부정적분과 정적분

1. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=-2$ (나) $f(-x)=f(x)$ (다) $f(f'(x))=f'(f(x))$

함수 $F(x)=\int f(x)dx$가 감소하는 구간의 길이는?

[3점1007–교육청]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

2. 함수 $f(x)=x^2+4x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f'(x)\times\int f(x)dx$라 하자. $g(0)=4$일 때, $g(3)$의 값을 구하시오.[3점–1005–중앙]

3. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x)=6x^2-2x+a$ (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$

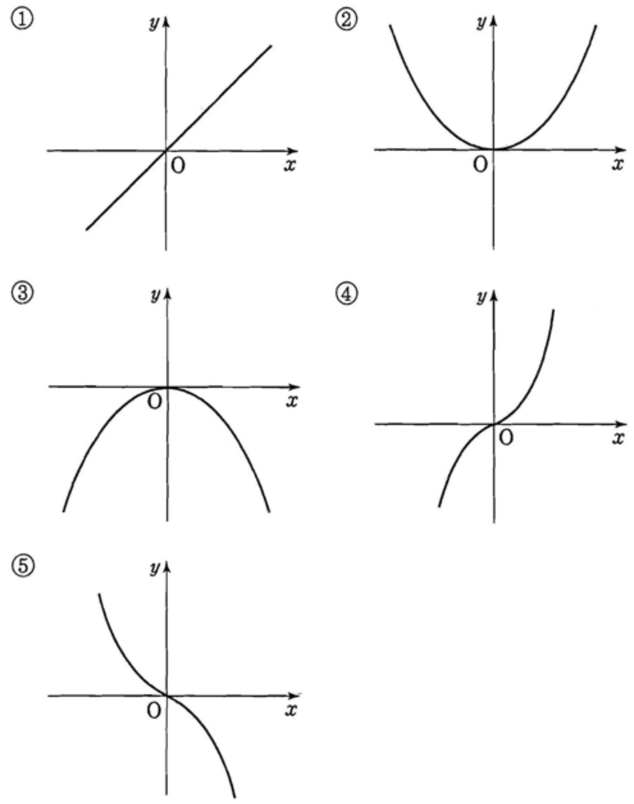
이때, $f(2)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다) [4점–1010–중앙]

4. 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

㈎ 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$이다. ㈏ $f'(0)=0$

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

[3점–1005–비상]



5. 두 함수 $f(x)=\left(\sum_{k=1}^{10}x^k\right)-10$, $g(x)=x^2+x-1$

$$\int h(x)dx=f(x)g(x)+C$$

를 만족하는 함수 $h(x)$가 있다. 이때 $h(1)$의 값을 구하시오. (단, C는 적분상수이다.)[3점–1011–종로]

6. $\int_{0}^{2}(1+2x+3x^2+\cdots+8x^7)dx$의 값을 구하시오.

[3점-1008-중앙]

7. $\int_{0}^{1}(1+2x)^2dx$ 의 값은?[2점-1005-비상]

① 3 ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{13}{3}$

④ 5 ⑤ $\frac{17}{3}$

8. $\int_{-1}^{2}(x+|x|)dx$ 의 값을 구하시오.[3점-1006-대성]

9. $\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx$의 값은?[2점-1007-메가]

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

10. 함수 $f(x)=4x^3-2a$에 대하여 등식 $f(1)\cdot\int_{0}^{1}f(x)dx=0$을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱은? [3점-1010-비상]

① -2 ② -1 ③ 0

④ 1 ⑤ 2

11. 다항함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족한다.

㈎ $f(0)=10$ ㈏ 모든 실수 x에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=3x^2-2x$

이때, $\int_{3}^{3}f(x)dx$의 값을 구하시오.[3점-1010-메가]

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=3x+\frac{1}{3}\int_0^2 g(t)dt$
(나) $g(x)=(x+1)f(x)$

$f(10)$의 값을 구하시오.[3점-1005-대성]

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\int_0^n(2x+3)dx$$

를 만족시킬 때, a_{10} 의 값은?[3점-1008-종로]

① 15 ② 17 ③ 19
④ 22 ⑤ 25

14. 다항함수 $f(x)$ 와 도함수 $f'(x)$ 에 대하여

$$f(0)=0,\ f'(x)=2x-\int_0^1 2f(t)dt$$

가 성립할 때, 정적분 $\int_{-1}^1 xf(x)dx$ 의 값은?[3점-1006-종로]

① $-\frac{2}{9}$ ② $-\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{2}{9}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

15. 두 함수 $f(x)=x^2-4x$ 와 $y=g(x)$ 가 임의의 실수 h 에 대하여 $g(x+h)-g(x)=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ 일 때, 방정식 $g(x)=0$ 의 모든 근의 합은?[3점-1007-교육청]

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

16. 두 양의 실수 p, $q(p<q)$에 대하여 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $f(0)=10$
(나) $f'(0)=f'(p)=f'(q)=0$
(다) $\int_p^q f'(x)dx=-2f(p)+5$

이때 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합을 구하시오.[3점-1005-중앙]

17. $F'(x)=f(x)$ 인 이차함수 $y=f(x)$ 와 임의의 두 실수 a, c 에 대하여 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은?[3점-1007-교육청]

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{c}{n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+c+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(c+\frac{ak}{n}\right)\frac{1}{2n}$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$

18. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-평가원]

<보 기>

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \le \int_0^1 f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

19. 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t-a)(t-b)dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

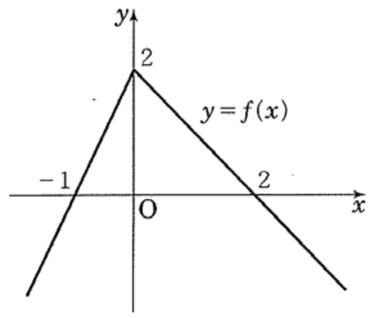
(가) $f(b)-f(a)=\dfrac{4}{3}$
(나) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.
(다) $f'(0)>0$

$10a+b$의 값을 구하시오.[4점-1005-대성]

20. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 두 개의 반직선으로 이루어져 있다. 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점-1009-대성]



<보 기>

ㄱ. 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극소이다.
ㄴ. 함수 $F(x)$의 극댓값은 3이다.
ㄷ. 임의의 양수 a에 대하여 방정식 $F(x)+ax=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

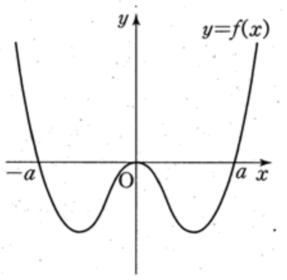
21. x축과 서로 다른 세 점 A, B, C에서 만나는 삼차함수 $f(x)=\displaystyle\int_1^x(-t^2+t+a)dt$가 있다. 점 B에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선의 기울기가 2이고, 함수 $y=f(x)$는 $p<1<q$인 두 실수 p, q에 대하여 두 점 $\mathrm{P}(p, f(p))$, $\mathrm{Q}(q, f(q))$에서 극값을 가진다. 이 때 직선 PQ의 기울기는? (단, 점 B의 x좌표는 두 점 A, C의 x좌표 사이에 있다.)[4점-1010-종로]

① $-\dfrac{3}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

22. 사차함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_b^x f(t)dt$$

로 정의하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$이고 b는 상수이다.)[4점-1011-중앙]



<보 기>

ㄱ. 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.
ㄴ. $b=-a$이면 방정식 $F(x)=a$는 오직 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. 등식 $F(0)=0$이 되도록 하는 b는 3개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

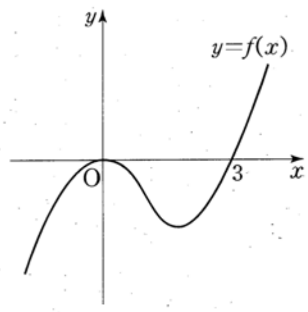
23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

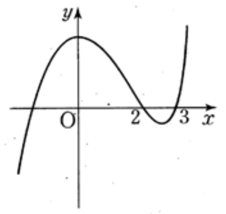
$$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=\int_{n-1}^{n}(3x^2-2x)dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

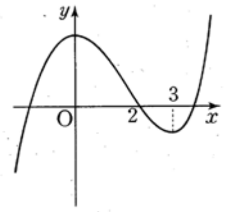
가 성립할 때, a_{10} 의 값은?[3점-1006-대성]

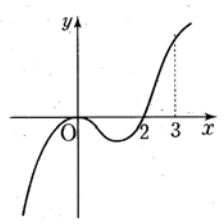
① 646 ② 649 ③ 652
④ 655 ⑤ 658

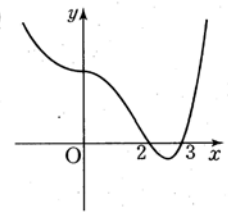
24. 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $F(x)=\int_2^x f(t)dt$일 때, 다음 중 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은?[3점-1010-중앙]

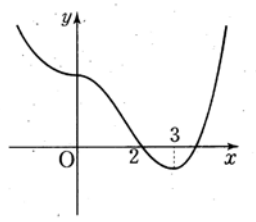


①


②


③


④


⑤


25. $\int_{-3}^{x} f(t)dt=\int (x^2+x+1)dx$일 때, $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-13}{x-3}$의 값을 구하시오.[3점-1008-대성]

26. $x>3$일 때, 등식 $\int_0^3 |t-x|dt = \int_0^x |t-3|dt$를 만족시키는 x의 값은?[3점–1005–대성]

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

27. 함수

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점–1007–메가]

<보 기>

ㄱ. $f(0) = \frac{1}{3}$

ㄴ. $0<x<1$일 때, $f'(x) = 4x^2 - 3x$이다.

ㄷ. $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

28. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=6$, $f(4)=2$를 만족할 때, $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^6 f^{-1}(x)dx$의 값을 구하시오. (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)[3점–1007–종로]

29. 두 집합 $A=\{x\,|\,1 \le x \le 5\}$, $B=\{y\,|\,2 \le y \le 5\}$에 대하여 $f:\ A \to B$인 연속함수 f가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) f는 일대일 대응이다.

(나) $g(x) = f(6-x)$일 때, $\int_2^5 g^{-1}(x)dx = \frac{13}{3}$이다.

$\int_2^5 f^{-1}(x)dx = \frac{q}{p}$일 때, pq의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1008–대성]

30. 연속인 함수$y=f(x)$가 다음 세 조건을 만족한다.

