a_n=40$

한편, $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=260$이므로 $\dfrac{40n}{2}=260$

$\therefore$ $n=13$

11) [정답] ③

[해설]

a_{k-3}, a_{k-2}, a_{k-1}은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

a_{k-2}는 a_{k-3}과 a_{k-1}의 등차중항이다.

즉, $a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=\dfrac{-24}{2}=-12$

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$$

$$=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$$

따라서 $k^2=15k$이고 $k\neq0$이므로 $k=15$

[다른 풀이1]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$ …… ㉠

$a_{k-2}=\dfrac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}$

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉢

㉢에서 ㉠을 빼면 $a+(k-3)d=2k-42$ …… ㉣

㉡, ㉣에서 $2k-42=-12$이므로 $k=15$

[다른 풀이2]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=42$, $a=42-2d$ …… ㉠

$a_{k-3}+a_{k-1}=a+(k-4)d+a+(k-2)d=-24$이므로

$a+(k-3)d=-12$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$42-2d+kd-3d=-12$

$kd-5d=-54$ …… ㉢

$S_k=\dfrac{k\{2a+(k-1)d\}}{2}=k^2$이고, $k\neq0$이므로

$2a+(k-1)d=2k$ …… ㉣

㉠을 ㉣에 대입하면

$84-4d+kd-d=2k$, $kd-5d=2k-84$ …… ㉤

㉢, ㉤에서 $2k-84=-54$이므로 $k=15$

12) [정답] 35

[해설]

등차수열의 성질에 의해

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots$

를 만족하고, 조건 (나)에서 $a_l+a_m=1$을 만족하는 l, m의 순서쌍 (l, m)의 개수가 6이므로

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_6+a_{n-5}$

에서 $n-5=7$ 또는 $n-5=8$

$n-5=7$일 때는 조건 (가)와 모순이므로 $n-5=8$이다.

$\therefore a_1+a_{13}=a_6+a_8=1$ …… ㉠

조건 (가)에서 $a_6+a_7=-\frac{1}{2}$ …… ㉡

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

㉠−㉡에서 $d=\frac{3}{2}$

$$\therefore 2S=2\times\frac{14(a_1+a_{14})}{2}$$
$$=14(a_1+a_{13}+d)$$
$$=14\left(1+\frac{3}{2}\right)$$
$$=35$$

13) [정답] 150

[해설]

꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{AB}=25$이므로 $\overline{CH}=\frac{15\times20}{25}=12$

$\overline{AH}=\sqrt{15^2-12^2}=9$이고 P_9, Q_9가 각각 H, C와 일치하므로

$\overline{P_9Q_9}=\overline{CH}=12$

삼각형 AHC에서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=(1+2+3+\cdots+9)\tan A$

$=\frac{4}{3}\times\frac{9\times10}{2}=60$

또, 삼각형 BHC에서

$\overline{P_{10}Q_{10}}+\overline{P_{11}Q_{11}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=(15+14+13+\cdots+2+1)\tan B$

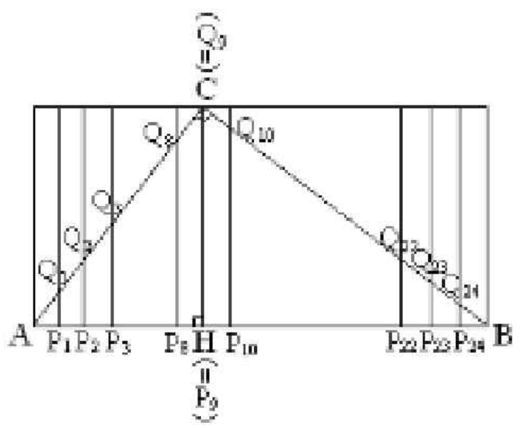
$=\frac{3}{4}\times\frac{15\times16}{2}=90$

따라서

$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}=60+90=150$

[다른 풀이]

다음 그림에서



$\left(\overline{P_1Q_1}+\cdots+\overline{P_8Q_8}\right)+\overline{P_9Q_9}+\left(\overline{P_{10}Q_{10}}+\cdots+\overline{P_{24}Q_{24}}\right)$

$=\frac{1}{2}\times12\times8+12+\frac{1}{2}\times12\times15=150$

14) [정답] 375

[해설]

선미가 매일 푸는 문제수는 공차가 d인 등차수열이므로

$x=15+(15+d)+(15+2d)+\cdots+(15+8d)+24$

$\quad=30+(30+d)+(30+2d)+\cdots+(30+6d)+39$

즉, $\frac{9(15+15+8d)}{2}+24=\frac{7(30+30+6d)}{2}+39$

$9(15+4d)+24=7(30+3d)+39$에서

$15d=90\quad\therefore\ d=6$

따라서 수학책의 문제수는

$x=9(15+4d)+24=9(15+4\cdot6)+24=375$

15) [정답] ②

[해설]

이 사실을 알게 된 날을 첫째 날로 하여 드 므와브르가 깨어 있는 시간을 수열 $\{a_n\}$이라고 하면 a_n은 $a_1=10$(시간)이고 공차가 $-\frac{1}{4}$(시간)인 등차수열이다. 24시간 계속 수면하게 되는 날은 깨어 있는 시간이 0시간이므로

$a_n=10-\frac{1}{4}(n-1)=0\quad\therefore\ n=41$

$\therefore$ 깨어있는 시간의 합은 $\frac{41(10+0)}{2}=205$(시간)이다.

16) [정답] 400

[해설]

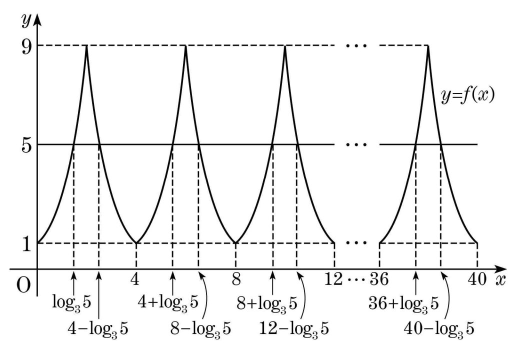
(i) $0\le x<2$일 때 $f(x)=5$에서

$3^x=5\quad\therefore\ x=\log_3 5$

(ii) $2\le x<4$일 때 $f(x)=5$에서

$3^{-x+4}=5,\ -x+4=\log_3 5\quad\therefore\ x=4-\log_3 5$

함수 $y=f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로 닫힌 구간 $[0,\ 40]$에서 $f(x)=5$인 x값들을 차례대로 구하면 다음과 같다. $\log_3 5$, $4-\log_3 5$, $4+\log_3 5$, $8-\log_3 5$, $8+\log_3 5$, $12-\log_3 5$, $12+\log_3 5$, $\cdots$, $40-\log_3 5$



따라서 이들을 모두 더하면

$\{\log_3 5+(4-\log_3 5)\}+\{(4+\log_3 5)+(8-\log_3 5)\}$

$+\ \cdots\ +\{(36+\log_3 5)+(40-\log_3 5)\}$

$=4+12+20+\ \cdots\ +76=\dfrac{10\times(4+76)}{2}=400$

17) [정답] ③

[해설]

(가)에서 등차수열의 합을 이용하면

$$a+\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m+b=\frac{(a+b)(m+2)}{2}$$

$$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m+1=\frac{(m+2)}{2}\quad(\because a+b=1)$$

$$\log_2 c_1+\cdots+\log_2 c_m=\frac{m}{2}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

(나)에서 $c_1\times\cdots\times c_m=32$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉡에서 $\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\log_2 32=5$

㉠에서 $\log_2(c_1\times\cdots\times c_m)=\dfrac{m}{2}$

$\therefore\ \dfrac{m}{2}=5 \qquad \therefore m=10$

18) [정답] 22

[해설]
수열 $\{a_n\}$에서 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=a+2d=40$, $a_8=a+7d=30$이고 $a=44$, $d=-2$이므로
$a_n=-2n+46$이다.
$\therefore\ a_{2n}=-4n+46$
$|a_2+a_4+\cdots+a_{2n}|=|-2n^2+44n|$
따라서 최소가 되는 자연수 n은 22이다.

19) [정답] 61

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$T_n=\left|\dfrac{n\{120+(n-1)d\}}{2}\right|$, $T_{20}=T_{21}$

$$\left|\frac{20(120+19d)}{2}\right|=\left|\frac{21(120+20d)}{2}\right|$$

(i) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=\dfrac{21(120+20d)}{2}$ 일 때

$d=-3$, 이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립한다.

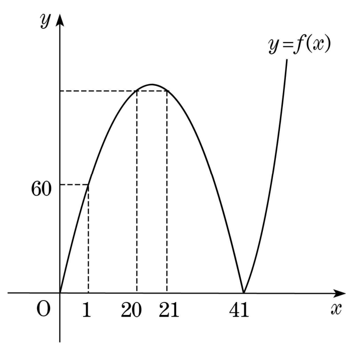
(ii) $\dfrac{20(120+19d)}{2}=-\dfrac{21(120+20d)}{2}$

일 때 $d=-\dfrac{123}{20}$, 이때 조건 $T_{19}<T_{20}$이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $T_n=\left|\dfrac{-3n^2+123n}{2}\right|$

$f(x)=\left|\dfrac{-3x^2+123x}{2}\right|$라 하면 함수

$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그래프에서 $f(41)=0$이므로 $T_{41}=0$

$\therefore\ T_{21}>T_{22}>T_{23}>\ \cdots\ >T_{41}=0,\ T_{41}<T_{42}$

따라서 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 n의 값은

21, 22, 23, $\cdots$, 40이다.

$\therefore$ 최솟값과 최댓값의 합은$21+40=61$

20) [정답] 33

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 정수)라 하자.
$T_{16}<T_{17}$, $T_{17}>T_{18}$이 성립하므로
$a_{17}>0$, $a_{18}<0$
$a_{17}=50+16d>0$에서
$d>-\dfrac{25}{8}$
$a_{18}=50+17d<0$에서
$d<-\dfrac{50}{17}$
따라서 $-\dfrac{25}{8}<d<-\dfrac{50}{17}$이므로

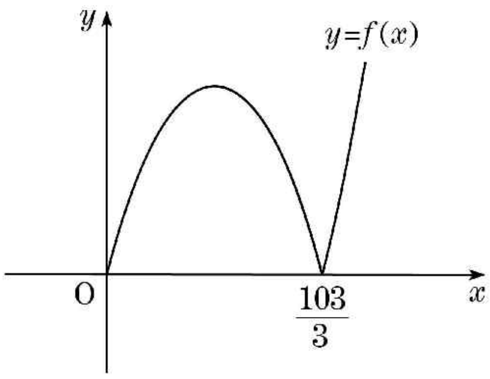
$d=-3$

$\therefore\ T_n=\left|\dfrac{n\{100+(n-1)(-3)\}}{2}\right|$

$=\dfrac{|3n^2-103n|}{2}$

이때 $f(x)=\dfrac{|3x^2-103x|}{2}$라 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$34<\dfrac{103}{3}<35$이므로

T_n은 $n=34$또는 35일 때 최솟값을 갖는다.

$T_{34}=\dfrac{|3\times34^2-103\times34|}{2}=17$

$T_{35}=\dfrac{|3\times35^2-103\times35|}{2}=35$

따라서 $T_n>T_{n+1}$을 만족시키는 n은 $n=17,\ 18,\ 19,\ \cdots,\ 33$이므로 구하는 n의 최댓값은 33이다.

