포물선

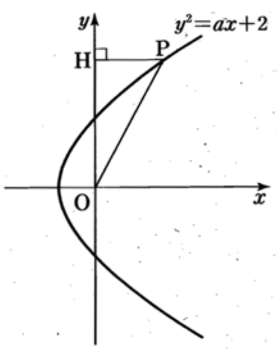
1. 포물선 $y^2=4(x+y+2)$의 초점의 좌표를 F$(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?[3점-1008-대성]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

2. 좌표평면에서 초점의 좌표가 $(1,\ 0)$이고 준선이 $x=-1$인 포물선이 직선 $x=k$와 만나는 두 점을 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=12$일 때, 양수 k의 값은? [3점-1010-비상]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

3. 그림과 같이 원점 O를 초점으로 하는 포물선 $y^2=ax+2$ 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. $2\overline{\mathrm{PO}}=3\overline{\mathrm{PH}}$가 성립할 때, 선분 OP의 길이는? (단, $a>0$)



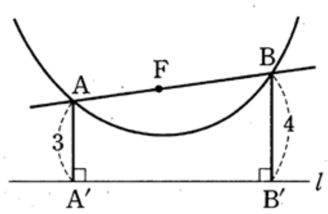
[3점-1010-종로]

① $2\sqrt{2}$ ② 3
③ $2\sqrt{3}$ ④ 4
⑤ $3\sqrt{2}$

4. 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P 에서 원 $(x-4)^2+y^2=4$ 에 그은 접선의 접점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=4\sqrt{2}$ 일 때, 점 P의 x 좌표는? [3점-1009-대성]

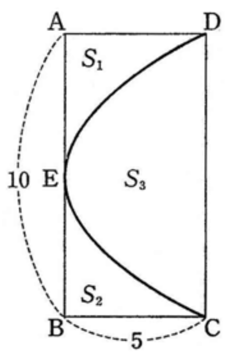
① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

5. 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선과 포물선의 두 교점을 A, B 라고 하고, 두 점 A, B에서 포물선의 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라고 하자. $\overline{\mathrm{AA'}}=3$, $\overline{\mathrm{BB'}}=4$ 일 때, 사다리꼴 AA′B′B의 넓이는?[3점-1011-종로]



① $10\sqrt{3}$ ② $11\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $13\sqrt{3}$ ⑤ $14\sqrt{3}$

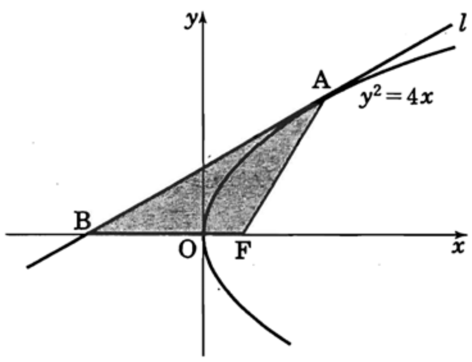
6. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{BC}}=5$ 인 직사각형 ABCD 가 있다. 변 AB 의 중점 E에서 변 AB 에 접하고, 두 점 C, D 를 지나는 포물선에 의해 직사각형은 세 영역으로 나뉜다. 세 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때, $\dfrac{S_3}{S_1+S_2}$의 값을 구하시오.[3점-1008-종로]



7. 직선 $y=4x+5$를 x축의 방향으로 $-m$만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동시켰더니 포물선 $y^2=4x$에 접하였다고 할 때, 점 $(m,\ n)$이 좌표평면에 나타내는 도형의 방정식은?[3점–1008–비상]

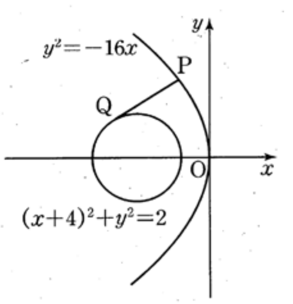
① $16x+4y+19=0$ ② $16x+4y-19=0$
③ $16x-4y+19=0$ ④ $16x+4y-15=0$
⑤ $16x-4y+15=0$

8. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 와 기울기가 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선 l 이 점 A 에서 접하고 있다. 직선 l 이 x 축과 만나는 점을 B, 포물선의 초점을 F 라 할 때, 삼각형 ABF 의 넓이는?[3점–1006–대성]



① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

9. 그림과 같이 포물선 $y^2=-16x$ 위의 동점 P에서 원 $(x+4)^2+y^2=2$에 그은 한 접선의 접점을 Q라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점–1010–중앙]

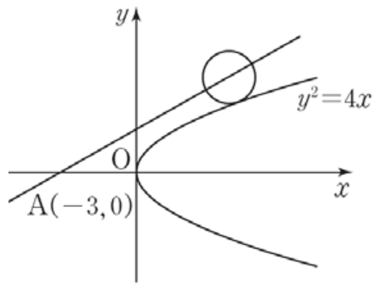


<보 기>

ㄱ. 포물선의 초점과 원의 중심은 일치한다.
ㄴ. 점 $(-4,\ 8)$에서 포물선의 준선까지의 거리는 6이다.
ㄷ. 점P가 원점 O에 있을 때, 선분 PQ의 길이는 최소이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이 포물선 $y^2=4x$ 와 접하면서 움직일 때, 이 원의 중심과 점 $\mathrm{A}(-3,\,0)$ 을 지나는 직선의 기울기의 최댓값은?[4점–1010–비상]

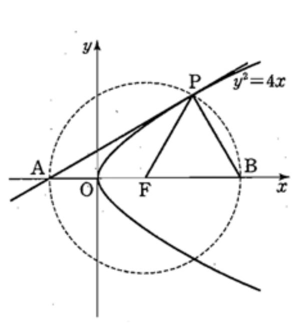


① $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

11. 포물선 $y^2=4px$의 초점 F를 지나고 기울기가 $m\,(m>0)$ 인 직선 l 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하고, 두 점 P, Q에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=4$, $\overline{\mathrm{QF}}=12$일 때, 사각형 $\mathrm{PQH_2H_1}$의 넓이를 S라 하자. 이때 세 수 $m,\ p,\ S$의 곱 mpS의 값은?[4점–1007–종로]

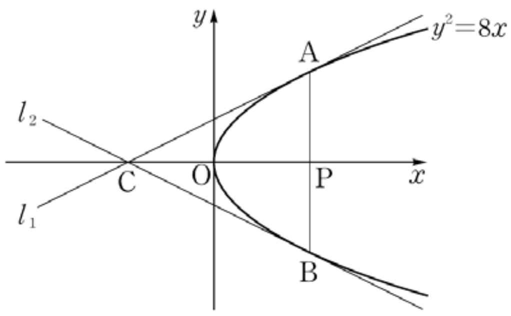
① 288 ② $240\sqrt{3}$ ③ 480
④ 576 ⑤ $480\sqrt{3}$

12. 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$ 의 초점 F를 중심으로 하는 원이 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 또, 이 원이 제1사분면에서 이 포물선과 만나는 한 점을 P라 하자. 직선 AP가 이 포물선의 접선이고 기울기가 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$의 값은?[4점–1006–종로]



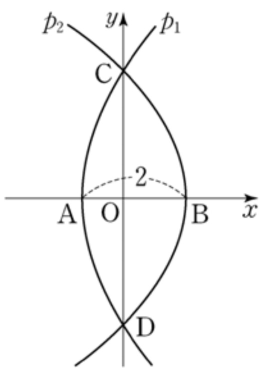
① $3\sqrt{6}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ 12

13. 좌표평면에서 x축 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P가 원점을 출발하여 t초 후의 속도는 $4t$이다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선과 포물선 $y^2=8x$가 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. 또, 점 A에서 이 포물선에 접하는 직선을 l_1, 점 B에서 이 포물선에 접하는 직선을 l_2라 할 때, 두 직선 l_1, l_2의 교점을 C라 하자. 점 P가 원점을 출발하여 2초가 지나는 순간, 삼각형 ABC의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율을 구하시오.[4점-1010-메가]



14. 그림과 같이 좌표평면에서 x축 위의 두 점 A, B에 대하여 꼭짓점이 A인 포물선 p_1과 꼭짓점이 B인 포물선 p_2가 다음 조건을 만족시킨다. 이때, 삼각형 ABC의 넓이는?[4점-2010-대수능]

(가) p_2의 초점은 B이고, p_2의 초점은 원점 O이다. (나) p_1과 p_2는 y축 위의 두 점 C, D에서 만난다. (다) $\overline{AB}=2$



① $4(\sqrt{2}-1)$ ② $3(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

타원

1. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) 두 초점은 x축 위에 있고, 단축의 길이는 10이다. (나) 두 초점 사이의 거리는 10이다.

이 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.[3점–1009–중앙]

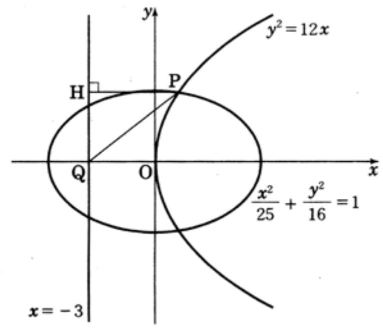
2. 타원 $\frac{(x-a)^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$이 원점을 한 초점으로 가질 때, 양수 a의 값은?[3점–1010–종로]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

3. 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 P와 직선 $y=2x-2$ 사이의 거리의 최댓값은?[3점–1011–중앙]

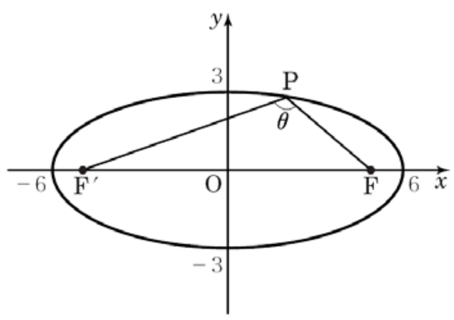
① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{5}$
④ 5　⑤ $2\sqrt{7}$

4. 좌표평면에서 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$과 포물선 $y^2=12x$가 만나는 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 직선 $x=-3$에 내린 수선의 발을 H라 하고, 직선 $x=-3$이 x축과 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}+\overline{PH}$의 값은? [3점–1010–대성]



① 8　② 9　③ 10
④ 11　⑤ 12

5. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점 F, F′과 제 1사분면의 타원 위의 점 P가 이루는 각 ∠FPF′의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$이다. $\overline{PF}\times\overline{PF'}$의 값은?[3점–1007–대성]



① 20　② 27　③ 32
④ 35　⑤ 36

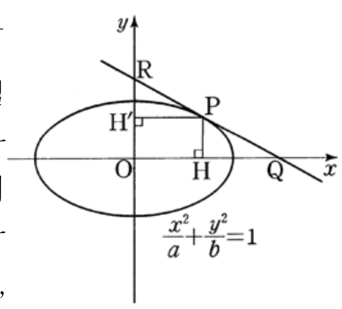
6. 양수 k에 대하여 직선 $y=2x+k$가 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$에 접할 때, k의 값은?[3점-1004-대성]

① 4　② $\sqrt{17}$　③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{19}$　⑤ $2\sqrt{5}$

7. 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하였더니 타원 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}=1$에 접하였다. 이때 k^2의 값을 구하시오.

[3점-1008-종로]

8. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ $(a>0, b>0)$의 제1사분면 위의 점 P에서 그은 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하고, 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하자. 이때, $\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{OH'}}\cdot\overline{\mathrm{OR}}$의 값과 항상 같은 것은? (단, O는 원점이다.)[4점-1010-중앙]



① ab　② $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　③ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$
④ $a+b$　⑤ a^2+b^2

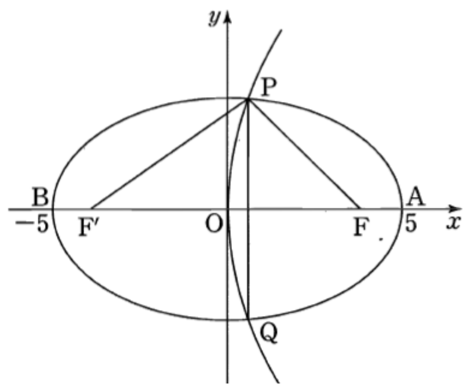
9. 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$과 원 $(x-5)^2+y^2=r^2$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서의 타원의 접선과 원의 접선이 서로 수직일 때, 점 P의 y좌표는?[4점-1009-대성]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. 좌표평면에서 점 A$(0, 4)$와 타원 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P를 지나는 직선이 원 $x^2+(y-3)^2=1$과 만나는 두 점 중에서 A가 아닌 점을 Q라 하자. 점 P가 타원 위의 모든 점을 지날 때, 점 Q가 나타내는 도형의 길이는?[3점-2010-대수능]

① $\frac{\pi}{6}$　② $\frac{\pi}{4}$　③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{3}\pi$　⑤ $\frac{3}{4}\pi$

11. 좌표평면에서 두 점 A$(5, 0)$, B$(-5, 0)$에 대하여 장축이 선분 AB인 타원의 두 초점을 F, F′이라 하자. 초점이 F이고 꼭짓점이 원점인 포물선이 타원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{10}$일 때, 두 선분 PF와 PF′의 길이의 곱 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}$의 값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1009-평가원]



12. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{F}(0,\,6-2\sqrt{5})$, $\mathrm{F}'(0,\,6+2\sqrt{5})$에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=12$를 만족시키는 점 P의 자취가 나타내는 도형을 C라 하자. 도형 C 위의 임의의 점 $(a,\,b)$에 대하여 a^2+b^2-12b의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

[4점–1008–비상]

13. 타원 $2x^2+6y^2=6$ 위의 점에서 직선 $x+y+8=0$에 이르는 거리의 최댓값을 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오.

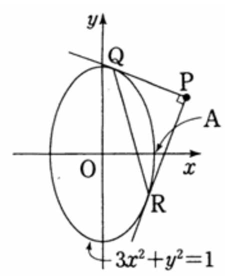
[4점–1008–중앙]

14. 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 한 초점을 F라 하고, 타원 위의 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 ABF의 무게중심이 원점 O일 때, 삼각형 ABF의 넓이는?[4점–1006–대성]

① $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{7\sqrt{5}}{2}$

④ $4\sqrt{5}$ ⑤ $\dfrac{9\sqrt{5}}{2}$

15. 그림과 같이 좌표평면에서 타원 $3x^2+y^2=1$의 외부에 있는 점 P에서 이 타원에 그은 두 접선의 접점을 Q, R라 하자. 다음 두 조건을 만족시키면서 움직이는 점P가 그리는 도형 전체의 길이는?[4점–1010–비상]



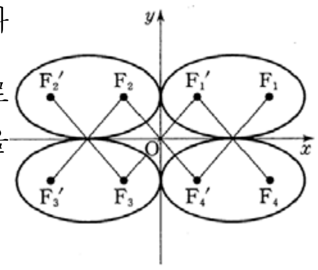
(가) $\angle \mathrm{QPR}=90^\circ$

(나) 점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$은 삼각형 PQR의 내부에 있다.

① $\dfrac{\pi}{6}$ ② $\dfrac{\pi}{3}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

16. 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$과 합동인 4개의 도형이 좌표축에서 서로 외접하고 있다. 이 4개의 타원의 초점을 각각 $\mathrm{F_1}$, $\mathrm{F_1}'$, $\mathrm{F_2}$, $\mathrm{F_2}'$, $\mathrm{F_3}$, $\mathrm{F_3}'$, $\mathrm{F_4}$, $\mathrm{F_4}'$이라 할 때,



$$\overline{\mathrm{F_1F_4}'}+\overline{\mathrm{F_2F_4}'}+\overline{\mathrm{F_2F_3}'}+\overline{\mathrm{F_4F_1}'}+\overline{\mathrm{F_3F_1}'}+\overline{\mathrm{F_3F_2}'}$$

의 값을 구하시오.[4점–1006–종로]

쌍곡선

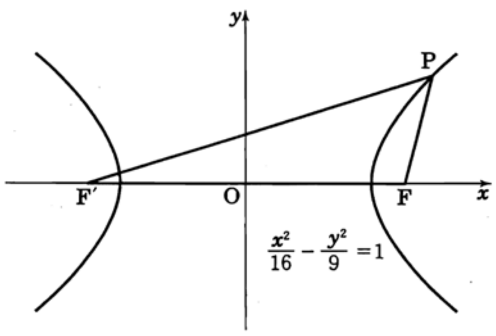
1. 직선 $y=2x+3$이 쌍곡선 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{a}=1$에 접할 때, 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리는?[3점–1009–종로]

① 4 ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

2. 좌표평면 위의 점 $(-1, 0)$에서 쌍곡선 $x^2-y^2=2$에 그은 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, m^2+n^2의 값은? (단, m, n은 상수이다.)[3점–1009–평가원]

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

3. 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 위의 한 점 P 와 두 초점 F, F′에 대하여 삼각형 PF′F 의 둘레의 길이가 34 일 때, $|\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{PF'}}^2|$의 값은?
[3점–1006–대성]

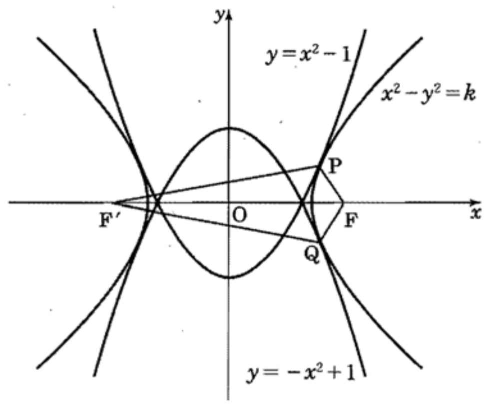


① 191 ② 192 ③ 193
④ 194 ⑤ 195

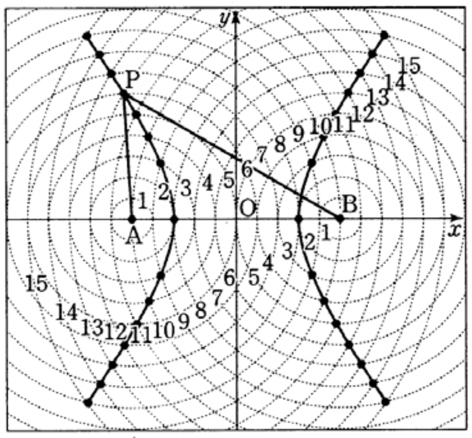
4. 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 점근선과 직선 $x=4$가 제1사분면에서 만나는 점을 P라 하자. 중심이 원점이고 점 P를 지나는 원이 쌍곡선과 제1사분면에서 만나는 점을 Q, x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{BQ}}$의 값은?[3점–1011–대전교]

① 9 ② 15 ③ 18
④ 20 ⑤ 25

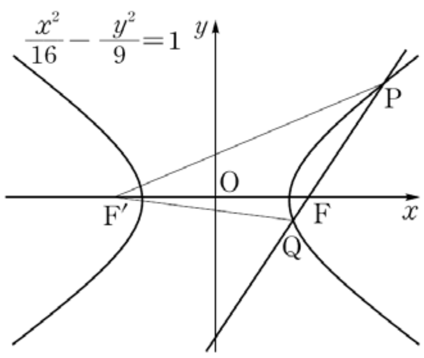
5. 좌표평면에서 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=k$가 두 곡선 $y=x^2-1$, $y=-x^2+1$과 두 점 P, Q에서 각각 접하고 있다. 쌍곡선 $x^2-y^2=k$의 두 초점을 각각 F, F′이라 할 때, 사각형 PF′QF의 넓이를 S라 하자. $4S^2$의 값을 구하시오. (단, 두 점 P, Q의 x좌표는 양수이다.)[3점–1011–대성]



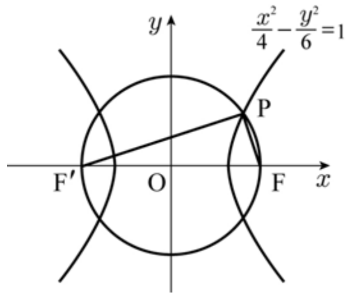
6. 그림은 좌표평면에서 두 점 A, B 사이의 거리는 10이고 두 점 A, B를 각각 중심으로 하는 반지름의 길이가 1, 2, 3, …인 동심원을 그린 것이다. 그림과 같이 동심원의 교점에 점을 찍은 후 이를 매끄러운 곡선으로 연결한 도형의 방정식이 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$일 때, 두 양수 a, b의 합 $a+b$를 구하시오.[3점–1011–종로]



7. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 점 F를 지나는 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\overline{QF'}$일 때, 선분 PF′의 길이를 구하시오.[3점–1010–메가]

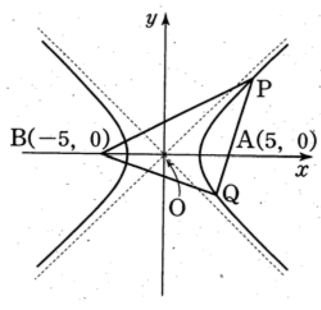


8. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$이라 하자. 두 점 F, F′을 지름의 양 끝점으로 하는 원과 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{6}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, $\cos(\angle PFF')$의 값은? (단, c는 양수이다.)[4점–1010–교육청]



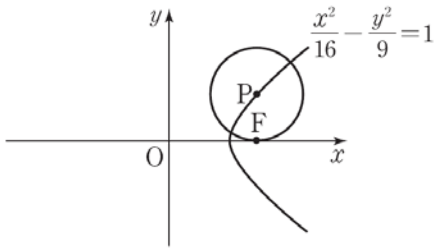
① $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{15}$ ③ $\frac{2\sqrt{10}}{15}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 그림과 같이 점 A(5, 0)을 지나는 직선이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$과 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 하자.



두 점 P, Q와 점 B(−5, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 BQP의 $\overline{BQ}$, $\overline{QP}$, $\overline{PB}$의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 삼각형 BQP의 둘레의 길이를 구하시오. (단, 두 점 P, Q의 x좌표는 모두 양수이다.)[4점–1011–중앙]

10. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\,(x>0)$ 위를 움직이는 임의의 점 P에 대하여 점 P를 중심으로 하고 점 F$(5,\,0)$을 지나는 원이 있다. 이 원은 중심이 $(a,\,b)$이고 반지름의 길이가 r인 원과 항상 외접한다고 할 때, 세 상수 $a,\,b,\,r$에 대하여 $a^2+b^2+r^2$의 값을 구하시오.[4점–1010–비상]



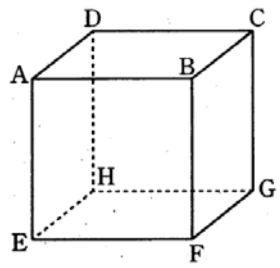
11. 좌표평면에서 쌍곡선 $x^2-y^2=1$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선을 l이라 하고, 원점을 지나고 접선 l에 수직인 직선을 m이라 하자. 직선 m이 쌍곡선 $x^2-y^2=1$과 제2사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 선분 OP의 길이가 $\sqrt{15}$일 때, 선분 OQ의 길이는?[4점–1010–대성]

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{14}$
④ $\sqrt{15}$ ⑤ 5

공간도형

1. 그림과 같은 정육면체 ABCD$-$EFGH에 대하여 <보기>에서 직선 AG와 수직인 도형은 모두 몇 개인가?

[3점$-$1009$-$종로]



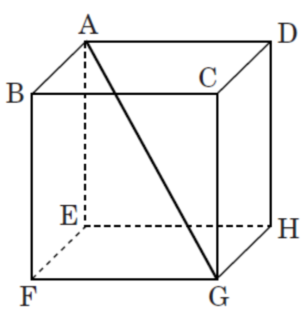
<보 기>

ㄱ. 직선 AH	ㄴ. 직선 CE
ㄷ. 직선 CF	ㄹ. 직선 BE
ㅁ. 평면 BDE	ㅂ. 평면 BDHF

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\overline{BF}=2$인 직육면체 ABCD$-$EFGH가 있다. 꼭짓점 F에서 직선 AG까지의 최단거리는?

[3점$-$1008$-$대성]



① $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{4}{3}$
③ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

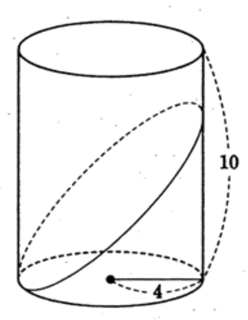
3. 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 A$-$BCDE가 있다. 정삼각형 ABC에 내접하는 원의 평면 BCDE 위로의 정사영의 넓이는?