(가) 모든 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이다.
(나) 모든 x에 대하여 $f(x-3)=f(5-x)$이다.
(다) $f(x) = x^2$ $(0 \le x \le 1)$

이때 $\int_1^4 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.[4점–1005–종로]

31. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 p에 대하여 $\int_{3-p}^{3+p} f(x)dx = 2p \times f(3)$가 성립한다.
(나) $f(0)=1,\ f(6)=7,\ f'(0)=19$

이 때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-종로]

<보 기>

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프는 점 $(3,\ 4)$에 대한 점대칭이다.
ㄴ. 함수 $y=f(x+3)-4$의 그래프는 원점 대칭이다.
ㄷ. $\int_0^1 f(x+3)dx = \frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

32. 삼차함수 $y=f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(1+x)+f(1-x)=2$를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-대성]

<보 기>

ㄱ. 곡선 $y=f(x+1)-1$은 원점에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx$
ㄷ. $\int_0^2 \pi\{f(x)\}^2 dx = \int_0^2 \pi x^2 dx$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

33. 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$

$\int_{-1}^1 (ax+c)f(x)dx$의 값을 최소로 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-2)$의 값을 구하시오. (단, a, b, c, d는 상수이다.) [4점-1007-대성]

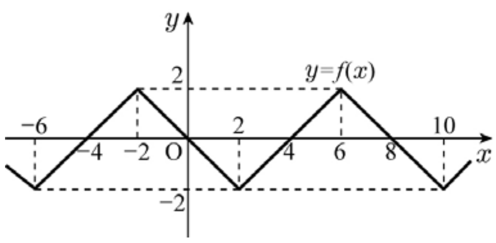
34. 정의역이 $\{x|x \geq 0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 등식 $\int f(x)dx = (x+1)f(x)+x^4+4x-5$가 성립한다. 이때, $\left|\int_0^3 f'(x)dx\right|$ 의 값을 구하시오.[3점-1008-비상]

35. 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^1 f(t)dt=4$ (나) 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt=x^2\int_0^k f(t)dt$를 만족시키는 양수 k 가 존재한다.

이때, $f(4k)$의 값을 구하시오.[4점–1005–비상]

36. 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부가 그림과 같다.



실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$ 를 $g(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점–1010–교육청]

<보 기>

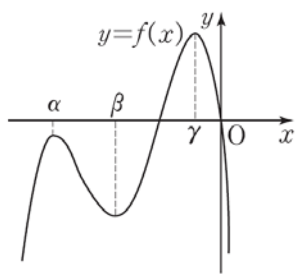
ㄱ. $g(-1)=0$
ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 개구간 $(-2,\ 2)$ 에서 감소한다.
ㄷ. $-4\le x\le 6$에서 방정식 $g(x)=2$ 의 모든 실근의 합은 4 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 함수 $f(x)=x^3-x^2+x$에 대하여 $g(a)=\int_0^2 |f(x)-f(a)|dx$라 하자. $0\le a\le 2$에서 $g(a)$의 최솟값을 m이라 할 때, $24m$의 값을 구하시오.[4점–1007–종로]

38. 그림은 원점을 지나고 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극대, $x=\beta$에서 극소인 사차함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점–1008–비상]



<보 기>

ㄱ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 원점을 지난다.
ㄴ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄷ. $\int_\alpha^\gamma |f'(x)|dx=f(\alpha)-2f(\beta)+f(\gamma)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(-x)=0$을 만족시키고

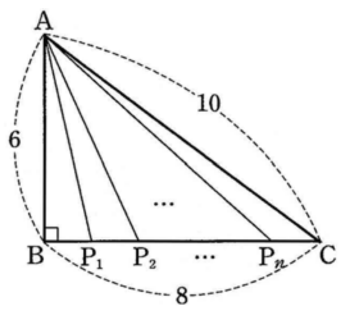
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=5,\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=10$$

일 때, 정적분 $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$의 값을 구하시오.[3점-1010-대성]

40. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{CA}}=10$ 인 직각삼각형 ABC에서 변 BC를 $n+1$ 등분하는 점을 B에 가까운 점부터 차례로

P_1, P_2, $\cdots$, P_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{AP}_k}^{\,2}$ 의 값은?

[4점-1008-종로]



① $\frac{172}{3}$ ② $\frac{173}{3}$ ③ $\frac{175}{3}$
④ $\frac{176}{3}$ ⑤ $\frac{178}{3}$

41. 임의의 실수 a에 대하여

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}\{f(x)+f(-x)\}dx$임을 이용하여

$\int_{-3}^{3}\frac{x^2}{3^x+1}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$을 만족시키는 p의 값을 구하면?

[4점-1005-종로]

① 3 ② 9 ③ 18
④ 27 ⑤ 36

42. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{5}\frac{k^m}{m\cdot n^{m+1}}\right)$의 값은?[3점-1005-중앙]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

43. 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(1,\ 1)$, $(4,\ 4)$를 지난다. (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f^{-1}\left(\frac{n+3k}{n}\right)\frac{1}{n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n+3k}{n}\right)\frac{1}{n}$의 값은?

(단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)[4점-1010-메가]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ 3

44. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin x\, dx$의 값은?[3점-1008-비상]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

45. 등식 $\int_{-\pi}^{\pi} (3-2\sin x)^2 dx = a\pi$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.[4점-1011-중앙]

46. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x} dx$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[3점-1011-중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\ln 2$

④ $2\ln 2$ ⑤ $3\ln 2$

47. 함수 $f(x)=e^{\frac{x}{2}}-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 좌표평면에서 연립부등식

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \\ y \ge f(x) \\ y \le g(x) \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이는?[3점-1011-대성]

① $4-e$ ② $6-2e$ ③ $8-2e$

④ $12-4e$ ⑤ $12-3e$

48. 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x)=\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{1+4t^2} dt$$

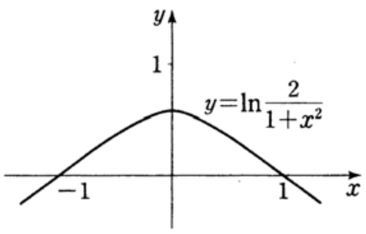
$f\left(\tan\frac{11}{25}\pi\right)=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1010-메가]

49. 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$에 대하여 곡선 $y=f(x)g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 영역의 넓이는? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1010-종로]

① e^e-e ② e^e ③ e^e+e

④ $2e^e$ ⑤ $2e^e+e$

50. 그림과 같이 곡선 $y=\ln\dfrac{2}{1+x^2}$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $a\pi+b$일 때, 두 정수 a, b에 대하여 $b-a$의 값을 구하시오.[3점-1010-비상]



51. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a)=0,\ \int_{2a}^{4a} f(x)dx=k\ (a>0,\ 0<k<1)$$

일 때, $\displaystyle\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은?

[3점-2010-대수능]

① $\dfrac{k^2}{4}$ ② $\dfrac{k^2}{2}$ ③ k^2
④ k ⑤ $2k$

52. 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 2]$에서 연속이고 $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)+f(2-x)\ne 0$을 만족시킨다.
$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx=3$일 때, $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx$의 값은?

[3점-1010-대성]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

53. 정적분에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3점-1008-대성]

<보기>

ㄱ. $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx=\ln t$를 만족시키는 $1<t<2$인 실수 t가 존재한다.

ㄴ. $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=|\sin t|$를 만족시키는 $0<t<2\pi$인 실수 t 가 존재한다.

ㄷ. $\displaystyle\int_{-1}^2 e^{-x}dx=e^t$을 만족시키는 $-2<t<1$인 실수 t가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

[3점-1009-평가원]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

55. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다.
(나) $\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(2x)dx=7$, $\int_{1}^{\frac{4}{3}} f(3x)dx=1$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx$의 값은?[3점-1010-교육청]

① 65 ② 71 ③ 82
④ 88 ⑤ 99

56. 다음은 등식 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^{\frac{a}{2}}\{f(x)+f(a-x)\}dx$를 이용하여 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$의 값을 구하는 과정이다.

$f(x)=\ln(1+\tan x)$라 하면
$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}=\ln(1+\boxed{(가)})$
$\therefore f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\boxed{(나)}$
$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\left\{f(x)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right\}dx=\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1008-중앙]

① $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, $\ln\frac{1}{2}$, $\frac{\pi\ln 2}{4}$
② $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, $\ln 2$, $\frac{\pi\ln 2}{4}$
③ $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$, $\ln 2$, $\frac{\pi\ln 2}{8}$
④ $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$, $\ln\frac{1}{2}$, $\frac{\pi\ln 2}{8}$
⑤ $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$, $\ln 2$, $\frac{\pi\ln 2}{4}$

57. $\frac{d}{dx}(e^x f(x))=e^x(f(x)+f'(x))$임을 이용하여 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$의 값을 구하면? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[3점-1007-종로]

① $e^{\frac{\pi}{4}}$ ② $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}$ ③ $e^{\frac{\pi}{2}}$
④ $\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{2}}$ ⑤ $2e^{\frac{\pi}{2}}$

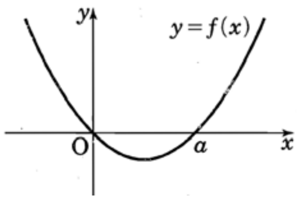
58. 함수 $f(x)$는

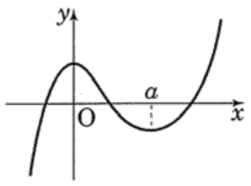
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x<2)\\ -2e^{2-x} & (x\ge 2)\end{cases}$$

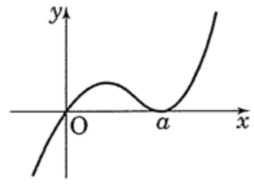
이다. 양수 a에 대하여 $S(a)=\int_0^a|f(x)|dx$라 할 때, $\lim_{a\to\infty}S(a)$의 값은?[3점-1011-대전교]

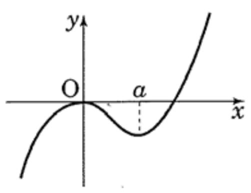
① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

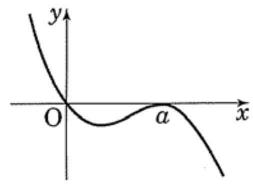
59. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\int_0^x f(x-t)dt$ 의 그래프의 개형은?[4점-1009-대성]

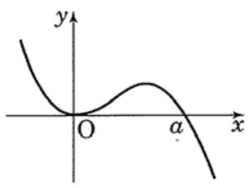


①


②


③


④


⑤


60. 1 이상인 양수 a와 $\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{x}=b$를 만족하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수 $h(x)$가

$$h(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x} & (0<x \le a) \\ b & (x=0) \end{cases}$$

와 같이 정의된다. 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\int_x^a h(t)\,dt \quad (0 \le x \le a)$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, b는 상수이다.)[4점-1009-종로]

<보 기>

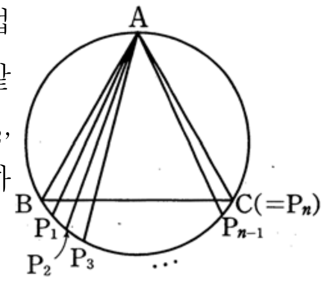
ㄱ. $g(a)=0$

ㄴ. $g(x)=x^2$이면 $\int_0^1 \{g(x)-f(x)\}\,dx=0$이다.