21) [정답] **273**

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a\neq0)$, 공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$이므로

$$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$$

$$a=-13d$$

$$S_n=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$$

$$S_1=S_{26}=-13d,\ S_2=S_{25}=-25d,$$

$$S_3=S_{24}=-36d,$$

$$\vdots$$

$$S_{13}=S_{14}=-91d,$$

$$S_{27}=0,\ S_{28}=14d,\ S_{29}=29d,\ \cdots$$

집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은

$$13,\ 14,\ \cdots,\ 26$$

따라서 모두 자연수 n의 값의 합은

$$13+14+15+\cdots+26=273$$

22) [정답] ①

[해설]

S_n이 주어진 조건을 만족시키면 $i\neq j$인 임의의 두 자연수 $i,\ j$에 대하여

$S_i-S_j\neq0$이므로

$S_i-S_j=(pi^2-36i+q)-(pj^2-36j+q)$

$\quad=(i-j)(pi+pj-36)\neq0$

따라서 $i+j\neq\dfrac{36}{p}$

$p\leq4$이면 $i+j=\dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 $i,\ j$가 존재한다.

$p=5$이면 $i+j=\dfrac{36}{p}$인 서로 다른 두 자연수 $i,\ j$가 존재하지 않는다.

따라서 p의 최솟값은 5, 즉 $p_1=5$이다.

$p=5$일 때 $S_n=5n^2-36n+q$이므로

$a_1=S_1=q-31$

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=10n-41$

이때

$a_2=-21,\ a_3=-11,\ a_4=-1,\ a_5=9,\ a_6=19a_7=29,\ \cdots$

$|a_k|<a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로

k의 값은 3, 4, 5이다.

$11<a_1\leq19,\ 11<q-31\leq19$

$42<q\leq50$

이다. 따라서 모든 q의 값의 합은

$43+44+\cdots+50=\dfrac{8\times(43+50)}{2}=372$

23) [정답] 45

[해설]

백의 자리의 수를 $a(\neq0)$, 십의 자리의 수를 b, 일의 자리의 수를 c라 하면 $a,\ b,\ c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로, $a+c=2b$가 성립한다.

$b=0$인 경우는 존재하지 않으므로 b는 9 이하의 자연수이고 이때, $a+c$는 짝수이다.

a와 c의 값이 정해지면 $b=\frac{a+c}{2}$로 b도 정해지므로 구하는 자연수의 개수는 $a+c$가 짝수가 되도록 a와 c를 정하는 방법의 수와 같다.

(i) a가 홀수인 경우 c도 홀수이어야 한다.
10보다 작은 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이므로 a와 c를 정하는 방법의 수는 $5\times5=25$

(ii) a가 짝수인 경우 c는 0 또는 짝수이어야 한다.
10보다 작은 짝수는 2, 4, 6, 8이므로 a와 c를 정하는 방법의 수는 $4\times5=20$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $25+20=45$

24) [정답] 23

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+\cdots+a_2x+a_1$에서

$P(1)=a_{m+1}+a_m+\cdots+a_2+a_1$이고

이는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$(m+1)$항까지의 합이므로

$$P(1)=\frac{(m+1)(2a+md)}{2}$$

$$P(-1)=a_{m+1}(-1)^m+a_m(-1)^{m-1}+\cdots-a_2+a_1$$

(i) m이 홀수일 때

$P(-1)=-a_{m+1}+a_m-\cdots-a_2+a_1$

$=-(a_{m+1}-a_m)-\cdots-(a_2-a_1)$

$=-\frac{m+1}{2}d$

이므로 $P(1)=5P(-1)$에서

$\frac{(m+1)(2a+md)}{2}=5\times\left(-\frac{m+1}{2}d\right)$

$m+1\neq0$이므로

$2a+md=-5d$

$a+\frac{m+5}{2}d=0$

m은 홀수이므로 $\frac{m+5}{2}$는 자연수이고

$a+\frac{m+5}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m+7}{2}\right)$항이다.

이때

$a_{\frac{m+7}{2}}=a+\left(\frac{m+7}{2}-1\right)d=a+\frac{m+5}{2}d=0$

이 되어 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라는 조건에 모순이다. 따라서 $P(1)=5P(-1)$을 만족시키는 홀수 m은 존재하지 않는다.

(ii) m이 짝수일 때

$P(-1)=a_{m+1}-a_m+\cdots-a_2+a_1$

$=(a_{m+1}-a_m)+\cdots+(a_3-a_2)+a$

$=a+\frac{m}{2}d=\frac{2a+md}{2}$

$P(1)=5P(-1)$에서

$\frac{(m+1)(2a+md)}{2}=5\times\frac{2a+md}{2}\cdots\cdots(*)$

m은 짝수이므로 $\frac{m}{2}$은 자연수이고

$a+\frac{m}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m}{2}+1\right)$항이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$a_{\frac{m}{2}+1}=a+\frac{m}{2}d=\frac{2a+md}{2}\neq0$

$(*)$에서 $m+1=5$이므로 $m=4$

(i), (ii)에서 가능한 자연수 m은 4뿐이므로 $k=4$이다.

다항식 $a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$a_5(-2)^4+a_4(-2)^3+a_3(-2)^2+a_2(-2)+a_1=0$

$a_n=a+(n-1)d$이므로

$(a+4d)(-2)^4+(a+3d)(-2)^3$

$+(a+2d)(-2)^2+(a+d)(-2)+a$

$=16(a+4d)-8(a+3d)+4(a+2d)-2(a+d)+a$

$=11a+46d=0$

$d=-\frac{11}{46}a$

모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq0$이므로

$\frac{a_1}{a_{k+1}}=\frac{a}{a_5}=\frac{a}{a+4d}$

$=\frac{a}{a-\frac{22}{23}a}=\frac{1}{\frac{1}{23}}$

$=23$

25) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. n이 홀수이면 항의 개수가 홀수이고 3이 2와 4의 등차중항이므로 $3\in A_n$ (참)

ㄴ. $4=2+(n+1)d_1$이라 하면, 집합 A_n의 모든 원소 2, $2+\frac{2}{n+1}$, $\cdots$, $2+\frac{2n}{n+1}$, 4는 공차가 $d_1=\frac{2}{n+1}$인 등차수열이다. $4=2+(2n+2)d_2$라 하면, 집합 A_{2n+1}의 모든 원소 2, $2+\frac{1}{n+1}$, $\cdots$, $2+\frac{2n+1}{n+1}$, 4는 공차가

$d_2=\dfrac{1}{n+1}$ 인 등차수열이다.

즉, $A_n \subset A_{2n+1}$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의하여

$A_{2n+1}-A_n$

$=\left\{2+\dfrac{1}{n+1},\ 2+\dfrac{3}{n+1},\ \cdots,\ 2+\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}$

$S_n=\dfrac{n+1}{2}\left(2+\dfrac{1}{n+1}+2+\dfrac{2n+1}{n+1}\right)$

$=3(n+1)$

$S_6+S_{13}=21+42=63$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

26) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. $d\ge 0$이면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 양수이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 $d<0$이어야 한다.

(i) $S_3=S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2}=\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1=-4d$이므로

$S_3=S_6=-9d>0$,

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=11d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$에서

$-9d=-11d-3,\ d=-\dfrac{3}{2}$

$a_1=-4d=6$

(ii) $S_3=-S_6$인 경우

$\dfrac{3(2a_1+2d)}{2}=-\dfrac{6(2a_1+5d)}{2}$에서

$a_1=-2d$이므로

$S_3=-S_6=-3d>0$

$S_{11}=\dfrac{11(2a_1+10d)}{2}=33d<0$

즉, $S_3=-S_{11}-3$에서

$-3d=-33d-3,\ d=-\dfrac{1}{10}$

$a_1=-2d=\dfrac{1}{5}$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$의 첫째항의 합은 $6+\dfrac{1}{5}=\dfrac{31}{5}$이다.

27) [정답] 5

[해설]

수열 $\{b_n\}$의 첫째항과 공차가 같으므로

$b_2=2b_1,\ b_3=3b_1$

$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}$에서 $a_2=a_1b_1$

$b_2=\dfrac{a_3}{a_2}=2b_1$에서 $a_3=2a_2b_1=2a_1b_1^2$

$b_3=\dfrac{a_4}{a_3}=3b_1$에서 $a_4=3a_3b_1=6a_1b_1^3$

$a_4=144$에서 $a_1b_1^3=24$

이때, $24=2^3\times 3$이고 네 개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$와 b_1이 자연수이고 $a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=3,\ b_1=2$

$\therefore\ a_1+b_1=5$

28) [정답] ③

[해설]

모든 항이 양수이고 공비가 서로 같은 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 일반항을 각각 $a_n=ar^{n-1},\ b_n=br^{n-1}$라고 하고

$a_nb_n=\dfrac{(a_{n+1})^2+4(b_{n+1})^2}{5}$에 대입하면

$abr^{2n-2}=\dfrac{a^2r^{2n}+4b^2r^{2n}}{5}$

$\div r^{2n}$을 하면 $abr^{-2}=\dfrac{a^2+4b^2}{5}$

$r^2=\dfrac{5ab}{a^4+4b^2}=\dfrac{5}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}}$

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 산술-기하평균에 의해

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\ge 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{4b}{a}}=4$

따라서 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}$의 최솟값이 4이므로 r^2의 최댓값은 $\dfrac{5}{4}$이다.

따라서 구하는 r의 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이다.

29) [정답] 18

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 $a_1+a_8=a_4+a_5$

수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로 $b_2 b_7=b_4 b_5$

이때 $b_4 b_5=a_4 a_5$이므로

$a_4+a_5=8$, $a_4 a_5=12$

a_4, a_5가 두 이차방정식의 근이라 하면 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

이차방정식 $x^2-8x+12=0$의 두 근이다.

따라서 $a_4=6$, $a_5=2$

$(\because a_4=b_4,\ a_5=b_5,\ b_4>b_5)$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이므로

$a_4=a_1+(4-1)\times(-4)=6$

따라서 $a_1=18$

30) [정답] ③

[해설]
세 점 $A(a,\ p)$, $B(b,\ q)$, $C(c,\ r)$에서
a, b, c는 차례로 등차수열을 이루고, p, q, r는 차례로 등비수열을 이루므로
$2b=a+c \cdots\cdots$ ㉠
$q^2=pr \cdots\cdots$ ㉡
ㄱ. $f(x)=x$ 위의 세 점을 잡으면
$A(a,\ a)$, $B(b,\ b)$, $C(c,\ c)$
이므로 ㉡은 $b^2=ac \cdots\cdots$ ㉢
㉠의 양변을 제곱하면
$4b^2=a^2+2ac+c^2$
㉢을 대입하면
$4ac=a^2+2ac+c^2$
$(a-c)^2=0$
$\therefore\ a=c$
그런데, 문제에서 $a\neq c$이므로 조건을 만족하는 함수가 아니다.
ㄴ. $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 위의 세 점을 잡으면
$A\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $B\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$, $C\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$
이므로 ㉡은 $\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{ac} \cdots\cdots$ ㉢
즉, $b^2=ac$이므로 $a=c$($\because$ ㉠)가 되어 문제의 조건을 만족하는 함수가 아니다.
ㄷ. $h(x)=2^x$ 위의 세 점을 잡으면
$A(a,\ 2^a)$, $B(b,\ 2^b)$, $C(c,\ 2^c)$
이므로 ㉡은 $(2^b)^2=2^a\cdot 2^c$, 즉 $2^{2b}=2^{a+c}$
$\therefore\ 2b=a+c$
따라서, ㉠과 같은 조건이 되므로 $2b=a+c$를 만족하는 모든 실수 a, b, c에 대하여 문제의 조건이 성립한다.
(예. $a=1$, $b=2$, $c=3$)
그러므로 조건을 만족하는 것은 ㄷ뿐이다.