[3점$-$1010$-$메가]

① $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\pi$ ② $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$
③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ ④ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ ⑤ $\dfrac{8\sqrt{2}}{9}\pi$

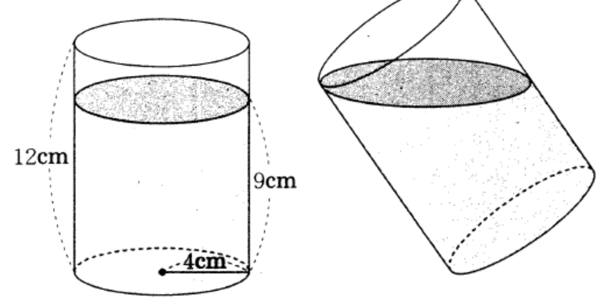
4. 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 10인 원기둥을 그림과 같이 밑면과 45°의 각도를 이루는 평면으로 자르면 단면은 타원이 된다. 이 타원의 두 초점 사이의 거리는?

[3점$-$1007$-$종로]

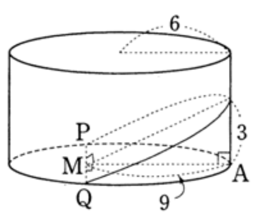


① 4 ② $4\sqrt{2}$
③ 8 ④ $8\sqrt{2}$
⑤ 16

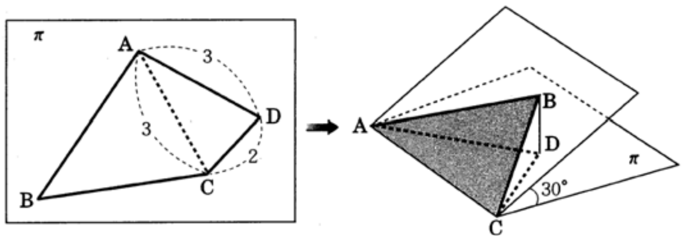
5. 밑면의 반지름의 길이가 4cm, 높이가 12cm인 직원기둥 모양의 그릇에 9cm의 높이까지 물이 채워져 있다. 이 그릇을 천천히 기울일 때, 그릇에 들어 있는 물이 쏟아지기 직전의 수면의 넓이는 $a\pi\,\mathrm{cm}^2$이다 상수 a의 값을 구하시오.[4점-1010-대성]



6. 밑면의 반지름의 길이가 6이고 높이가 6인 직원기둥이 있다. 그림과 같이 밑면의 둘레 위의 한 점 A에서부터 밑면과 수직인 방향으로 3만큼 떨어진 점을 지나는 평면으로 직원기둥의 밑면과 만나서 생기는 교선의 양 끝점을 P, Q라 하고, 선분 PQ의 중점을 M이라 하자. $\overline{PQ}\perp\overline{AM}$, $\overline{AM}=9$일 때, 잘린 단면의 넓이는 $8\sqrt{a}\pi+3\sqrt{b}$이다. 두 자연수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오. [4점-1010-비상]

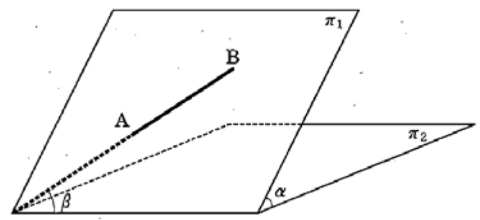


7. 그림과 같이 평면 π위에 $\overline{AC}=\overline{AD}=3$, $\overline{CD}=2$인 사각형 ABCD가 놓여 있다. 세 꼭짓점 A, C, D는 평면 π에 고정시키고, 대각선 AC를 접는 선으로 하여 평면 π를 접어 올려서 삼각형 ABC를 포함하는 평면이 평면 π와 30°의 각을 이루도록 했을 때, 점 B의 평면 π 위로의 정사영이 점 D가 되었다. 삼각형 ABC의 넓이는?[3점-1004-대성]



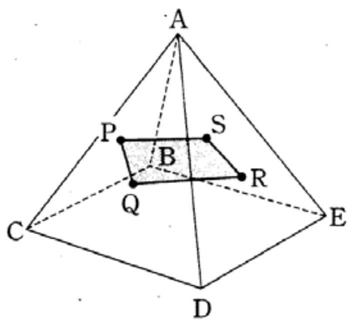
① $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ ② $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ ③ $\frac{5\sqrt{6}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

8. 그림과 같이 이면각의 크기가 α인 두 평면 π_1, π_2가 있다. 평면 π_1 위에 길이가 1인 선분 AB가 놓여 있고, 선분 AB의 연장선이 두 평면 π_1, π_2의 교선과 이루는 각의 크기를 β라 할 때, $\sin\beta=\frac{4}{5}$이다. 선분 AB의 평면 π_2 위로의 정사영의 길이가 $\frac{4}{5}$일 때, $\sin\alpha$의 값은?[4점-1011-대성]

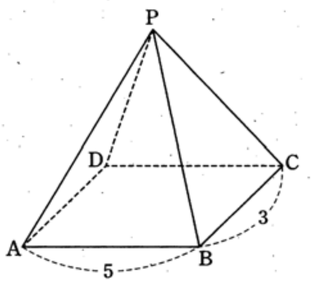


① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

9. 그림의 사각뿔 A$-$BCDE에서 △ABC, △ACD, △ADE, △AEB의 무게중심을 각각 P, Q, R, S라고 하자. 사각형 PQRS의 넓이가 16일 때, 사각형 BCDE의 넓이를 구하시오.[3점-1011-종로]



10. 밑면이 직사각형이고 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$인 사각뿔 P$-$ABCD가 있다. $\overline{PA}=7$, $\overline{PB}=8$, $\overline{PC}=9$일 때, $\overline{PD}^2$의 값은?[3점-1007-종로]

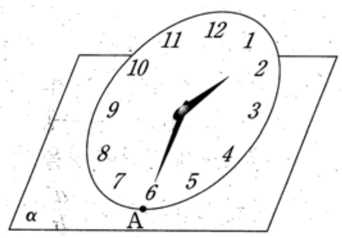


① 64 ② 66
③ 68 ④ 70
⑤ 72

11. 좌표공간 위의 두 점 A$(4, 0, 0)$, B$(0, 4, 0)$을 지나는 직선을 l이라 하고, 구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=1$이 만나서 생기는 도형을 C라 하자. 직선 l 위의 점 P와 도형 C 위의 점 Q 사이의 거리의 최솟값을 d라 할 때, d^2의 값은?[4점-1010-대성]

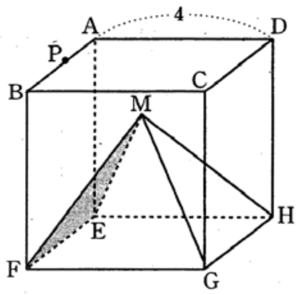
① $4\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $6-2\sqrt{3}$
④ $8-2\sqrt{2}$ ⑤ $12-4\sqrt{6}$

12. 그림과 같이 원판 모양의 시계가 1시 30분을 가리키고 있고, 시계의 긴 바늘의 연장선과 원판의 가장자리가 만나는 점을 A라 하자. 점 A를 평면 α위에 고정시켜 놓은 상태에서 원판을 비스듬히 들어 올려 평면 α와 원판이 이루는 각의 크기가 60°가 되도록 하였다. 이때, 시계의 긴 바늘의 평면 α 위로의 정사영과 짧은 바늘의 평면 α 위로의 정사영이 이루는 각 중에서 작은 각의 크기를 θ라 하자. 이때, $\cos\theta$의 값은? (단, 원판의 두께와 바늘의 굵기는 무시한다.)[4점-1011-중앙]

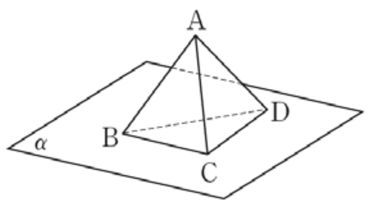


① $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
④ $-\dfrac{2}{5}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

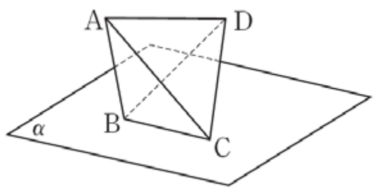
13. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정육면체 ABCD－EFGH안에 모든 모서리의 길이가 4인 정사각뿔 M－EFGH가 놓여 있다. 이 때 모서리 AB의 중점 P에서 삼각형 MFE까지 거리를 d라 할 때, $3d^2$의 값을 구하시오.[4점－1009－종로]



14. [그림1]과 같이 평면 α 위에 한 모서리의 길이가 4인 정사면체 모양의 입체 ABCD가 놓여 있다. 모서리 BC는 평면 α에 고정시킨 채 모서리 AD가 평면 α에 평행하도록 꼭짓점 D를 들어올렸더니 [그림2]와 같았다.



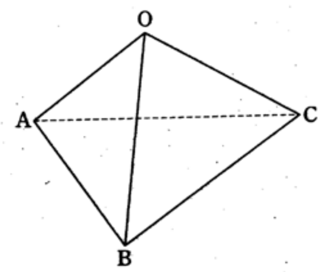
[그림1]



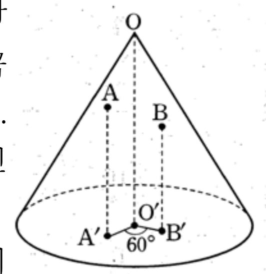
[그림2]

이때, [그림2]의 정사면체 모양의 입체 ABCD의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.[3점－1010－비상]

15. 사면체 O－ABC에서
$\overline{AB}=10$, $\overline{CA}=\overline{CB}=11$, $\overline{OC}=12$, $\overline{OA}=\overline{OB}=13$이다. 평면 OAB와 평면 ABC가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\dfrac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[3점－1007－종로]

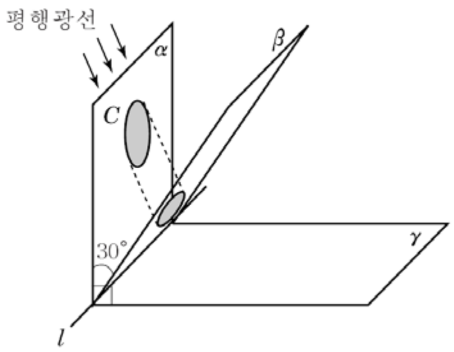


16. 밑면의 반지름의 길이가 20, 높이가 40인 직원뿔에서 그림과 같이 직원뿔의 꼭짓점을 O, 옆면 위의 두 점을 A, B라 하자. 점 O, A, B를 직원뿔의 밑면에 정사영 시킨 점을 각각 O′, A′, B′이라고 하면, 내적 $\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}=4$, $\angle A'O'B'=60^\circ$이다. 이때, $\overline{AB}^2$의 최솟값을 구하시오.[4점－1010－중앙]



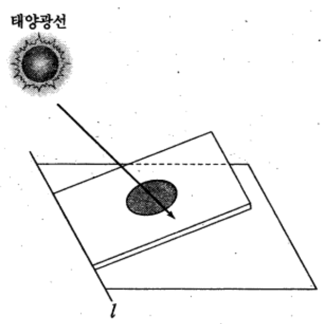
17. 그림과 같이 직선 l을 공유하는 세 평면 α, β, γ가 있다. 두 평면 α, γ는 서로 수직이고, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 30°이다. 평면 α 위에 반지름의 길이가 6인 원 C가 있다. 평행광선이 교선 l에 수직인 방향에서 평면 γ와 60°의 각을 이루면서 원 C를 비출 때, 평면 β 위에 생기는 원 C의 그림자의 넓이는?

[3점–1007–대성]

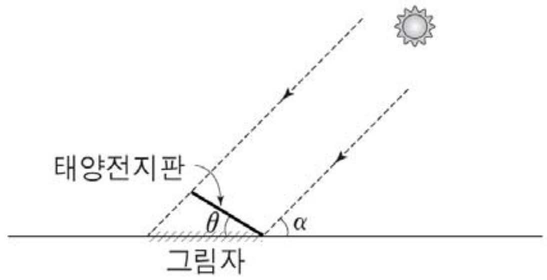


① 9π ② 15π ③ 18π
④ $12\sqrt{3}\pi$ ⑤ $16\sqrt{3}\pi$

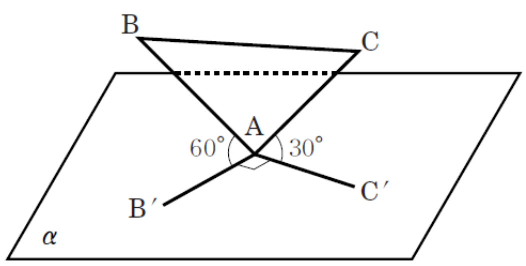
18. 지표면과 30°의 각을 이루고 있는 투명 유리가 있고, 유리 위에 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 유리와 지표면의 교선을 l이라 하면 지표면에 수직이 아닌 태양광선이 l에 수직이면서 유리와는 60°의 각을 이루며 비추고 있을 때, 지표면에 생긴 원의 그림자의 넓이는 $a\sqrt{3}\pi$ (단, a는 자연수)이다. 이 때, a의 값을 구하시오.[4점–1007–종로]



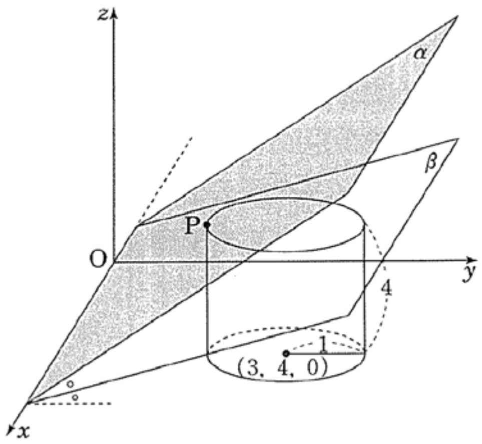
19. 다음 그림은 평평한 지면에 설치된 태양전지판을 나타낸 것이다. 이 태양전지판은 지면과 이루는 각 θ를 변화시켜 그림자의 넓이가 최대가 되도록 조정할 수 있다고 한다. 태양광선이 지면과 이루는 각 α의 크기가 30°일 때 태양전지판이 만드는 그림자의 최대 넓이를 S_1이라 하자.
또, 태양광선이 지면과 이루는 각 α의 크기가 60°일 때 태양전지판이 만드는 그림자의 최대 넓이를 S_2라 하자. 이때, $5\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$의 값을 구하여라.[4점–1008–비상]



20. 그림과 같이 두 선분 AB, AC를 평면 α 위로 정사영시킨 두 선분 AB′, AC′이 서로 수직이고, $\angle \mathrm{BAB'} = 60^\circ$, $\angle \mathrm{CAC'} = 30^\circ$, 삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{13}$이다. 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, 점 A는 평면 α 위의 점이다.)[4점–1008–대성]

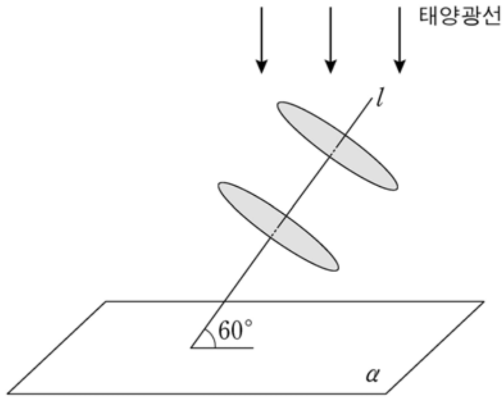


21. 좌표공간에서 다음 그림과 같이 밑면이 xy 평면 위에 있고 높이가 4인 직원기둥이 있다. 이 원기둥의 밑면은 중심이 점 $(3,4,0)$ 이고 반지름의 길이는 1인 원이다. x축을 포함하는 평면 α가 이 원기둥과 한 점 P 에서 만날 때, 평면 α와 xy평면이 이루는 각을 이등분하는 평면 중 이 원기둥을 자르는 평면 β라 하자. 평면 β에 의해 잘린 원기둥의 단면의 넓이는?[4점-1009-대성]



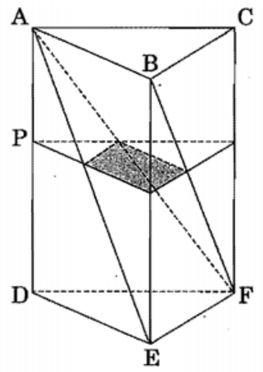
① $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$
④ $\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{3}\pi$

22. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$ 이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60° 이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.)[4점-2010-대수능]



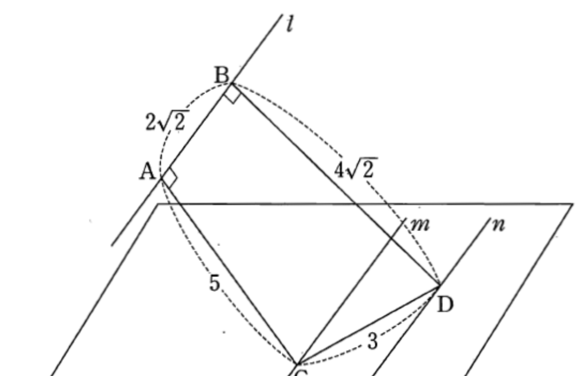
① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$
④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

23. 오른쪽 그림은 밑면의 넓이가 1인 삼각기둥 ABCDEF를 세 개의 사면체 ADEF, ABEF, ABCF로 나눈 것이다. 모서리 AD를 2 : 3 으로 내분하는 점을 P라 할 때, 점 P를 지나고 밑면 DEF에 평행한 평면으로 사면체 ABEF를 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-대성]



24. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{CD}=3$
(나) $\overline{AC}\perp l$, $\overline{AC}=5$
(다) $\overline{BD}\perp l$, $\overline{BD}=4\sqrt{2}$

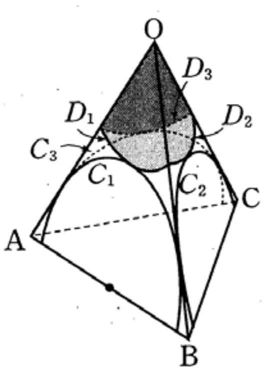


두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$[4점-1009-평가원]

25. 서로 다른 n개의 평면에 의하여 분할되는 공간의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_3=8$, $a_4=15$이다. a_5의 값을 구하시오.

[4점-1007-대성]

26. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정사면체 O-ABC가 있다. 선분 AB의 중점을 중심으로 하고 두 선분 OA, OB에 모두 접하는 반원 C_1을 그리고, 점 O를 중심으로 하고 반원 C_1에 접하는 부채꼴의 호 D_1을 삼각형 OAB의 내부에 그린다.



이와 같은 방법으로 삼각형 OBC의 내부에 반원 C_2와 호 D_2를 그리고, 삼각형 OCA의 내부에 반원 C_3과 호 D_3을 그렸을 때, 점 O를 중심으로 하고 호가 D_1, D_2, D_3인 어두운 세 부채꼴의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. 이 때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1009-중앙]

공간좌표

1. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(0,\ 3,\ 0)$과 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ a)$ 사이의 거리는 점 P와 점 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -1)$ 사이의 거리의 2배이다. 양수 a의 값은?

[2점−2010−대수능]

① $\sqrt{7}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{5}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{3}$

2. 좌표공간에 있는 네 점 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$, $\mathrm{D}(0,\ 0,\ -4)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD의 부피를 $\dfrac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점−1011−중앙]

3. 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(-2,4,6)$, $\mathrm{B}(8,-6,2)$를 이은 선분 AB와 yz평면의 교점을 P라 하면 점 P는 선분 AB를 $m:n$으로 내분한다. 이때, $m+n$의 값은? (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

[3점−1010−중앙]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

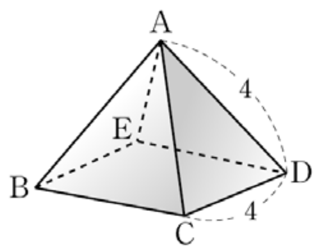
4. 공간좌표 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 4,\ 5)$, $\mathrm{B}(3,\ -2,\ 6)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$가 zx 평면 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은?[3점−1011−종로]

① 7 ② $\dfrac{22}{3}$ ③ $\dfrac{23}{3}$
④ 8 ⑤ $\dfrac{25}{3}$

5. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{B}(6,\ 8,\ 10)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 C라 할 때, 선분 BC의 중점의 좌표는 $(a,\ b,\ c)$이다. $a+b+c$의 값은?[3점−1010−메가]

① 33 ② 34 ③ 35
④ 36 ⑤ 37

6. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(-3,4,5)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (a,b,c)라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.[3점−1009−평가원]



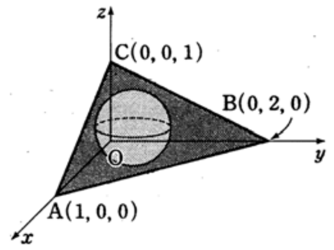
7. 좌표공간 위의 점 P$(1,\ 2,\ -2)$에서 구 $x^2+y^2+z^2=3$에 그은 모든 접선과 구의 교점이 나타내는 도형을 포함하는 평면을 α라 할 때, 구의 중심에서 평면 α에 이르는 거리를 구하시오.
[3점–1008–대성]

8. 좌표공간에서 넓이가 8 인 삼각형 F 를 xy 평면과 yz 평면에 정사영시킨 도형의 넓이가 각각 4, 5 일 때, 삼각형 F 를 zx 평면에 정사영시킨 도형의 넓이가 S 이다. 이때 S^2 의 값을 구하시오.
[3점–1008–종로]

9. 좌표공간에 네 점 A$(1, 0, 0)$, B$(0, 1, 0)$, C$(0, 0, 1)$, D$(0, 2, 1)$이 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 두 선분 PA, PD의 길이의 합 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PD}}$의
최솟값은?[4점–1009–중앙]

① $\sqrt{3}-1$ ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+\sqrt{3}$

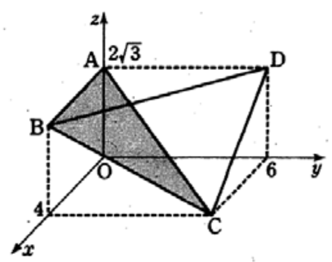
10. 그림과 같이 세 점 A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(0,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 0,\ 1)$를 지나는 평면과 xy, yz, zx 평면으로 둘러싸인 사면체가 있다. 이 사면체에 내접하는 구의 반지름의 길이는?



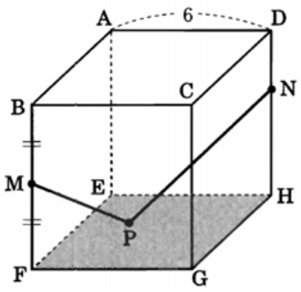
[4점–1011–종로]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{7}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

11. 그림과 같이 좌표공간 위의 네 점 A$(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$, B$(4,\ 0,\ 2\sqrt{3})$, C$(4,\ 6,\ 0)$, D$(0,\ 6,\ 2\sqrt{3})$에 대하여 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$ $(a, b$는 서로소인 자연수)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점–1010–종로]

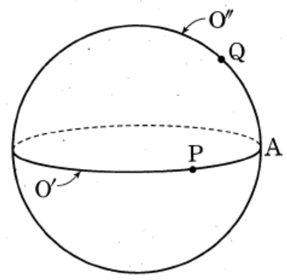


12. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6 인 정육면체에서 선분 BF의 중점을 M이라 하고, 선분 DH를 1 : 2 로 내분하는 점을 N이라 하자. 평면 EFGH 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{MP}}+\overline{\mathrm{NP}}$의 최솟값을 구하시오.[3점–1009–대성]



13. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 구 위에 다음 조건을 모두 만족하는 두 원 O′, O″이 있다.

(가) 두 원의 반지름의 길이는 1이다.
(나) 원 O′을 포함하는 평면과 원 O″을 포함하는 평면은 서로 수직이다.