ㄷ. $\int_0^a \{g(x)-f(x)\}=0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

61. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형 ABC 가 있다. 그림과 같이 호 BC를 n등분한 점을 각각 P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1}이라 하고 점 C를 P_n이라 하자.



이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{AP_k}$의 값은?

[4점-1009-중앙]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{4}{\pi}$
④ $\frac{6}{\pi}$ ⑤ $\frac{8}{\pi}$

62. 다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_n=\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n} \text{(단, } n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?[4점-1008-비상]

① $\ln 2$ ② $\ln 3-\ln 2$ ③ $\ln 3$
④ $2\ln 2$ ⑤ $2\ln 3-\ln 2$

63. 구간 $[-\pi,\ \pi]$ 에서 다음과 같이 정의된 함수 $f(x)$ 가 있다.

$$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 $2\pi+4$ 를 가질 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 양의 실수이다.)[4점-1010-비상]

64. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^2 f(x)dx$ 의 최솟값은?

[4점-2010-대수능]

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=1$
(나) $0<a<b<2$ 이면 $f'(a)\le f'(b)$ 이다.
(다) 구간 $(0,\ 1)$ 에서 $f''(x)=e^x$ 이다.

① $\frac{1}{2}e-1$ ② $\frac{3}{2}e-1$ ③ $\frac{5}{2}e-1$
④ $\frac{7}{2}e-2$ ⑤ $\frac{9}{2}e-2$

65. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\cos x\cdot f(t)\,dt$$

라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1010-교육청]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$
ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이다.
ㄷ. $g'(c)=0$인 실수 c가 개구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 적어도 두 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

66. $a>0$ 일 때

$$\int_a^x (x^2-t^2)f(t)dt=\int_a^x t\ln(t^2+a)dt$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to -a}\frac{1}{x+a}\int_{-a}^{x}f(t)dt$$

의 값은?[4점-1008-종로]

① $1-\sqrt{5}$ ② $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

67. 함수 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

[4점－1010－비상]

<보 기>

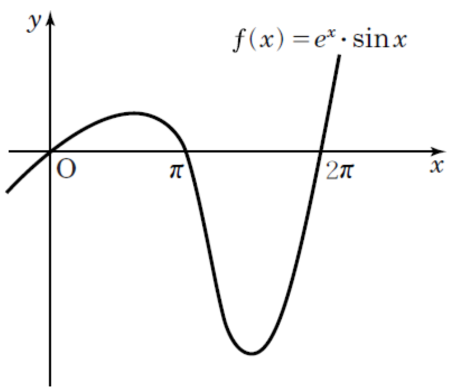
ㄱ. $0<x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$ 이다.

ㄴ. $\int_{-a}^{a} f'(x)dx=2f(a)$ (단, $a>0$)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 는 한 점에서 만난다.

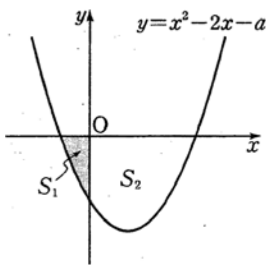
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

68. 그림과 같은 함수 $f(x)=e^x\cdot\sin x$의 그래프에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)dt$로 정의할 때, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{5}{2}\pi$의 범위에서 존재하는 $F(x)$의 두 극솟값 m_1, m_2의 차 $|m_1-m_2|=\dfrac{e^{a\pi}-1}{b}$이다. 두 자연수 a, b에 대하여 $10(a+b)$의 값을 구하시오.[4점－1008－대성]

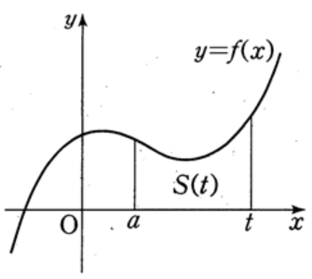


정적분의 활용

1. 그림과 같이 포물선 $y=x^2-2x-a\ (a>0)$와 x축, y축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이를 각각 S_1, S_2라 고 할 때, $3(S_2-S_1)=58$을 만족하는 상수 a의 값을 구하시오.[3점-1009-종로]



2. $x \geq a$에서 $f(x) \geq 0$인 연속함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=t\ (t>a)$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$라 하자. 다음 중 그 값이 $\lim_{t \to a} \frac{S(t)}{t-a}$의 값과 항상 같은 것은? (단, a는 상수이다.)[3점-1009-중앙]



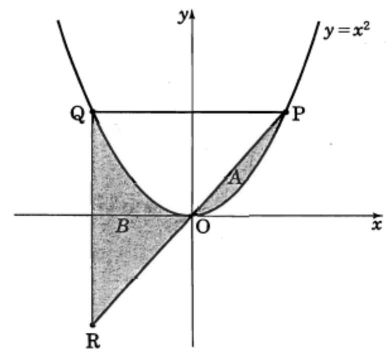
① 0　② a　③ $f'(a)$

④ $f(a)$　⑤ $\int_0^a f(x)dx$

3. 점 $(1,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(m)$이라 하자. $S(m)$의 최솟값이 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

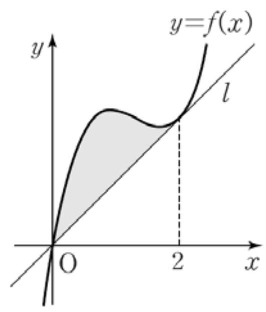
[4점-1008-종로]

4. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 제1사분면에 있는 한 점 P와 y축에 대하여 대칭인 점을 Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 평행한 직선과 직선 OP가 만나는 점을 R라 하자.



곡선 $y=x^2$과 선분 OP로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=x^2$과 두 선분 OR, QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $\frac{A}{B}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이고, 점 O는 원점이다.)[3점-1006-대성]

5. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$가 있다. 그림과 같이 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 l이 원점에서 다시 곡선 $y=f(x)$와 만날 때, 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는?[3점-1010-비상]



① 1　② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

6. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

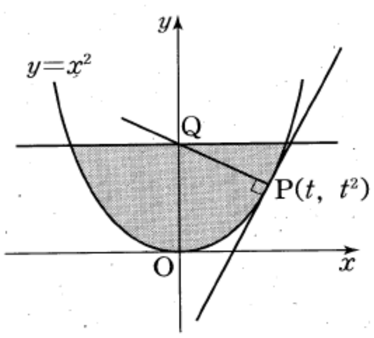
(가) $f(0)=2$ (나) $x>0$이면 $f'(x)>0$이다.

2 이상인 자연수 n과 $1 \le k \le n$인 자연수 k에 대하여, 곡선 $y=f'(x)$와 세 직선 $x=\dfrac{k-1}{n}$, $x=\dfrac{k}{n}$, $y=0$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $A_n(k)$라 하면

$$n^3\{A_n(1)+A_n(2)+\cdots+A_n(k)\}=\frac{1}{2}k^3+2n^2k$$

가 성립한다. 곡선 $y=xf(x)$와 x축, y축, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-대전교]

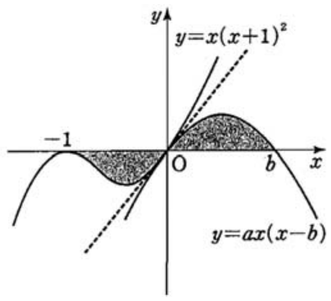
7. 곡선 $y=x^2$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(t>0)$에서의 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 y축과 만나는 점을 Q라고 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선과 곡선 $y=x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to+0}S(t)$의 값은?[4점-1008-중앙]



① 0 ② $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

8. 그림과 같이 삼차함수 $y=x(x+1)^2$의 그래프와 이차함수 $y=ax(x-b)$의 그래프가 원점에서 같은 직선에 접한다. 각각의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a<0$)[4점-1006-종로]

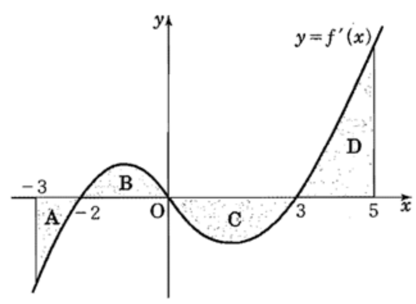


① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{7}{3}$

④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ $\dfrac{7}{2}$

9. 사차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다. 곡선 $y=f'(x)$와 직선 $x=-3$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 A, 곡선 $y=f'(x)(x\le 0)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 B, 곡선 $y=f'(x)(x\ge 0)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 C, 곡선 $y=f'(x)$와 직선 $x=5$ 및 x축으로 둘러싸인 부분을 D라 하자. 두 부분 A, B의 넓이가 서로 같고, 두 부분 C, D의 넓이가 서로 같을 때, 부등식 $f(x)<f(0)$을 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

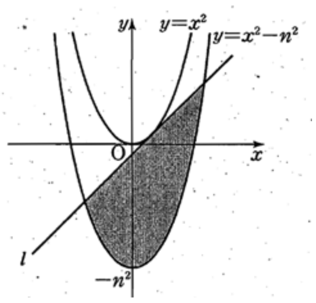
[4점-1011-대성]



① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

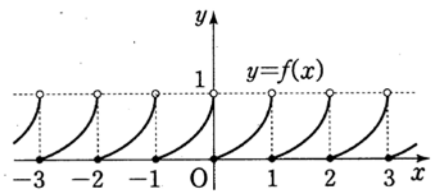
10. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 (a,a^2)에서의 접선을 l이라 하자. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-n^2$과 직선 l로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{9} S_n$의 값은?(단, $a>0$)[4점-1005-중앙]



① 1500 ② 1800
③ 2000 ④ 2500 ⑤ 2700

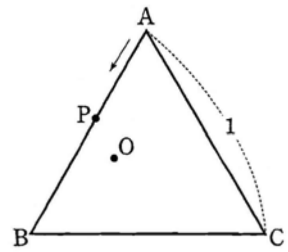
11. 함수 $f(x)=x^4-4x^2+1$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때, 곡선 $y=x^4-4x^2+1$ 과 직선 $y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-대성]

12. 함수 $f(x)=(x-[x])^2$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $g(x)=[x]+f(x)$라 할 때, $\int_{-5}^{5}|g(x)|dx$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)[4점-1010-비상]

13. 한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC의 내부에 정점 O 가 있다. 이때, 삼각형 ABC 위의 점 P는 점 A 를 출발하여 변을 따라 시계 반대 방향으로 한 바퀴 움직인다. 점 P 가 움직인 거리를 x, 선분 OP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 점 O 에서 각 변에 이르는 거리는 서로 다르다.)