31) [정답] 84

[해설]
$ab<0$이므로 a와 b의 부호가 다르다.
1) $a<0$, $b>0$일 때
세 수 a, b, ab에서 a와 ab는 음수, b는 양수이다. 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 a, b, ab 또는 ab, b, a 뿐이다.
그러므로 b가 등비중항이므로
$b^2=a\times ab$
$b=a^2$
이다. 따라서 세 수 a, b, ab는 a, a^2, a^3이다. $a<0$, $a^2>0$, $a^3<0$이므로 세 수를 배열하여 등차수열로 되는 경우의 등차중항은 음수인 a 또는 a^3이다.
i) a가 등차중항인 경우
$2a=a^3+a^2$
$a(a+2)(a-1)=0$
$a<0$이므로 $a=-2$이고 $b=4$이다.
ii) a^3이 등차중항인 경우
$2a^3=a+a^2$
$a(a-1)(2a+1)=0$
$a<0$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$이고 $b=\dfrac{1}{4}$이다. 따라서 a의 값은 -2, $-\dfrac{1}{2}$이다.
2) $a>0$, $b<0$일 때
1) 과 같은 방법에 의해 a의 값은 4, $\dfrac{1}{4}$이다.
1)과 2)에 의해 a의 값은 -2, $-\dfrac{1}{2}$, 4, $\dfrac{1}{4}$이다. 따라서
$k=-2-\dfrac{1}{2}+4+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$이고 $48k=84$이다.

32) [정답] ②

[해설]

a_7, a_8, a_k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
이 수열의 공비를 r라 하면

$$a_8 = a_7 r,\ a_k = a_7 r^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에서

$$a_n = a_1 + (n-1)d \ (a_1 \text{은 정수, } d\text{는 자연수})$$

이므로

$$a_8 - a_7 = d,\ a_k - a_8 = (k-8)d$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$a_7(r-1) = d,\ a_7(r-1)r = (k-8)d$$

위 식으로부터

$$dr = (k-8)d$$

$d \neq 0$이므로 $r = k-8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$a_k = a_7(k-8)^2,\ a_k = 144 = 12^2$$

위 식으로부터

$$a_7(k-8)^2 = 12^2$$

조건 (가)에서 $k-8$과 a_7이 정수이므로 a_7은
완전제곱수이다. 따라서 a_7은 12의 약수의 제곱수인

$$1,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 6^2,\ 12^2$$

중 하나이다.

(ⅰ) $a_7 = 1$일 때 $(k-8)^2 = 12^2$이므로 $k = 20\ (k > 8)$

(ⅱ) $a_7 = 2^2$일 때 $(k-8)^2 = 6^2$이므로 $k = 14\ (k > 8)$

(ⅲ) $a_7 = 3^2$일 때 $(k-8)^2 = 4^2$이므로 $k = 12\ (k > 8)$

(ⅳ) $a_7 = 4^2$일 때 $(k-8)^2 = 3^2$이므로 $k = 11\ (k > 8)$

(ⅴ) $a_7 = 6^2$일 때 $(k-8)^2 = 2^2$이므로 $k = 10\ (k > 8)$

(ⅵ) $a_7 = 12^2$일 때 $(k-8)^2 = 1$이므로 $k = 9\ (k > 8)$
그런데 $k = 9$이면 ㉡에서 $r = 1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이다. 따라서 $k \neq 9$이다.

(ⅰ)~(ⅵ)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$20 + 14 + 12 + 11 + 10 = 67$

33) [정답] 117

[해설]
$a_1 = a$라 하면 조건 (나)에 의하여

$$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$$
$$d\{k^2 - 5k + 3\} = a(k+1) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

모든 항이 자연수이므로 조건 (가)에서 $0 < a \le d$

$$a(k+1) \le d(k+1),\ k^2 - 5k + 3 \le k+1$$
$$k^2 - 6k + 2 \le 0$$
$$\therefore 3 - \sqrt{7} \le k \le 3 + \sqrt{7}$$

$k \ge 3$이므로 자연수 $k = 3,\ 4,\ 5$

㉠에서 $k^2 - 5k + 3 > 0$이므로 $k = 5,\ d = 2a$

$$90 \le a_{16} \le 10,\ a_{16} = a + 15d = 31a$$

이므로 $a = 3,\ d = 6$

따라서 $a_{20} = a + 19d = 117$

34) [정답] ③

[해설]
$\overline{CE} = a,\ \overline{EB} = ar,\ \overline{BD} = ar^2$이라 하자.

(삼각형 EBC의 넓이) $= \frac{1}{5}$(사각형 ABCD의 넓이)

$\therefore\ a = 4$ $\cdots\cdots$①

$\angle ABD = \angle A'BD,\ \angle ABD = \angle BDC$

$\triangle DEB$는 이등변 삼각형이므로 $\overline{DE} = \overline{EB}$

$\therefore\ r = \frac{3}{2}$ $\cdots\cdots$②

①, ②에 의하여

$\overline{CE},\ \overline{EB},\ \overline{BD}$의 길이는 각각 4, 6, 9.

$\angle EDB = \theta$이라 할 때, $\triangle DEB$에서 제이코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{36+81-36}{2\times6\times9} = \frac{3}{4}$$

$\triangle ABD$에서 제이코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 10^2 + 9^2 - 2\times9\times10\times\cos\theta$$

$\therefore\ \overline{AD} = \sqrt{46}$

35) [정답] ①

[해설]

ⅰ) $0 < k < 2$일 때, $f(k) < g(k) < h(k)$이므로 크기 순서대로 나열하여 등비수열을 이루면 $g(k)$가 등비중항이다.

$$(4^k)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^k \times 2^{k+2} \Leftrightarrow 2^{4k} = 2^{-2k} \times 2^{k+2}\ \therefore\ k = \frac{2}{5}$$

ii) $k=2$일 때,

$f(2)<g(2)=h(2)$이므로 등비수열을 이루지 않는다.

iii) $k>2$일 때,

$f(k)<h(k)<g(k)$이므로 크기 순서대로 나열하여

등비수열을 이루면 $h(k)$가 등비중항이다. $(2^{k+2})^2=\left(\frac{1}{4}\right)^k\times 4^k$

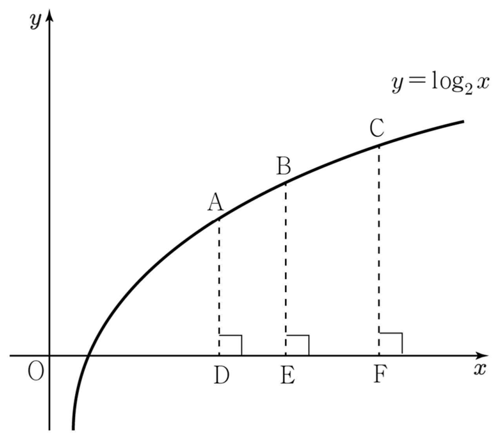
$\Leftrightarrow 2^{2k+4}=2^{-2k}\times 2^{2k}$ $\therefore k=-2$

$k=-2$는 $k>2$를 만족하지 않으므로 조건을 만족하는 등비수열은 존재하지 않는다.

따라서 i), ii), iii)에 의하여 실수 k의 값은 $\frac{2}{5}$

36) [정답] ①

[해설]



세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 x좌표는 등비수열을 이룬다. 따라서 세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 a, ar, ar^2 $(a>0,\ r>1)$이라 하자. 점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로

$ar^2=\frac{9ar-5a}{9-5}$이다. 따라서 $r=\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{\frac{5}{4}a}{a+\frac{25}{16}a}=\frac{20}{41}\text{이다.}$$

그러므로 $p+q=61$이다.

[다른 풀이1]

세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 각각 a, b, c라 하자. 세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 그러므로 $2\log_2 b=\log_2 a+\log_2 c$이므로 $b^2=ac$이다.

따라서 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r이라 하면 $b=ar$, $c=ar^2$이다. 점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로 $ar^2=\frac{9ar-5a}{9-5}$이다. 따라서 $r=\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{\frac{5}{4}a}{a+\frac{25}{16}a}=\frac{20}{41}$$ 이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

[다른 풀이2]

점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 각각 a, $a+4k$, $a+9k$라 하자. 세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\log_2 a$, $\log_2(a+4k)$, $\log_2(a+9k)$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 그러므로

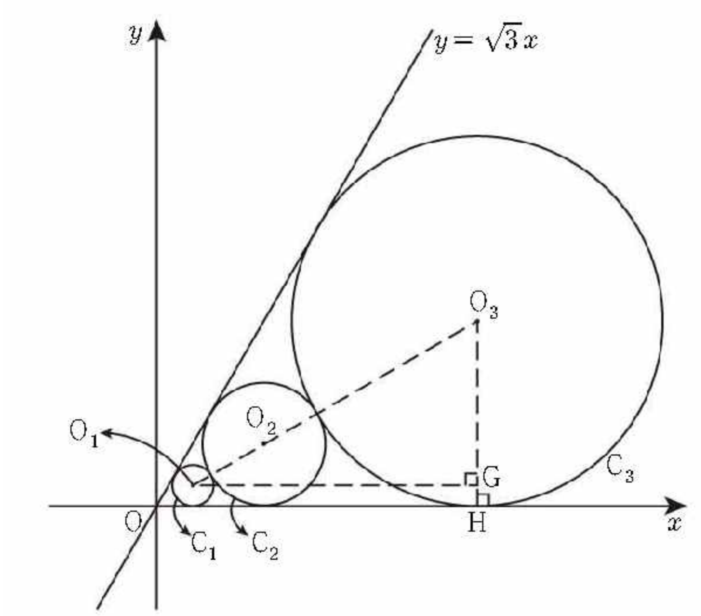
$2\log_2(a+4k)=\log_2 a+\log_2(a+9k)$이므로

$(a+4k)^2=a(a+9k)$이다. 따라서 $a=16k$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{20k}{16k+25k}=\frac{20}{41}$$ 이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

37) [정답] 835

[해설]



세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 세 원 C_1, C_2, C_3의 반지름의 길이를 각각 a, ar, ar^2이라고 하자.

원 C_1의 중심과 원 C_3의 중심 사이의 거리는 12이므로

$a+2ar+ar^2=12$ ……㉠

이다.

세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3라 하자.

점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 H,

점 O_1에서 선분 O_3H에 내린 수선의 발을 G라고 하면

$\angle O_3O_1G = 30^\circ$ 이므로 $\overline{O_1O_3} = 2\overline{O_3G}$이다.

따라서

$a(1+2r+r^2) = 2a(r^2-1)$ ……㉡

이다.

㉡에서 $r=3$이고 이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{4}$이다.