점 P는 일정한 속도로 원 O′ 위를 2분마다 1바퀴씩 돌고, 점 Q는 일정한 속도로 원 O″ 위를 3분마다 2바퀴씩 돈다고 한다. 점 P와 점 Q가 두 원 O′, O″이 만나는 점 A에서 동시에 출발했을 때, 15초 후 두 점 P와 Q 사이의 거리는?[4점-1008-중앙]

① $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}$
③ $\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{3}}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{2}}}{2}$

14. 좌표공간에 점 A(0, 0, 9)와 구 $C: x^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$가 있다. 점 A를 지나고 구 C에 접하는 직선이 구와 만나서 생기는 도형을 S, 점 A를 지나고 구 C에 접하는 직선이 xy평면과 만나서 생기는 도형을 T라 하자. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-비상]

<보 기>

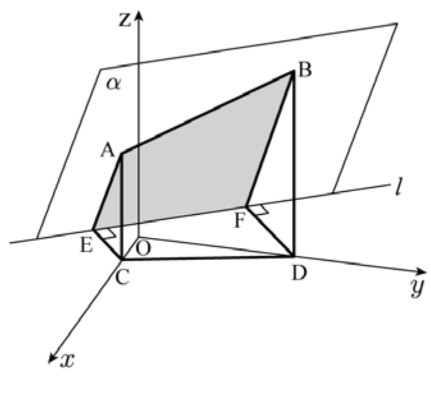
ㄱ. 도형 S 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=5$이다.
ㄴ. 도형 S의 넓이는 $\dfrac{36}{5}\pi$이다.
ㄷ. 도형 T 위의 점 Q에 대하여 선분 AQ의 길이의 최댓값은 15이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 좌표공간의 $-1 \le x \le 1$인 부분에 입체도형 T가 있다. 입체도형 T를 x축과 수직인 평면으로 자른 단면은 이 평면이 두 곡선 $C_1: y=1-x^2$, $z=0$, $C_2: z=1-x^2$, $y=0$ 및 x축과 만나는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 입체도형 T의 부피를 $\dfrac{n}{m}$이라 할 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 자연수이다.)

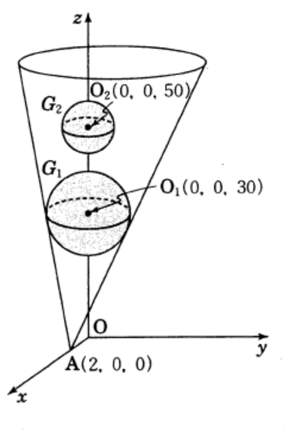
[4점-1004-대성]

16. 좌표공간에서 평면 $\alpha: 12x+9y-5\sqrt{3}z+3=0$ 위의 두 점 A, B에서 xy평면에 내린 수선의 발은 각각 C(1, 0, 0), D(0, 3, 0)이다. 평면 α와 xy평면의 교선을 l이라 하고, 두 점 C, D에서 교선 l에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자. 이때, 사각형 AEFB의 넓이를 구하시오.[4점-1010-교육청]



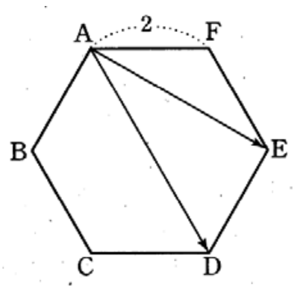
17. 그림과 같이 좌표공간에 점 $O_1(0,\ 0,\ 30)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 구 G_1과 점 $O_2(0,\ 0,\ ,50)$을 중심으로 하고 길이가 6인 구 G_2가 있다. 구 G_1과 G_2의 표면에 색을 칠해서 불투명하게 만든 후 xy 평면 위의 점 $A(2,\ 0,\ 0)$ 에서 구 G_1과 G_2를 바라보면 구 G_2는 구 G_1에 가려서 보이지 않고 오르지 구 G_1만이 보이게 된다. 이와 같이 xy 평면 위의 점들 중에서 두 개의 구 G_1과 G_2를 바라보았을 때, 구 G_2가 구 G_1에 가려서 보이지 않고 오르지 구 G_1만이 보이는 점 전체의 집합을 S라 하자. 예를 들어 $A \in S$ 이다. 집합 S에 속한 점들이 이루는 전체 영역의 넓이가 $\frac{n}{m}\pi$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)

[4점-1004-대성]



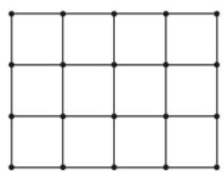
벡터와 연산과 내적

1. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정육각형 ABCDEF가 있다. 이 때 $|3\overrightarrow{\mathrm{AD}}-4\overrightarrow{\mathrm{AE}}|$의 값은?[3점-1009-종로]



① 4　　② 5
③ $3\sqrt{3}$　　④ 6
⑤ $4\sqrt{3}$

2. 그림은 한 변의 길이가 1인 정사각형 12개를 붙여 만든 도형이다. 이 도형 위의 20개의 꼭짓점에서 임의로 서로 다른 두 점을 택하여 이들 점을 각각 시점과 종점으로 하는 모든 벡터의 집합을 X라 하자. 집합 X의 두 원소 $\vec{x}$, $\vec{y}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점-1010-비상]



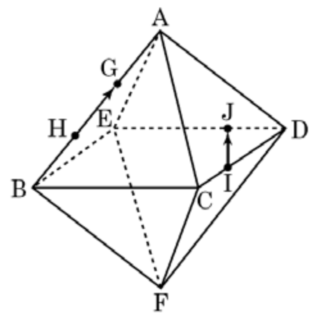
<보 기>

ㄱ. $\vec{x}\cdot\vec{y}$의 최솟값은 -25이다.
ㄴ. $|\vec{x}|=\sqrt{2}$, $|\vec{y}|=\sqrt{5}$이면 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$는 수직이다.
ㄷ. $|\vec{x}|=\sqrt{10}$, $\vec{x}\cdot\vec{y}=0$이면 $|\vec{y}|=\sqrt{10}$이다.

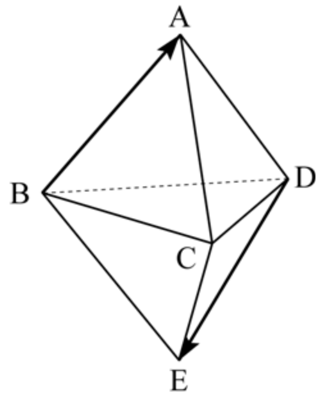
① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 한 평면 위에 있지 않은 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$라 하자. 벡터 $\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$와 벡터 $2\vec{a}-k\vec{b}+l\vec{c}$가 평행일 때, 두 실수 k, l의 곱 kl의 값을 구하시오.
[3점-1008-중앙]

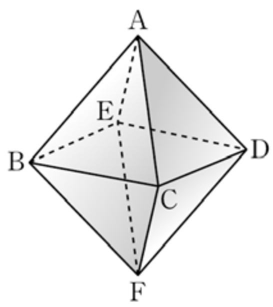
4. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정팔면체에서 모서리 AB의 삼등분점을 꼭짓점 A에 가까운 순서대로 G, H라 하고, 모서리 CD, DE의 삼등분점 중 꼭짓점 C, D에 가까운 점을 각각 I, J라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{HG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IJ}}=a$일 때, $\dfrac{120}{a}$의 값을 구하시오.[3점-1007-대성]



5. 그림은 한 모서리의 길이가 6 인 두 정사면체 ABCD 와 BCDE 에 대하여 면 BCD 를 일치시킨 도형을 나타낸 것이다. 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$와 $\overrightarrow{DE}$에 대하여 $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2$ 의 값을 구하시오. [3점-1010-교육청]



6. 그림과 같은 정팔면체 ABCDEF에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1010-메가]



<보 기>

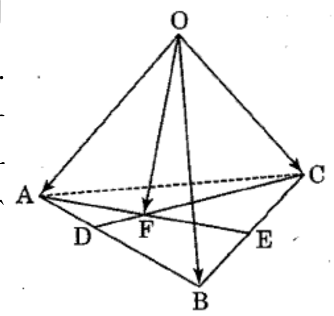
ㄱ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CF}$
ㄴ. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$
ㄷ. $(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|^2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

7. 좌표공간에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구와 점 A(2, 1, 1)이 있다. 이 구와 평면 $x=\frac{1}{2}$이 만나서 생기는 도형 위를 움직이는 점 P(a, b, c)가 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$을 만족시킬 때, 세 상수의 곱 abc의 값은?[3점-1011-대성]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

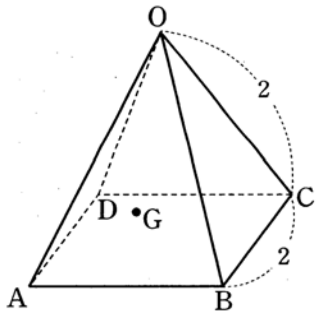
8. 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 OABC가 있다. 모서리 AB를 1:2로 내분하는 점을 D라 하고, 모서리 BC의 중점을 E라 할 때, 두 선분 AE, CD의 교점을 F라 하자.



$$\overrightarrow{OF}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\,\overrightarrow{OC}$$

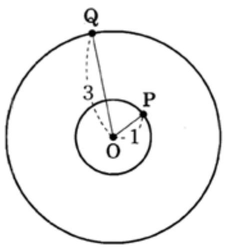
로 나타낼 때, $\frac{1}{abc}$의 값을 구하시오. (단 a, b, c는 0이 아닌 실수이다.)[4점-1011-대성]

9. 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 2인 정사각뿔 $\mathrm{O-ABCD}$가 있다. 삼각형 OAB의 무게중심을 G라 할 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{\mathrm{GD}}$의 크기는? [4점−1009−중앙]



① $\frac{2\sqrt{6}}{5}$　② $\frac{3\sqrt{6}}{5}$　③ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　④ $\sqrt{6}$　⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

10. 오른쪽 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점P와 점O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{7}$ 일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ 의 값을 구하시오.[3점−1009−대성]



11. 두 점 A(2, 0), B(0, 1)와 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위를 움직이는 점 P에 대하여, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 최대가 되는 점 P에서의 접선의 방정식은 $y=ax+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오.[4점−1011−대전교]

12. 좌표공간의 xy평면 위에 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 2인 원 C가 있다. 이 원 위의 두 점 P, Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=4$이고 점 A(1, 2, 3)일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2$의 값을 구하시오.[4점−1011−중앙]

13. 주사위를 두 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ -a)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2a-b,\ 1)$이라고 하자. 이때 ∠AOB가 예각이 될 확률은?[4점−1008−종로]

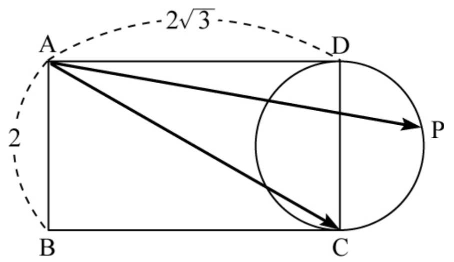
① $\frac{5}{12}$　② $\frac{17}{36}$　③ $\frac{19}{36}$　④ $\frac{7}{12}$　⑤ $\frac{23}{36}$

14. 한 평면 위에 있는 삼각형 ABC와 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$이 성립한다.
$\overline{\mathrm{PA}}=a$, $\overline{\mathrm{PB}}=b$, $\overline{\mathrm{PC}}=c$라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$를 a, b, c를 이용하여 바르게 나타낸 것은?[4점−1008−비상]

① a^2+b^2　② a^2+c^2　③ b^2+c^2　④ b^2-c^2　⑤ c^2-a^2

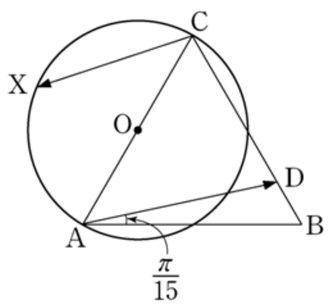
15. 그림은 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=2\sqrt{3}$ 인 직사각형 ABCD 와 이 직사각형의 한 변 CD 를 지름으로 하는 원을 나타낸 것이다. 이 원 위를 움직이는 점 P 에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ 의 내적 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}$ 의 최댓값은? (단, 직사각형과 원은 같은 평면 위에 있다.)

[4점–1010–교육청]



① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

16. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점–2010–대수능]



17. 실수 t에 대하여 좌표평면 위의 두 점 P, Q를

$$P(2\cos t,\ 2\sin t),\ Q(2\cos 3t,\ \sin 3t)$$

라 하자. 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$에 대하여 함수 $f(t)$를 $f(t)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.)[4점–1010–비상]

<보 기>

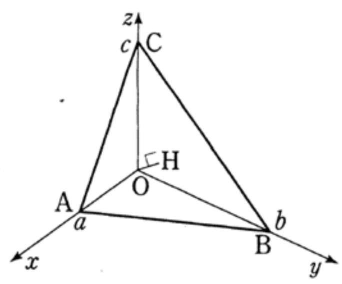
ㄱ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

ㄴ. $f(t)$의 최솟값은 -3이다.

ㄷ. $0\le t\le\pi$에서 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 모두 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 좌표공간의 원점 O에서 세 점 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$를 지나는 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자. a, b, c가 서로 다른 양수일 때, 항상 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



[4점–1010–비상]

<보 기>

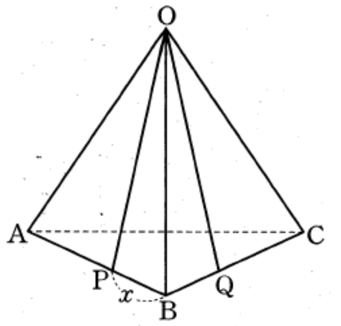
ㄱ. 원점 O와 점 $P\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$을 지나는 직선 OP는 평면 ABC와 수직이다.

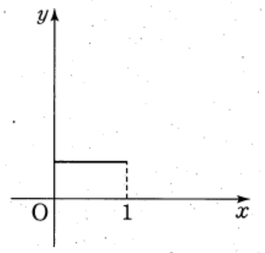
ㄴ. 평면 OCH는 직선 AB와 수직이다.

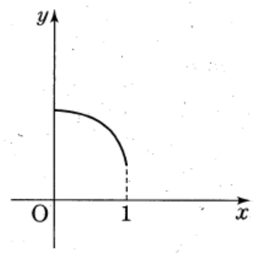
ㄷ. 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

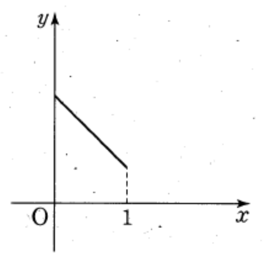
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

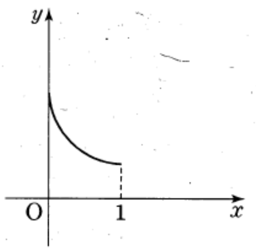
19. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정사면체 O−ABC가 있다. 점 P와 점 Q는 점 B에서 동시에 출발하여 각각 $\overline{BA}$, $\overline{BC}$를 따라 점 A와 점 C까지 같은 속력으로 움직인다. $\overline{BP}=x$라 할 때, 내적 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$를 $f(x)$라 하자. 다음 중 $y=f(x)$의 그래프의 개형은?[4점−1008−중앙]

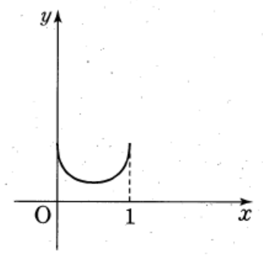


①


②


③


④


⑤


20. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C와 점 P에 대하여

$$5\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}\ (k\text{는 실수})$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점−1008−대성]

<보기>

ㄱ. $k=2$일 때, 세 점 A, B, P는 일직선 위에 존재한다.
ㄴ. $k=-3$일 때, $\angle ABP=\angle CBP$이다.
ㄷ. 점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있기 위한 정수 k는 4개다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 9이다.
(나) 삼각형 ABC 내부의 점 P에 대하여
$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$이다.
(다) $\overline{CP}$의 연장선과 변 AB가 점 Q에서 만나다.

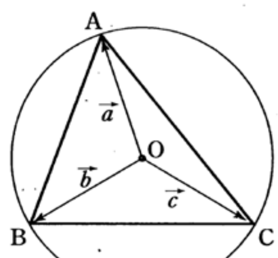
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점−1004−대성]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{CQ}=2\overrightarrow{CP}$
ㄴ. $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{5}$
ㄷ. 삼각형 PAB의 넓이는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 삼각형 ABC의 외심을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$라 하자. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$를 만족할 때, 선분 BC의 길이는?[4점−1011−종로]



① $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$
③ $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ ④ $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

23. 평면에서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 O, A, B, 와 두 양수 a, b에 대하여 점 C가

$$\overrightarrow{OC}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$$

를 만족시킨다. 세 삼각형 OAB, OAC, OBC의 무게중심을 각각 G, G_1, G_2라 하자. 점 G_1이 선분 AB 위에 있을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1010–비상]

<보 기>

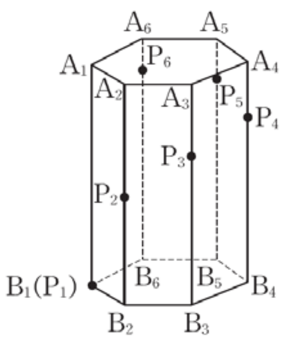
ㄱ. $a+b=2$

ㄴ. 두 선분 AB, OC의 교점을 M이라 하면 $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM})$이다.

ㄷ. 삼각형 GG_1G_2의 넓이와 삼각형 OAB의 넓이의 비는 $1:9$이다.

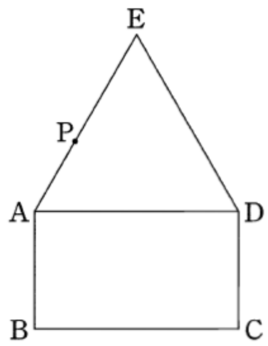
① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24. 그림과 같이 밑면이 한 변의 길이가 1인 정육각형이고, 높이가 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ 인 육각기둥이 있다. 선분 A_nB_n $(n=2, 3, \cdots, 6)$을 $1:(n-1)$로 내분하는 점을 P_n이라 할 때, 벡터 $\vec{v}$를 $\vec{v}=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k\overrightarrow{A_1P_k}$라 하자. $|\vec{v}|^2$의 값을 구하시오. (단, 점 P_1은 점 B_1이다.)[4점–1010–비상]



25. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점–1009–평가원]



<보 기>

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

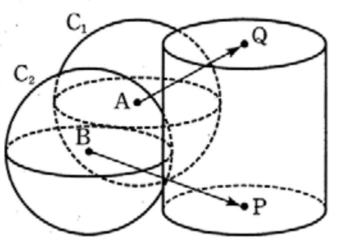
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

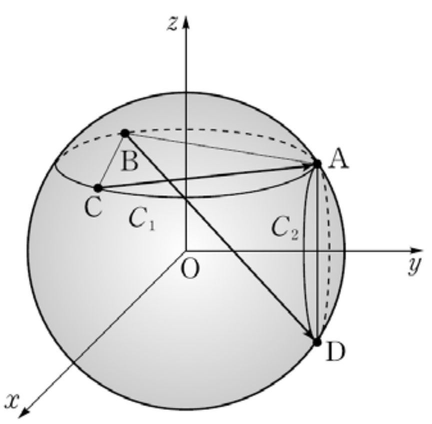
26. 좌표평면에서 포물선 $y^2=4x$의 초점을 F, 준선을 l이라 하고, 이 포물선 위를 움직이는 점 P에서 준선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자. 또, 자연수 n에 대하여 $\overline{PF}=n$일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{PF}$, $\overrightarrow{PH}$의 내적 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PH}=a_n$이라 하자. 이 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오.

[4점–1009–중앙]

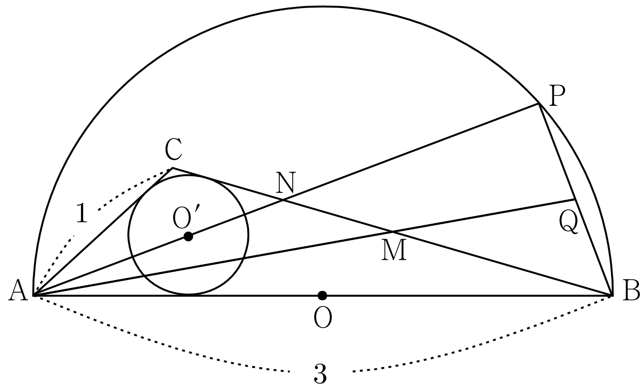
27. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 구 C_1, C_2가 편평한 바닥에 서로 접하며 놓여 있다. 또, 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 2인 원기둥의 옆면이 두 구에 접하도록 놓여 있다. 두 구 C_1, C_2의 중심을 각각 A, B라 하고, 원기둥의 아래쪽에 있는 원의 중심을 P, 위쪽에 있는 원의 중심을 Q라 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{BP}$의 내적 $\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$의 값을 구하시오. (단, 원기둥의 밑면은 두 구가 놓여 있는 바닥 위에 있다.[4점–1010–종로]



28. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=16$과 평면 $z=2$가 만나서 생기는 원을 C_1이라 하자. 또, 원 C_1과 yz평면이 만나는 한 점을 A라 할 때, 점 A를 지나고 y축에 수직인 평면과 구 S가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_1 위에 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 두 점 B, C를 잡고, 원 C_2 위에 선분 AD가 원 C_2의 지름이 되도록 점 D를 잡는다. 이때, 벡터 $\overrightarrow{CA}$와 벡터 $\overrightarrow{BD}$의 내적 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 y좌표는 양수이고, 점 C의 x좌표는 양수이다.)[4점–1010–메가]



29. 그림과 같이 점 O를 중심으로 하고, 길이가 3인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 이 반원의 내부에 $\overline{AC}=1$인 점 C를 잡고, △ABC의 내접원의 중심을 O′이라 하자. 선분 AO′의 연장선과 선분 BC의 교점을 N, 반원과의 교점을 P라 하고, 선분 BC의 중점을 M, 선분 AM의 연장선과 선분 BP의 교점을 Q라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1011–대전고]



<보 기>

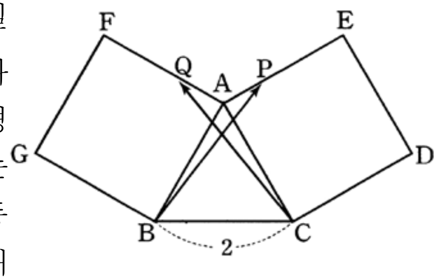
ㄱ. $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$

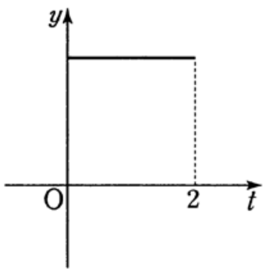
ㄴ. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

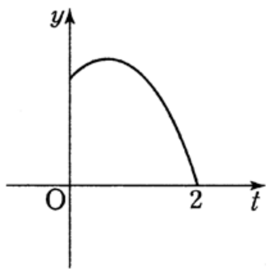
ㄷ. $2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$

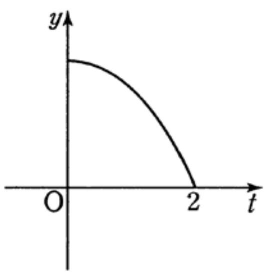
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

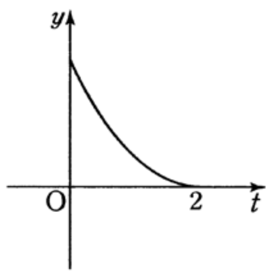
30. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 변 AB를 공유하는 정사각형 AFGB와 변 AC를 공유하는 정사각형 ACDE가 있다. 동점 P는 점 A를 출발하여 매초 1의 속력으로 변 AE를 따라 점 E까지 움직인다. 또, 동점 Q는 동점 P와 동시에 점 A를 출발하여 매초 1의 속력으로 변 AF를 따라 점 F까지 움직인다. 동점 P, Q가 점 A를 출발한 지 t초 후의 내적 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ}$를 $f(t)$라 할 때, 다음 중 함수 $y=f(t)$의 그래프의 개형은?[4점-1010-중앙]

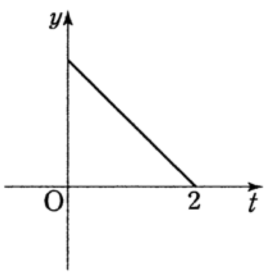


① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

직선과 평면의 방정식

1. 좌표공간에서 평면 $2x+y-2z-3=0$에 수직인 직선 l과 zx 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta$의 값은? [3점-1009-중앙]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 좌표공간에서 평면 α : $x+2y-2z=0$ 위의 점 A와 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(5,\ 6,\ -8)$일 때, 점 P에서 평면 α까지의 거리를 구하시오.[3점-1010-대성]

3. 좌표공간에서 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$가 평면 $z=4$와 만나는 점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $a+b+c$의 값은? [2점-1009-평가원]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

4. 점 $(1,\ -2,\ 3)$을 지나고 직선 $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{4}$에 평행인 직선이 점 $(3,\ a,\ b)$를 지난다. $a+b$의 값은?[3점-1011-대전교]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

5. 원점 O를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 구가 직선 $\frac{x+1}{2}=y-1=z-4$와 접할 때, $2r^2$의 값을 구하시오. [3점-1008-종로]

6. 좌표공간에서 두 직선

$$\frac{x+1}{3}=\frac{2y-1}{5}=\frac{z+4}{8},\quad \frac{x}{2k}=\frac{y+1}{k+3}=\frac{z}{4}$$

가 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b,\ c)$에서 만날 때, $k+a+b+c$의 값을 구하시오. [3점-1004-대성]

7. 좌표공간에서 평면 $x-2z-7=0$ 과 평면 $y-3z-14=0$ 의 교선을 l 이라 하자. 원점에서 직선 l 에 내린 수선의 발의 좌표를 (a,b,c) 라 할 때, $a+b+c$ 의 값은?[3점-1010-교육청]

① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

8. 좌표공간에 있는 두 직선 l,m의 방정식이 다음과 같다.