[4점-1005-비상]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 개구간 $(0,3)$에서 미분가능하다.
ㄷ. 삼각형 OBC의 넓이는 $\int_{1}^{2} f'(x)dx$와 같다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \le t \le 5)$에서의 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \le t < 1) \\ -2t+6 & (1 \le t < 3) \\ t-3 & (3 \le t \le 5) \end{cases}$$

$0<x<3$ 인 실수 x 에 대하여 점 P가
시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리,
시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리,
시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리
중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-2010-대수능]

<보 기>

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

15. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$의 평균 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$일 때, 구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 평균 M에 대하여 $\int_0^2 \{f(x)+2M\}dx$의 값을 구하시오.

[3점-1011-대성]

16. 집합 $\{x|0 \le x < 1\}$에서 정의된 함수 $f(x)=x^3$에 대하여 함수 $g(x)$는 다음을 만족시킨다.

> 임의의 정수 n에 대하여 $n \le x < n+1$에서의 함수 $g(x)$의 그래프는 함수 $f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 n만큼, y축의 그래프의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프와 같다.

이 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1009-중앙]

<보 기>

ㄱ. 모든 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n} g(x)=g(n)$이다.

ㄴ. $\int_{-3}^{3} |g(x)|dx=9$

ㄷ. 모든 자연수 m에 대하여
$2\int_m^{m+1} g(x)ds=\int_{m-1}^{m} g(x)dx+\int_{m+1}^{m+2} g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 두 부등식

$$x^2+y^2 \le 2,\ y \ge x^2$$

을 동시에 만족시키는 x, y에 대하여 점 $(x,\ y)$가 좌표평면에 나타내는 도형을 x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피는?[3점-1007-메가]

① $\frac{11}{5}\pi$ ② $\frac{44}{15}\pi$ ③ $\frac{11}{3}\pi$
④ $\frac{22}{5}\pi$ ⑤ $\frac{77}{15}\pi$

18. 곡선 $y=\sqrt{1-x}$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는?[3점-1010-교육청]

① $\frac{1}{3}\pi$ ② $\frac{2}{5}\pi$ ③ $\frac{7}{15}\pi$
④ $\frac{8}{15}\pi$ ⑤ $\frac{3}{5}\pi$

19. 두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$ 과 x축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하시오.[3점-2010-대수능]

20. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2x\ (0 \le x < 1) \\ 2\ \ (x \ge 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt \quad (x \ge 0)$$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분을 x 축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $q-p$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q는 서로소인 자연수이다.)
[4점-1007-교육청]

21. 함수 $f(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+a\ (a>0)$이 있다. 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=g'(x)$를 만족시키고 $g(0)=a+1$이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피가 50π일 때, a의 값을 구하시오.[4점-1009-평가원]

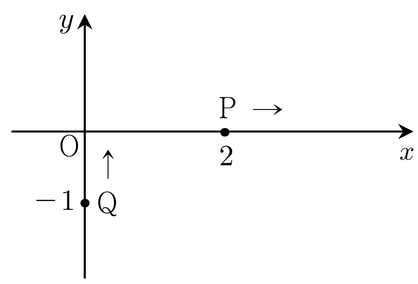
22. $x \ge 0$에서 연속인 함수 $f(x)$가 임의의 양수 x에 대하여

$$\int_0^x (x-t)\{f(t)\}^2 dt = x^3$$

을 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는?[4점-1010-대성]

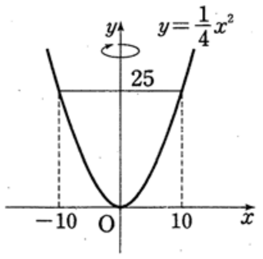
① 27π ② 28π ③ 29π
④ 30π ⑤ 31π

23. 그림과 같이 두 점 P, Q 는 각각 $(2, 0)$, $(0, -1)$에서 동시에 출발하여 점 P 는 매초 3 의 속도로 x축의 양의 방향으로 움직이고, 점 Q 는 매초 1 의 속도로 y축의 양의 방향으로 움직인다.

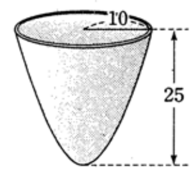


출발한 지 t초 후의 위치를 각각 P′, Q′ 이라 하고 $\triangle$OP′Q′ 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $\int_0^2 S(t)dt=\frac{q}{p}$ 일 때, p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-대전교]

24. [그림 1]과 같이 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 직선 $y=25$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전시켜 만들어지는 회전체 모양의 홈이 파진 절구 모양의 [그림 2]와 같은 빈 그릇이 야외에 똑바로 세워져 있다. 어느 날 비가 내리기 시작하여 t시간 후 이 그릇에 고인 물의 수면의 상승 속도는 $v=3t(4-t)$ $(0 \le t \le 2)$이었다. $t=2$일 때, 이 그릇에 고인 물의 부피가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하시오. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)[4점-1011-종로]



[그림 1]



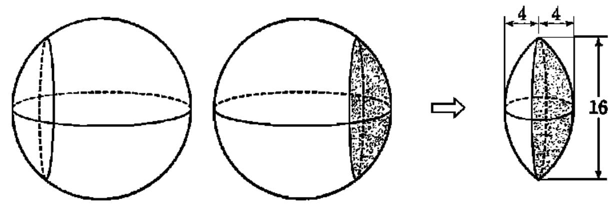
[그림 2]

25. 함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가). $f(x)=2\lvert x\rvert$ $(-1 \le x \le 1)$
(나). 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이다.

함수 $y=\{f(x)\}^2$ $(-2 \le x \le 2)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S, 이 그래프를 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 V라 할 때, $\frac{10}{\pi}\times\frac{V}{S}$의 값을 구하시오.[4점-1007-대성]

26. 그림과 같이 크기가 같은 두 구를 단면의 지름의 길이가 16cm가 되도록 잘라낸 후 포개어 붙여 볼록렌즈를 만들었다.



이때 잘라낸 두 부분의 두께가 모두 4cm이었다면 이 두 부분을 포개어 붙인 볼록렌즈의 부피는 $k\pi \text{cm}^3$이다. 이때, $3k$의 값을 구하시오.[4점-1006-종로]

27. 수직선 위를 움직이는 점 P가 점 A(a)를 출발하여 시각 $t=t_1$ $(t_1>0)$일 때, 점 B(b)에 도착하였다. 시각 $t(0 \le t \le t_1)$에서 점 P의 속도를 $v(t)$라 할 때 다음이 성립한다.

(가) $v(t)$는 연속이고, $v(0)=v(t_1)=0$이다.
(나) $\int_0^{t_1} v(t)dt < \int_0^{t_1} \lvert v(t)\rvert dt$
(다) $0<t<t_1$에서 $v(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 오직 하나이다.

함수 $y=v(t)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-메가]

<보 기>

ㄱ. $v(t) \ge 0$

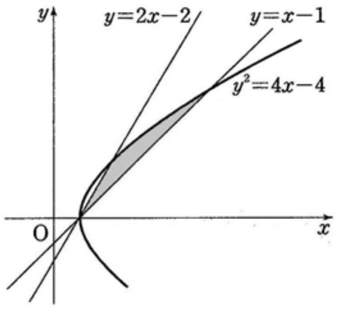
ㄴ. $\int_0^{t_1} v(t)dt=0$이면 $a=b$이다.

ㄷ. 극값을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

28. 그림과 같이 $y^2=4x-4$ 와 두 직선 $y=x-1, y=2x-2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

[3점-1008-종로]



① $\frac{7}{6}$　② $\frac{5}{3}$　③ $\frac{11}{6}$　④ $\frac{7}{3}$　⑤ $\frac{15}{6}$

29. 실수 전체에서 정의된 두 함수

$$f(x)=-x^2+ax+b,\quad g(x)=e^{-x}$$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a>0$이고, a, b는 상수이다.)[4점-1011-종로]

<보 기>

ㄱ. 방정식 $(g\circ f)(x)=e^{-b}$는 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $y=(f\circ g)(x)$는 $x=\ln\frac{2}{a}$에서 극솟값을 갖는다.

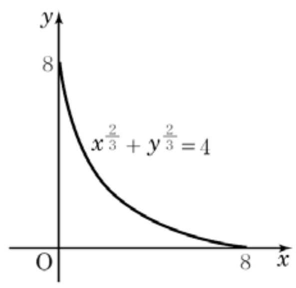
ㄷ. $y=(2x-a)(g\circ f)(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $e^{-b}\left(1-e^{-\frac{a^2}{4}}\right)$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

30. 곡선 $y=\ln(x+1)^2$과 직선 $y=10\ln 2$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.[4점-1009-종로]

31. 그림과 같은 곡선 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$의 길이를 구하시오.

[4점-1007-대성]

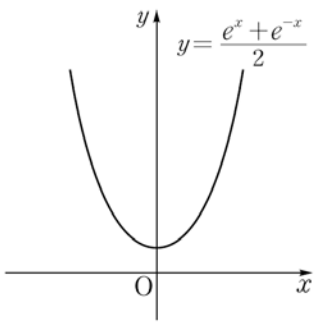


32. 그림은 함수

$$f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

의 그래프이다.