따라서 세 원의 넓이의 합은

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\pi + \left(\frac{9}{4}\right)^2\pi + \left(\frac{27}{4}\right)^2\pi = \frac{819}{16}\pi$

이다. 그러므로 $p+q=835$이다.

38) [정답] 8

[해설]

함수 $g(x)=2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

조건 (가)에서 $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$가 이 순서대로 등차수열을 이루려면 좌표평면 위의 세 점 $(2, h(2))$, $(3, h(3))$, $(4, h(4))$는 직선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

$h(2)=f(2)=k$

$h(3)=f(3)=2k$

$h(4)=f(4)=3k$

조건 (나)에서 $h(3)$, $h(4)$, $h(5)$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $h(3)=2k$, $h(4)=3k$이므로 이 등비수열의 공비는 $\frac{3}{2}$이다. 따라서 $h(5)=\frac{9}{2}k$이다.

이때 $f(5)=4k$이고, $k\neq 0$이므로 $f(5)$는 $h(5)$의 값이 될 수 없다.

따라서 $h(5)=g(5)$에서 $\frac{9}{2}k=36$이므로 $k=8$

39) [정답] 27

[해설]

수열 a, b, c의 공비를 r 이라고 하면 $b=ar$, $c=ar^2$

그러므로 $3^a, 9^b, 27^c$ 은 $3^a, 9^{ar}, 27^{ar^2}$ 이고 두 수열의 공비가

같으므로 $\frac{9^{ar}}{3^a} = \frac{27^{ar^2}}{9^{ar}} = r$

즉, $3^{2ar-a} = 3^{3ar^2-2ar} = r$…㉠

$2ar-a=3ar^2-2ar$

$a(3r^2-4r+1)=0$

$\therefore\ r=\frac{1}{3}$ $(\because a>0, r\neq 1)$…㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$t_A=\frac{3^3}{3}=9$, $t_B=\frac{9^1}{1}=9$, $t_c=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=9$

$\therefore\ t_A+t_B+t_C=27$

40) [정답] 27

[해설]

수열 a, b, c의 공비를 r이라고 하면

$b=ar$, $c=ar^2$

그러므로 3^a, 9^b, 27^c은 3^a, 9^{ar}, 27^{ar^2}이고

두 수열의 공비가 같으므로

$\frac{9^{ar}}{3^a} = \frac{27^{ar^2}}{9^{ar}} = r, 3^{2ar-a} = 3^{3ar^2-2ar} = r$…… ㉠

$2ar-a=3ar^2-2ar$

$a(3r^2-4r+1)=0$

$\therefore\ r=\frac{1}{3}$ $(\because a>0, r\neq 1)$……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=3$

$t_A=\frac{3^3}{3}=9$, $t_B=\frac{9^1}{1}=9$, $t_C=\frac{27^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}=9$,

$\therefore\ t_A+t_B+t_C=27$

41) [정답] ①

[해설]

(다)에서 $\log_6 abc=3$이므로 $abc=6^3$ ……㉠이다.

(가)에서 a, b, c가 등비수열을 이루므로 $b^2=ac$ ……㉡이다.

그러므로 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $b=6$ ……㉢이다.

이때, ㉢을 ㉡에 대입하여 풀면, $ac=6^2$이다.

그러므로 (나)로부터 $6-a=1$, 4이므로 $a=5$, 2이다.

한편, $ac=6^2$에서 a는 6^2의 약수이므로 $a=2$뿐이다.

그러므로 $a=2$를 $ac=6^2$에 대입하면 $b=6$, $c=18$이다.

따라서, $a+b+c=26$이다.

42) [정답] 25

[해설]

$ef=12^2=144=3^2\times 4^2$

$b=3$, $c=4$

a는 3의 배수이고, $b=3$이므로 e는 3^2의 배수이다.

d는 4의 배수이고, $c=4$이므로 f는 4^2의 배수이다.
그런데 $ef=3^2\times4^2$이므로 $e=3^2$, $f=4^2$
이므로 $e+f=9+16=25$

43) [정답] 11

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=6+(n-1)p$
수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=6p^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+p(m-1)$인 자연수 m이 존재한다.
$p(m-1)=6p^{n-1}-6$
$m-1=\dfrac{6p^{n-1}-6}{p}=6p^{n-2}-\dfrac{6}{p}$
$\dfrac{6}{p}=6p^{n-2}-m+1$
$p^{n-2}(n\geq2)$과 m은 모두 자연수이므로 $\dfrac{6}{p}$도 자연수이다.
따라서 p는 6의 약수이다.
$\therefore$ $p=2,\ 3,\ 6(\because p>1)$
그러므로 모든 자연수 p의 합은 $2+3+6=11$이다.
[다른 풀이]
$a_m=b_2$인 자연수 m이 존재하므로
$6+(m-1)p=6p$에서
$m-1=\dfrac{6(p-1)}{p}=6-\dfrac{6}{p}$
$\dfrac{6}{p}$이 자연수이어야 하므로 p는 6의 약수이다.
(i) $p=2$일 때
$a_m=4+2m,\quad b_n=6\cdot2^{n-1}$
(ii) $p=3$일 때
$a_m=3+3m,\quad b_n=6\cdot3^{n-1}$
(iii) $p=6$일 때
$a_m=6m,\ b_n=6^n$
(i), (ii), (iii)의 모든 경우 임의의 자연수 n에 대하여 $b_n=a_m$을 만족시키는 m이 존재하므로 수열 $\{b_n\}$의 모든 항은 수열 $\{a_n\}$의 항이 된다. $\therefore$ $p=2,\ 3,\ 6$이고 모든 자연수 p의 합은 11이다.

44) [정답] 80

[해설]

조건 (나)에서 $n^2=16^2m$, $m=\left(\dfrac{n}{16}\right)^2$ 이고

m은 자연수이므로 n은 16의 배수이어야 한다.

그리고 10보다 크고 100보다 작은 16의 배수는

$16, 32, 48, 64, 80, 96$이므로 n은 이들 값 중에서 선택할 수 있다. 조건 (가)로부터

$\log_m n=\dfrac{q}{p}$ (단, p, q는 서로소인 자연수)

라 둘 수 있고, 로그의 정의로부터 $n=m^{\frac{q}{p}}$로 나타낼 수 있다. 식을 변형하면 $n^p=m^q$이고 m, n은 자연수이므로 $m=c^p$, $n=c^q$(단, c는 자연수)로 둘 수 있다.

n은 $16, 32, 48, 64, 80, 96$ 값들 중 c^q꼴로 표현할 수 있는 값이므로 $16, 32, 64$ 세 수뿐이다.

그러므로 $n=16, 32, 64$이고 각각에 대하여

$m=\left(\dfrac{n}{16}\right)^2$에서 m을 구하면 $m=1, 4, 16$ 이다.

조건에서 m, n이 10보다 크고 100보다 작은 자연수이므로 $n=64$, $m=16$이다.

따라서 $m+n=80$이다.

45) [정답] 9

[해설]
$U=\{r^k|k$는 102이하의 자연수$\}$의 부분집합 A의 원소들은 모두 r의 거듭제곱으로 표현된다.
(가)에 의해 $r\in A$
(나)에 의해 집합 A의 원소들을 작은 수부터 차례대로 배열한 수열은 등비수열이고 $r>1$이므로 첫째항은 r이다.
공비를 r^a(a는 자연수)라 하면
일반항은 $r(r^a)^{n-1}(n\geq2)$이다.
$r^{31}\in A$, $r^{100}\in A$이므로 두 자연수 n_1, n_2에 대하여
$r(r^a)^{n_1-1}=r^{31}$, $r(r^a)^{n_2-1}=r^{100}$
$r^{a(n_1-1)}=r^{30}$, $r^{a(n_2-1)}=r^{99}$
따라서 a는 30과 99의 공약수이므로 $a=1$또는 $a=3$
(다)에 의해 A는 전체집합 U의 진부분집합이므로 $a=3$이고,
일반항은 $r(r^3)^{n-1}=r^{3n-2}$
전체집합 U의 원소들의 합은
첫째항이 r, 공비가 r인 등비수열의 제 102항까지의

합과 같으므로 $\dfrac{r(r^{102}-1)}{r-1}$이다.

집합 A의 원소의 개수를 n이라 하면

$3n-2 \le 102,\ n \le 34$

집합 A의 원소들의 합은 첫째항이 r, 공비가 r^3인

등비수열의 제 34항까지의 합과 같으므로 $\dfrac{r\{(r^3)^{34}-1\}}{r^3-1}$이다.

$$\frac{r(r^{102}-1)}{r-1}=91\times\frac{r(r^{102}-1)}{r^3-1}$$
$$=91\times\frac{r(r^{102}-1)}{r-1}\times\frac{1}{r^2+r+1}$$

$r^2+r+1=91$

$r^2+r-90=(r+10)(r-9)=0$

$\therefore\ r=-10$또는 $r=9$

따라서 $r=9$

46) [정답] ⑤

[해설]

지수함수 $y=a^x$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼 평행이동시킨 함수식은

$y=a^{x-b}$ ……㉠

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이므로

$a_n=2\times 3^{n-1}$

$(n,\ a_n)$점이 ㉠식 위의 점이므로 함수식을 만족한다.

즉, $a^{n-b}=2\times 3^{n-1}$이 성립한다.

이때 $a=3$이어야 한다. ……㉡

대입하면, $3^{n-b}=2\times 3^{n-1}$에서

좌우변에 3^{n-1}을 나누면 $3^{-b+1}=2$

이 성립하고 로그의 정의에 의해서 $-b+1=\log_3 2$

$\therefore\ b=1-\log_3 2$ ……㉢

㉡, ㉢ 에서

$a+b=4-\log_3 2$

47) [정답] ③

[해설]

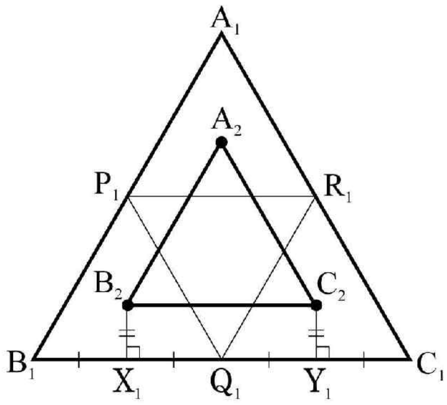
$l_1=3$이다.

두 점 B_2, C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 각각 X_1, Y_1이라 하자. 삼각형 $B_1Q_1P_1$과 삼각형 $C_1R_1Q_1$은 합동인 정삼각형이고 점 B_2는 삼각형 $B_1Q_1P_1$의 무게중심, 점 C_2는 삼각형 $C_1R_1Q_1$의 무게 중심, 점 Q_1은 선분 B_1C_1의 중점이므로

$\overline{B_1X_1}=\overline{X_1Q_1}=\overline{Q_1Y_1}=\overline{Y_1C_1}$

$\overline{B_2X_1}=\overline{C_2Y_1}$

$\therefore\ \overline{B_2C_2}=\overline{X_1Y_1}=\dfrac{1}{2}\overline{B_1C_1}=\dfrac{1}{2}$



같은 방법으로 두 선분 A_2B_2, C_2A_2의 길이를 각각 구하면

$\overline{A_2B_2}=\overline{C_2A_2}=\dfrac{1}{2}$

따라서 삼각형 $A_2B_2C_2$는 한 변의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 정삼각형이다.