$l: y=x\ ,\ z=0$
$m: y=z\ ,\ x=0$

직선 l 위의 한 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q}(0,t,0)$이라 하고, 점 Q에서 직선 m에 내린 수선의 발을 R라 하자.
이때, 삼각형 OPR의 넓이가 $5\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 t의 값은? (단, O는 원점이다.)[3점-1011-중앙]

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{5}$　③ $2\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{3}$　⑤ $2\sqrt{5}$

9. 좌표공간 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(9,8,3)$ 과 평면 $x+2y+2z=9$ 위를 움직이는 점 P 가 있다. $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\le 0$일 때, 점P 가 움직이는 영역의 넓이는 S이다. $\dfrac{S}{\pi}$ 의 값을 구하시오.
[4점-1009-대성]

10. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=25$ 와 평면 $\alpha: x-2y+2z=9$ 가 만나서 생기는 원을 C 라 하자. 원 C 에 내접하는 정삼각형 PQR 에 대하여 점 P 를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 A 라 하자. 이 때 내적 $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ 의 값을 구하시오.[4점-1009-종로]

11. 좌표공간에 x축, y축 및 z축에 접하는 구

$S\ :\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=2$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(0,0,3)$에서 구 S에 그은 접선들과 xy평면의 교점으로 이루어진 도형에서 두 점 P, Q 를 잡는다. 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값을 M이라 할 때, M^2 의 값을 구하시오.
[4점-1011-대전교]

12. 좌표공간 위의 구 $C: (x-1)+y^2+z^2=20$과 직선 $l: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-4}{2}=z+1$이 있다. 구 C 위의 점 $\mathrm{P}(1,4,-2)$와 직선 l을 포함하는 평면을 α라 할 때, 평면 α와 구 C가 만나서 생기는 원의 넓이는?[4점-1010-종로]

① 3π　② 4π　③ 5π
④ 6π　⑤ 7π

13. 좌표공간에서 구 S_1 : $(x-6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$와 평면 α : $x+2y+2z+2=0$에 동시에 접하고 반지름의 길이가 3인 구 S_2의 중심이 나타내는 도형의 길이는 $p\pi$이다. p^2의 값을 구하시오.[4점–1010–대성]

14. 좌표공간에서 두 개의 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=5$, $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=8$이 만나서 생기는 원을 포함하는 평면을 α라 하자. 평면 α와 평면 $x-y=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\dfrac{10}{\cos^2\theta}$의 값을 구하시오. [3점–1010–중앙]

15. 좌표공간에서 직선 $3x+3=y-3=3z-3$ 위에 중심이 있고, 반지름의 길이가 3인 구가 평면 $2x-2y+z+4=0$에 접할 때, 접점의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하자. $a>0$일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.[4점–1008–중앙]

16. 좌표공간에서 직선 $\dfrac{x}{2}=y=z+3$ 과 평면 $\alpha: x+2y+2z=6$ 의 교점을 A라 하자. 중심이 점 $(1,\ -1,\ 5)$이고 점 A를 지나는 구가 평면 α 와 만나서 생기는 도형의 넓이는 $k\pi$이다. k 의 값을 구하시오.[3점–2010–대수능]

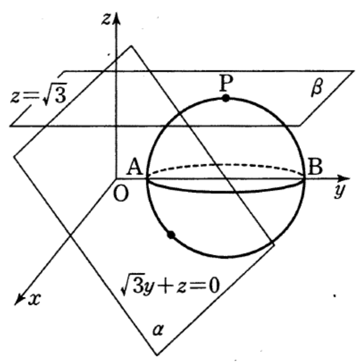
17. 두 직선

$$l:\ x-3=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2},\quad m:\ x-2=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{-3}$$

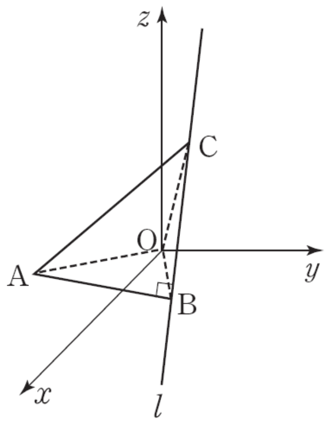
위의 임의의 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ}$를 만족시키는 점 R의 자취의 방정식은? (단, O는 원점이다.)[4점–1007–대성]

① $x+y-2z-8=0$
② $x-y+z+7=0$
③ $2x-y+2z+14=0$
④ $2x-4y+3z+20=0$
⑤ $3x-2y+4z-1=0$

18. 그림과 같이 평면 $\alpha: \sqrt{3}y+z=0$에 접하는 구가 동시에 평면 $\beta: z=\sqrt{3}$에 점 $\mathrm{P}(1,\ 3,\ \sqrt{3})$에 접하고 있다. 이 구가 y축과 만나는 점을 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. (단, 구의 중심의 z의 좌표는 $\sqrt{3}$보다 작다.)[4점–1010–종로]



19. 그림과 같이 좌표공간 위에 점 A(5, 0, 2)와 직선 l : $\frac{3-x}{2}=2-y=\frac{z-1}{2}$ 위의 두 점 B, C가 있다. 삼각형 ABC가 ∠ABC가 ∠ABC $=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1008-비상]



<보 기>

ㄱ. 점 B 의 좌표는 (1, 1, 3) 이다.
ㄴ. 직각이등변삼각형 ABC 를 포함하는 평면의 방정식은
$x+2y+2z-9=0$ 이다.
ㄷ. 삼각뿔 O$-$ABC 의 부피는 $\frac{9}{2}$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

정답 및 풀이

1. 답 ③

[해설] 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$(y-2)^2=4(x+3)$

이므로 포물선 $y^2=4x$를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이다.

따라서 초점의 좌표는 $F(-2,\ 2)$이므로

$a+b=(-2)+2=0$

2. 답 ④

[해설]주어진 포물선의 방정식은 $y^2=4x$이고, 두 점 A, B의 x좌표가 k이므로

$y^2=4k \quad \therefore y=\pm\sqrt{4k}=\pm 2\sqrt{k}$

즉, $\mathrm{A}(k, 2\sqrt{k})$, $\mathrm{B}(k, -2\sqrt{k})$이므로

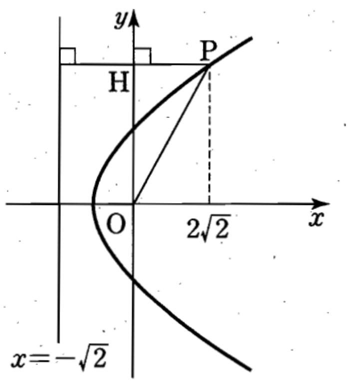
$\overline{\mathrm{AB}}=2\cdot 2\sqrt{k}=12,\ \ \sqrt{k}=3\ \ \therefore k=9$

3. 정답 ⑤

주어진 포물선의 y축과 만나는 점은 $(0, \sqrt{2})$, $(0,-2)$이므로 준선의 방정식은

$x=-\sqrt{2}$이고, 꼭짓점은

$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0\right)$임을 알 수 있다.



$\therefore\ a=2\sqrt{2}$

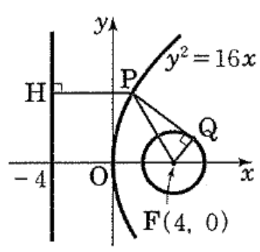
또, $2\overline{PO}=3\overline{PH}$에서

$2(\sqrt{2}+\overline{PH})=3\overline{PH}$이므로

$\overline{PH}=2\sqrt{2}$ $\qquad\qquad \therefore\ \overline{OP}=\dfrac{3}{2}\overline{PH}=3\sqrt{2}$

4. ③

$y^2=16x=4\cdot 4\cdot x$이고 원의 중심은 포물선의 초점 F와 일치한다. 따라서 원의 중심은 $F(4,\ 0)$이고 반지름의 길이가 2이므로 그림의 직각삼각형 PFQ에서



$\overline{PF}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$

포물선의 준선의 방정식은 $x=-4$이므로

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해 $\overline{PH}=\overline{PF}=6$이다.

따라서 점 P의 x좌표는 $-4+6=2$이다.

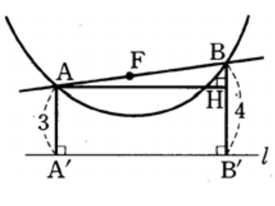
5. 정답 ⑤

포물선의 성질에 의하여

$\overline{AF}=\overline{AA'}=3$, $\overline{BF}=\overline{BB'}=4$ 이므로

$\overline{AB}=7$

점 A 에서 선분 BB' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 ABH 에서 피타고라스의 정리를 이용하면



$\overline{AH}=\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$

따라서, 사다리꼴 $AA'B'B$ 의 넓이는

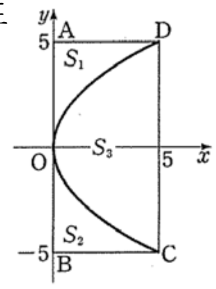
$\dfrac{1}{2}\times(3+4)\times 4\sqrt{3}=14\sqrt{3}$

6. 2

점 E를 원점 O로 하는 좌표평면을 도입하고, 포물선의 방정식을 $y^2=4px$라 하자.

포물선은 점 $\mathrm{D}(5,\ 5)$를 지나므로 $25=20p$

$\therefore\ p=\dfrac{5}{4}$



따라서, 포물선의 방정식은 $y^2=5x$이다.

$S_1=S_2=\displaystyle\int_0^5 xdy=\int_0^5 \frac{y^2}{5}dy$

$=\left[\dfrac{y^3}{15}\right]_0^5=\dfrac{25}{3}$

$S_3=\square\mathrm{ABCD}-S_1-S_2=50-2\times\dfrac{25}{3}=\dfrac{100}{3}$

$\therefore \dfrac{S_3}{S_1+S_3}=2$

7. 답 ③

[해설] 직선 $y=4x+5$를 x축 방향으로 $-m$만큼, y축 방향으로 $-n$만큼 평행이동시킨 직선 $y=4(x+m)+(5-n)$은 포물선 $y^2=4x$에 접하므로 $y^2=y-4m+n-5$,

$y^2-y+4(4m-n+5)=0$에서 판별식 $D=0$이다.

$\therefore\ 16m-4n+19=0$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $16x-4y+19=0$이다.

8. ④

포물선 $y^2=4x$의 초점은 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이므로 이 포물선에 접하고 기울기가 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$인 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

점 A는 $y^2=4x$와 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$의 교점이므로 점 A의 x좌표를 a라 하면 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a+\sqrt{3}\right)^2=4a$

$a^2-6a+9=0,\ (a-3)^2=0 \qquad\qquad \therefore a=3$

따라서 $\triangle\mathrm{ABF}$의 높이, 즉 점 A의 y좌표는 $2\sqrt{3}$이고 직선 l의 x절편은 -3이므로 $\triangle\mathrm{ABF}$의 밑변 $\overline{\mathrm{BF}}=4$이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

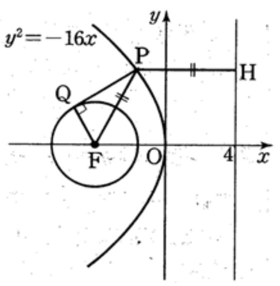
9. 답 ③ 이해력-이차곡선

[해설]ㄱ. (참) $y^2=-16x$에서 $y^2=4\times(-4)\times x$이므로 포물선

의 초점은 $(-4,0)$이다. 따라서 원 $(x+4)^2+y^2=2$의 중심 $(-4,0)$과 같다.

ㄴ. (거짓) 점$(-4,8)$은 포물선 위의 점이고 포물선의 준선의 방정식은 $x=4$이므로 주어진 점에서 준선까지의 거리는 $|4-(-4)|=8$이다.

ㄷ. (참) 점 P에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H, 포물선의 초점을 F라 하면

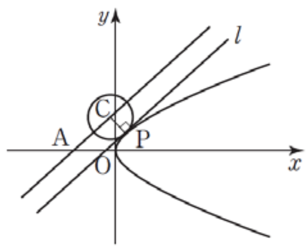


$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{FQ}^2}=\sqrt{\overline{PH}^2-2}$

따라서, $\overline{PH}$의 길이가 최소일 때, $\overline{PQ}$의 길이도 최소이므로 범 P가 원점O에 있을 때, 선분 PQ의 길이는 최소이다.

10. 정답 ⑤

원의 중심을 C, 원과 포물선의 접점을 P, 점 P에서의 포물선의 접선을 l이라 하자. 직선 AC와 직선 l이 평행할 때, 직선 AC의 기울기가 최대가 되므로 접선 l의 기울기를 m이라 하면 접선 l의 방정식은



$y=mx+\dfrac{1}{m}$ 즉, $mx-y+\dfrac{1}{m}=0$

이때, 점 A와 접선 l 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이므로

$\dfrac{\left|-3m+\dfrac{1}{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$, $\left(3m-\dfrac{1}{m}\right)^2=2(m^2+1)$

$7m^4-8m^2+1=0$, $(m^2-1)(7m^2-1)=0$

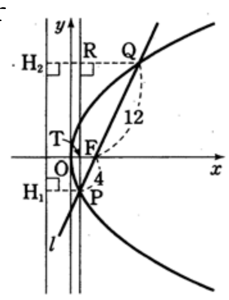
$\therefore\ m^2=1$ 또는 $m^2=\dfrac{1}{7}$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=1$ 또는 $m=-\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ 또는 $m=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

따라서 직선 AC의 기울기 m의 최댓값은 1이다.

11. 답 ④

점 P에서 직선 QH_2, x축에 내린 수선의 발을 각각 R, T라 하자.



$\overline{PH_1}=4$, $\overline{QH_2}=12$에서 $\overline{QR}=8$

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=16$이고 $\overline{PR}=8\sqrt{3}$

$\therefore m=\dfrac{\overline{RP}}{\overline{QR}}=\sqrt{3}$

초점 F에서 준선까지의 거리는 $2p$이고

$2p=\overline{PH_1}+\overline{TF}=4+\overline{PF}\cos 60^\circ=6$

$\therefore p=3$

마지막으로 $S=\dfrac{\overline{PH_1}+\overline{QH_2}}{2}\times\overline{PR}=64\sqrt{3}$

$\therefore mpS=576$

12. ③

포물선 $y^2=4x$의 초점 F는 F$(1,0)$이고, 점 P의 좌표를 P$(a,\ 2\sqrt{a})$로 놓으면, 점 P에서의 접선의 방정식은 $2\sqrt{a}y=2(x+a)$이다.

접선 AP의 기울기는 $\dfrac{2}{2\sqrt{a}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 $a=2$이다.

$\therefore$ P$(2,\ 2\sqrt{2})$

$\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{(2-1)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$

따라서, 점 B의 좌표는 $(4,\ 0)$이다.

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{(2-4)^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

13. 정답 192

점 P가 원점을 출발하여 t초 후의 x좌표는

$\displaystyle\int_0^t 4tdt=\left[2t^2\right]_0^t=2t^2$

이므로 점 A의 좌표는 $(2t^2,\ 4t)$이다.

이때, 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은 $4t\cdot y=4(x+2t^2)$이므로 점 C의 좌표는 $(-2t^2,\ 0)$이다.

삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 4t^2\cdot 8t=16t^3$

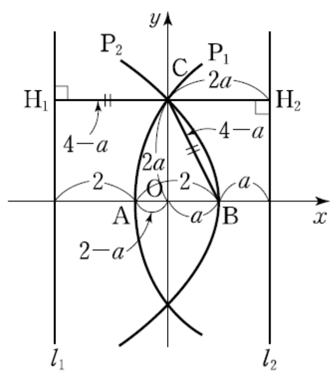
$\therefore S'(t)=48t^2$

따라서 $t=2$일 때의 삼각형 ABC의 넓이의 변화율은

$S'(2)=48\cdot 2^2=192$

14. ③

두 포물선 p_1, p_2의 준선을 각각 l_1, l_2라 하자.



$\overline{\mathrm{OB}}=a$라 하면 포물선의 정의에 의해 그림과 같이 각각의 길이가 결정된다.

직각삼각형 OBC에서 피타고라스 정리에 의해

$\sqrt{a^2+(2a)^2}=4-a$

$a^2+2a-4=0$

$\therefore a=-1+\sqrt{5}$ $(\because a>0)$

따라서 $\triangle$ABC의 넓이는

$\therefore \dfrac{1}{2}\times 2\times 2a=2a=2(\sqrt{5}-1)$

15. 답 75

타원의 방정식이 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$이므로 (가)에서 $a>b$이고 $b=5$이다.

(나)에서 초점의 x좌표가 ± 5이므로

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a^2-25}=5$

$\therefore\ a^2=50$

$\therefore\ a^2+b^2=50+25=75$

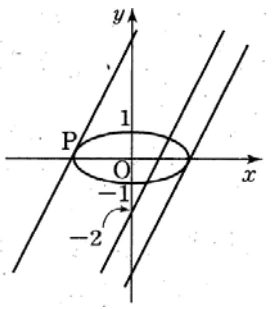
16. 정답 ②

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$의 두 초점은 $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$이므로

$\dfrac{(x-a)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$의 두 초점은 $(a+\sqrt{2},\ 0)$, $(a-\sqrt{2},\ 0)$이다. 따라서 이 중 하나가 원점이므로 $a-\sqrt{2}=0$이다.

$\therefore\ a=\sqrt{2}$

17. 답 ①



직선 $y=2x-2$의 기울기가 2이므로 점 P와 직선 $y=2x-2$ 사이의 거리가 최대이려면 점 P를 지나고 타원에 접하는 직선의 기울기는 2이어야 한다.

타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식은 $y=2x\pm\sqrt{2\cdot 2^2+1}$

즉, $y=2x\pm3$이다.

이때, 점 P와 직선 $y=2x-2$ 사이의 거리가 최대이려면 접선의 방정식은 $y=2x+3$이어야 한다.

직선 $y=2x+3$ 위의 점 (0, 3)과 직선 $y=2x-2$ 사이의 거리 d는

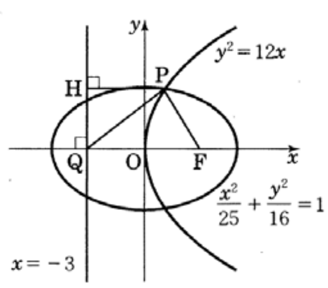
$$d=\frac{|0-3-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

따라서, 구하는 거리의 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

18. 정답 ③

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 초점의 좌표는

$c^2=25-16=9$에서 (3,0), (−3,0)이므로 점 Q는 타원의 한 초점이다.



$y^2=4\cdot 3\cdot x$에서 포물선의 초점은 (3,0)이고, 준선의 방정식은 $x=-3$이다. 따라서 점 (3,0)을 F라 하면 포물선의 정의에서 $\overline{PF}=\overline{PH}$이고 타원의 정의에서 $\overline{PQ}+\overline{PF}=10$이다.

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PH}=\overline{PQ}+\overline{PF}=10$

19. 답 ②

$\overline{\mathrm{PF}}=x$로 놓으면 $\overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=12$에서

$\overline{\mathrm{PF'}}=12-x$, $\overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{6^2-3^2}=6\sqrt{3}$

삼각형 PF′F에서 제이코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{FF'}}^2=\overline{\mathrm{PF}}^2+\overline{\mathrm{PF'}}^2-2\overline{\mathrm{PF}}\cdot\overline{\mathrm{PF'}}\cos\theta$

이므로

$(6\sqrt{3})^2=x^2+(12-x)^2-2x(12-x)\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$x^2-12x+27=0$, $(x-3)(x-9)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=9$

$\therefore \overline{\mathrm{PF}}=3$, $\overline{\mathrm{PF'}}=9$ ($\because$ 그림에서 $\overline{\mathrm{PF}}<\overline{\mathrm{PF'}}$)

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}\times\overline{\mathrm{PF'}}=3\times9=27$

20. 답 ②

직선 $y=2x+k$는 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$에 접하는 기울기가 2인 직선이므로 $k=\sqrt{4\cdot4+1}=\sqrt{17}$

21. 9

기울기가 2이고, 타원 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}=1$에 접하는 직선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{6\times2^2+12}=2x\pm6=2(x\pm3)$

따라서 직선 $y=2x$를 x축의 방향으로 3 또는 −3만큼 평행이동하면 타원에 접한다.

$\therefore k^2=9$

22. 답 ④ 수학 내적 문제 해결 능력 – 이차곡선

점 P의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

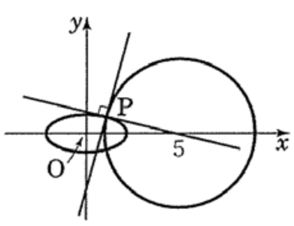
$\overline{\mathrm{OH}}=x_1$, $\overline{\mathrm{OH'}}=y_1$

점 P에서 그은 접선의 방정식은 $\dfrac{x_1x}{a}+\dfrac{y_1y}{b}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\dfrac{a}{x_1}$, $\overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{b}{y_1}$

$\overline{\mathrm{OH}}\cdot\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{OH'}}\cdot\overline{\mathrm{OR}}=x_1\cdot\dfrac{a}{x_1}+y_1\cdot\dfrac{b}{y_1}=a+b$

23. ⑤



점 P에서 그은 두 접선이 서로 수직이므로 점 P에서의 타원의 접선은 원의 중심을 지난다. P(a,b)라 하면 점 P가 타원 위의 점이므로

$\dfrac{a^2}{5}+b^2=1$ ⋯ ㉠

점 P에서의 타원의 접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{5}+by=1$

이 접선이 원의 중심 (5, 0)을 지나므로 $\dfrac{5a}{5}+0=1$ ⋯⋯⋯ ㉡

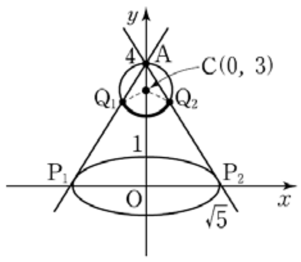
㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

따라서 점 P의 y좌표는 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

24. ④

점 A(0, 4)에서 타원 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$에 그은 접선의 기울기를 m이

라 하면 접선의 방정식은 $y=mx+4$



$\dfrac{x^2}{5}+(mx+4)^2=1$에서

$(1+5m^2)x^2+40mx+75=0$

$D/4=400m^2-75-375m^2=0$

$m^2=3$ $\therefore m=\pm\sqrt{3}$

따라서 두 접선이 이루는 예각의 크기는 60°이다.

점 Q가 나타내는 도형은 그림에서 Q_1Q_2이고

$\angle Q_1CQ_2=120^\circ$

이므로 구하는 도형의 길이는

$2\pi\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

25. 정답 103

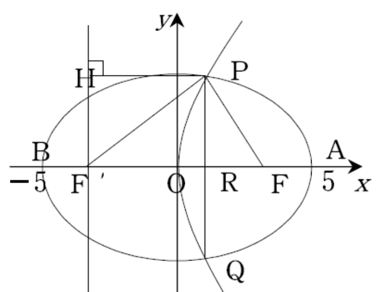
$\overline{PF'}=m$, $\overline{PF}=n$이라 하면

타원의 정의에 의해

$m+n=10$ ⋯ ㉠

선분 PQ와 x축의 교점을 R라 하면

$\overline{PR}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{10}$



직각삼각형 PF'R에서

$\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$

점 F'을 지나고 x축에 수직인 직선을 l이라 하면 l은 포물선의 준선이고,

점 P에서 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의해

$\overline{PH}=\overline{PF}$

이다.