$0 \le x \le a$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 s라 할 때, 다음 중 양수 a의 값과 항상 같은 것은?[4점-1010-메가]



① $\ln s$　② $\ln(1+s)$

③ $\ln(\sqrt{1+s^2}-s)$　④ $\ln(s+\sqrt{1+s^2})$

⑤ $\ln(2s+\sqrt{1+s^2})$

33. $0 \le x < \frac{\pi}{2}$일 때, 두 함수 $y=\tan^{n}x$와 $y=-\tan^{n+2}x$ 및 $x=\frac{\pi}{4}$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_n (n은 자연수)이라 하자. $S_n=\frac{1}{20}$일 때, n의 값을 구하시오.[4점-1011-종로]

34. 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}(x>0)$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피는? (단, e는 자연로그의 밑이다.)[4점-1010-중앙]

① $\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi$　② $\left(2-\frac{3}{e}\right)\pi$　③ $\left(2-\frac{1}{e}\right)\pi$

④ $\left(2+\frac{3}{e}\right)\pi$　⑤ $\left(2+\frac{5}{e}\right)\pi$

35. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x & (\cos 2x \ge \sin x)\\ \sin x & (\cos 2x < \sin x)\end{cases}$$

곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는?[4점-1010-비상]

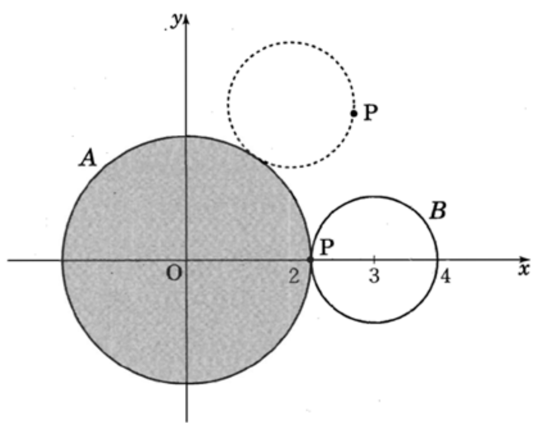
① $\frac{1}{4}\pi^2-\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$　② $\frac{1}{4}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

③ $\frac{1}{2}\pi^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$　④ $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$

⑤ $\frac{1}{2}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$

36. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(0 \le t \le 1)$에서의 위치 $(x,\ y)$는 $\begin{cases} x=(1-t^2)\cos t \\ y=(1-t^2)\sin t \end{cases}$이다. 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리를 $\dfrac{a}{b}$라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점-1008-중앙]

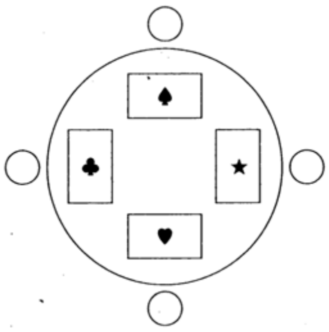
37. 좌표평면 위에 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 A와 점 $(3,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 B가 있다. 점 $(2,\ 0)$에서 원 A에 접하고 있던 원 B가 원 A의 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 미끄러지지 않게 굴러갈 때, 두 원 A, B가 점 $(2,\ 0)$에서 다시 접할 때까지 점 $(2,\ 0)$에 있던 원 B 위의 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하시오.[4점-1009-대성]



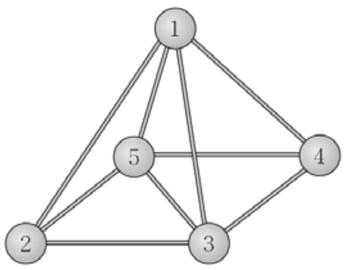
순열과 조합

1. 남자 4명, 여자 2명이 모두 원탁에 앉을 때, 여자끼리는 이웃하지 않도록 앉는 방법의 수를 구하시오.[3점-1011-중앙]

2. 그림과 같이 4 인용 원형 탁자위에 서로 다른 4 종류의 컵 받침대를 놓고, 그 위에 서로 다른 4개의 컵을 놓을 때, 컵 받침대와 컵을 놓는 경우의 수를 구하시오. (단, 탁자를 회전하여 같은 모양이 되는 경우는 한 가지로 생각한다.)[3점-1006-종로]

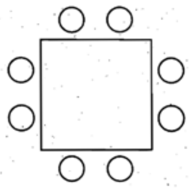


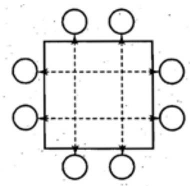
3. 그림과 같이 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적힌 5개의 공과 9개의 막대기를 연결하여 만든 모형이 있다. 숫자 n $(1 \le n \le 5)$이 적힌 공에서 출발하여 막대기를 따라 이동할 때, 나머지 4개의 공을 모두 한 번씩만 지나 다시 숫자 n이 적힌 공으로 돌아오도록 하는 방법의 수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{5} f(n)$의 값은?[3점-1007-대성]



① 18 ② 24 ③ 36
④ 48 ⑤ 60

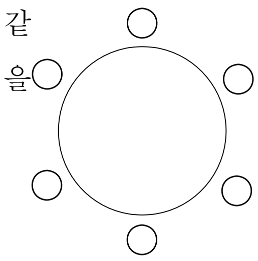
4. [그림1]과 같이 정사각형 모양의 탁자에 8개의 의자가 일정한 간격으로 놓여 있다. 이 의자에 남자 4명, 여자 4명을 앉힐 때, 남녀끼리 마주보도록 앉히는 방법의 수는? (단, 마주보는 자리는 [그림2]와 같이 점선의 양쪽 끝의 화살표가 가리키는 두 자리이다. 또한 회전하여 같은 것은 같은 방법으로 생각한다.)[4점-1005-중앙]


[그림 1]


[그림 2]

① 1020
② 1446
③ 1688
④ 2062
⑤ 2304

5. 그림과 같이 원탁 주위에 6개의 의자가 같은 간격으로 놓여 있다. 이 의자에 학생 6명을 다음과 같은 방법으로 배치하려고 한다.

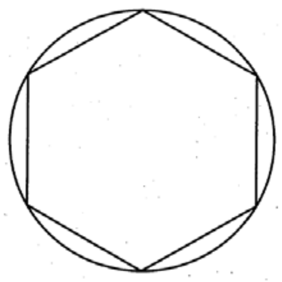


(가) 학생 6명 중에서 4명은 의자에 앉게 하고, 나머지 2명은 남은 2개의 의자 뒤에 서게 한다. (나) 의자 뒤에 서는 두 명은 서로 이웃하지 않는다.

이와 같이 학생 6명을 각 의자에 한 명씩 배치하는 방법의 수는? [4점-1011-대성]

① $5!\times8$ ② $5!\times9$ ③ $5!\times10$
④ $6!\times8$ ⑤ $6!\times9$

6. 그림과 같이 원에 내접하는 정육각형에 의하여 원의 내부가 7개의 영역으로 나뉘어져 있는 도형이 있다. 서로 다른 7가지의 색을 모두 사용하여 7개의 각각의 영역에 1개씩 색을 칠할 때, 만들 수 있는 서로 다르게 색칠된 도형의 개수를 구하시오. (단, 회전하여 같은 것은 같은 도형으로 생각하고, 도형은 뒤집을 수 없다.)[4점-1011-중앙]



7. 다섯 개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3 중에서 네 개의 숫자로 네 자리의 자연수를 만들 때, 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는? [3점-1011-중앙]

① 12 ② 18 ③ 24
④ 30 ⑤ 36

8. 8개의 알파벳 a, a, b, b, c, d, e, e를 모두 사용하여 일렬로 배열할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점-1010-중앙]

<보 기>

ㄱ. 배열하는 모든 경우의 수는 7!이다.
ㄴ. 자음과 모음 또는 모음과 자음이 교대로 나타나는 경우의 수는 $(3!)^2$이다.
ㄷ. a가 e보다 항상 위쪽에 오는 경우의 수는 $7\times5!$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 문자 S, C, H, O, O, L이 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 나열하여 문자열을 만든다. 이 문자열 전체를 알파벳순으로 늘어놓으면 첫 번째 나오는 문자열은 CHLOOS이고, SCHOOL은 n번째 나오는 문자열이다. n의 값은?[3점-1010-메가]

① 302 ② 303 ③ 304
④ 305 ⑤ 306

10. 어느 행사장에는 현수막을 1개씩 설치할 수 있는 장소가 5곳이 있다. 현수막은 A, B, C 세 종류가 있고, A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다. 다음 조건을 만족시키도록 현수막 5개를 택하여 5곳에 설치할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? (단, 같은 종류의 현수막끼리는 구분하지 않는다.)[3점-2010-대수능]

(가) A는 반드시 설치한다.
(나) B는 2곳 이상 설치한다.

① 55 ② 65 ③ 75
④ 85 ⑤ 95

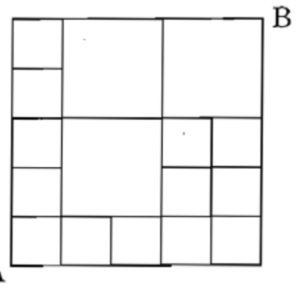
11. 철수는 평일 자습 시간에 5시간을 공부하는데 1시간 단위로 수학, 영어, 국어 세 과목 중에서 한 과목만을 선택하여 공부하려 한다. 수학은 반드시 2시간 이상 공부하며 같은 과목은 연속하여 공부사지 않고, 세 과목 모두 적어도 1시간 이상 공부하도록 학습 계획을 짜는 방법의 수는?[3점-1009-종로]

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

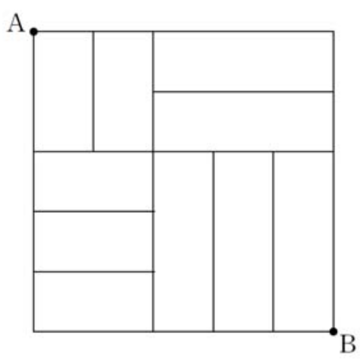
12. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 중에서 $f(1)+f(2)+f(3)=5$를 만족시키는 함수 f의 개수는?
[3점-1008-비상]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

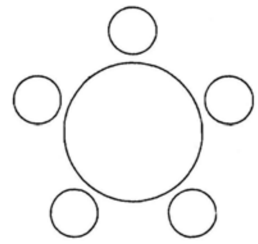
13. 그림과 같은 도로망이 있다. A지점에서 출발하여 도로망을 따라 B지점까지 갈 때, 최단 경로로 가는 방법의 수를 구하시오.
[3점-1007-메가]



14. 그림은 어느 지역의 도로망을 나타낸 것이다. A지점에서 출발하여 도로망을 따라 B지점까지 최단 거리로 가는 경로의 수를 구하시오.[3점-1010-메가]

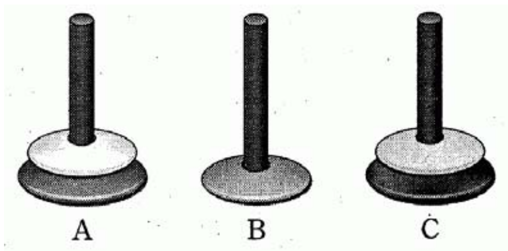


15. 그림과 같이 원형의 책상에 같은 간격으로 5개의 의자가 놓여 있다. 각 의자 위에 5장의 카드 1, 1, 2, 2, 3을 한 장씩 올려놓으려고 한다. 이때, 카드를 의자에 놓는 방법의 수는? (단, 회전하여 같은 것은 하나의 경우로 세고, 의자는 서로 구별하지 않는다.)[3점-1005-비상]



① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

16. 그림과 같이 세 개의 기둥 A, B, C에 색깔이 서로 다른 원판이 차례대로 2개, 1개, 2개가 꽂혀 있다. 한 번에 하나씩 위쪽부터 꺼내서 다섯 개의 원판을 모두 꺼내려고 한다. 다섯 개의 원판을 모두 꺼내는 순서를 정하는 방법의 수는?[3점-1005-종로]



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

17. 어느 회사에서는 0부터 9까지의 정수 중에서 중복을 허용하여 일곱 개의 정수를 택해 다음과 같은 규칙으로 사원번호를 만든다고 한다.