$\therefore\ l_2=\dfrac{3}{2}$

이와 같은 과정을 계속하면 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 둘레의 길이는 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레의 길이의 $\dfrac{1}{2}$이므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{8} l_n=\frac{3\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{765}{128}$$

48) [정답] ①

[해설]

점 C의 좌표를 $(0,\ t)$로 놓으면 점 A의 좌표는 $(\log_2 t,\ t)$이고, 점 B의 좌표는 $(\log_a t,\ t)$이다.

$\overline{CB}:\overline{BA}=1:n$이므로

$\overline{BA}=n\times\overline{CB}$

$\log_2 t-\log_a t=n\times\log_a t$

$(n+1)\log_a t=\log_2 t$

$$n+1=\frac{\log_2 t}{\log_a t}=\frac{\log t}{\log 2}\times\frac{\log a}{\log t}=\log_2 a$$

그러므로 $a=f(n)=2^{n+1}$

$\therefore f(1)\times f(2)\times f(3)\times\cdots\times f(10)$

$=2^{2+3+4+\cdots+11}=2^{\frac{10\times(2+11)}{2}}=2^{65}$

따라서 $m=65$

49) [정답] ①

[해설]

종이 ABCD를 접는 선은 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정사각형이므로 S_1을 펼친 그림에서 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $4\sqrt{2}$이다. S_1을 접는 선은 한 변의 길이가 1인 정사각형이고 종이가 2겹이므로 S_2를 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 8이다. S_2를 접는 선은 한 변의 길이가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$인 정사각형이고 종이가 4겹이므로 S_3을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합은 $8\sqrt{2}$이다. S_n을 펼친 그림에서 새로 접힌 모든 선들의 길이의 합을 a_n

$(n=1, 2, 3, \cdots)$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $4\sqrt{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore l_5=\frac{4\sqrt{2}\times\{(\sqrt{2})^5-1\}}{\sqrt{2}-1}=24+28\sqrt{2}$$

50) [정답] 22

[해설]

$\overline{A_nB_n}=a_n$, $\overline{B_nC_n}=b_n$, $\overline{C_nD_n}=c_n$,

$\overline{D_nE_n}=d_n$, $\overline{E_nF_n}=e_n$이라 하면,

$$b_n=\frac{5}{6}a_n,\ c_n=\frac{5}{6}b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^2a_n$$

$$d_n=\frac{5}{6}c_n=\left(\frac{5}{6}\right)^3a_n,\ e_n=\frac{5}{6}d_n=\left(\frac{5}{6}\right)^4a_n$$

한편, $a_{n+1}=\frac{5}{6}a_n$, $a_1=\overline{A_1B_1}=66\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$

$\overline{A_1B_1}+\overline{B_2C_2}+\overline{C_3D_3}+\overline{D_4E_4}+\overline{E_5F_5}$

$=a_1+b_2+c_3+d_4+e_5$

$$=a_1+\frac{5}{6}a_2+\left(\frac{5}{6}\right)^2a_3+\left(\frac{5}{6}\right)^3a_4+\left(\frac{5}{6}\right)^4a_5$$

$$=a_1+\left(\frac{5}{6}\right)^2a_1+\left(\frac{5}{6}\right)^4a_1+\left(\frac{5}{6}\right)^6a_1+\left(\frac{5}{6}\right)^8a_1$$

$$=\frac{a_1\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right\}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=25\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right\}=25-\frac{5^{12}}{6^{10}}$$

$a=10$, $b=12$

따라서 $a+b=22$

51) [정답] ④

[해설]

입사 첫째 해부터 19년째까지 받은 금액

$a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{17}+a\times1.08^{18}$

20년째부터 28년째까지 9년간 받은 금액 $a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9$

$\therefore$ (연봉의 총합)

$$=a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{17}+a\times1.08^{18}+a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9$$

$$=\frac{a(1.08^{18}-1)}{1.08-1}+a\times1.08^{18}+6a\times1.08^{18}$$

$$=\frac{131}{2}a$$

52) [정답] ④

[해설]

입사 첫째 해부터 19년째까지 받은 금액

$a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{17}+a\times1.08^{18}$

20년째부터 28년째까지 9년간 받은 금액

$a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9$

$\therefore$ (연봉의 총합)

$=a+a\times1.08+a\times1.08^2+\cdots+a\times1.08^{17}$

$+a\times1.08^{18}+a\times1.08^{18}\times\frac{2}{3}\times9$

$$=\frac{a(1.08^{18}-1)}{1.08-1}+a\times1.08^{18}+6a\times1.08^{18}$$

$$=\frac{131}{2}a$$

53) [정답] ④

[해설]

남아있는 120번의 상환금 총액과 현재 일시불로 갚는 금액 A가 서로 같아야 하므로

$$A(1+r)^{120}=\frac{P\{(1+r)^{120}-1\}}{(1+r)-1}$$

$$A=\frac{P\{(1+r)^{120}-1\}}{r(1+r)^{120}}=\frac{P}{r}\{1-(1+r)^{-120}\}$$

중도 상환시의 수수료 2%를 고려하면 지불총액은

$$1.02A=\frac{1.02P}{r}\{1-(1+r)^{-120}\}$$

54) [정답] ④

[해설]
n월 말에 통장에 남아있는 잔액을 a_n이라 하면

$a_1 = 1000 \times 1.005 - 50$

$a_2 = a_1 \times 1.005 - 50 = 1000 \times 1.005^2 - 50(1.005 + 1)$

$a_3 = a_2 \times 1.005 - 50 = 1000 \times 1.005^3 - 50(1.005^2 + 1.005 + 1)$

$\vdots$

$a_{12} = a_{11} \times 1.005 - 50$

$= 1000 \times 1.005^{12} - 50(1.005^{11} + \cdots + 1.005 + 1)$

$= 444.7$

55) [정답] ③

[해설]
1달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)$

2달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)^2$

$\vdots$

9달 후 사용요금은 $20000(1+0.03)^9$

상용로그표에서 비례부분을 이용하여 계산하면

$\log 1.03^9 = 9\log 1.03$

$= 0.1152$

$= \log 1.304$

log 1.30 =	0.1139
4 ←	13
log 1.304 =	0.1152

$1.03^9 = 1.304$이므로

$20000 \times 1.304 = 26080$(원)

56) [정답] ②

[해설]
$a_1 = 2a_4$에서 $a = 2ar^3$이므로 $r^3 = \dfrac{1}{2}$

$a_3^{\log_2 3} = 27$에서 $a_3 = 8$이므로 $a_3 = ar^2$에서 $a\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^3$이므로

$\therefore\ a = 2^{\frac{11}{3}}$

따라서 $a = 2^{\frac{11}{3}}$, $a_2 = 2^{\frac{10}{3}}$, $a_3 = 2^{\frac{9}{3}}$, $\cdots$

주어진 집합의 조건에 의해서

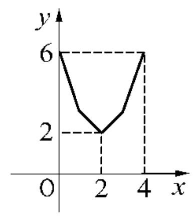
$$\log_4 a_n - \log_2 \frac{1}{a_n} = \log_4 a_n + \log_4 a_n^2$$
$$= \log_4 a_n^3$$
$$= \frac{3}{2}\log_2 a_n$$

따라서 $\log_4 a_n - \log_2 \dfrac{1}{a_n}$가 자연수가 되려면 $a_n = 2^{\frac{\text{짝수}}{3}}$이어야 한다.

즉, $a_2 = 2^{\frac{10}{3}}$, $a_4 = 2^{\frac{8}{3}}$, $\cdots$, $a_{10} = 2^{\frac{2}{3}}$이므로 원소의 개수는 5개이다.

57) [정답] ⑤

[해설]
$f(x) = |x-1| + |x-2|$
$+ |x-3|\ (0 \le x \le 4)$



$0 \le x < 1,\quad f(x) = -3x + 6$

$1 \le x < 2,\quad f(x) = -x + 4$

$2 \le x < 3,\quad f(x) = x$

$3 \le x \le 4,\quad f(x) = 3x - 6$

$\therefore\ 2 \le f(x) \le 6$

최댓값과 최솟값 합은 8

58) [정답] **3**

[해설]
$P_1(-2,\ 1)$, $P_2(-1,\ 2)$, $P_3(0,\ 3)$, $P_4(1,\ 2)$, $P_5(2,\ 4)$에 대하여 식에 대입하면

$$\sum_{i=1}^{5}(ax_i + b - y_i)^2$$
$$= (-2a+b-1)^2 + (-a+b-2)^2 + (b-3)^2$$
$$+ (a+b-2)^2 + (2a+b-4)^2$$
$$= 10a^2 + 5b^2 - 12a - 24b + 34$$
$$= 10\left(a - \frac{3}{5}\right)^2 + 5\left(b - \frac{12}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}$$

따라서 $a = \dfrac{3}{5}$, $b = \dfrac{12}{5}$일 때 최솟값을 갖는다.

$$\therefore\ a + b = \frac{3}{5} + \frac{12}{5} = 3$$

59) [정답] 24

[해설]
수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하자.

$a_{26} = 30$이므로 $a_1 + 25d = 30 \cdots 1 \cdots\cdots$ ①

$$\sum_{n=1}^{13}\left\{(a_{2n})^2 - (a_{2n-1})^2\right\}$$
$$= \sum_{n=1}^{13}(a_{2n} - a_{2n-1})(a_{2n} + a_{2n-1})$$

$=\sum_{n=1}^{13} d(a_{2n}+a_{2n-1})$

$=d\{(a_2+a_1)+(a_4+a_3)+\cdots+(a_{26}+a_{25})$

$=d(a_1+a_2+\cdots+a_{26})$

$=\dfrac{d\times 26(a_1+a_{26})}{2}$

$=13d(a_1+30)=260$

$\therefore\ d(a_1+30)=20$ …… ②

①, ②에 의해서

$d(30-25d+30)=20$

$25d^2-60d+20=0$

$5d^2-12d+4=0$

$(5d-2)(d-2)=0$

$d=\dfrac{2}{5}$ 또는 $d=2$

$d=2$이면 $a_1=-20<0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수인 것은 아니다.

따라서 $d=\dfrac{2}{5}$이고 $a_1=20$이다. 그러므로

$a_{11}=20+10\times\dfrac{2}{5}=20+4=24$이다.

60) [정답] 26

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

(가)에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=159$이므로

$a_1+d=53$ …… ㉠

(나)에서

$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=96$이므로

$a_m-d=32$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_1+a_m=85$이므로

$\sum_{k=1}^{m} a_k=\dfrac{m}{2}(a_1+a_m)=\dfrac{m}{2}\times 85=425$이고 $m=10$이다.

또한 ㉠, ㉡에서 $a_1=56,\ d=-3$이므로

$a_n=-3n+59$

따라서 $a_{11}=-33+59=26$

61) [정답] ④

[해설]

$S_n=\dfrac{n\{2\times 50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+52n$

$=-2(n-13)^2+2\times 13^2$

이므로 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값은 $m=11$일 때 최대가 된다.