$\overline{PF}=\overline{PH}=\overline{F'R}=\sqrt{m^2-10}$ 이므로

$n=\sqrt{m^2-10}$ 에서

$n^2=m^2-10$ ⋯ ㉡

㉠에서 $n=10-m$이므로 ㉡에 대입하면

$(10-m)^2=m^2-10$

$m^2-20m+100=m^2-10$

$20m=110$, $m=\dfrac{11}{2}$

$n=10-m=\dfrac{9}{2}$

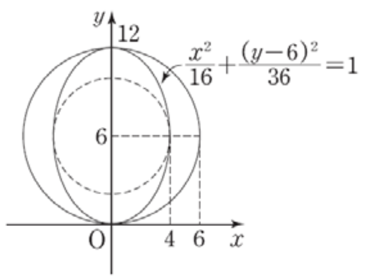
$\therefore\ mn=\dfrac{11}{2}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{99}{4}$

$\therefore\ p+q=4+99=103$

26. 답 20

[해설] 두 점 $F(0,\ 6-2\sqrt{5})$, $F'(0,\ 6+2\sqrt{5})$에 대하여 $\overline{PF}+\overline{PF'}=12$이므로 도형 C는 초점이 $(0,\ 6\pm2\sqrt{5})$이고 장축의 길이가 12인 타원이다.

즉, $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-6)^2}{36}=1$



$a^2+b^2-12b=r$ (r는 실수)라고 두면 $a^2+(b-6)^2=r+36$이다.

따라서 $r+36=36$일 때,

즉 실선으로 그려진 원일 때 r는 최댓값을 갖고, $r+36=16$일 때,

즉 점선으로 그려진 원일 때 r는 최솟값을 갖는다.

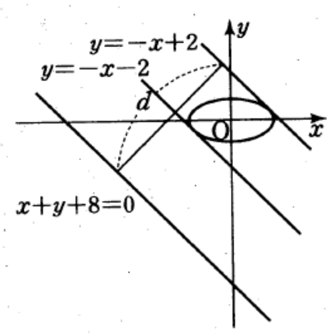
$\therefore\ M=0,\ m=-20$

$\therefore\ M-m=20$

27. **답** 50

[해설] $2x^2+6y^2=6$에서

$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ ⋯ ㉠



㉠에서 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\sqrt{3\cdot1+1}$

$\therefore y=-x\pm2$

그림에서 구하는 최대 거리는 평행한 두 직선 $x+y+8=0$과 $y=-x+2$ 사이의 거리이므로 직선 $y=-x+2$ 위의 점 (0, 2)에서 직선 $x+y+8=0$에 이르는 거리 d는

$d=\dfrac{|0+2+8|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

$\therefore d^2=50$

28. ⑤

초점 F의 x좌표를 c $(c>0)$라 하면 $c^2=16-12=4$이므로 $c=2$이고 F(2, 0)이다.

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하면 △ABF의 무게중심이 원점이므로

$\dfrac{x_1+x_2+2}{3}=0$ $\therefore\ x_1+x_2=-2$⋯⋯ ㉠

$\dfrac{y_1+y_2}{3}=0$ $\therefore\ y_1=-y_2$ ⋯⋯ ㉡

또한, 두 점 A, B는 타원 위의 점이므로

$\dfrac{{x_1}^2}{16}+\dfrac{{y_1}^2}{12}=1$ ⋯⋯ ㉢

$\dfrac{{x_2}^2}{16}+\dfrac{{y_2}^2}{12}=1$ ⋯⋯ ㉣

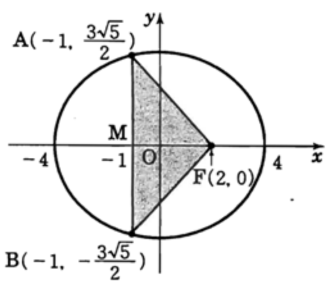
㉢에 ㉡을 대입한 식과 ㉣을 변끼리 빼면

$\dfrac{{x_1}^2}{16}-\dfrac{{x_2}^2}{16}=0,\ (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$

㉠에 의해 $x_1-x_2=0$이고, ㉠과 연립하면 $x_1=x_2=-1$

이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$y_1{}^2 = \dfrac{45}{4}$에서 $y_1 = \pm\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$이므로



㉡에서 $y_2 = \mp\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ (복부호동순)

따라서 △ABF의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{MF}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 3 = \dfrac{9\sqrt{5}}{2}$

29. 답 ⑤

점 P의 좌표를 (a, b), 접선의 기울기를 m이라 하면

접선의 방정식은 $y = m(x-a)+b$에서

$3x^2 + (mx - ma + b)^2 = 1$

$(3+m^2)x^2 - 2m(ma-b)x + (ma-b)^2 - 1 = 0$

$D/4 = m^2(ma-b)^2 - (3+m^2)\{(ma-b)^2 - 1\}$

$\quad = (3+m^2) - 3(ma-b)^2 = 0$

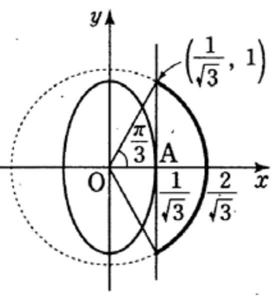
$(1-3a^2)m^2 + 6abm + 3 - 3b^2 = 0$ ……㉠

따라서 두 접선의 기울기는 ㉠의 서로 다른 두 근과 같다.

그런데 $\angle QPR = 90^\circ$ 이므로

(두 근의 곱) $= \dfrac{3-3b^2}{1-3a^2} = -1$

$\therefore\ a^2 + b^2 = \dfrac{4}{3}$



또, 문제의 조건에서 점P의 x좌표는 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$보다 크므로 점P가 그리는 도형은 오른쪽 그림과 같이 원의 일부가 된다. 따라서 구하는 도형의 길이는

$\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

30. 24

타원 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$의 초점은 $F(1,\ 0)$, $F'(-1,\ 0)$이고 타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 $2\times 2 = 4$이므로

$\overline{F_1F_4'}+\overline{F_4F_1'} = 4+4 = 8$, $\overline{F_2F_3'}+\overline{F_3F_2'} = 4+4 = 8$

또 $\overline{F_2F_4'} = \overline{F_3F_1'} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$

따라서, 구하는 선분의 길이의 합은

$8+8+4+4 = 24$

31. 정답 ③

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{a}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$y = 2x \pm\sqrt{3\cdot 2^2 - a}$ 이다.

$\sqrt{3\cdot 2^2 - a} = 3$이므로 $a = 3$

이 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{6},\ 0)$이므로 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{6}$ 이다.

32. 정답 ④

접선 $y = mx+n$이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0 = -m+n$에서 $m = n$

직선 $y = mx+m$과 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 2$가 한 점에서 만나므로

방정식 $x^2 - (mx+m)^2 = 2$

즉, $(1-m^2)x^2 - 2m^2x - m^2 - 2 = 0$

의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = m^4 + (1-m^2)(m^2+2) = 0$

$m^4 + m^2 + 2 - m^4 - 2m^2 = 0$

$m^2 = 2$

$\therefore\ m^2 + n^2 = m^2 + m^2 = 2+2 = 4$

33. ②

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점의 좌표를

$F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)(c>0)$으로 놓으면

$c^2 = 16+9 = 25\quad \therefore c = 5$

$\therefore \overline{FF'} = 10$

$\overline{PF}+\overline{FF'}+\overline{PF'} = 34$에서 $\overline{PF}+\overline{PF'} = 24$

쌍곡선의 정의에 의해 $|\overline{PF}-\overline{PF'}| = 8$

$\therefore\ |\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2| = |(\overline{PF}+\overline{PF'})(\overline{PF}-\overline{PF'})|$

$\qquad = |\overline{PF}+\overline{PF'}||\overline{PF}-\overline{PF'}|$

$\qquad = 24\times 8 = 192$

34. ③

주어진 원과 x축과의 교점을 $A(-5,\ 0)$, $B(5,\ 0)$이라 하자. 두 점 $A(-5,\ 0)$, $B(5,\ 0)$는 쌍곡선의 초점이다.

$\overline{AQ} = a$, $\overline{BQ} = b$라 하면 쌍곡선의 정의에 의해 $a-b = 8$이고, 직각삼각형 △ABQ에서 $a^2+b^2 = 10^2$이다.

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$에서 $\overline{AQ}\times\overline{BQ} = ab = 18$이다.

35. 정답 10

$x^2 - y^2 = k$, $y = x^2 - 1$ 에서 x^2 을 소거하면

$(y+1) - y^2 = k$

$y^2 - y + k - 1 = 0$ ……… ㉠

㉠이 중근을 가져야하므로

$D = 1 - 4(k-1) = 0 \qquad \therefore\ k = \dfrac{5}{4}$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - y^2 = \dfrac{5}{4}$ 이다.

초점 F의 좌표를 $F(c, 0)$ 으로 놓으면

$c^2 = \dfrac{5}{4}+\dfrac{5}{4} = \dfrac{10}{4}$

$F\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right)$

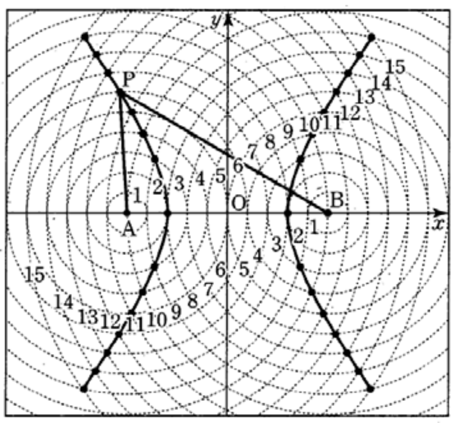
㉠에서 $y^2 - y + \dfrac{1}{4} = 0$, $\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 0\ \ \therefore y = \dfrac{1}{2}$

$y=x^2-1$, $y=-x^2+1$ 의 그래프는 서로 x축에 대하여 대칭이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$

$\therefore\ S=\dfrac{1}{2}(\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{F'F}})=\dfrac{1}{2}(1\times\sqrt{10})=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore\ 4S^2=10$

36. 정답 7



동심원의 교점을 P라고 하면 $|\overline{AP}-\overline{BP}|=6$ 이므로 곡선의 자취는 쌍곡선이다.

따라서, $2a=6$ 이므로 $a=3$

한편, 선분 AB의 중점이 원점 O가 되도록 좌표축을 도입하면 초점 $B(5,\ 0)$ 이므로 $a^2+b^2=5^2$

즉, $3^2+b^2=5^2$ 이므로 $b=4$

$\therefore\ a+b=7$

37. 정답 16

쌍곡선의 주축의 길이는 $2\times4=8$이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=8$

이때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF'}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}-\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{PF}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PF}}=8$

따라서 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=8+8=16$

38. [출제의도] 이차곡선의 정의와 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{\mathrm{F'P}}=a$, $\overline{\mathrm{FP}}=b$ 라 하면 $a-b=4$

$\angle\mathrm{F'PF}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $a^2+b^2=(2\sqrt{10})^2=40$

따라서 $a=6$, $b=2$ 이므로 $\cos(\angle\mathrm{PFF'})=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

39. 답 48

$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{AQ}}=b$ 라 하면 $\overline{\mathrm{PQ}}=a+b$이고 쌍곡선의 주축의 길이가 8이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=b+8$, $\overline{\mathrm{BP}}=a+8$

이때 $\overline{\mathrm{BQ}}$, $\overline{\mathrm{QP}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$ 의 길이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=(a+8)+(b+8)$ $\qquad\therefore\ a+b=16$

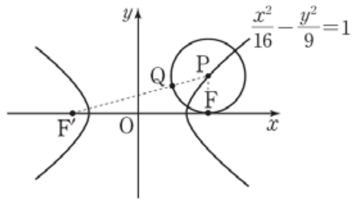
따라서 삼각형 BQP 의 둘레의 길이는

$(a+8)+(a+b)+(b+8)$

$=2(a+b)+16=2\times16+16=48$

40. 정답 89

주어진 쌍곡선의 초점의 좌표는 $\mathrm{F}(5,0)$, $\mathrm{F'}(-5,0)$ 이고, 쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=8$



선분 $\overline{\mathrm{PF'}}$ 과 주어진 원의 교점을 Q 라 하면 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ 이므로

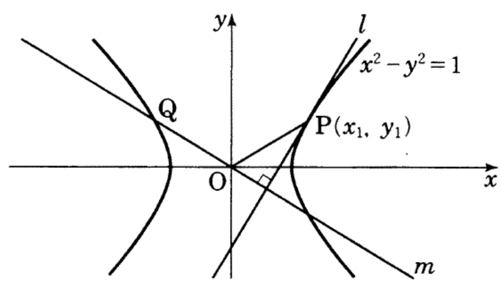
$\overline{\mathrm{QF'}}=8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

따라서 점 Q 는 중심이 $\mathrm{F'}(-5,0)$ 이고 반지름의 길이가 8 인 원 위를 움직이는 점이다.

$\therefore\ a=-5,\ b=0,\ r=8$

$\therefore\ a^2+b^2+r^2=25+0+64=89$

41. 정답 ④



점 P의 좌표를 $(x_1,y_1)(x_1>0,\ y_1>0)$이라 하면

점 P에서의 접선 l의 방정식은

$x_1x-y_1y=1$, $y=\dfrac{x_1}{y_1}x-\dfrac{1}{y_1}$

직선 m의 방정식은 $y=-\dfrac{y_1}{x_1}x$

점 Q의 좌표는 $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ y=-\dfrac{y_1}{x_1}x\end{cases}$ 에서

$x=-x_1$, $y=y_1$ $\ \therefore\ Q(-x_1,y_1)$

$\therefore\ \overline{OQ}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\overline{OP}=\sqrt{15}$

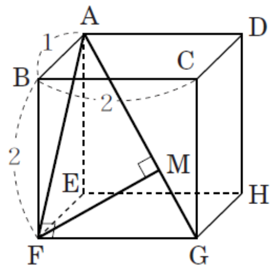
정답 및 풀이

1. 정답 ③

보기의 도형 중에서 직선 AG와 수직인 도형은 직선 CF, 직선 BE, 평면 BDE의 3개다.

2. 답 ③

아래 그림과 같이 점 F에서 직선 AG에 내린 수선의 발을 M이라 하면 점 F에서 직선 AG까지의 최단거리는 선분 FM의 길이이다.



$\overline{\mathrm{AF}}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AG}}=\sqrt{1+4+4}=3$

이때, $\overline{\mathrm{AF}}\perp\overline{\mathrm{FG}}$이므로 직각삼각형 AFG의 넓이는

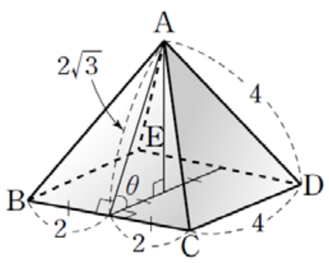
$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AF}}\cdot\overline{\mathrm{FG}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AG}}\cdot\overline{\mathrm{FM}}$

$\sqrt{5}\cdot 2=3\cdot\overline{\mathrm{FM}}$ $\quad\therefore\overline{\mathrm{FM}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

3. 정답 ②

정삼각형에 내접하는 원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 같다.

따라서 정삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{3}$이므로 원의 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2\pi=\frac{4}{3}\pi$



한편, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\frac{4}{3}\pi\times\cos\theta=\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

4. 답 ③

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$라 하면 타원의 단축의 길이 $2b$는 원의 지름과 같으므로 $2b=8$이 되고, 타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 $2a\cos 45^\circ=8$

$\therefore\ 2a=8\sqrt{2}$

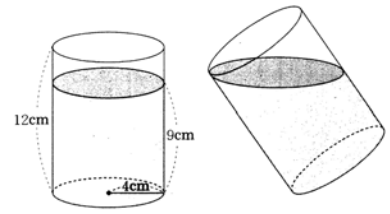
따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는

$2\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=8$

5. 정답 20

다음 그림과 같이 $\overline{AC}=x$라 하면 그릇의 빈 공간의 부피는 서로 같으므로

$\pi\cdot 4^2\cdot 3=\pi\cdot 4^2\cdot x\cdot\frac{1}{2}$ $\therefore\ x=6$



직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$, $\angle ABC=\theta$,

수면의 넓이를 S라 하면

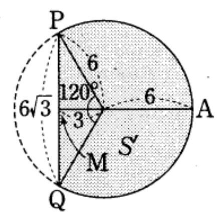
$\cos\theta=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$S\cos\theta=\pi\cdot 4^2$ $\qquad\therefore\ S=20\pi(\mathrm{cm}^2)$

$\therefore\ a=20$

6. 답 300

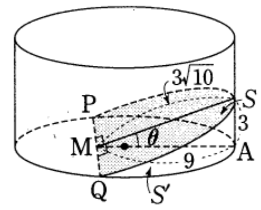
구하는 단면의 넓이를 S, 단면을 밑면에 정사영 시켜 얻어진 도형의 넓이를 S', 잘린 단면과 밑면이 이루는 각을 θ라고 하자.



피타고라스의 정리에 의하여

$\cos\theta=\frac{9}{3\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

이때, 오른쪽 그림에서 S'은



$S'=6^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 3$

$=24\pi+9\sqrt{3}$

$S=\frac{24\pi+9\sqrt{3}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=8\sqrt{10}\pi+3\sqrt{30}$

$\therefore ab=10\cdot 30=300$

7. 답 ①

삼각형 ABC를 포함하는 평면이 평면 π와 $30°$의 각을 이루었을 때, 삼각형 ABC의 정사영이 삼각형 ADC이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S, 삼각형 ADC의 넓이를 S'이라 하면

$S'=S\cdot\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}S$

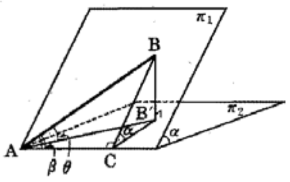
한편, 삼각형 ADC의 넓이는

$S'=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore S=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

8. ④

그림과 같이 선분 AB를 평행이동하여 점 A를 두 평면 π_1, π_2의 교선에 놓이도록 할 때, 점 B의 평면 π_2 위로의 정사영을 B'이라 하고, $\overline{AB}$와 $\overline{AB'}$이 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 또, 점 B에서 교선에 내린 수선의 발을 C라 하자.



$\overline{AB}\sin\beta=\overline{BC}$, $\overline{BC}\sin\alpha=\overline{BB'}$

$\therefore$ $\overline{BB'}=\overline{AB}\sin\theta\sin\alpha\cdots$ ㉠

한편 $\triangle \mathrm{AB'B}$에서 $\overline{BB'}=\overline{AB}\sin\theta\cdots$ ㉡

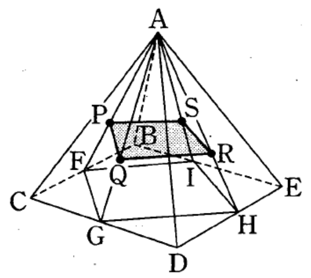
㉠, ㉡에서 $\sin\beta\sin\alpha=\sin\theta\cdots$ ㉢

한편, $\overline{AB}\cos\theta=\overline{AB'}$에서 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이므로 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$이고

$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$이므로 ㉢에서 $\sin\alpha=\dfrac{3}{4}$

9. 정답 72

그림과 같이 점 A에서 각각의 무게중심을 지나는 선분이 밑변과 만나는 점을 각각 $F,\ G,\ H,\ I$라고 하면 네 점 $F,\ G,\ H,\ I$는 밑면의 각 변의 중점이므로



($\square BCDE$의 넓이)

$=2$($\square FGHI$의 넓이) …… ㉠

한편, 무게중심의 성질에 의하여 $\overline{AP}:\overline{PF}=2:1$이고, 두 사각형 $PQRS$와 $FGHI$는 닮음비가 $2:3$이다.

$\therefore$ ($\square FGHI$의 넓이)$=\dfrac{9}{4}$($\square PQRS$의 넓이) …… ㉡

㉠, ㉡에서 ($\square BCDE$의 넓이)$=\dfrac{9}{2}\cdot 16=72$

10. 답 ②

P에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{HA}}^2+\overline{\mathrm{HC}}^2=\overline{\mathrm{HB}}^2+\overline{\mathrm{HD}}^2$이고,

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HA}}^2$, $\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HB}}^2$,

$\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HC}}^2$, $\overline{\mathrm{PD}}^2=\overline{\mathrm{PH}}^2+\overline{\mathrm{HD}}^2$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PD}}^2=7^2+9^2-8^2=66$

[다른 풀이]

□ABCD가 직사각형이므로 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

두 대각선의 교점을 M이라 하면 파푸스의 중선정리에서

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MA}}^2)$

$\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MB}}^2)$

$\overline{\mathrm{MA}}=\overline{\mathrm{MB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PD}}^2$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PD}}^2=7^2+9^2-8^2=66$

11. 정답 ⑤

구와 평면이 만나서 생기는 도형은 원이고 원 C의 반지름의 길이는

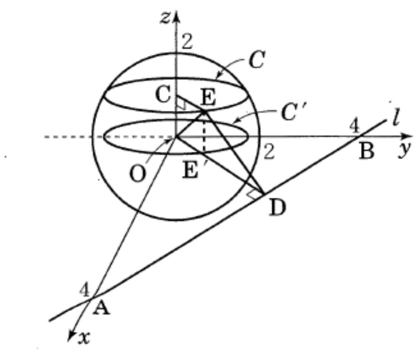
$\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$이므로 원 C의 xy평면 위로의 정사영은

C' : $x^2+y^2=3,\ z=0$

원점 O에서 직선 l에 내린 수선의 발을 D라 하고 이 수선과 원 C'이

만나는 점을 E'이라 하자. 점 E'과 $x,\ y$좌표가 같은 원 C 위의 점을

E라 하면 선분 PQ의 길이의 최솟값은 선분 DE의 길이와 같다.



$\overline{EE'}=1$, $\overline{OD}=2\sqrt{2}$이므로 $\overline{E'D}=2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

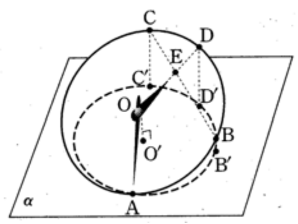
$\overline{DE}^2=1^1+(2\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=12-4\sqrt{6}$

$\therefore$ $d^2=12-4\sqrt{6}$

12. 답 ③

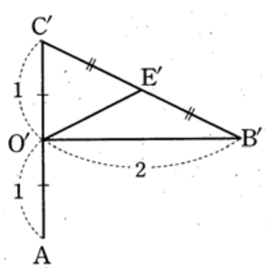
원판의 중심을 O라 하고, 점 O의 평면 α 위로의 정사영을 O$'$이라 하자.

또, 3이 적힌 부분을 B, 12가 적힌 부분을 C라 하고, 두 점 B, C의 평면 α 위로의 정사영을 각각 B$'$C$'$이라 하자 또, 1시 30분을 가리키는 짧은 바늘의 연장선과 원판의 가장 자리가 만나는 점을 D라 하고, $\overline{\mathrm{OD}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 교점을 E라 하자.



점 E의 평면 α위로의 정사영을 E$'$이라 하자.

이때, 원판의 반지름의 길이를 2라 하면 정사영 O$'$, B$'$, C$'$, E$'$의 위치관계는 오른쪽 그림과 같다. (단, 점 E$'$은 선분 B$'$C$'$의 중점이다.)



이때, 선분 OB는 평면 α와 평행하므로

$\overline{\mathrm{O'B'}}=2$

또, 원판과 평면 α가 이루는 각의 크기가 60°이므로

$\overline{\mathrm{O'A}}=\overline{\mathrm{O'C'}}=1$

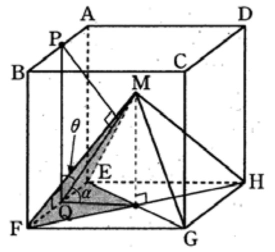
이때, $\overline{\mathrm{O'E'}}=\overline{\mathrm{C'E'}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$$\sin(\angle \mathrm{B'O'E'})=\frac{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{O'C'}}}{\overline{\mathrm{O'E'}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이때, $\theta=\angle \mathrm{AO'E'}=90^\circ+\angle \mathrm{B'O'E'}$ 이므로

$\cos\theta=-\sin(-\angle \mathrm{B'O'E'})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

13. 정답 **16**



삼각형 MFE는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 넓이는 $4\sqrt{3}$이고 삼각형 MFE의 밑면에 내린 정사영의 넓이는 4이다. 삼각형 MFE를 포함하는 평면과 밑면 사이의 각을 α라 하면

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

삼각형 MFE를 포함하는 평면과 사각형 ABFE를 포함하는 평면 사이의 각을 θ라 하면

$$\sin\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

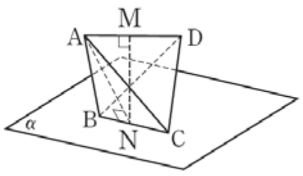
한편, 선분 PQ의 길이는 4이므로 점 P에서 삼각형 MFE까지의 거리는

$$d = 4\times\sin\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ 3d^2 = 16$$

14. 정답 8

그림과 같이 두 모서리 AD, BC의 중점을 각각 M, N이라 하고, $\angle ANM = \theta_1$이라 하자.