㈎ 첫째 자리의 숫자는 0 또는 1이다.
㈏ 둘째 자리부터 다섯째 자리까지의 숫자는 2, 3, 5만을 사용하 되 2, 3, 5를 모두 사용하여 구성한다.
㈐ 마지막 두 자리에 들어가는 숫자의 합은 9가 되게 한다.

예를 들어, 0223536은 위의 규칙을 만족하므로 사원 번호가 될 수 있다. 이 회사에서 위와 같은 규칙으로 만들 수 있는 서로 다른 사원 번호의 개수는?[3점-1010-비상]

① 590 ② 640 ③ 680
④ 720 ⑤ 840

18. 중복을 허용하여 1, 2, 3, 4의 숫자로 만든 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 7 인 자연수의 개수는?
[4점-1005-비상]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

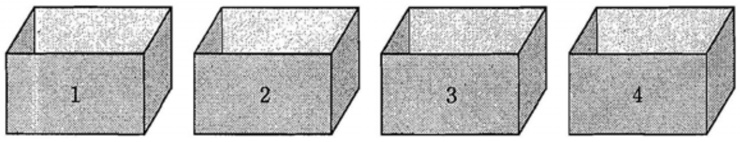
19. 좌표평면 위의 한 동점 P가 원점을 출발하여 x축 또는 y축의 방향으로 1만큼씩 이동한다. 이때 점 P가 (a, b)까지 가는 방법의 수를 $f(a, b)$로 나타내자. 예를 들면 $f(1, 2)=3$, $f(2, 2)=6$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 음이 아닌 정수이다.)[4점-1009-종로]

<보 기>

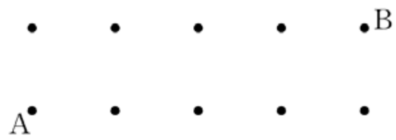
ㄱ. $f(2,\ 3)=10$
ㄴ. $f(a,\ b)=f(b,\ a)$
ㄷ. $f(f(1,\ 2),\ 3)=f(1,\ f(2,\ 3))$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 흰 공 4개와 검은 공 4개가 있다. 이 8개의 공을 그림과 같이 번호가 적힌 4개의 상자에 2개씩 넣는 방법의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 구별하지 않는다.)[4점-1005-비상]

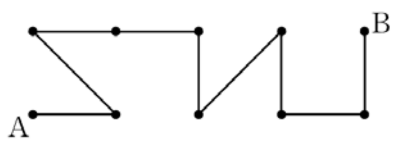


21. 동이는 [그림1]과 같이 정원에 가로 방향의 두 줄로 심어진 10그루의 나무의 생태를 조사하는데, A부터 시작하여 B에서 끝내기로 하였다.



[그림 1]

나무와 나무 사이는 직선으로 이동하고, 이동한 경로는 서로 만나지 않도록 경로를 정하려고 한다. [그림2]는 이와 같은 방법으로 이동한 하나의 경로를 나타낸 것이다.



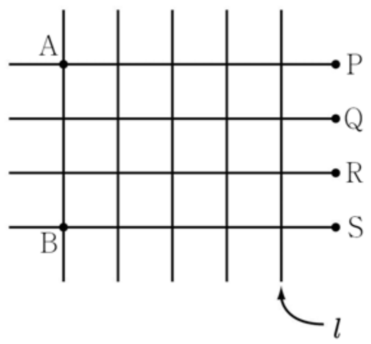
[그림 2]

이와 같이 동이가 10그루의 나무의 생태를 한 번씩 모두 조사하기 위해 경로를 정하는 방법의 수는? (단, 각 줄에 있는 나무는 한 직선 위에 있다.)[4점-1010-메가]

① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

22. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 세 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 3인 자연수는 111, 120, 210, 102, 201이다. 0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수의 개수를 구하시오.[4점-1006-평가원]

23. 그림과 같이 가로 방향 도로와 세로 방향 도로가 각각 서로 평행한 도로망이 있다. 도로망 위의 A, B지점에 숙소가 있고, P, Q, R, S지점에 관광지가 있다. 부모님을 모시고 효도관광을 온 어느 가족이 A지점에 있는 숙소를 출발하여 P, Q, R, S지점에 있는 관광지 중 두 곳을 관광한 후 B지점에 있는 숙소로 가기로 하였을 때, 이 가족이 도로망을 따라 이동할 수 있는 최단 경로의 수를 구하시오. (단, P, Q, R, S지점에서 직선도로 l 까지의 거리는 모두 같다.)[4점][2009년 11월 경기교(고2)]



중복순열

24. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 $B=\{a,\ b,\ c\}$ 로의 함수 f 가 다음 두 조건을 만족한다고 한다.

㈎ $f(1) \neq f(2)$
㈏ $\{f(x) \mid x \in A\} = B$

이때 함수 f 의 개수를 구하시오.[3점–1008–종로]

25. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 함수 $f: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)$은 짝수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)<f(3)$이다.
(다) $x>3$이면 $f(x)>f(3)$이다.

함수 f의 개수를 구하시오.[3점][2010 3월 교육청]

26. 다음은 1부터 1000가지의 자연수를 차례대로 적은 것이다.

$$123456789101112131415 \cdots 9991000$$

이때, 5가 나타나는 횟수는?[3점–1005–메가]

① 280 ② 290 ③ 300
④ 310 ⑤ 320

27. 집합 $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 중에서 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f의 개수는?
[4점–1005–중앙]

(가) $x \neq 0$이면 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $x \neq 0$이면 $f(x) \neq f(0)$이다.

① 44 ② 48 ③ 52
④ 56 ⑤ 60

28. 서로 다른 5개의 상자와 서로 다른 5개의 공이 있다. 5개의 상자 중 2개는 노란색, 2개는 빨간색, 1개는 파란색이고, 5개의 공 중 3개는 빨간색, 2개는 파란색이다.
이때, 5개의 상자에 5개의 공을 다음 조건을 모두 만족시키도록 넣는 방법의 수를 구하시오.[4점–1009–중앙]

㈎ 빨간 공은 노란 상자 또는 빨간 상자에 넣는다.
㈏ 파란 공은 노란 상자 또는 파란 상자에 넣는다.

이항정리

1. 다항식 $(2x+3)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는?[3점-1007-메가]

① 760 ② 720 ③ 680
④ 640 ⑤ 600

2. $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

[3점-1005-메가]

3. $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 상수항을 구하시오.

[3점-1006-평가원]

4. 다항식 $(x^2-1)^7$의 전개식에서 x^6의 계수를 구하시오.

[3점-1010-교육청]

5. $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^7$ 의 전개식에서 $\dfrac{1}{x^5}$ 의 계수를 구하시오.

[3점-1005-대성]

6. $(x+a)^{10}$의 전개식에서 세 항 x, x^2, x^4의 계수가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, 상수 a의 값은? (단, $a \neq 0$)

[3점-1003-교육청]

① $\dfrac{28}{27}$ ② $\dfrac{27}{26}$ ③ $\dfrac{26}{25}$
④ $\dfrac{25}{24}$ ⑤ $\dfrac{24}{23}$

7. $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

[3점-1011-대전교]

8. $\left(x-\frac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

[3점-1011-종로]

9. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$의 전개식에서 x 의 계수는?[3점-1005-비상]

① -295 ② -280 ③ -275
④ -270 ⑤ -260

10. $\sum_{k=1}^{10}\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^k$의 전개식에서 상수항을 구하시오.

[3점-1007-교육청]

11. $\left(x^2+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 상수항이 24 일 때, 상수 a 에 대하여 a^2 의 값은?[3점-1008-종로]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

12. $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 x^8의 계수를 a, $\frac{1}{x^4}$의 계수를 b 라 할 때, $a+b$의 값은?[3점-1010-종로]

① 2 ② 5 ③ 9
④ 11 ⑤ 12

13. 다항식 $\left(ax^2+\frac{b}{x}\right)^8$의 x^7의 계수가 80이고, x의 계수가 5이다. 이 때 $\frac{a}{b}$의 값을 구하시오. (단, $ab>0$)[3점–1005–종로]

14. $(1+x)^{100}$의 전개식에서 x^r과 x^{3r}의 계수가 같을 때, 자연수 r의 값은? (단, $1 \le r \le 33$)[3점–1009–종로]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

15. 다항식 $x(x+a)(x-2)^9$의 전개식에서 x^6의 계수가 0일 때, 상수 a의 값은?[3점–1005중앙]

① 32 ② 2 ③ -2
④ -8 ⑤ -32

16. $(x+2y)^5(x-2y)^5$의 전개식에서 x^6y^4의 계수를 구하시오.

[3점–1006–대성]

17. $\sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$의 값을 구하시오.

[3점–1004–교육청]

18. $\sum_{k=0}^{20} {}_{20}\mathrm{C}_k\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$의 값은?[3점–1005–대성]

① -20 ② -10 ③ 0
④ 10 ⑤ 20

19. 다항식 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.[3점-1011-중앙]

20. $\left(ax+\frac{1}{x}\right)^5=a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+\cdots+a_{11}x^{-5}$에서 $a_3=5$일 때, a_7을 구하시오. (단, a는 실수이다.)[3점-1007-종로]

21. x에 대한 다항식 $(ax-2)^5$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 1일 때, x^3의 계수는? (단, 모든 항의 계수의 합은 x, x^2, x^3, x^4, x^5의 계수와 상수항의 총합이고, a는 상수이다.) [3점-1009-중앙]

① 1020 ② 1040 ③ 1060
④ 1080 ⑤ 1100

22. 10 이하의 음이 아닌 정수 r에 대하여 함수 f를

$$f(r)={}_{10}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

이라 할 때, $2\sum_{r=0}^{10}r^2f(r)$의 값을 구하시오.[4점-1010-교육청]

23. 다음 중에서 그 값이 같은 것을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1007-종로]

<보 기>

ㄱ. $(a+b)^{10}$의 전개식에서 a^2b^8의 계수
ㄴ. 빨간 공 8개와 파란 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의 수 (단, 같은 색의 공끼리는 구별되지 않는다.)
ㄷ. 똑같은 공 11개를 A, B, C 3명이 나누어 가지는 경우의 수 (단, 공을 못 받는 사람은 없다.)