62) [정답] ①

[해설]

S_n의 이차항의 계수를 a라 하자. 조건에서 $S_{10}=S_{50}$이고 S_n은 $n=30$일 때 최댓값 410을 가지므로

$S_n=a(n-30)^2+410$

$S_{10}=10$이므로 $10=a(10-30)^2+410$에서 $a=-1$

그러므로 $S_n=-(n-30)^2+410$

$S_m>S_{50}=S_{10}$을 만족시키는 자연수 m의 범위는 $10<m<50$이므로 $p=11,\ q=49$

따라서

$\sum_{k=p}^{q} a_k=\sum_{k=11}^{49} a_k=S_{49}-S_{10}$

$=\{-(49-30)^2+410\}-10$

$=39$

63) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$라 하면 (가)에 의하여

$\dfrac{5(2a_1+4d)}{2}=2\left|\dfrac{10(2a_1+9d)}{2}\right|$

$a_1+2d=2|2a_1+9d|$

(ⅰ) $a_1+2d=4a_1+18d$일 때, $a_1=-\dfrac{16}{3}d$

$a_3a_6=\left(-\dfrac{10}{3}d\right)\times\left(-\dfrac{d}{3}\right)=\dfrac{10}{9}d^2>0$이므로 (나)의 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $a_1+2d=-4a_1-18d$일 때, $a_1=-4d$

$a_3 a_6 = (-2d) \times d = -2d^2 < 0$ 이므로 (나)의 조건에 모순이다.

따라서 $\dfrac{a_{21}}{a_1} = \dfrac{-\dfrac{16}{3}d + 20d}{-\dfrac{16}{3}d} = -\dfrac{11}{4}$

64) [정답] 13

[해설]

조건 (가)에서 $|a_5| + |a_6| = |a_5 + a_6| + 2$이고 공차가 음수이므로 $a_5 > 0$, $a_6 < 0$이다.

이 수열의 공차를 d라 하면

$$(a_1 + 4d) - (a_1 + 5d) = |2a_1 + 9d| + 2$$

$|2a_1 + 9d| = -d - 2$이므로

$$2a_1 + 9d = d + 2,\ a_1 + 4d = 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또는 $2a_1 + 9d = -d - 2,\ a_1 + 5d = -1 \quad \cdots\cdots ㉡$

조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{6} |a_n| = \sum_{n=1}^{5} a_n - a_6$$

$= \dfrac{5(2a_1 + 4d)}{2} - a_1 - 5d$

$= 37$

에서 $4a_1 + 5d = 37 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢에서 $a_1 = 13$

㉡, ㉢에서 $a_1 = \dfrac{38}{3}$은 자연수가 아니다.

따라서 $a_1 = 13$

65) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = \frac{(2m-1)\{2a + (2m-2)d\}}{2}$$

$= (2m-1)\{a + (m-1)d\} = 0$

$2m - 1 > 0$ 이므로 $a + (m-1)d = 0$

즉, $a_m = 0$

조건 (나)에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n \neq \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n > 0$ 이므로

$a_m = 0$을 만족시키는 m의 범위는 $m \leq 7$

수열의 항	항의 개수
$-(m-1)d,\ \cdots,\ -2d,\ -d$	$(m-1)$ 개
$0(=a_m)$	1 개
$d,\ 2d,\ \cdots,\ (m-1)d$	$(m-1)$ 개
$md,\ (m+1)d,\ \cdots,\ a_{15}$	$(16-2m)$ 개

$\displaystyle\sum_{n=1}^{2m-1} a_n = 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{15} a_n = \frac{(16-2m)\{2md + (15-2m)d\}}{2}$$

$= 15(8-m)d = 45$

즉, $(8-m)d = 3$

$$\sum_{n=1}^{15} |a_n|$$

$= 2 \times \dfrac{(m-1)\{d + (m-1)d\}}{2} + 15(8-m)d$

$= (m-1)md + 45 = 90$

$2\displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n = \sum_{n=1}^{15} |a_n|$ 이므로

$15(8-m)d = (m-1)md$

$m^2 + 14m - 120 = 0$

$(m-6)(m+20) = 0$

m은 자연수이므로 $m = 6$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{15} a_n = 30d = 45$ 즉, $d = \dfrac{3}{2}$

따라서 $a_{14} = a_6 + 8d = 0 + 12 = 12$

66) [정답] ④

[해설]

$a_3 + a_5 = 2a_4$이므로 $a_3 + a_5 = 2$에서 $a_4 = \boxed{1}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_1 = 1 - 3d,\ a_2 = 1 - 2d,\ a_3 = 1 - d,$$

$a_4=1,\ a_5=1+d$

$d>1$이므로 $a_1<0,\ a_2<0,\ a_3<0,\ a_5>0$

$\sum_{k=1}^{5}{a_k}^2$과 $\sum_{k=1}^{5}|a_k|$를 각각 d에 대한 식으로 나타내면

$\sum_{k=1}^{5}{a_k}^2$

$=(1-3d)^2+(1-2d)^2+(1-d)^2+1^2+(1+d)^2$

$=15d^2-10d+5$

$\sum_{k=1}^{5}|a_k|$

$=|1-3d|+|1-2d|+|1-d|$

$+|1|+|1+d|$

$=(3d-1)+(2d-1)+(d-1)+1+(1+d)$

$=\boxed{7d-1}$

그러므로

$\sum_{k=1}^{5}(a_k^2-5|a_k|)$

$=(15d^2-10d+5)-5(7d-1)$

$=15d^2-45d+10$

$=15\left(d-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{95}{4}$

$d>1$이므로 $\sum_{k=1}^{5}({a_k}^2-5|a_k|)$의 값이 최소가 되도록 하는

수열 $\{a_n\}$의 공차는 $\boxed{\frac{3}{2}}$이다.

따라서 $p=1,\ q=\frac{3}{2},\ f(d)=7d-1$이므로

$f(p+2p)=f(4)=27$

67) [정답] 25

[해설]

$a_3+a_5=0$에서 $a_4=0$이다. 공차를 d라고 하면

수열 $\{a_n\}$은 $-3d,\ -2d,\ d,\ 0,\ d,\ 2d,\ \cdots$

$d\le 0$이면 $2(-3d-2d-d)=-12d=30$

만족하는 정수 d가 없다. 따라서 $d>0$이다.

그러면 $2(d+2d)=6d=30,\ d=5$

$\therefore a_9=a_4+5d=25$

68) [정답] 170

[해설]

$a_{2m}=-a_m$에서 $a_m+md=-a_m$

$2a_m=-md$이므로

m과 d 중에서 적어도 하나는 짝수이다.

m이 짝수, 즉 $m=2p$(p는 자연수)라 하면

$a_{2m}+a_m=a_{4p}+a_{2p}$

$=\{a_1+(4p-1)d\}+\{a_1+(2p-1)d\}$

$=2\{a_1+(3p-1)d\}$

$=2a_{3p}=0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 m은 홀수이고 d는 짝수이다.

$m=2l-1$(l은 자연수)라 하면

$a_{4l-2}=-a_{2l-1}$에서

$a_{3l-1}=a_{4l-2}-(l-1)d$

$=-a_{2l-1}-(l-1)d$

$=-a_{3l-2}$

이고 $d>0$이므로

$1\le n\le 3l-2$일 때 $a_n<0$,

$n\ge 3l-1$일 때 $a_n>0$이다.

$\sum_{k=m}^{2m}|a_k|=\sum_{k=2l-1}^{4l-2}|a_k|$

$=-a_{2l-1}-a_{2l}-a_{2l+1}-\cdots-a_{3l-2}$

$+a_{3l-1}+a_{3l}+a_{3l+1}+\cdots+a_{4l-2}$

$=-a_{2l-1}-(a_{2l-1}+d)-(a_{2l-1}+2d)-\cdots-(a_{2l-1}+(l-1)d)$

$+(a_{2l-1}+ld)+\{a_{2l-1}+(l+1)d\}+\cdots+\{a_{2l-1}+(2l-1)d\}$

$=-\{1+2+3\cdots+(l-1)\}d$

$+\{l+(l+1)+(l+2)+\cdots+(2l-1)\}d$

$=-\frac{l(l-1)}{2}d+\frac{l\{l+(2l-1)\}}{2}d$

$=l^2d=128$

l은 자연수이고 d는 짝수이므로 모든 순서쌍 $(l,\ d)$는

$(1,\ 128),\ (2,\ 32),\ (4,\ 8),\ (8,\ 2)$이다.

따라서 모든 d의 값의 합은 $2+8+32+128=170$

69) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이고 조건

(가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$

이므로

$a_5 < 0,\ a_7 > 0$

즉, $n \le 5$일 때 $a_n < 0$이고, $n \ge 7$일 때

$a_n > 0$이다.

이때 조건 (나)에서

$\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$

이므로

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3이므로

$(a_1 + 18) + (a_1 + 24) + (a_1 + 30)$

$= 6 - (a_1 + 3) - (a_1 + 9) + |a_1 + 15|$

$|a_1 + 15| = 5a_1 + 78$ ……㉠

㉠에서 $a_1 + 15 \ge 0$이면

$a_1 + 15 = 5a_1 + 78$

$4a_1 = -63$

$a_1 = -\frac{63}{4} < -15$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1 + 15 < 0$이므로 ㉠에서

$-a_1 - 15 = 5a_1 + 78$

$6a_1 = -93$

$a_1 = -\frac{31}{2}$

따라서

$a_{10} = a_1 + 9 \times 3$

$= -\frac{31}{2} + 27$

$= \frac{23}{2}$

70) [정답] ③

[해설]

$a_n = a \cdot r^{n-1} (a > 0,\ r > 0)$라 두면

$\sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{a(r^{12} - 1)}{r - 1} = 100$ …… ㉠

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$이고, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = \frac{\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{r^{12}}\right)}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{r(r^{12} - 1)}{ar^{12}(r - 1)} = 10$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a^2 r^{11} = 10$

$\therefore \sum_{k=1}^{12} \log a_k = \log(a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{12})$

$= \log\left(a^{12} r^{\frac{11 \times 12}{2}}\right) = \log(a^{12} r^{66})$

$= \log(a^2 r^{11})^6 = \log 10^6 = 6$

71) [정답] **242**

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$5 \le a_2 \le 6$에 의하여 $5 \le ar \le 6$이고

a와 r는 자연수이므로 $ar = 5$ 또는 $ar = 6$

$42 \le a_4 \le 96$에 의하여 $42 \le ar^3 \le 96$이므로

$\frac{42}{ar} \le r^2 \le \frac{96}{ar}$ …㉠

i) $ar = 5$일 때,

㉠에 의하여 $\frac{42}{5} \le r^2 \le \frac{96}{5}$

$r = 3$ 또는 $r = 4$

$ar = 5$를 만족시키는 자연수 a는

존재하지 않는다.

ii) $ar = 6$일 때,

㉠에 의하여 $7 \le r^2 \le 16$이므로

$r = 3$ 또는 $r = 4$

$ar = 6$을 만족시키는 자연수 $r = 3$, $a = 2$

따라서 $\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{2 \times (3^5 - 1)}{3 - 1} = 242$

72) [정답] **162**

[해설]

첫째항이 2이고 공비를 r (단, r은 정수)이라 하면

$a_n = 2r^{n-1}$ …… ㉠

㉠에서 $a_2 = 2r$, $a_3 = 2r^2$이므로 조건 (가)에 대입하면

$4 < 2r+2r^2 \le 12,\ 2 < r+r^2 \le 6$

따라서 $0 < r^2+r-2,\ r^2+r-6 \le 0$를 풀면

$0 < (r+2)(r-1)$에서 $r < -2$ 또는 $r > 1$
…… ㉡

$(r+3)(r-2) \le 0$에서 $-3 \le r \le 2$
…… ㉢

㉡, ㉢을 연립하면 $-3 \le r < -2$ 또는 $1 < r \le 2$

그런데 공비 r이 정수이므로 $r = -3$ 또는 $r = 2$

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^{m} a_k = 122$이므로

(i) $r = -3$인 경우

$$\sum_{k=1}^{m} 2(-3)^{k-1} = 122$$

$$\frac{2\{(-3)^m-1\}}{(-3-1)} = 122,\ \{(-3)^m-1\} = -244$$

$$(-3)^m = -243 \qquad \therefore m = 5$$

따라서 ㉠에서 $a_m = 2(-3)^{m-1}$이므로 $a_5 = 2(-3)^4$

$$\therefore a_5 = 162$$

(ii) $r = 2$인 경우

$$\sum_{k=1}^{m} 2(2)^{k-1} = 122$$

$$\frac{2(2^m-1)}{2-1} = 122,\ 2^m-1 = 61,\ 2^m = 62$$

그런데 m은 자연수이므로 조건에 모순이 된다.