$\overline{AM}=2$, $\overline{AN}=2\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{MN}=2\sqrt{2}$ 이다.

$$\therefore \sin\theta_1 = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면 구하는 정사영의 넓이는

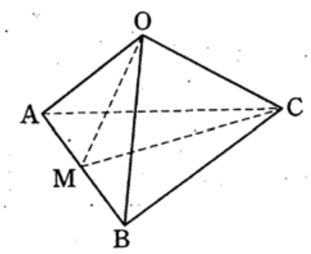
$$2\cdot\triangle ABC\cdot\cos\theta_2 = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)$$

$$= 8\sqrt{3}\sin\theta_1 = 8\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 8$$

15. 답 7

$\triangle OAB$가 이등변삼각형이므로,

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면,



$\overline{OM} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$

$\overline{CM} = \sqrt{11^2-5^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

$\overline{OM}\perp\overline{AB}$, $\overline{CM}\perp\overline{AB}$이므로

$\angle OMC = \theta$이고 $\triangle OMC$도 이등변삼각형이므로

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{6}}{12} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{6}$

$\therefore\ a+b=7$

16. 답 8

$\overline{O'A'}=a$, $\overline{O'B'}=b$라고 하면

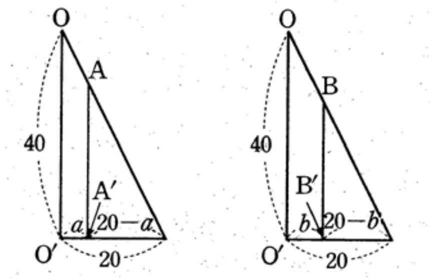
$\overline{AA'}=2(20-a)$, $\overline{BB'}=2(20-b)$

$\overline{A'B'}^2 = a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ = a^2+b^2-ab$

$\therefore \overline{AB}^2 = (\overline{AA'}-\overline{BB'})^2 + \overline{A'B'}^2$

$\qquad = 4(a-b)^2 + a^2+b^2-ab$

$\qquad = 5(a^2+b^2) - 9ab$



$\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'} = |\overrightarrow{O'A'}||\overrightarrow{O'B'}|\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}ab = 4$

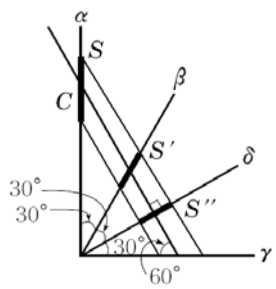
$\therefore\ ab=8$

$\dfrac{a^2+b^2}{2} \ge \sqrt{a^2b^2} = ab = 8$

$a^2+b^2 \ge 16$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

$\therefore\ \overline{AB}^2 = 5(a^2+b^2) - 9\times 8 \ge 5\times 16 - 72 = 8$

17. 답 ④



위의 그림과 같이 평행광선과 수직인 평면을 δ라 하고 원 C의 넓이를 S, 평면 β, δ 위의 원 C의 그림자의 넓이를 각각 S', S''이라 하자. 원 C의 평면 δ 위로의 정사영의 넓이 S''은

$S'' = S\cdot\cos 60^\circ = 36\pi\cdot\dfrac{1}{2} = 18\pi$

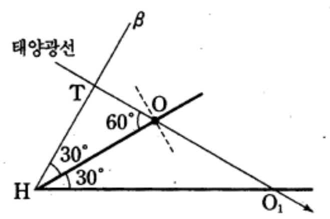
평면 β 위의 원 C의 그림자의 평면 δ 위로의 정사영의 넓이가 18π이므로

$S'\cdot\cos 30^\circ = 18\pi$

$\therefore\ S' = 18\pi\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}\pi$

18. 정답 4

원의 중심을 O, O에서 l에 내린 수선의 발을 H, O의 그림자를 O_1이라 하면 $l\perp$태양광선, $l\perp\overline{OO_1}$이므로 $l\perp$평면OHO_1이다. 원의 중심을 지나고 지표면에 수직이 아니면서 유리에 수직인 직선을 생각해보면, 아래 그림을 얻을 수 있다.



그림에서의 원의 그림자의 넓이를 S라 하자.

l을 포함하고 $\overline{OO_1}$을 법선으로 하는 평면 β를 생각해보면, 유리에서 β에 내린 원의 정사영의 넓이는

$4\pi\times\cos30^\circ=2\sqrt{3}\,\pi$

또, 지표면과 β와의 이면각은 60°이므로

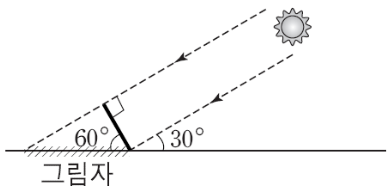
$S\cos60^\circ=2\sqrt{3}\pi$

$\therefore\ S=4\sqrt{3}\pi$

$\therefore\ a=4$

19. 답 15

태양전지판이 만드는 그림자의 넓이가 최대가 되기 위해서는 태양광선과 수직으로 놓여져야 한다.



그림과 같이 $\alpha=30^\circ$이면 태양전지판이 지면과 60°의 각을 이룰 때 그림자의 넓이가 최대가 된다. 태양전지판의 넓이를 A라 하면 $A=S_1\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}S_1$에서 $S_1=2A$이다.

또, $\alpha=60^\circ$이면 태양전지판이 지면과 30°의 각을 이룰 때 그림자의 넓이가 최대가 되므로

$A=S_2\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}S_2$에서

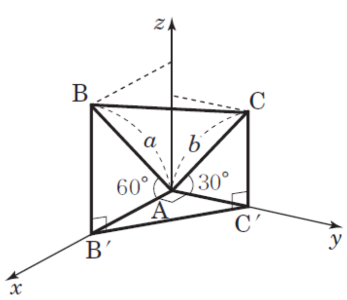
$S_2=\dfrac{2}{\sqrt{3}}A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}A$

$\therefore\ \dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2A}{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}A}=\sqrt{3}$

$\therefore 5\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2=15$

20. 답 48

두 선분 AB, AC를 정사영시킨 두 선분 AB', AC'이 서로 수직이므로 점 A를 좌표공간의 원점에 놓고 점 B'은 x축, 점 C'은 y축 위의 점이라 하면 두 점 B, C는 각각 xz평면, yz평면 위의 점이다.



위의 그림에서 $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$로 놓으면

$\overline{AB'}=a\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}a$

$\overline{BB'}=a\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

$\overline{AC'}=b\cos30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

$\overline{CC'}=b\sin30^\circ=\dfrac{1}{2}b$ 이므로

$B\left(\dfrac{1}{2}a,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$, $C\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}b,\ \dfrac{1}{2}b\right)$

이때, 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\,|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\dfrac{3}{16}a^2b^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{8}ab=4\sqrt{13}$

$\therefore\ ab=32$

또, 삼각형 ABC를 xy평면으로 정사영시킨 삼각형 $AB'C'$의 넓이 S는

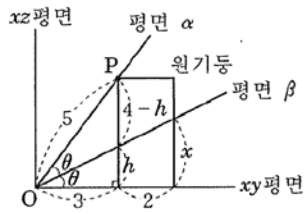
$S=\dfrac{1}{2}\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}ab=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\cdot32=4\sqrt{3}$

$\therefore\ S^2=48$

21. ①

yz평면에 수직인 방향에서 바라본 그림은 다음과 같다.



평면 β와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하면 $5:3=(4-h):h$이므로

$5h=12-3h$이다.

$\therefore\ \ h=\dfrac{3}{2}$

이때, $\tan\theta=\dfrac{h}{3}=\dfrac{1}{2}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$이고,

$x=5\tan\theta=\dfrac{5}{2}\ (<4)$이므로 평면$\beta$는 위 그림과 같이 원기둥의 옆면을 자른다.

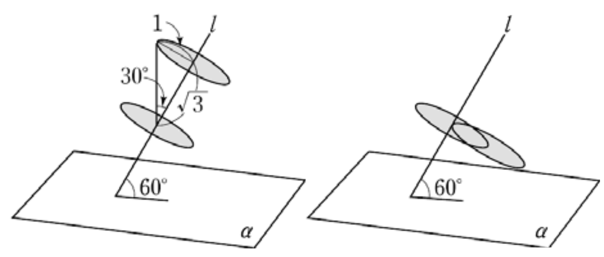
따라서 구하는 단면인 타원의 xy평면 위로의 정사영은 반지름의

길이가 1인 원이므로 구하는 타원의 넓이를 S라 하면

$S\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\pi\cdot1^2\qquad\therefore S=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\pi$

22. ⑤

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.



겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금 친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S=2\times\pi\times1^2-2S_1$이다.

S_1은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로

$S_1 = \frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\times 1^2 \times \sin\frac{2}{3}\pi$

$= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ S = 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$

그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 정사영이므로

$S' = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\cos\frac{\pi}{6}$

$= \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$

23. 정답 37

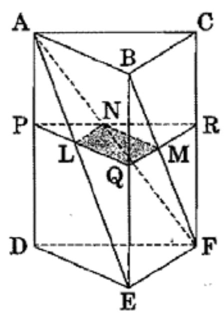
오른쪽 그림에서 $\triangle DEF = \triangle ABC = \triangle PQR = 1$

두 사면체APLN, ADEF는 서로 닮음이고

$\overline{AP} : \overline{AD} = 2 : 5$ 이므로

$\triangle PLN : \triangle DEF = 4 : 25$

$\therefore\ \triangle PLN = \frac{4}{25}$



두 사면체FABC, FNMR는 서로 닮음이고

$\overline{CF} : \overline{RF} = 5 : 3$ 이므로

$\triangle ABC : \triangle NMR = 25 : 9$

$\therefore\ \triangle NMR = \frac{9}{25}$

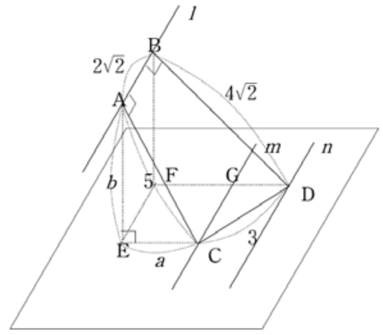
$\therefore\ p+q = 25+12 = 37$

24. 정답 30

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.

$l \,/\!/\, m$, $l \,/\!/\, n$이므로 $l \,/\!/\, \alpha$이다.

직선 l 위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.



$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{EF}$, $\overline{EF} \,/\!/\, \overline{CG}$ 이고, $\overline{EF} = \overline{CG} = 2\sqrt{2}$

이므로 직각삼각형 DGC에서 $\overline{GD} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$

삼각형 ACD에서

$\cos(\angle ACD) = \frac{5^2 + 3^2 - (2\sqrt{10})^2}{2\cdot 5\cdot 3} = -\frac{1}{5}$

이므로

$\sin(\angle ACD) = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{2\sqrt{6}}{5} = 3\sqrt{6}$ 이다.

$\overline{EC} = a$, $\overline{AE} = \overline{BF} = b$라 하면 $\overline{FD} = a+1$이고,

삼각형 AEC에서 $a^2 + b^2 = 25$ $\cdots$ ㉠

삼각형 BFD에서 $(a+1)^2 + b^2 = 32$ $\cdots$ ㉡

㉡−㉠에서 $2a+1 = 7$, $a = 3$

삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD이고,

삼각형 ECD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{EC}\times\overline{CG} = \frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

따라서, $3\sqrt{6}\times\cos\theta = 3\sqrt{2}$ 에서 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = 3 - 1 = 2$

$\therefore\ 15\tan^2\theta = 30$

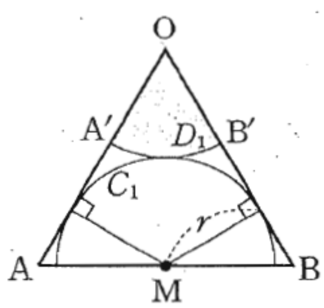
25. 답 26

평면의 수	추가되는 1개의 평면과 기존의 평면들 사이에 생기는 교선의 최대 개수	공간의 최대 분할 개수 a_n
1	0	2
2	1(1개의 교선은 평면을 2개로 분할)	$4(=2+2)$
3	2(2개의 교선은 평면을 최대 4개로 분할)	$8(=4+4)$
4	3(3개의 교선은 평면을 최대 7개로 분할)	$15(=8+7)$
5	4(4개의 교선은 평면을 최대 11개로 분할)	$26(=15+11)$

위의 표에서 $a_5 = 26$

26. 답 11

그림에서 선분 AB의 중점 M을 중심으로 하고 삼각형 OAB에 내접하는 반원 C_1의 반지름의 길이를 r라 하면



$r = \overline{BM}\sin 60^\circ = \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

이 때, $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{AB} = 3$이므로 그림에서 부채꼴 $OA'B'$의 반지름의 길이는

$\overline{OM} - r = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

따라서 부채꼴 $OA'B'$의 넓이 S_1은

$S_1 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi$

따라서 점 O를 중심으로 하고 호가 D_1, D_2, D_3인 어두운 세 부채꼴의 넓이의 합은 $3S_1=\frac{9}{8}\pi$

이 때, 세 평면 OAB, OBC, OCA와 평면 ABC가 이루는 예각의 크기는 모두 같으므로 그 크기를 θ라 하면 $\cos\theta=\frac{1}{3}$이다.

즉, 구하는 정사영의 넓이는

$3S_1\times\cos\theta=\frac{9}{8}\pi\times\frac{1}{3}=\frac{3}{8}\pi$

$\therefore\ p+q=8+3=11$

1. ①

$\overline{\mathrm{PA}}=2\overline{\mathrm{PB}}$이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2=4\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(-1)^2+(-2)^2+a^2=4\{1^2+(-1)^2+(-1)^2\}$

$5+a^2=12\qquad\therefore\ a^2=7$

$a>0$이므로 $a=\sqrt{7}$

2. 답 10

사면체 ABCD는 삼각형 BCD를 밑면으로 하고 높이가 OA인 삼각뿔이다.

$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times(3+4)\times2=7$

이고 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로 구하는 부피 V는

$V=\frac{1}{3}\times7\times1=\frac{7}{3}\qquad\therefore\ p+q=10$

3. 답 ① 이해력–공간도형과 공간좌표

yz 평면 위의 점의 x좌표는 0이므로

$\frac{8m+n\times(-2)}{m+n}=0$

$\therefore\ n=4m$

m, n은 서로소인 자연수이므로 $m=1$, $n=4$

$\therefore\ m+n=5$

4. 정답 ②

$P\left(\frac{3m-n}{m+n},\ \frac{-2m+4n}{m+n},\ \frac{6m+5n}{m+n}\right)$ …… ㉠

점 P는 zx 평면 위의 점이므로 y좌표가 0이다.

즉, $\frac{-2m+4n}{m+n}=0\qquad\therefore\ m=2n$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$P\left(\frac{6n-n}{2n+n},\ \frac{-4n+4n}{2n+n},\ \frac{12n+5n}{2n+n}\right)$

$\therefore\ P\left(\frac{5}{3},\ 0,\ \frac{17}{3}\right)$

$\therefore\ a+b+c=\frac{5}{3}+0+\frac{17}{3}=\frac{22}{3}$

[다른 풀이]

두 점 $A(-1,\ 4,\ 5)$, $B(3,\ -2,\ 6)$을 지나는 직선의 방정식은

$\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-5}{1}=t$ …… ㉠

㉠이 zx 평면과 만나므로

$y=-6t+4=0$에서 $t=\frac{2}{3}$

$\therefore\ x=4t-1=\frac{5}{3},\ z=t+5=\frac{17}{3}$

5. 정답 ①

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 C의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot6-1\cdot0}{2-1},\ \frac{2\cdot8-1\cdot2}{2-1},\ \frac{2\cdot10-1\cdot4}{2-1}\right)$

즉, $(12,\ 14,\ 16)$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$\left(\frac{6+12}{2},\ \frac{8+14}{2},\ \frac{10+16}{2}\right)$

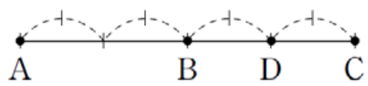
즉, $(9,\ 11,\ 13)$

따라서 $a=9$, $b=11$, $c=13$이므로

$a+b+c=33$

[다른 풀이]

선분 BC의 중점을 D라 하면 오른쪽 그림에서 점 D는 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점임을 알 수 있다.



따라서 구하는 점 D의 좌표는

$\left(\frac{3\cdot6-1\cdot0}{3-1},\ \frac{3\cdot8-1\cdot2}{3-1},\ \frac{3\cdot10-1\cdot4}{3-1}\right)$

즉, $(9,\ 11,\ 13)$

$\therefore\ a+b+c=33$

6. 정답 10

$\mathrm{P}(-3,\ 4,\ 5)$, $\mathrm{Q}(3,\ 4,\ 5)$이므로

선분 PQ를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표를 (a, b, c)라 하면

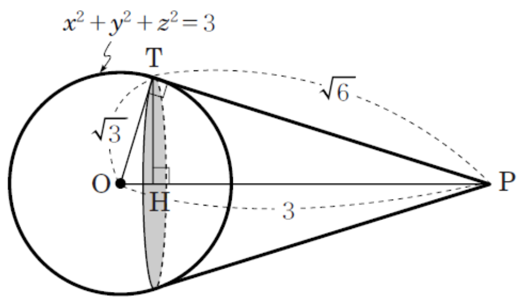
$a=\frac{6-3}{2+1}=1$

$b=\frac{8+4}{2+1}=4$

$c=\frac{10+5}{2+1}=5$

$\therefore\ a+b+c=1+4+5=10$

7. 답 1



위의 그림과 같이 점 $P(1,2,-2)$에서 구 $x^2+y^2+z^2=3$에 그은 접선과 구의 교점을 T, 구의 중심을 O, 점 T에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

구의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 $\overline{OT}=\sqrt{3}$, 두 점 O, P 사이의

거리는 $\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$이므로

$\overline{PT}=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{6}$

이때, $\overline{OH}=x$라 하면 삼각형 OHT에서

$\overline{TH}^2=3-x^2$ …㉠

또 삼각형 PHT에서

$\overline{TH}^2=6-(3-x)^2=-3+6x-x^2$ …㉡

㉠=㉡에서

$3-x^2=-3+6x-x^2$

$\therefore x=1$

따라서 구하는 구의 중심에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다.

8. 23

삼각형 F와 xy평면이 이루는 각을 α, 삼각형 F의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하면 $\vec{h}$와 z축이 이루는 각의 크기가 α이다.

마찬가지 방법으로 삼각형 F와 yz평면과 zx평면과 이루는 각의 크기를 β, γ로 놓으면 $\vec{h}$와 x, y축이 이루는 각의 크기가 β, γ이다.

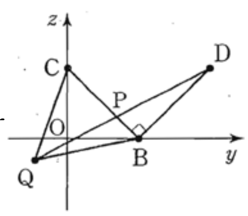
$\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

이때 정사영의 성질에 의해 $8\cos\alpha=S$ 이므로

$\left(\frac{4}{8}\right)^2+\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{S}{8}\right)^2=1$

$\therefore\ S^2=64-16-25=23$

9. 정답 ③



$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{BQ}=\overline{CQ}=\sqrt{2}$가 되도록 yz 평면 위의 $y<0$, $z<0$인 영역에 점 Q를 잡으면 삼각형 BCQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형이다.

이 때, 선분 BC 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{AP}=\overline{QP}$이고, 세 점 Q, P, D는 모두 yz평면 위의 점이므로

$\overline{AP}+\overline{PD}=\overline{QP}+\overline{PD}\ge\overline{QD}$

따라서, $\overline{PA}+\overline{PD}$의 최솟값은 $\overline{QD}$의 길이이다.

이 때, 그림에서 $\angle CBD=90^\circ$이므로

$\angle DBQ=90^\circ+60^\circ=150^\circ$

즉, 삼각형 DBQ에서 제이코사인법칙에 의해

$\overline{DQ}^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos150^\circ$

$=2+2-4\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4+2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{DQ}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1$

따라서, $\overline{PA}+\overline{PD}$의 최솟값은 $1+\sqrt{3}$이다.

10. 정답 ⑤

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은

$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$,즉 $2x+y+2z=2$

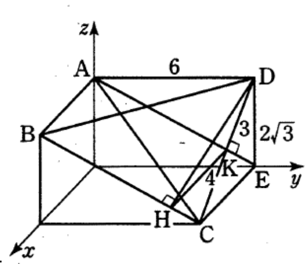
내접하는 구의 중심의 좌표를 $P(a,\ a,\ a)$라 하면 점 P에서 평면 $2x+y+2z=2$까지 거리가 a이므로

$\frac{|2a+a+2a-2|}{\sqrt{4+1+4}}=a$

$|5a-2|=3a,\ 5a-2=\pm3a$

$\therefore a=\frac{1}{4}\left(\because a<\frac{1}{3}\right)$

11. 정답 37



$\overline{BC}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

평면 ABC와 y축이 만나는 점을 E라 하자.

점 $E(0,6,0)$이고 ,점 D에서 두 선분 AE, BC에 내린 수선의 발을 각각 K, H라 하면 $\overline{DK}$는 평면 ABC의 수선이다. 따라서, 두 평면 ABC와 BCD의 이면각의 크기 θ는 $\angle DHK$이다.

$\triangle DHK$는 $\overline{DH}$가 빗변인 직각삼각형이고,

$\overline{AD}\cdot\overline{DE}=\overline{AE}\cdot\overline{DK}$에서

$6\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\times\overline{DK}\quad\therefore\overline{DK}=3$

한편 $\overline{KH}=\overline{AB}=4$이므로 $\overline{DH}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\therefore\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서, 구하는 정사영의 넓이는

$\triangle ABC\cos\theta=8\sqrt{3}\times\frac{4}{5}=\frac{32\sqrt{3}}{5}$

$\therefore a+b=37$

12. 11

점 E를 원점으로 하고 직선 EF를 x축, 직선 EH를 y축, 직선 EA를 z축으로 하는 좌표공간을 설정하면 점 M의 좌표는 (6, 0, 3)이고 점 N의 좌표는 (0, 6, 4)이다.

점 M을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 M′이라 하면 점 M′의 좌표는 (6, 0, −3)이고 $\overline{MP}=\overline{M'P}$ 이므로

$\overline{MP}+\overline{NP}=\overline{M'P}+\overline{NP}$

$\ge\overline{M'N}=\sqrt{(-6)^2+6^2+(4+3)^2}$

$=\sqrt{121}=11$

따라서 $\overline{MP}+\overline{NP}$의 최솟값은 11이다.

13. 답 ③

동점 P가 원 O 위를 1바퀴 도는 데 120초, 동점 Q가 원 O' 위를 1바퀴 도는 데 90초가 걸린다.

따라서, 두 점 P, Q는 15초 동안 각각 $\frac{15}{120}\times2\pi=\frac{\pi}{4}$, $\frac{15}{90}\times2\pi=\frac{\pi}{3}$만큼 회전하게 된다.

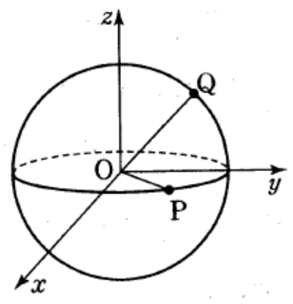
그림과 같은 좌표축을 생각하면 점 A에서 동시에 출발하여 15초일 때, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$, 점 Q의 좌표는

$\left(0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이다.

따라서, 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{2}}}{2}$$



14. ④

ㄱ. (거짓) 구의 중심을 R라 할 때, R$(0, 3, 3)$이므로

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{0+9+36}=3\sqrt{5}$

구의 반지름의 길이가 3이고, 삼각형 APR에서 $\angle\mathrm{APR}=90^\circ$ 이므로 점 A와 접점 사이의 거리는 $\sqrt{45-9}=6$

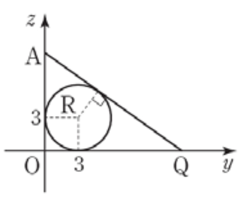
그러므로 도형 S 위의 임의의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=6$이다.