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ 모두 다르다

24. 다항식 $(x+1)^4(2x+1)^3$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.[3점-1010-비상]

25. 다항식 $(1+x)^m(1+x^2)^n$의 전개식에서 x^2의 계수가 12일 때, x의 계수의 최댓값은? (단, m, n은 자연수이다.) [3점-1008-대성]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

26. $\log_3({}_{10}\mathrm{C}_0+2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_1+2^2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2+2^3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+2^{10}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{10})$의 값은?[3점-1009-대성]

① 2 ② $10\log_3 2$ ③ 10
④ $20\log_3 2$ ⑤ 20

27. 다항식 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$에 대하여 $f(x-1)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$이 성립할 때, a_2의 값을 구하여라.[4점-1011-대성]

28. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음은 $(1+\omega)^{60}$의 전개식을 이용하여 ${}_{60}\mathrm{C}_2+{}_{60}\mathrm{C}_5+{}_{60}\mathrm{C}_8+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{59}$의 값을 구하는 과정이다.

> 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω이므로
> $(1+\omega)^{60}=\boxed{(가)}$
> 이항정리에 의하여
> $(1+\omega)^{60}=({}_{60}\mathrm{C}_0+{}_{60}\mathrm{C}_3+{}_{60}\mathrm{C}_6+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{60})$
> $+({}_{60}\mathrm{C}_1+{}_{60}\mathrm{C}_4+{}_{60}\mathrm{C}_7+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{58})\omega$
> $+({}_{60}\mathrm{C}_2+{}_{60}\mathrm{C}_5+{}_{60}\mathrm{C}_8+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{59})\omega^2$
> 여기서
> $A={}_{60}\mathrm{C}_0+{}_{60}\mathrm{C}_3+{}_{60}\mathrm{C}_6+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{60}$
> $B={}_{60}\mathrm{C}_1+{}_{60}\mathrm{C}_4+{}_{60}\mathrm{C}_7+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{58}$
> $C={}_{60}\mathrm{C}_2+{}_{60}\mathrm{C}_5+{}_{60}\mathrm{C}_8+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{59}$
> 라 하면 $A+B+C=\boxed{(나)}$ 이고
> $(1+\omega)^{60}=(A-C)+(B-C)\omega=\boxed{(가)}$
> $\therefore\ {}_{60}\mathrm{C}_2+{}_{60}\mathrm{C}_5+{}_{60}\mathrm{C}_8+\cdots+{}_{60}\mathrm{C}_{59}=\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1010-대성]

	(가)	(나)	(다)
①	1	2^{59}	$\frac{2^{59}-1}{3}$
②	1	2^{60}	$\frac{2^{60}-1}{3}$
③	1	2^{60}	$\frac{2^{60}-1}{3}$
④	2	2^{61}	$\frac{2^{61}-1}{3}$
⑤	2	2^{61}	$\frac{2^{61}-1}{3}$

29. 다음은 n 이 홀수일 때, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k({}_n\mathrm{C}_k)^2=0$ 이 성립함을 증명한 것이다.

<증 명>

$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}\boxed{\quad(가)\quad}\cdot x^{2k}$ ········· ㉠

$(1-x)^n(1+x)^n$

$=\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k\cdot x^k\right\}\left(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot x^k\right)$ ········· ㉡

$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{n-1}{2}$ 인 r 에 대하여

㉠에서 x^{2r+1} 항의 계수는 $\boxed{\quad(나)\quad}$ 이고

㉡에서 x^{2r+1}항의 계수는 $\sum_{k=0}^{2r+1}{}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k\cdot\boxed{\quad(다)\quad}$ 이다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{2r+1}{}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k\cdot\boxed{\quad(다)\quad}=\boxed{\quad(나)\quad}$ 이 성립한다.

따라서 $r=\frac{n-1}{2}$ 일 때,

$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k\cdot{}_n\mathrm{C}_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot({}_n\mathrm{C}_k)^2=0$

이므로 n 이 홀수일 때, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k({}_n\mathrm{C}_k)^2=0$ 이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[4점-1009-대성]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_n\mathrm{C}_{2k}$	0	${}_n\mathrm{C}_{2r+1-k}$
②	${}_n\mathrm{C}_{2k}$	$-{}_n\mathrm{C}_{2r+1}$	${}_k\mathrm{C}_{2r+1}$
③	${}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k$	0	${}_k\mathrm{C}_{2r+1}$
④	${}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k$	0	${}_n\mathrm{C}_{2r+1-k}$
⑤	${}_n\mathrm{C}_k\cdot(-1)^k$	$-{}_n\mathrm{C}_{2r+1}$	${}_k\mathrm{C}_{2r+1}$

중복조합

[예제 1−1] 방정식 $x+y+z=8$에 대하여 다음을 구하여라.
(1) 음이 아닌 정수해의 개수
(2) 양의 정수해의 개수

[해설] 방정식 $x+y+z=8$의 한 해를 $x=2,\ y=4,\ z=2$이라 할 때, x, y, z는 각각 2개, 4개, 2개이므로 이를 $xxyyyyzz$로 나타낼 수 있음을 이용한다.
(1) 방정식 $x+y+z=8$의 해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 8개를 택하여 만들 수 있으므로 주어진 방정식의 해의 개수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8=45$(가지)

(2) 방정식 $x+y+z=8$의 해 x, y, z가 모두 양의 정수해이므로

$x\geq 1,\ y\geq 1,\ z\geq 1$

따라서 방정식 $x+y+z=8$은 적어도 1개씩의 x, y, z가 택해지므로 택해지지 않은 개수는 $8-3=5$(개)

따라서 방정식 $x+y+z=8$의 양의 정수해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하여 만들 수 있으므로 주어진 방정식의 양의 정수해의 개수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$(개)

[예제 1−2] $(a+b+c)^4$을 전개할 때 몇 종류의 항이 생기는가?

[해설] $(a+b+c)^4$을 전개하여 생기는 모든 항은 4차식이다. 그러므로 구하는 항의 종류는 a, b, c에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 조합의 수와 같다.

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$(가지)

[예제 1−3] (1) 서로 다른 세 주머니에 서로 다른 구슬 7개를 담는 방법의 수를 구하여라.
(2) 서로 다른 세 주머니에 같은 구슬(구별이 안되는) 7개를 담는 방법의 수를 구하여라.

[해설]

(1) 중복순열이다. $\therefore\ {}_3\Pi_7=3^7$(가지)
(2) 중복조합이다. $\therefore\ {}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$(가지)

[예제 1-4] 다음 함수의 개수를 구하여라.

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$의 개수

(2) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$ 중에서 일대일함수의 개수

(3) $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, $B=\{a,\ b,\ c\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$ 중에서 A에서 B위로의 함수의 개수 즉, $f(A)=B$인 함수의 개수

(4) $A=\{a,\ b,\ c\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$ 중에서 일대일 대응 함수의 개수

(5) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$ 중에서 $a_1<a_2$이면 $f(a_1)<f(a_2)$를 만족하는 함수의 개수

(6) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{8,\ 9\}$일 때, 함수 $f:\ A\to B$ 중에서 $a_1<a_2$이면 $f(a_1)\le f(a_2)$를 만족하는 함수의 개수

[해설]

(1) 집합 B의 원소 2개를 중복을 허락하여 집합 A의 원소 3개에 연결하는 방법의 수와 같으므로, 함수의 개수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$ (개)

(2) 집합 B의 원소 4개에서 중복을 허락하지 않고 3개를 택하여 집합 A의 원소 3개에 연결하는 방법의 수와 같으므로, 구하는 일대일 함수의 개수는

$${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24(\text{개})$$

(3) 서로 다른 5개의 물건을 세 사람에게 적어도 한 개 씩은 분배하는 방법의 수와 같으므로

(1, 2, 2)

$:\ {}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\dfrac{3!}{2!}=90$

(1, 1, 3)

$:\ {}_5\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_3\times\dfrac{3!}{2!}=60$

따라서 구하는 A에서 B 위로의 함수의 수는

$$90+60=150(\text{개})$$

(4) 집합 A의 세 원소를 B의 세 원소에 일대일 대 응시키는 방법의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는 $3!=6$ (개)

(5) 오른쪽 [표-1]과 같이 집합 B의 5개의 원소에서 순서를 생각하지 않고 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{C}_3=10(\text{개})$

1	2	3	1	2	3
5	6	7	5	8	9
5	6	8	6	7	8
5	6	9	6	7	9
5	7	8	6	8	9
5	7	9	7	8	9

[표-1]

(6) 오른쪽 [표-2]와 같이 집합 B의 2개의 원소에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

1	2	3	4
8	8	8	8
8	8	8	9
8	8	9	9
8	9	9	9
9	9	9	9

[표-2]

$${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5(\text{개})$$

중복조합

(1) 갑, 을, 병에게 감 15개를 나누어 주는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 사람에게는 3개 이상씩 주고, 감은 구별하지 않는다.)

(2) ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_r$임을 이용하여 다음 중 ${}_4\mathrm{H}_0+{}_4\mathrm{H}_1+{}_4\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3+\cdots+{}_4\mathrm{H}_9$의 값과 같은 것을 고르면?

① ${}_{13}\mathrm{C}_2$ ② ${}_{13}\mathrm{C}_3$ ③ ${}_{13}\mathrm{C}_4$
④ ${}_{13}\mathrm{C}_5$ ⑤ ${}_{13}\mathrm{C}_6$

[해설]

(1) 먼저 갑, 을, 병에게 감을 3개씩 나누어 주고, 나머지 6개의 감을 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 세 사람을 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2}=28(\text{가지})$$

(2) ${}_4\mathrm{H}_0+{}_4\mathrm{H}_1+{}_4\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3+\cdots+{}_4\mathrm{H}_9$

$={}_3\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_9$

$={}_4\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_9$

$={}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_9$

$={}_6\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_9$

$\vdots$

$={}_{12}\mathrm{C}_8+{}_{12}\mathrm{C}_9$

$={}_{13}\mathrm{C}_9={}_{13}\mathrm{C}_4$

〔유제 1-1〕 배, 사과, 감을 합쳐 10개가 든 선물상자를 만들려고 한다. 어느 것도 2개씩은 넣어야 한다고 할 때 그 방법의 수를 구하여라.[1)]

〔유제 1-2〕 사과 8개와 배 6개를 4명의 어린이에게 나누어 주는 방법의 가짓수를 구하여라. (단, 사과와 배는 구별하지 않고, 1개도 주지 않는 어린이가 있어도 좋다.)[2)]

〔유제 1-3〕 15명의 대의원이 대표 한 명을 뽑으려고 한다. 세 명의 후보가 출마하였을 때, 무기명으로 투표하는 방법의 수를 구하여라. (단, 기권이나 무효는 없다.)[3)]

방정식에서 해의 개수

(1) $x+y+z+w=22$를 만족하는 양의 홀수해 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 쌍의 개수는?