(i), (ii)에서 만족하는 $m = 5$이므로 $a_m = a_5 = 162$

73) [정답] ①

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$r = 1$이면 조건 (가)에서 $a = \frac{45}{4}$이고

조건 (나)에서는 $a = \frac{63}{2}$이므로 $r \ne 1$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \frac{a(r^4-1)}{r-1} = 45$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = (a_2 \times a_5) \times \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{a_k}$$

$$= ar \times ar^4 \times \frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$$

$$= a^2r^5 \times \frac{r^6-1}{a(r^6-r^5)}$$

$$= \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 189$$

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^4-1)}{r-1}} = \frac{r^6-1}{r^4-1}$$

$$= \frac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}$$

$$= \frac{r^4+r^2+1}{r^2+1} = \frac{189}{45}$$

이므로 $5r^4+5r^2+5 = 21r^2+21$

$$5r^4-16r^2-16 = 0,\ (5r^2+4)(r^2-4) = 0$$

$r > 0$이므로 $r = 2$

$\frac{a(2^4-1)}{2-1} = 15a = 45$이므로 $a = 3$

따라서 $a_3 = 3 \times 2^2 = 12$

74) [정답] 29

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = 2$

$$\sum_{k=1}^{m} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{m} (a_k+m) = \sum_{k=1}^{m} (a_{k+1}-a_k-m)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (2-m)$$

$$= m(2-m)$$

$2m-m^2 = 240-360,\ m^2-2m-120 = 0$

$(m+10)(m-12) = 0$에서 $m = -10$ 또는 $m = 12$

m은 자연수이므로 $m = 12$

$$\sum_{k=1}^{12} (a_k+12) = \sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{12} 12$$

$$= \frac{12(2a_1+11\times 2)}{2} + 12\times 12 = 360$$

$6(2a_1+22)+144 = 360$에서 $a_1 = 7$

따라서 $a_m = a_{12} = 7+11\times 2 = 29$

75) [정답] ①

[해설]

$$a=\sum_{k=1}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}\frac{1}{2k}$$
$$=\sum_{k=1}^{200}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}=\sum_{k=101}^{200}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}$$
$$b=\sum_{k=1}=\frac{-1}{(k-201)(k+100)}$$
$$=\frac{-1}{301}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k-201}-\frac{1}{k+100}\right)$$
$$=\frac{-1}{301}\left(\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k-201}-\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}\right)$$
$$=\frac{-1}{301}\left(-\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+101}-\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}\right)$$
$$=\frac{2}{301}\left(\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}\right)$$
$$\therefore\ \left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}}{\frac{2}{301}\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k+100}}\right]=\left[\frac{301}{2}\right]=150$$

76) [정답] ①

[해설]

$\frac{9}{8}+9+9^2+\cdots+9^n=b_{n+1}$ 라고 하면,

$$b_{n+1}=\frac{9}{8}+9+9^2+\cdots+9^n=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}(9^n-1)=\frac{9}{8}9^n$$

따라서

$$a_n=\left(\frac{9}{8}\right)^n\cdot 9^{\frac{n(n-1)}{2}}=\left(\frac{9}{8}\right)^n 3^{n(n-1)}=\left(\frac{9}{8}\times 3^{n-1}\right)^n$$
$$\frac{\log a_n}{n}=\log\frac{9}{8}\times 3^{n-1}=\log\frac{3^{n+1}}{2^3}$$
$$\sum_{k=1}^{10}\frac{\log a_k}{k}=\sum_{k=1}^{10}\log\frac{3^{k+1}}{2^3}=\log\frac{3^{65}}{2^{30}}$$

그러므로

$$A=\frac{3^{65}}{2^{30}}$$

77) [정답] ③

[해설]

$$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$
$$\log_4\left(2^{a_1}\times 2^{a_2}\times 2^{a_3}\times\cdots\times 2^{a_{12}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})$$
$$=\frac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{12\times 13\times 25}{6}=325$$

78) [정답] 27

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$$S_{10}=\sum_{k=1}^{10}(-1)^k a_k$$
$$=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+a_8-a_9+a_{10}$$
$$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+(a_8-a_7)+(a_{10}-a_9)$$
$$=d+d+d+d+d$$
$$=5d$$

$S_{10}=25$이므로

$5d=25\ \therefore\ \ d=5$

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

그런데 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이므로

$a_{k+1}-a_k=d=5$

즉, $\frac{1}{a_{k+1}-a_k}=\frac{1}{5}$

그러므로 $\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$$T_5=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$$
$$=\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5d}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+25}\right)$$
$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{25}{a(a+25)}$$
$$=\frac{5}{a(a+25)}$$

$\frac{1}{T_5}=\frac{54}{5}$이므로

$\frac{a(a+25)}{5}=\frac{54}{5}$

$a(a+25)=54$

$a^2+25a-54=0$

$(a+27)(a-2)=0$

$\therefore\ \ a=2(\because a>0)$

따라서 $a_6=2+5\times5=27$

79) [정답] ④

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n=3r^{n-1}\,(r>1)$

$b_n=(\log_{a_1}a_2)\times(\log_{a_2}a_3)\times(\log_{a_3}a_4)\times\ \cdots\ \times(\log_{a_n}a_{n+1})$

$=\frac{\log a_2}{\log a_1}\times\frac{\log a_3}{\log a_2}\times\frac{\log a_4}{\log a_3}\times\ \cdots\ \times\frac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$

$=\log_{a_1}a_{n+1}=\log_3(3r^n)=1+n\log_3 r$

$\sum_{k=1}^{10}b_k=10+(\log_3 r)\times\sum_{k=1}^{10}k$

$=10+55\log_3 r=120$

따라서 $\log_3 r=2$

80) [정답] ④

[해설]

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times2}{3}+\log_2\frac{2\times3}{4}+\log_2\frac{2\times4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times2}{3}\times\frac{2\times3}{4}\times\frac{2\times4}{5}\times\cdots\times\frac{2\times(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$

이때 $\sum_{k=1}^{m}a_k=N$(N은 100 이하의 자연수)라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N,\ \frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N},\ 2^{m+1-2N}=m+2$

이므로 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 한다.

$m\geq1$이므로 $m=2^l-2$(l은 2 이상의 자연수)로 놓으면

$2^{m+1-2N}=m+2$에서

$2^{2^l-1-2N}=2^l$

즉, $2^l-2N=l+1$

이때 좌변이 짝수이므로 l은 홀수이고,

역으로 l이 2 이상인 홀수이면

$N=\frac{1}{2}(2^l-l-1)$은 자연수이다.

$\frac{1}{2}(2^l-l-1)\leq100$에서 $2^l-l-1\leq200$을 만족시키는 2이상의 홀수 l의 값은 3, 5, 7이다.

따라서 모든 m의 값은

$2^3-2,\ 2^5-2,\ 2^7-2$이고 그 합은

$6+30+126=162$

81) [정답] ②

[해설]

$\sqrt{3n+1}=x,\ \sqrt{3n-2}=y$라 하면

$\sqrt{9n^2-3n-2}=\sqrt{(3n-1)(3n+2)}=xy,$

$6n-1=(3n-1)+(3n+2)=x^2+y^2,$

$x^2-y^2=3$이므로

$a_n=\frac{\sqrt{9n^2-3n-2}+6n-1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$

$=\frac{xy+x^2+y^2}{x+y}$

$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}$

$=\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

$=\frac{x^3-y^3}{3}$

$=\frac{(\sqrt{3n+1})^3-(\sqrt{3n-2})^3}{3}$

$\therefore\sum_{n=1}^{16}\frac{(\sqrt{3n+1})^3-(\sqrt{3n-2})^3}{3}$

$=\frac{1}{3}\left\{\{(\sqrt{4})^3-(\sqrt{1})^3\}+\{(\sqrt{7})^3-(\sqrt{4})^3\}\right.$

$\left.+\cdots+\{(\sqrt{49})^3-(\sqrt{46})^3\}\right\}$

$=\frac{1}{3}(7^3-1^3)$

$=114$

82) [정답] ②

[해설]

각 빈 칸에 들어갈 수들은 1, 2, 3, $\cdots$, 20 중 (같은 두 수를 포함하여) 두 수의 곱이다.

즉, $(1+2+3+\cdots+20)^2$을 전개했을 때의 모든 항들이다.

따라서, 구하는 수들의 합은

$(1+2+3+\cdots+20)^2=210^2=44100$

83) [정답] 63

[해설]

주어진 수열을 분모가 같은 것끼리 군으로 묶으면

$\underbrace{\left(\frac{1}{2^2},\ \frac{3}{2^2}\right)}_{\text{제1군}},\quad \underbrace{\left(\frac{1}{2^3},\ \frac{3}{2^3},\ \frac{5}{2^3},\ \frac{7}{2^3}\right)}_{\text{제2군}},$

$\underbrace{\left(\frac{1}{2^4},\ \frac{3}{2^4},\ \frac{5}{2^4},\ \frac{7}{2^4},\ \cdots,\ \frac{15}{2^4}\right)}_{\text{제3군}},\quad \cdots$

이때, 각 군의 항 수가 2, 4, 8, $\cdots$이므로 제n군까지의 항 수는

$\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)2-1}{=2(2^n-1)}$

$2(2^n-1)=126$에서 $2^n-1=63$

$2^n=64$ ∴ $n=6$

따라서, 제6군까지의 항 수가 126이므로 구하는 합은 제1군부터 제6군까지의 합이다.