ㄴ. (참) 도형 S는 원이므로 이 원의 반지름의 길이를 r라 두면 S 위의 한 점 P에 대하여 삼각형 APR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times6=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times r \qquad \therefore r=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$

그러므로 도형 S의 넓이는 $\dfrac{36}{5}\pi$이다.

ㄷ. (참) yz 평면에서 점 $(0, 9)$를 지나고 $(y-3)^2+(z-3)^2=9$에 접하는 직선의 방 정식을 $z=my+9$라 하면 점 $(3, 3)$과 직선 $my-z+9=0$ 사이의 거리는



$\dfrac{|3m+6|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \ \therefore\ m=-\dfrac{3}{4}$

Q$(0, 12, 0)$이므로 선분 AQ의 길이의 최댓값은

$\sqrt{0+144+81}=15$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15. 답 23

x에서의 단면의 넓이는 $S(x)=\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2$

이므로 구하는 부피는 $V=\displaystyle\int_{-1}^{1}S(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)^2dx$

$=\displaystyle\int_0^1(x^4-2x^2+1)dx=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1$

$=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{8}{15}$

$\therefore\ m=15,\ n=8$

16. [출제의도] 좌표공간에서 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

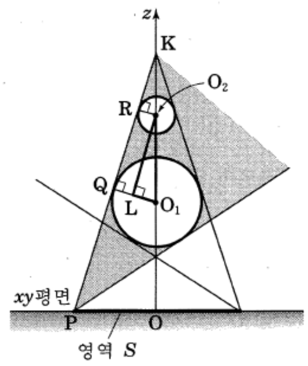
A$(1, 0, \sqrt{3})$, B$(0, 3, 2\sqrt{3})$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}=2\sqrt{3}$

$l: 4x+3y+1=0,\ z=0$에서 $\overline{\mathrm{CE}}=1$, $\overline{\mathrm{DF}}=2$ $\therefore\overline{\mathrm{EF}}=3$

$\overline{\mathrm{AE}}=2$, $\overline{\mathrm{BF}}=4$이므로 $\square\mathrm{AEFB}=\dfrac{1}{2}\times(2+4)\times3=9$

17. 답 803

영역 S의 점 중에서 원점 O로부터 가장 멀리 떨어진 점을 P라 할 때, 점 P에서 구 G_1 과 G_2에 동시에 접하는 공통접선 l을 그을 수 있다. 이 때, 아래 그림과 같이 점 P에서 공통접선 l과 구 G_1, G_2 의 교점(접점)을 각각 Q, R 공통접선 l과 z축의 교점을 K라 하면 $\triangle KO_1Q \backsim \triangle KPO$ ……… ㉠



한편, 점 O_2를 지나고 접선 l과 평행한 직선이 선분 O_1Q와 만나는 점을 L이라 할 때, $\triangle KO_1Q \backsim \triangle O_2O_1L$

$\dfrac{\overline{O_1L}}{\overline{O_2O_1}}=\dfrac{\overline{O_1Q}}{\overline{KO_1}}$, 즉 $\dfrac{4}{20}=\dfrac{10}{\overline{KO_1}}$ 이므로 $\overline{KO_1}=50$, $\overline{KQ}=20\sqrt{6}$

$\therefore\overline{KO}=80$

㉠에서 $\dfrac{\overline{QO_1}}{\overline{KQ}}=\dfrac{\overline{PO}}{\overline{KO}}$ 이므로 $\dfrac{10}{20\sqrt{6}}=\dfrac{\overline{PO}}{80}$

$\therefore\overline{PO}=\dfrac{40}{\sqrt{6}}=\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$

따라서 영역 S는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$ 인 원의 내부이므로 영역 S의 넓이는 $\dfrac{800}{3}\pi$ 이다.

$\therefore m=3,\ n=800 \qquad \therefore m+n=803$

정답 및 풀이

1. 정답 ⑤

$|\overrightarrow{AD}|=4,\ |\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{3}$ 이고

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|\cos 30^\circ=12$

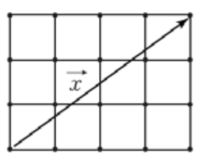
$|3\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AE}|^2=9|\overrightarrow{AD}|^2-24\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}+16|\overrightarrow{AE}|^2$

$=9\times16-24\times12+16\times12=48$

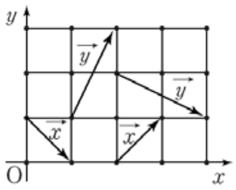
$\therefore\ |3\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AE}|=4\sqrt{3}$

2. ③

ㄱ. (참) $|\vec{x}|\le5,\ |\vec{y}|\le5$이고, $-1\le\cos\theta\le1$ 이므로 $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$의 최솟값은 $5\cdot5\cdot(-1)=-25$이다.



ㄴ. (거짓) 오른쪽 그림과 같이 점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 생각하자. $|\vec{x}|=\sqrt{2}$ 인 벡터 $\vec{x}$는 기울기가 1 또는 -1인 직선 위에 있다. 또, $|\vec{y}|=\sqrt{5}$ 인 벡터 $\vec{y}$는 기울 기가 2 또는 $\frac{1}{2}$ 또는 -2 또는 $-\frac{1}{2}$인 직선 위에 있다. 그러므로 두 벡터 $\vec{x},\ \vec{y}$는 수직이 아니다.



ㄷ. (참) ㄴ과 마찬가지로 점 O를 원점으로 하는 좌표평면에서 $|\vec{x}|=\sqrt{10}$ 인 벡터 $\vec{x}$를 성분으로 나타내면 $(3, 1)$ 또는 $(3, -1)$ 또는 $(-3, 1)$ 또는 $(-3, -1)$ 또는 $(1, 3)$ 또는 $(1, -3)$ 또는 $(-1, 3)$ 또는 $(-1, -3)$이다. $\vec{x}=(3, 1)$이라 하 고, $\vec{y}=(a, b)$라 하면 $\vec{x}\cdot\vec{y}=3a+b=0$에서 a, b는 정수이므로 $a=1,\ b=-3$ 또는 $a=-1,\ b=3$이다.

즉, $|\vec{y}|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$ 이다.

나머지 경우도 같은 방법으로 $|\vec{y}|=\sqrt{10}$ 임을 보일 수 있다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3. 답 48

$\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$와 $2\vec{a}-k\vec{b}+l\vec{c}$가 평행하므로

$2\vec{a}-k\vec{b}+l\vec{c}=t(\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c})$를 만족시키는 실수 t가 존재해야 한다.

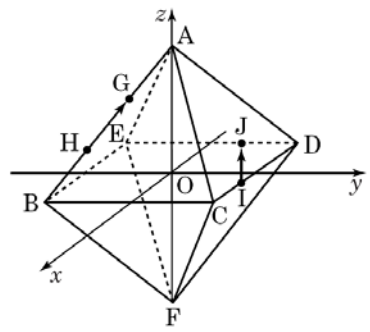
이때, 세 벡터 $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ 중 어느 두 벡터도 서로 평행하지 않으므로

$2=t,\ -k=4t,\ l=-3t$

$\therefore k=-8,\ l=-6$

$\therefore kl=(-8)\cdot(-6)=48$

4. 답 60



위 그림과 같이 사각형 BCDE의 중심이 원점 O가 되도록 좌표공간 위에 정팔면체를 놓으면

$A(0, 0, 3\sqrt{2}),\ B(3, -3, 0),\ C(3, 3, 0)$

$D(-3, 3, 0),\ E(-3, -3, 0)$

이때, G, H, I, J는 $\overline{AB},\ \overline{BA},\ \overline{CD},\ \overline{DE}$를 각각 1 : 2로 내분한 점이므로 $G(1, -1, 2\sqrt{2}),\ H(2, -2, \sqrt{2}),\ I(1, 3, 0),\ I(-3, 1, 0)$

$\therefore \overrightarrow{HG}=(-1, 1, \sqrt{2}),\ \overrightarrow{IJ}=(-4, -2, 0)$

$\therefore\ a=\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{IJ}=(-1)\cdot(-4)+1\cdot(-2)+\sqrt{2}\cdot0=2$

$\therefore \dfrac{120}{a}=\dfrac{120}{2}=60$

5. 정답 12

[출제의도] 공간에서의 벡터의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

좌표공간에서 $B(0, 0, 0),\ D(0, 6, 0),\ C(3\sqrt{3}, 3, 0)$이라 하면 $A(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}),\ E(\sqrt{3}, 3, -2\sqrt{6})$이다.

$\overrightarrow{BA}=(\sqrt{3}, 3, 2\sqrt{6}),\ \overrightarrow{DE}=(\sqrt{3}, -3, -2\sqrt{6})$

$\therefore |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DE}|^2=(2\sqrt{3})^2=12$

6. 정답 ④

ㄱ. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CF}$ (참)

ㄴ. $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AF}|$

$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{AF}|$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$ (거짓)

ㄷ. $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE})$

$=2\overrightarrow{BE}+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB})$

$=2\overrightarrow{BE}+\vec{0}=2\overrightarrow{BE}$

이므로

$(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE})\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}$

$=2|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{BF}|\cos60^\circ$

$=|\overrightarrow{BE}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7. 정답 ①

점 $P(a, b, c)$는 평면 $x=\frac{1}{2}$ 위에 있으므로 $a=\frac{1}{2}$

점 P는 구 $x^2+y^2+z^2=1$ 위의 점이므로

$b^2+c^2=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(2,1,1)\cdot\left(\frac{1}{2},b,c\right)=1+b+c=0$

$\therefore b+c=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $bc=\frac{1}{2}\{(b+c)^2-(b^2+c^2)\}=\frac{1}{8}$

$\therefore abc=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$

8. 정답 32

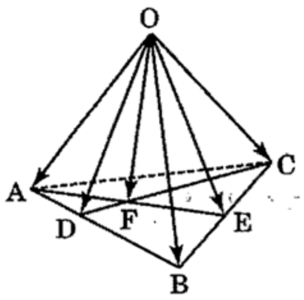
$0<s<1,\ 0<t<1$인 실수 s, t에 대하여

$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\overrightarrow{OD}$

$=s\overrightarrow{OC}+(1-s)\left(\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}\right)$……… ㉠

$\overrightarrow{OF}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OE}$

$=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)$……… ㉡



㉠, ㉡에서

$\frac{2}{3}(1-s)=t,\ \frac{1-s}{3}=\frac{1-t}{2},\ s=\frac{1-t}{2}$

$\therefore\ t=\frac{1}{2},\ s=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

$\therefore\ \frac{1}{abc}=2\cdot4\cdot4=32$

9. 정답 ⑤

[그림1]과 같이 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면

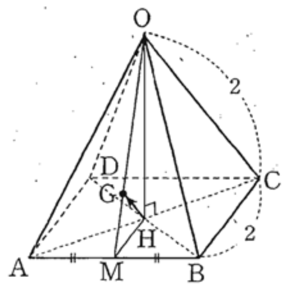
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

$=(\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HG})+(\overrightarrow{HB}-\overrightarrow{HG})$

$\quad+(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HG})+(\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{HG})$

$=(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})-4\overrightarrow{HG}$

$=\vec{0}-4\overrightarrow{HG}=-4\overrightarrow{HG}$



[그림 1]

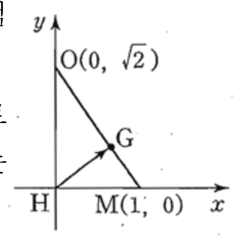
선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{OM}=\sqrt{3}, \overline{HM}=1$이므로 $\overline{OH}=\sqrt{2}$이다.

[그림2]와 같이 삼각형 OHM을 점 H를 원점으로 하는 좌표평면에 나타내면

$O(0,\ \sqrt{2}),\ M(1,\ 0)$이고 점 G는 $\overline{OM}$을 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는

$G\left(\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$이다.



[그림 2]

$\therefore\ \overline{HG}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ |\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}|=|-4\overrightarrow{HG}|=|4\overrightarrow{HG}|$

$=4\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

10. 13

$|\overrightarrow{OP}|=1,\ |\overrightarrow{OQ}|=3$이고

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|=\sqrt{7}$이므로

$|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OQ}|^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OP}|^2=7$

$3^2-2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+1^2=7$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ |\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}+|\overrightarrow{OQ}|^2$

$=1^2+2\cdot\frac{3}{2}+3^2=13$

11. [출제의도] 내적의 정의와 이차곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P′이라 하면, 두 벡터의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=\overline{AB}\times\overline{AP'}$이다.

$\overline{AP'}$가 최대가 되는 점 P는 직선 AB와 수직인 기울기를 갖고, 타원에 접하는 접점 중에서 제2사분면 위의 점이다. 따라서 접선의 기울기는 2이고, 접선의 방정식은 $y=2x+\sqrt{17}$이다.

12. 답 56

$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{QP}|=4$이므로 두 점 P, Q는 원 C의 지름의 양 끝점이다.

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}=2\overrightarrow{AO}$

따라서 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|=2|\overrightarrow{AO}|=2\sqrt{1^2+2^2+3^2}=2\sqrt{14}$

이므로 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}|^2=(2\sqrt{14})^2=56$

13. ①

두 벡터 $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기가 θ일 때,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$ 이고,

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$이면 $\cos\theta>0$이므로

$\angle AOB$가 예각이 되려면 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$이어야 한다.

즉, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(1,\ -a)\cdot(2a-b,\ 1)=a-b>0$

$a>b$인 경우는 ${}_6C_2=15$(가지)이므로 구하는 확률은

$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

14. 답 ⑤

$\overrightarrow{PA}=\vec{p},\ \overrightarrow{PB}=\vec{q},\ \overrightarrow{PC}=\vec{r}$라고 두면

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PA}=(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{r}+(\vec{r}-\vec{q})\cdot\vec{p}$

$=\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{q}\cdot\vec{p}$

조건에서 $\overline{AP}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CP}^2$이므로

$|\vec{p}|^2+|\vec{q}-\vec{p}|^2=|\vec{r}-\vec{q}|^2+|\vec{r}|^2$

$2(\vec{q}\cdot\vec{r}-\vec{q}\cdot\vec{p})=2(|\vec{r}|^2-|\vec{p}|^2)=2(c^2-a^2)$

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PA}=c^2-a^2$

15. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

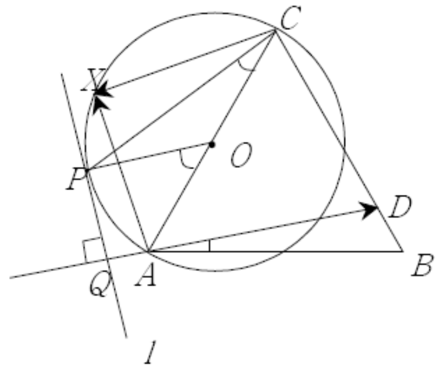
점 A를 원점, 직선 AD를 x축, 직선 AB를 y축으로 하면 점 C의 좌표는 $C(2\sqrt{3}, -2)$이다.

원 $(x-2\sqrt{3})^2+(y+1)^2=1$ 위의 점 $P(x, y)$에 대하여

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AP}=2\sqrt{3}x-2y$

$2\sqrt{3}x-2y=k$라 하면 $10\leqq k\leqq 18$일 때, 직선과 원이 만나므로 k의 최댓값은 18이다.

16. 17



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ ……㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta\geq|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=-|\overrightarrow{AQ}|$

이 때, $\angle POA=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$이므로

$2\angle ACP=\angle AOP$에서

$\angle ACP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore p+q=15+2=17$

17. 답 ③

$f(t)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$=(2\cos t,\ 2\sin t)\cdot(2\cos 3t,\ \sin 3t)$

$=4\cos 3t\cos t+2\sin 3t\sin t$

$=4\times\frac{1}{2}(\cos 4t+\cos 2t)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(\cos 4t-\cos 2t)$

$=\cos 4t+3\cos 2t$

ㄱ. (참) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\pi+3\cos\frac{\pi}{2}=-1$

ㄴ. (거짓) $f(t)=\cos 4t+3\cos 2t$

$=2\cos^2 2t-1+3\cos 2t$

$=2\left(\cos 2t+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{17}{8}$

그러므로 함수 $f(t)$는 $\cos 2t=-\frac{3}{4}$을 만족시킬 때, 최솟값 $-\frac{17}{8}$을 가진다.

ㄷ. (참) $f(t)=0$에서 $\cos 2t=X\ (-1\leq X\leq 1)$라 하면

$2X^2+3X-1=0$

$\therefore X=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\quad(\because -1\leq X\leq 1)$

그러므로 $0\leq t\leq\pi$에서 $\cos 2t=\frac{-3+\sqrt{17}}{4}$을 만족시키는 실수 t는 모두 2개이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

18. 답 ③

ㄱ. (참) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\cdot(-a, b, 0)$

$=(-1)+1+0=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)\cdot(-a, 0, c)$

$=(-1)+0+1=0$

그러므로 직선 OP와 평면 ABC는 서로 수직이다.

ㄴ. (참) 평면 OAB와 직선 OC와 직선 AB가 수직이다. 또, 직선 OH는 평면 ABC와 수직이므로 직선 OH와 직선 AB는 수직이다.

ㄷ. (거짓) $\overrightarrow{OH}$는 평면 ABC 위의 임의의 직선과 수직이므로 만약 점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이면

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a}{3},\frac{b}{3},\frac{c}{3}\right)\cdot(-a, b, 0)=-\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}=0$

따라서 $a=b$이므로 a, b가 서로 다른 두 양수인 조건에 모순이다. 그러므로 점H는 삼각형ABC의 무게중심이 아니다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. 답 ④

$\triangle OPB$에서

$\overline{OP}^2=1^2+x^2-2\cdot1\cdot x\cos60^\circ=x^2-x+1$

$\triangle OPQ$에서

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2-2|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos(\angle POQ)$

$|\overrightarrow{PQ}|=x$, $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|$이므로

$|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|\cos(\angle POQ)=\frac{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{2(x^2-x+1)-x^2}{2}=\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{1}{2}$

따라서, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 ④이다.

20. 답 ③

$5\overrightarrow{PA}-3\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{PC}=k\overrightarrow{BC}$를 점 B에 대한 위치벡터로 나타내면

$5(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BP})-3\overrightarrow{BP}+2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP})=k\overrightarrow{BC}$

이므로

$5\overrightarrow{BA}+(2-k)\overrightarrow{BC}=10\overrightarrow{BP}$

$\therefore\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2-k}{10}\overrightarrow{BC}$

따라서 점 P는 $\overline{AB}$의 중점을 지나고 $\overline{BC}$에 평행한 직선 위에 있다.

ㄱ. $k=2$일 때, $\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$이므로 점 P는 $\overline{AB}$ 위에 존재한다. (참)

ㄴ. $k=-3$일 때, 점 P는 $\overline{AC}$의 중점에 있으나 $\angle ABP=\angle CBP$라 할 수 없다. (거짓)

ㄷ. $0<\dfrac{2-k}{10}<\dfrac{1}{2}$일 때 점 P는 삼각형 ABC의 내부에 있다.

즉, $-3<k<2$일 때 점 P는 삼각형 ABC의 내부에 있다.

따라서 점 P가 삼각형 ABC의 내부에 있기 위한 정수 k는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개다. (참)

21. 정답 ④

벡터의 시점을 C라고 하면 조건 (나)에서

$2\overrightarrow{AP}+3\overrightarrow{BP}+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

$2(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA})+3(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CB})+4\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

$\therefore 9\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}$

위 식의 양변을 5로 나눈 우변의 $\dfrac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{5}$는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점의 위치벡터이다.

이 때, $\dfrac{9}{5}\overrightarrow{CP}=\dfrac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{5}=\overrightarrow{CR}$라 하면 점 R는 $\overline{AB}$를 $3:2$로 내분하는 점이고 세 점 $C,\ P,\ R$는 일직선 위의 점이므로 점 R와 점 Q는 동일한 점이다.

$\therefore \overrightarrow{CR}=\overrightarrow{CQ}$

ㄱ. $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{9}{5}\overrightarrow{CP}$(거짓)

ㄴ. $\overrightarrow{CQ}=\dfrac{2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{5}$ (참)

ㄷ. $9\overrightarrow{CP}=5\overrightarrow{CQ}$이므로

$\triangle CAQ=\dfrac{9}{4}\triangle PAQ,\ \triangle CBQ=\dfrac{9}{4}\triangle PBQ$

$\triangle ABC=\dfrac{9}{4}\triangle PAB$

$\therefore \triangle PAB=4$(참)

22. 정답 ⑤

$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$에서 $3\vec{b}+4\vec{c}=-2\vec{a}$

$\therefore\ |3\vec{b}+4\vec{c}|=|-2\vec{a}|$

위의 식의 양변을 제곱하면

$(3\vec{b}+4\vec{c})\circ(3\vec{b}+4\vec{c})=(-2\vec{a})\circ(-2\vec{a})$

$=9|\vec{b}|^2+24\vec{b}\circ\vec{c}+16|\vec{c}|^2=4|\vec{a}|^2$

$9+24\vec{b}\circ\vec{c}+16=4 \qquad (\because\ |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1)$

$\therefore\ \vec{b}\circ\vec{c}=-\dfrac{7}{8}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\vec{c}-\vec{b}$이므로

$|\overrightarrow{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=(\vec{c}-\vec{b})\circ(\vec{c}-\vec{b})$

$=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\circ\vec{c}+|\vec{b}|^2=1+2\cdot\dfrac{7}{8}+1=\dfrac{15}{4}$

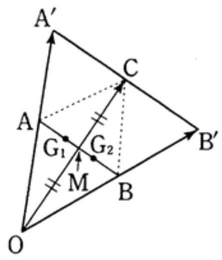
$\therefore\ \overline{BC}=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\dfrac{15}{4}}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

23. 답 ⑤

ㄱ. (참) $\overrightarrow{OG_1}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3}\right)\overrightarrow{OA}+\dfrac{b}{3}\overrightarrow{OB}$

그런데 점 G_1이 선분 AB 위에 있으므로

$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{3}\right)+\dfrac{b}{3}=1 \qquad \therefore\ a+b=2$



ㄴ. (참) 오른쪽 그림에서 점 G_1이 삼각형 OAC의 무게중심이므로 선분 AM은 중선이 된다. 즉, $\overline{AG_1}:\overline{G_1M}=2:1$이므로

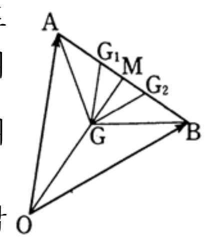
$\overrightarrow{OG_1}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM})$

ㄷ. (참) 같은 방법으로 점 G_2에 대하여

$\overline{BG_2}:\overline{G_2M}=2:1$이므로

$\overline{G_1G_2}=\overline{G_1M}+\overline{G_2M}$

$=\dfrac{1}{3}(\overline{AM}+\overline{BM})=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$



이때, 점 G는 삼각형 OAB의 무게중심이므로 삼각형 GAB의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$이고 삼각형 GG_1G_2의 넓이는 삼각형 GAB의 넓이의 $\dfrac{1}{3}$이므로 삼각형 GG_1G_2의 넓이는 삼각형 OAB의 넓이의 $\dfrac{1}{9}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

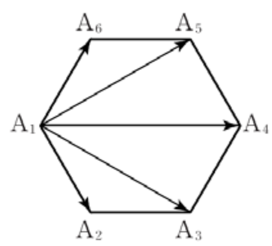
24. 정답 20

$\overrightarrow{A_1P_n}=\overrightarrow{A_1A_n}+\overrightarrow{A_nP_n}=\overrightarrow{A_1A_n}+\dfrac{1}{n}\overrightarrow{A_nB_n}$

$=\overrightarrow{A_1A_n}+\dfrac{1}{n}\overrightarrow{A_1B_1}$ (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 6$)

$\vec{v}=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k\overrightarrow{A_1P_k}=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k\left(\overrightarrow{A_1A_k}+\dfrac{1}{k}\overrightarrow{A_1B_1}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}k\overrightarrow{A_1A_k}+\overrightarrow{A_1B_1}$



그런데 오른쪽 그림에서

$\overrightarrow{A_1A_1}+2\overrightarrow{A_1A_2}+3\overrightarrow{A_1A_3}+4\overrightarrow{A_1A_4}$

$+5\overrightarrow{A_1A_5}+6\overrightarrow{A_1A_6}$

$=\left(\overrightarrow{A_1A_1}+4\overrightarrow{A_1A_4}\right)+\left(5\overrightarrow{A_1A_2}+5\overrightarrow{A_1A_5}\right)$

$+\left(3\overrightarrow{A_1A_3}+3\overrightarrow{A_1A_6}\right)+\left(3\overrightarrow{A_1A_6}-3\overrightarrow{A_1A_2}\right)$

$=4\overrightarrow{A_1A_4}+5\overrightarrow{A_1A_4}+3\overrightarrow{A_1A_4}+3\overrightarrow{A_2A_6}$

$=12\overrightarrow{A_1A_4}+3\overrightarrow{A_2A_6}$

이므로 $\vec{v}=2\overrightarrow{A_1A_4}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_2A_6}+\overrightarrow{A_1B_1}$이다.