한편, 제n군의 분모는 2^{n+1}이고, 분자의 합은

$\sum_{k=1}^{2^n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{2^n}k-2^n=2\cdot\frac{2^n(1+2^n)}{2}-2^n$

$=4^n$

따라서, 구하는 합은

$\sum_{n=1}^{6}\frac{4^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{6}2^{n-1}=\frac{2^6-1}{2-1}=64-1=63$

84) [정답] ③

[해설]

	1열	2열	3열	4열	5열	6열	7열	8열	$\cdots$
제1행	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
제2행	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
제3행	3	3	5	5	7	7	9	9	$\cdots$
제4행	4	4	5	5	7	7	10	10	$\cdots$
제5행	5	5	5	5	7	7	10	10	$\cdots$
제6행	6	6	6	6	7	7	11	11	$\cdots$
제7행	7	7	7	7	7	7	11	11	$\cdots$
제8행	8	8	8	8	8	8	11	11	$\cdots$
제9행	9	9	9	9	9	9	11	11	$\cdots$
제10행	10	10	10	10	10	10	11	11	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		

ㄱ. 제5행을 규칙에 따라 써보면 제8열이 10이다. ∴ 참

ㄴ. 제6열에서 7은 제2행부터 나타나고 7은 소수이므로 제7행까지만 계속된다. 따라서 모두 6번 나타난다. ∴ 참

ㄷ. 제22열은 제2행부터 23이 나타나며 23은 소수이므로 제23행까지 계속되고 제24행에서 처음으로 24가 나타난다. ∴ 거짓

85) [정답] 225

[해설]

제 n행의 좌변은 첫째항이 a_n, 공차가 n인 등차수열의 $(n+1)$개 항의 합이고, 우변은 첫째항이 $a_n+n(n+1)$이고 공차가 n인 등차수열의 n개 항의 합이므로

$a_n+(a_n+n)+(a_n+2n)+\cdots+(a_n+n^2)$

$=\{a_n+n(n+1)\}+\{a_n+n(n+2)\}+\cdots$

$+(a_n+2n^2)$

$\frac{(n+1)(2a_n+n^2)}{2}=\frac{n(2a_n+3n^2+n)}{2}$

∴ $a_n=n^3$

∴ $\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}k^3=\left(\frac{5\cdot 6}{2}\right)^2=225$

86) [정답] 485

[해설]

각 행의 마지막 숫자들만 나열한 수열을 $\{a_n\}$이라 하면 $\{a_n\}$은 1, 4, 10, 22, 46, $\cdots$이다. $\{a_n\}$의 계차수열이 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.

∴ $a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$

그러므로 2008에 가장 가까운 마지막 항을 구하면 $n=10$일 때, 1534이다. 그러므로 2008은 다음 행의 1535부터 474번째에 위치한다.

∴ $m=11$, $n=474$

∴ $m+n=485$

87) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\langle 10,1\rangle+\langle 10,10\rangle=2$ (참)

ㄴ. $\langle n+1,2\rangle+\langle n+1,n\rangle=2n$ 이므로

$\langle 11,2\rangle+\langle 11,10\rangle=20$ (참)

ㄷ. 제 n행의 수의 합을 S_n라 하면 $S_{n+1}=2S_n$

∴ $\langle 12,3\rangle+\langle 12,4\rangle+\cdots+\langle 12,10\rangle$

$=2^{11}-2-22=2024$ (참)

88) [정답] ③

[해설]

2부터 $(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$씩 묶어서 군으로 생각하면

n군의 가장 큰 수는 $(2n+1)^2$이다.

$(2\cdot 14+1)^2=841$

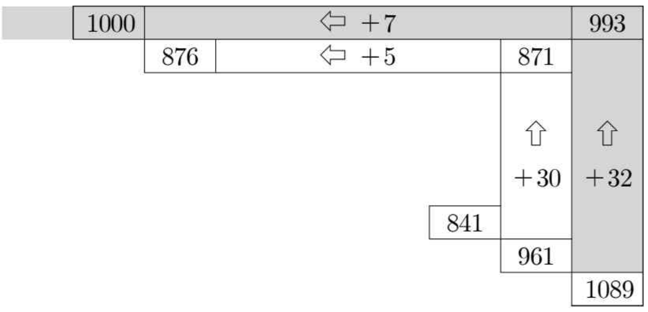
$(2\cdot 15+1)^2=961$

$(2\cdot 16+1)^2=1089$

이므로 1000은 16군의 39번째 수이다.

n군은 ⇧ ⇦ ⇩ ⇨ 순으로 $2n$개의 수가 나열되므로

구하는 수는 그림과 같이 15군의 35번째 수이다.



따라서 구하는 수는 $841+35=876$이다.

89) [정답] ③

[해설]

$n\ge 2$일 때, 제 $n-1$행의 맨 오른쪽 끝의 수는

$1+2+3+\cdots+(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$이다.

따라서 a_n은 $\frac{n(n-1)}{2}$보다 큰 수 중 가장 작은 n의 배수이다.

i) n이 홀수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}$이 n의 배수이므로

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_{2n-1}=\frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2}=2n^2-n$$

ii) n이 짝수일 때,

$\frac{n(n-1)}{2}=n\times\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$이므로

$$a_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}n^2$$

$$a_{2n}=\frac{1}{2}(2n)^2=2n^2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{30}a_n=\sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})$$

$$=\sum_{n=1}^{15}(2n^2-n+2n^2)$$

$$=4\sum_{n=1}^{15}n^2-\sum_{n=1}^{15}n$$

$$=4\times\frac{15\times16\times31}{6}-\frac{15\times16}{2}$$

$$=4840$$

90) [정답] 247

[해설]

$n\ge 2$일 때,

n행의 홀수 번째 놓인 원 안에는 $(2n-1)$이 n개,

n행의 짝수 번째 놓인 원 안에는

$\{2\times(2n-1)+(2n-3)\}$이 $(n-1)$개 쓰여 있다.

n행의 모든 수의 합을 a_n이라 하면

$$a_n=(2n-1)n+(6n-5)(n-1)$$

$$=8n^2-12n+5\,(n\ge 2)$$

$a_1=1$이므로

$$a_n=8n^2-12n+5\,(n\ge 1)$$

$$\therefore\quad S=\sum_{n=1}^{10}(8n^2-12n+5)$$

$$=8\sum_{n=1}^{10}n^2-12\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}5$$

$$=8\times\frac{10\times11\times21}{6}-12\times\frac{10\times11}{2}+5\times10$$

$$=2470$$

따라서 $\frac{S}{10}=247$

91) [정답] ③

[해설]

$2a_n+n=p$에

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 20$을 대입하면

$2a_1+1=p$

$2a_2+2=p$

$\cdots$

$2a_{20}+20=p$

변끼리 더하면

$2(a_1+a_2+\cdots+a_{20})+(1+2+\cdots+20)=20p$

$$2p+\frac{20\times21}{2}=20p$$

$18p=210$

$$\therefore p=\frac{35}{3}$$

$2a_{10}+10=\frac{35}{3}$에서

$a_{10}=\frac{1}{2}\left(\frac{35}{3}-10\right)=\frac{5}{6}$

92) [정답] 18

[해설]

$\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})=2n^2-n$이므로 $n\geq 2$일 때,

$a_{2n-1}+a_{2n}=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$

$=4n-3$

$\therefore\ (a_9+a_{10})+(a_{11}+a_{12})=17+21=38$

$\therefore\ a_9+a_{12}=38-(a_{10}+a_{11})=38-20=18$

93) [정답] 58

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$을 만족하므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4k-3}{a_k}$

$=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$

$=4n+5$

즉, $\frac{4n-3}{a_n}=4n+5$이므로

$a_n=\frac{4n-3}{4n+5}$ (단, $n\geq 2$)

$n=5$를 대입하면 $a_5=\frac{17}{25}$

$n=7$를 대입하면 $a_5=\frac{25}{33}$

$n=9$를 대입하면 $a_5=\frac{33}{41}$

$\therefore a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41}$

따라서 $p=41$, $q=17$이므로 $p+q=58$

94) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $m=2$일 때, $a_5=\left[\frac{5}{2}\right]=2$이다. (참)

ㄴ. $m=3$일 때,

$\sum_{k=1}^{100}\left[\frac{k}{3}\right]=3\sum_{k=1}^{32}k+33+33=1650$이다. (거짓)

ㄷ. $\sum_{k=1}^{mn}\left[\frac{k}{m}\right]=m\sum_{k=1}^{n-1}k+n$

$=\frac{n(mn-m+2)}{2}$ (참)

95) [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$이므로

$b_n=\sum_{k=1}^{n}k\{1+(k-1)d\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{dk^2+(1-d)k\}$

$=d\sum_{k=1}^{n}k^2+(1-d)\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{dn(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(1-d)n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times\{d(2n+1)+3(1-d)\}$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)$

$b_{10}=715$ 이므로

$\frac{10\times 11}{6}\times(20d-2d+3)=715$

$18d+3=39$

$18d=36$

$d=2$

$b_n=\frac{n(n+1)}{6}\times(2\times 2\times n-2\times 2+3)$

$=\frac{n(n+1)}{6}\times(4n-1)$

$\frac{b_n}{n(n+1)}=\frac{1}{6}(4n-1)$

따라서

$\sum_{n=1}^{10}\frac{b_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{6}(4n-1)$

$=\frac{1}{6}(220-10)$

$=35$

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_n=1+(n-1)d$ 이므로

$$
\begin{aligned}
b_n&=\sum_{k=1}^{n} k\{1+(k-1)d\}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{dk^2+(1-d)k\}\\
&=d\sum_{k=1}^{n}k^2+(1-d)\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{dn(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(1-d)n(n+1)}{2}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times\{d(2n+1)+3(1-d)\}\\
&=\frac{n(n+1)}{6}\times(2dn-2d+3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{n(n+1)}&=\frac{3-2d+2dn}{6}\\
&=\frac{1}{2}+(n-1)\frac{d}{3}
\end{aligned}
$$

이므로

수열 $\left\{\dfrac{b_n}{n(n+1)}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공차가 $\dfrac{d}{3}$ 인

등차수열이다.

$b_{10}=715$ 이므로

수열 $\left\{\dfrac{b_n}{n(n+1)}\right\}$의 제10항은

$$\frac{b_{10}}{10\times11}=\frac{715}{10\times11}=\frac{13}{2}$$

따라서

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{10}\frac{b_n}{n(n+1)}&=\frac{10\times\left(\frac{1}{2}+\frac{13}{2}\right)}{2}\\
&=\frac{10\times7}{2}\\
&=35
\end{aligned}
$$

96) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $n=1$ 일 때 $2^a=10$ 에서

로그의 정의에 의해 $a=\log_2 10$ 이므로

$a-1=\log_2 10-\log_2 2=\log_2\dfrac{10}{2}=\log_2 5$ 이다. (참)

ㄴ. $n=2$ 일 때 $2^a=10^2$ 에서

로그의 정의에 의해 $a=\log_2 10^2$ 이다.

$a-2=\log_2 10^2-\log_2 2^2=\log_2\dfrac{10^2}{2^2}=\log_2 5^2=2\log_2 5$

$5^b=10^2$ 에서 $b=\log_5 10^2$ 이다.

$b-2=\log_5 10^2-\log_5 5^2=\log_5\dfrac{10^2}{5^2}=\log_5 2^2=2\log_5 2$

따라서 $(a-2)(b-2)=2\log_2 5\times2\log_5 2=4$ 이다. (참)

ㄷ. ㄴ과 마찬가지 방법으로 계산하면

$a=\log_2 10^n$ 에서 $a-n=\log_2 10^n-\log_2 2^n=n\log_2 5$

$b=\log_5 10^n$ 에서 $b-n=\log_5 10^n-\log_5 5^n=n\log_5 2$

$(a-n)(b-n)=n\log_2 5\times n\log_5 2=n^2\dfrac{\log5}{\log2}\times\dfrac{\log2}{\log5}=n^2$

이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}\frac{(a-n)(b-n)}{n}=\sum_{n=1}^{20}\frac{n^2}{n}=\sum_{n=1}^{20}n=210$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.