이제, $\overrightarrow{A_1A_4}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_2A_6}=\vec{b}$, $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{c}$라 하면

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{c}|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $\vec{c}\perp\vec{a}$

이므로 $|\vec{v}|^2=4^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)^2=20$이다.

25. 정답 ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$이므로

선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서 최솟값은 $\overline{AB}=1$이다. (참)

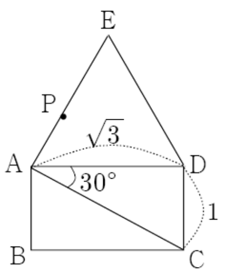
ㄴ. △ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$이므로

$\angle CAD=30°$

△EAD가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60°$

$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$



$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

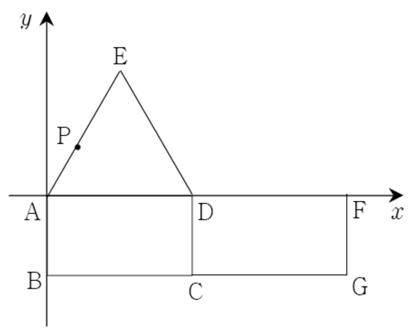
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.



$\overline{AD}=\overline{DF}$인 x축 위의 점을 F라 하고

직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$

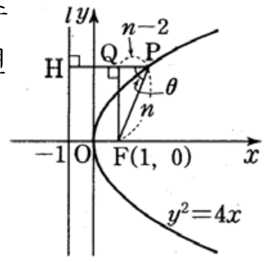
즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로 구하는 최솟값은

$\dfrac{|\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

26. 정답 275

그림과 같이 점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\angle PFH=\theta$라 하면



$\overline{PH}=\overline{PF}=n$, $\overline{QH}=2$, $\overline{PQ}=n-2$

$\cos\theta=\dfrac{n-2}{n}$

$\therefore\ a_n=\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{PH}$

$=|\overrightarrow{PF}|\cdot|\overrightarrow{PH}|\cos\theta$

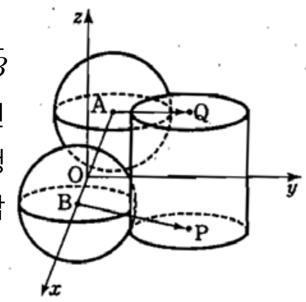
$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2-2n)$

$=\dfrac{10\cdot11\cdot21}{6}-2\cdot\dfrac{10\cdot11}{2}$

$=385-110=275$

27. 정답 : 1

그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고 $\overline{AB}$의 중점을 원점 O, 점 O를 지나고 직선 PQ와 수직으로 만나는 직선을 y축, 평행한 직선을 z축으로 하는 좌표공간을 생각하면 각 점의 좌표는



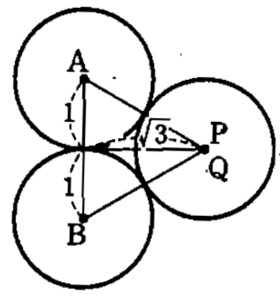
$A(-1,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 0,\ 0)$,

$P(0,\ \sqrt{3},\ -1)$, $Q(0,\ \sqrt{3},\ 1)$

$\therefore\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}=(1,\ \sqrt{3},1)\cdot(-1,\ \sqrt{3},\ -1)=-1+3-1=1$

[참고]

$A(-1,\ 0,\ 0)$, $B(1,\ 0,\ 0)$일 때,



$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=(1,\ \sqrt{3},1)\cdot(-1,\ \sqrt{3},\ -1)$

$=-1+3-1$

$=1$

28. 정답 18

$x^2+y^2+z^2=16$에 $z=2$를 대입하면 $x^2+y^2=12$이므로 원 C_1의 반지름의 길이를 $2\sqrt{3}$이다.

따라서 원 C_1과 yz평면이 만나는 한 점 A의 좌표는 $A(0,2\sqrt{3},2)$이고, △ABC가 정삼각형이므로 두 점 B, C의 좌표는 $B(-3,-\sqrt{3},2)$, $C(3,-\sqrt{3},2)$

한편, 점 D는 점 A와 xy평면에 대하여 대칭이므로

$D(0,2\sqrt{3},-2)$이다.

$\overrightarrow{CA}=(0,2\sqrt{3},2)-(3,-\sqrt{3},2)=(-3,3\sqrt{3},0)$

$\overrightarrow{BD}=(0,2\sqrt{3},-2)-(-3,-\sqrt{3},2)=(3,3\sqrt{3},-4)$

$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=(-3,3\sqrt{3},0)\cdot(3,3\sqrt{3},-4)=-9+27+0=18$

[다른 풀이]

원 C_1의 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$이므로 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$2\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos30°=6$

두 원 C_1, C_2를 포함하는 두 평면은 서로 수직이므로

$\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AD}$

$\therefore\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BA}|\cos 60^\circ+|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AD}|\cos 90^\circ$

$=6\cdot 6\cdot\frac{1}{2}+6\cdot 4\cdot 0=18$

29. 정답 ⑤

[출제의도] 평면 도형에서 벡터의 연산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\overline{AB}$의 원의 지름이고, $\angle APB=90°$이므로 내적은 0이다. (참)

ㄴ. $\triangle ABC$에서 $\overline{AN}$은 $\angle CAB$의 이등분선이므로

$\overline{BA}:\overline{AC}=\overline{BN}:\overline{NC}=3:1$이다.

따라서 $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$이다. (참)

ㄷ. $\overrightarrow{AB}=b$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ 라 하자.

$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BQ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}\cdot(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}\cdot(t\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB})=0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\cdot\left\{t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)-\vec{b}\right\}=0$

$\Leftrightarrow (2t-3)(\vec{b}\cdot\vec{c}+3)=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}>0$이므로, $t=\frac{3}{2}$이다.

따라서, $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AQ}=3\overrightarrow{AM}$이다. (참)

30. 답 ③ 수학 내적 문제 해결 능력 - 벡터

동점 P, Q가 점 A를 출발하여 t초 후 $|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AQ}|=t$이므로

$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AQ})$

$=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=2\times 2\times\cos 60^\circ=2$

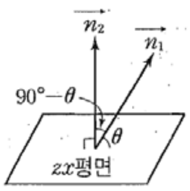
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AQ}=0, \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=t\times t\times\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}t^2$

$\therefore f(t)=-\frac{1}{2}t^2+2$

따라서 $y=f(t)$의 그래프의 개형은 ③이다.

1. 정답 ②



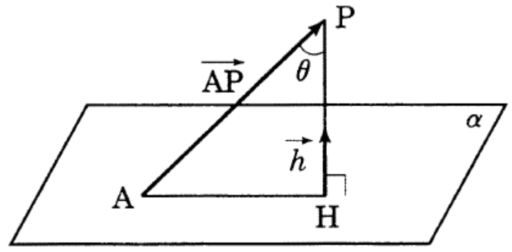
직선 l의 방향벡터는 평면 $2x+y-2z-3=0$의 법선벡터 $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-2)$와 평행하고, zx평면의 법선벡터는 $\overrightarrow{n_2}=(0,1,0)$이다. 직선 l과 zx평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$가 이루는 각의 크기는 $90^\circ-\theta$이므로

$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta)$

$=\frac{|(2,1,-2)\cdot(0,1,0)|}{\sqrt{4+1+4}\times\sqrt{0+1+0}}=\frac{1}{3}$

2. 정답 11

평면 α의 크기가 1인 법선벡터는 $\vec{h}=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{HP}$

$\angle APH=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\triangle AHP$에서

$|\overrightarrow{HP}|=|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=|\vec{h}||\overrightarrow{AP}|\cos\theta\ (\because |\vec{h}|=1)$

$=\vec{h}\cdot\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\cdot(5, 6, -8)$

$=\frac{5}{3}+\frac{12}{3}+\frac{16}{3}=11$

따라서 구하는 거리는 11이다.

3. 정답 ④

점 (a,b,c)는 직선 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=z-2$ 위의 점이므로

$\frac{a-1}{2}=\frac{b+1}{3}=c-2\quad\cdots$ ㉠

점 (a,b,c)는 평면 $z=4$ 위의 점이므로

$c=4$

㉠에서 $\frac{a-1}{2}=\frac{b+1}{3}=2$

$\therefore\ a=4+1=5,\ b=6-1=5$

$\therefore\ a+b+c=5+5+4=14$

4. [출제의도] 좌표공간에서 직선의 방정식을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

점 $(1,-2,3)$을 지나고 방향벡터가 $(2,3,4)$인 직선의 매개변수 방정식은 $x=2t+1,\ y=3t-2,\ z=4t+3$이다.

$x=2t+1=3$일 때 $t=1$이므로 조건에 맞는 직선은 점 $(3,1,7)$을 지난다. 따라서 $a+b=8$이다.

5. 33

직선 위의 점을 H라 하면

$\frac{x+1}{2}=y-1=z-4=t$ 에서

$x=2t-1,\ y=t+1,\ z=t+4$이므로

$\mathrm{H}(2t-1, t+1, t+4)$

$\overline{OH}^2=(2t-1)^2+(t+1)^2+(t+4)^2$

$=6t^2+6t+18=6\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+\frac{33}{2}$

$t=-\frac{1}{2}$일 때, $\overline{OH}$는 최솟값을 가지므로 $r^2=\frac{33}{2}$이다.

$\therefore\ 2r^2=33$

6. 답 10

두 직선이 점 $P(a, b, c)$에서 만나므로 두 직선의 방정식에 $x=a$, $y=b$, $z=c$를 대입하면

$\dfrac{a+1}{3}=\dfrac{2b-1}{5}=\dfrac{c+4}{8}=t$에서

$a=3t-1,\ b=\dfrac{5y+1}{2},\ c=8t-4\ \cdots㉠$

$\dfrac{a}{2k}=\dfrac{b+1}{k+3}=\dfrac{c}{4}=s$에서

$a=2ks,\ b=ks+3x-1,\ c=4s \qquad \cdots㉡$

㉠, ㉡에서

$3t-1=3ks,\ \dfrac{5t+1}{2}=ks+3s-1$

$8t-4=4s$

이 때 $5t+1=(3t-1)+(12t-6)-2$

$\therefore t=1,\ s=1,\ k=1$

따라서 $k=1,\ a=2,\ b=3,\ c=4$이므로

$k+a+b+c=10$

7. 정답 ①

[출제의도] 직선의 방정식을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$l: \dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y-14}{3}=z$ 이고 방향벡터는 $\vec{d}=(2,\ 3,\ 1)$이므로 수선의 발 H를 $\mathrm{H}(2t+7, 3t+14,\ t)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\vec{d}=0$에서 $2(2t+7)+3(3t+14)+t=0\ \ \therefore t=-4$

따라서 $\mathrm{H}(-1, 2, -4)$이므로 $a+b+c=-3$이다.

8. 답 ⑤

$\mathrm{Q}(0, t, 0)$이므로 $\mathrm{P}(t, t, 0), \mathrm{R}\left(0, \dfrac{t}{2}, \dfrac{t}{2}\right)$이다

한편, 두 직선 l, m의 방향벡터가 각각

$\vec{l}=(1,1,0), \vec{m}=(0,1,1)$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{m}}{|\vec{l}||\vec{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서, 삼각형 OPR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}}\cdot\overline{\mathrm{OR}}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}t\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2$

이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}t^2=5\sqrt{3}$에서

$t=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\ (\because t>0)$

9. 9

점 P의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 하면

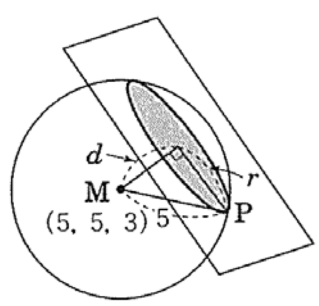
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a-1,\ b-2,\ c-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{PP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a-9,\ b-8,\ c-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(a-1)(a-9)+(b-2)(b-8)+(c-3)^2$

$\qquad=(a-5)^2+(b-5)^2+(c-3)^2-25\le 0$

따라서 점 P는 중심이 $(5,\ 5,\ 3)$이고, 반지름의 길이가 5인 구와 그 내부에 있다. 또한, 점 P는 평면 $x+2y+2z=9$ 위의 점이므로 P가 나타내는 영역은 구와 평면 $x+2y+2z=9$가 만나서 생기는 원과 그 내부이다.



구의 중심 $M(5,5,3)$에서 평면 $x+2y+2z=9$까지의 거리 d는

$d=\dfrac{|5+2\cdot5+2\cdot3-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=4$

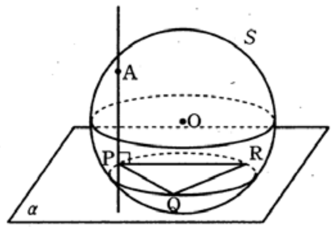
이므로 구하는 원의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{5^2-4^2}=3$

따라서 구하는 영역의 넓이는

$S=\pi\cdot3^2=9\pi \qquad \therefore \dfrac{S}{\pi}=9$

10. 정답 24

구 S와 평면 α를 그려보면 다음과 같다.



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\alpha$ 이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=0$ 이다.

한편, 구 S: $x^2+y^2+z^2=25$ 의 중심 $(0,\ 0,\ 0)$ 에서

평면 α : $x-2y+2z=9$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3$$

구의 반지름의 길이는 5 이므로 원 C 의 반지름의 길이는 4 이고 정삼각형 PQR 의 한 변의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이다.

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$

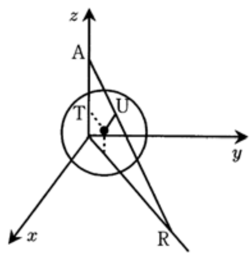
$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos 60^\circ$

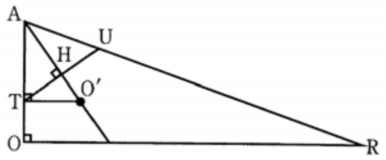
$=\left(4\sqrt{3}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=24$

11. 정답 72

[출제의도] 공간도형과 이차곡선에 관한 수학 내적문제를 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

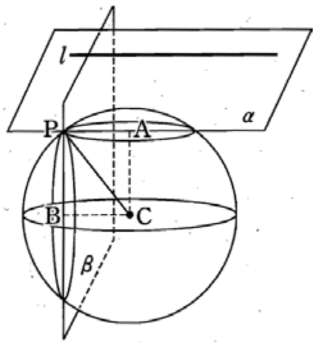
꼭짓점이 A이고 구에 접하는 접선들로 이루어진 직원뿔을 xy평면으로 자른 단면은 타원이므로, 두 점 P, Q는 타원 위의 점이다. 따라서 타원의 장축은 직선 $x=y,\ z=0$ 위에 존재하고, 장축의 한 끝점은 원점이다. 그림과 같이 원점을 O, 구의 중심을 O′, O′에서 z축에 내린 수선의 발을 T, 원점이 아닌 장축의 다른 끝점을 R, $\overline{\mathrm{AR}}$과 구의 접점을 U, 점 T에서 $\overline{\mathrm{AO'}}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.





$\overline{OT}=1$, $\overline{AT}=\overline{AU}=2$, $\overline{AO'}=\sqrt{6}$ 이므로 직각삼각형 ATO′에서 $\overline{TH}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$이고 $\triangle ATU$에서 제이코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle TAU)=\dfrac{1}{3}$이다. 직각삼각형 AOR에서 최댓값 $M=\overline{OR}=6\sqrt{2}$ 이므로 $M^2=72$ 이다.

12. 정답 ②



점 P는 구 C위의 점이므로 점 P를 지나고 직선 l에 수직인 평면을 β라 하면 두 평면 α와 β는 서로 수직이고, 평면 β의 방정식은 점 P를 지나므로

$2x+2y+z=d$에서

$2\cdot1+2\cdot4-2=8$

$\therefore\ 2x+2y+z=8$

한편 두 평면 α, β와 구 C가 만나서 생기는 원의 중심을 각각 A, B라 하면 구하는 원의 반지름의 길이 $\overline{AP}$는 구의 중심 $C(1,0,0)$에서 평면 β에 이르는 거리 $\overline{BC}$와 같다.

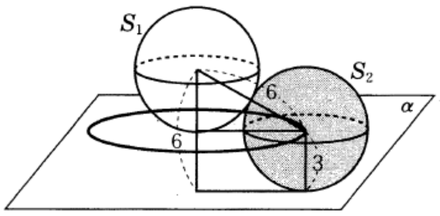
$$\therefore\ \overline{AP}=\overline{BC}=\frac{|2\cdot1+0+0-8|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=2$$

따라서 구하는 원의 넓이는 4π이다.

13. 정답 108

구 S_1의 중심 (6, 2, 3)에서 평면 α ; $x+2y+2z+2=0$까지의 거리는

$$\frac{|1\cdot6+2\cdot2+2\cdot3+2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=6$$



위 그림과 같이 구 S_2의 중심이 나타내는 도형은 원이 되고 이 원의 반지름의 길이는

$\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$

따라서 구하는 길이는

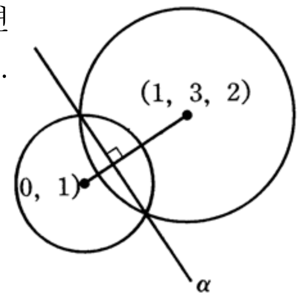
$2\cdot3\sqrt{3}\pi=6\sqrt{3}\pi$

$\therefore\ p^2=(6\sqrt{3})^2=108$

14. 답 55 이해력 – 벡터

그림에서 평면 α의 법선 벡터는

$(1-0,3-0,2-1)=(1,3,1)$이고 평면 $x-y=0$의 법선벡터는 $(1,-1,0)$이다.



$$\therefore\ \cos\theta=\frac{|(1,3,1)\cdot(1,-1,0)|}{\sqrt{11}\times\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{22}}{11}$$

$$\therefore\ \frac{10}{\cos^2\theta}=55$$

15. 답 14

$3x+3=y-3=3z-3$에서

$x+1=\dfrac{y-3}{3}=z-1=t$로 놓으면 구의 중심을 $P(t-1,\ 3t+3,\ t+1)$로 놓을 수 있다.

평면 $2x-2y+z+4=0$의 법선벡터가 $(2,\ -2,\ 1)$이므로 점 P를 지나고 평면 $2x-2y+z+4=0$에 수직인 직선의 방정식은

$$\frac{x-(t-1)}{2}=\frac{y-(3t+3)}{-2}=z-(t+1)$$

$\dfrac{x-(t-1)}{2}=\dfrac{y-(3t+3)}{-2}=z-(t+1)=k$라 하고, 직선 위의 점을 Q라 하면

$Q(2k+t-1,\ -2k+3t+3,\ k+t+1)$을 $2x-2y+z+4=0$에 대입하면

$2(2k+t-1)-2(-2k+3t+3)+(k+t+1)+4=0$

$t=3k-1$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2k)^2+(2k)^2+(-k)^2}=3|k|=3$

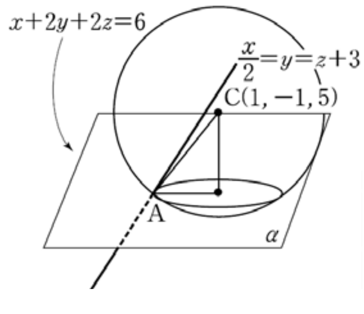
$\therefore k=1$ 또는 $k=-1$

(ⅰ) $k=1$일 때 $t=2$이므로 접점의 좌표는 $(3,\ 7,\ 4)$

(ⅱ) $k=-1$일 때 $t=-4$이므로 접점의 좌표는 $(-7,\ -7,\ -4)$

$a>0$이므로 $a+b+c=3+7+4=14$

16. 정답 53



$\dfrac{x}{2}=y=z+3=t$ 라 하면 $A=(2t,\ t,\ t-3)$이고 점 A가 평면 α 위의 점이므로 $2t+2t+2(t-3)=6$, $6t=12$, $\therefore\ t=2$

$\therefore\ A(4,\ 2,\ -1)$

$\overline{AC}=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{54}$

한편 중심에서 $(1,\ -1,\ 5)$에서 평면까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|1-2+10-6|}{\sqrt{1+4+4}}=1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r 는

$r=\sqrt{\overline{AC}^2-d^2}=\sqrt{54-1}=\sqrt{53}$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면 $S=53\pi$

$\therefore\ k=53$

17. 답 ②

직선 l위의 임의의 점 P는 $P(t+3,\ 3t-1,\ 2t+2)$로 나타낼 수 있고, 직선 m 위의 임의의 점 Q는 $Q(s+2,\ -2s+3,\ -3s)$로 나타낼 수 있다.

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(s-t-1,\ -2s-3t+4, -3s-2t-2)$

점 R의 좌표를 $(x,\ y,\ z)$라 하면 $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ}$이므로

$x=s-t-1,\ y=-2s-3t+4$

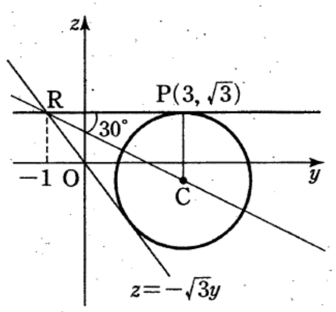
$z=-3s-2t-2$

$s,\ t$를 소거하여 x, y, z에 대한 식을 구하면

$x-y+z+7=0$

18. 정답 4

주어진 구를 평면 $x=1$로 자른 단면을 생각하면 구의 중심 C를 지나는 원으로 그림과 같이 생각할 수 있다.



이때 $\overline{RP}=4$이므로

$\overline{PC}=4\tan 30^\circ$

$=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

따라서, 구의 중심 C의 좌표는

$C\left(1,\ 3,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고,

구의 방정식은

$(x-1)^2+(y-3)^2+\left(z+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{16}{3}$

여기서, $x=0,\ z=0$을 대입하면 $y=1$ 또는 $y=5$

즉, $A(0,\ 1,\ 0),\ B(0,\ 5,\ 0)$이고 구하는 길이는 $\overline{AB}=4$이다.

19. 답 ⑤

ㄱ. (거짓) $\dfrac{3-x}{2}=2-y=\dfrac{z-1}{2}=k$(k는 상수) 에서 직선 l 위의 점 B의 좌표를 $(3-2k,\ 2-k,\ 2k+1)$로 놓으면 $\overrightarrow{AB}=(-2k-2,\ 2-k,\ 2k-1)$ 이고, 직선 l의 방향벡터 $\vec{d}=(-2,\ -1,\ 2)$ 이다.

즉, $(-2k-2,\ 2-k,\ 2k-1)\cdot(-2,\ -1,\ 2)=0$

$4+4k-2+k+4k-2=0,\ 9k=0$

$\therefore\ k=0$

그러므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 2,\ 1)$ 이다.

ㄴ. (참) 직각이등변삼각형 ABC를 포함하는 평면의 법선벡터를 $(a,\ b,\ c)$로 놓으면 법선과 평면 위의 직선 l은 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(-2,\ -1,\ 2)=0$

$-2a-b+2c=0$ …… ㉠

또, 법선은 $\overrightarrow{AB}$와도 수직이므로

$(a,\ b,\ c)\cdot(-2,\ 2,\ -1)=0$

$2a-2b+c=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $b=c,\ c=2a$ 이므로 법선벡터는

$(a,\ 2a,\ 2a)$ 이다. 또, 평면은 점 $B(3,\ 2,\ 1)$을 지나므로

$a(x-3)+2a(y-2)+2a(z-1)=0$ 에서

$x+2y+2z-9=0$ 이다.

ㄷ. (참) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ 이고 원점에서 평면까지의 거리는 $\dfrac{|-9|}{\sqrt{1+4+4}}=3$ 이므로 구하는 부피는

$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times3\times3=\dfrac{9}{2}$ 이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.