① 190개 ② 200개 ③ 210개
④ 220개 ⑤ 230개

(2) 아버지가 3명의 자식들에게 모양과 크기가 같은 10개의 사과를 나누어 주려고 한다. 이때 하나도 못 받는 아이가 없도록 할 때 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

[해설]

(1) $x=2k+1,\ y=2l+1,\ z=2m+1,\ w=2n+1$

$(k,\ l,\ m,\ n$ 은 음이 아닌 정수$)$이라 놓으면

$(2k+1)+(2l+1)+(2m+1)+(2n+1)=22$

$\therefore k+l+m+n=9$

$x+y+z+w=22$의 양의 홀수해를 구하는 것은 $k+l+m+n=9$를 만족하는 음이 아닌 정수해를 구하는 것과 같다.

$k+l+m+n=9$ 를 만족하는 음이 아닌 정수해는

${}_4\mathrm{H}_9={}_{4+9-1}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2}=220(\text{개})$

(2) 3명의 자식들에게 나누어 주는 개수를 각각 $x,\ y,\ z$라 할 때

$x+y+z=10\ (x\ge1,\ y\ge1,\ z\ge1)$

$x-1=a,\ y-1=b,\ z-1=c$라 놓으면

$a\ge0,\ b\ge0,\ c\ge0,\ a+b+c=7$이므로

$${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36(\text{가지})$$

〔유제 1-3〕 $a+b+c+d=12\ (a\ge1,\ b\ge2,\ c\ge3,\ d\ge4)$를 만족하는 정수 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 쌍의 개수를 구하여라.[4)]

〔유제 1-4〕 자연수 6을 순서를 생각하여 홀수인 두 자연수의 합으로 나타내는 경우는 $1+5$, $3+3$, $5+1$의 3가지가 있다. 이와 같은 방법으로 자연수 9를 순서를 생각하여 홀수인 세 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수를 구하여라.[5)]

부등식에서 해의 개수

(1) 부등식 $x+y+z<5$를 만족시키는 양의 정수인 해의 개수를 구하여라.

(2) $a+b+c\le 4$를 만족하는 음이 아닌 정수 a, b, c의 해의 개수를 구하여라.

[해설]

(1) x, y, z가 양의 정수인 해이므로 $x+y+z\ge 3$
주어진 조건에 의하여 $3\le x+y+z<5$를 만족시킨다.
즉, $x+y+z=3$ 또는 $x+y+z=4$에 대하여 정수인 해의 개수를 구하면 된다.
(i) $x+y+z=3$에서 양의 정수인 해의 개수는 ${}_3H_0=1$
(ii) $x+y+z=4$에서 양의 정수인 해의 개수는 ${}_3H_1={}_3C_1=3$
(i), (ii)에서 구하는 해의 개수는 $1+3=4$(개)

(2) $a+b+c=4, 3, 2, 1, 0$의 해의 수의 합이므로

$${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4$$
$$={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$$
$$=1+3+6+10+15$$
$$=35(\text{개})$$

〔유제 1-5〕 다음 중 부등식 $x+y+z\le 23$을 만족하는 양의 홀수 해의 가짓수와 같은 것은?6)

① $(x+1)^{12}$에서 x^2의 계수와 같다.

② $(x+1)^{12}$에서 x^3의 계수와 같다.

③ $(x+1)^{12}+(x+1)^{11}+(x+1)^{10}+\cdots+(x+1)^2$에서 x^2의 계수와 같다.

④ $(x+1)^{12}+(x+1)^{11}+(x+1)^{10}+\cdots+(x+1)^2$에서 x^3의 계수와 같다.

⑤ ${}_{12}C_0+{}_{12}C_1+{}_{12}C_2+{}_{12}C_3+\cdots+{}_{12}C_{12}$와 같다.

〔유제 1-6〕 다음 중 부등식 $x+y+z<10$의 자연수의 해의 개수와 같은 것은?7)

① ${}_9C_2$　② ${}_9C_3$　③ ${}_9C_4$

④ ${}_{10}C_2$　⑤ ${}_{10}C_3$

함수의 개수

(1) 두 집합

$$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ \ Y=\{1,\ 2,\ 3\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to Y$의 개수를 구하여라.

$x_1\in X,\ x_2\in X$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$

(2) 두 집합 $X=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f: X\to Y$ 중에서 $f(a)\le f(b)\le f(c)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.

[해설]

(1) 조건을 만족시키는 함수의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$$

(2) 구하는 함수의 개수는 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3={}_7C_3=56$$

〔유제 1-7〕 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ 8\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 $f: A\to B$를 정의한다. 이 때 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$를 만족시키는 함수 중 치역이 공역과 일치하는 것의 개수를 구하여라.8)

[유제 1-8] **두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$에 대하여 함수 $f: X\to Y$ 중 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하여라.9)**

(가) $f(3)=8$ (나) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이다.

[유제 1-9] **집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가**

$f(1)<f(2)$, $f(3)\le f(4)\le f(5)$

를 만족하는 함수 f의 개수를 구하여라.10)

중복조합 연습문제

1. 3개의 문자 a, b, c를 중복을 허용하여 만들 수 있는 4차의 단항식의 개수를 구하여라.1)

2. 빨간색, 파란색, 노란색 공이 각각 5개, 10개, 15개가 있다. 이 중에서 6개의 공을 택하는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별되지 않는다.)2)

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

3. 10명의 선거인이 2명의 후보를 대상으로 투표를 실시하려고 한다. 무기명 투표와 같은 비밀 투표를 실시하였을 때, 나타날 수 있는 모든 경우의 수는?3)

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

4. $(a+b+c)^{10}$의 전개식에서 a, b, c 각 문자에 대해 1차 이상인 항의 개수를 구하여라.4)

5. 5개의 '+'부호와 8개의 '−'부호를 일렬로 배열하여 부호의 변화가 5회가 되도록 하는 것은 몇 가지인가?5)

① 248가지 ② 252가지 ③ 256가지
④ 260가지 ⑤ 264가지

6. 한 개의 주사위를 네 번 던져서 나온 주사위의 눈의 수를 작지 않은 순서대로 나열하여 자연수를 만들 때, 서로 다른 자연수의 개수는?6)

① 92개 ② 114개 ③ 126개
④ 144개 ⑤ 156개

7. 주사위를 5회 던질 때, k회에 나오는 눈의 숫자를 a_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$라 한다. $a_1 \le a_2 < a_3 \le a_4 < a_5$가 되는 경우의 수를 구하여라.7)

8. $2^k 2^m 2^n = 1024$를 만족시키는 자연수 k, m, n의 순서쌍 $(k,\ m,\ n)$의 개수를 구하여라.8)

9. 방정식 $x+y+z=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수가 78개일 때, 자연수 n의 값은?9)

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

10. 두 집합 $X=\{x \mid 1 \le x \le 10$ 단, x는자연수$\}$ $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 함수 $f:\ X \to Y$의 개수를 구하여라.10)

(가) 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$의 원소의 개수는2이다.
(나) $x_1 \in X$, $x_2 \in X$일 때, $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \le f(x_2)$이다.

11. 어느 음식점에서는 서로 다른 다섯 종류의 만두 중에서 중복을 허락하여 네 개씩 담아 하나의 상품으로 판매한다. 상품을 구성하는 만두의 종류와 개수에 따라 각 상품의 이름을 붙이려고 할 때, 준비해야 할 이름의 개수를 구하여라.11)

12. 1부터 5까지의 숫자가 각각 하나씩 적힌 5개의 상자가 있다. 똑같은 구슬 3개를 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라. (단, 각 상자에 들어가는 구슬의 개수에는 제한이 없다.)
12)

13. $x+y+z^2=10$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수를 구하여라.13)

14. 사과 4개, 배 5개, 귤 6개가 있다. 이 과일을 서로 다른 상자 A, B에 빈 상자가 없도록 나누어 담는 경우의 수는?[14)]

① 108 ② 124 ③ 156
④ 184 ⑤ 208

15. 10권의 책이 책꽂이에 나란히 꽂혀 있다. 이 중 서로 인접한 2권의 책은 선택되지 않도록 3권의 책을 선택하는 방법의 수를 구하여라.[15)]

16. $|x|+|y|+|z|\leq 7$을 만족시키는 정수해의 개수를 구하여라.[16)]

1) 15
배, 사과, 감의 개수를 각각 x, y, z라면 $x+y+z=10$인데 $x,\ y, z$는 모두 2 이상이어야 한다.
$\therefore x+y+z=4$를 만족하는 음이 아닌 정수의 개수와 같다.
즉, ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$

2) 13860(가지)
사과 8개를 주는 방법은 어린이 4명에게 중복을 허락하여 8 명을 선택하는 방법과 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_8$가지
또, 배 6개를 주는 방법도 마찬가지로 ${}_4\mathrm{H}_6$가지
따라서 구하는 방법의 수는
${}_4\mathrm{H}_8\times{}_4\mathrm{H}_6={}_{11}\mathrm{C}_8\times{}_9\mathrm{C}_6={}_{11}\mathrm{C}_3\times{}_9\mathrm{C}_3=13860$(가지)

3) 136(가지)
무기명 투표는 어느 대의원이 어느 후보를 뽑았는지 알 수 없으므로 무기명으로 투표하는 방법의 수는 세 명의 후보 중에서 중복을 허락하여 15개를 선택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 구하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{15}={}_{3+15-1}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_{15}={}_{17}\mathrm{C}_2=136$(가지)

4) 10
$a-1=k,\ b-2=l,\ c-3=m,\ d-4=n$라 놓으면
$k\ge 0,\ l\ge 0,\ m\ge 0,\ n\ge 0$
또 $a+b+c+d=k+1+l+2+m+3+n+4=12$에서
$k+l+m+n=2\ (k,\ l,\ m, n\ge 0)$
이것은 $k,\ l,\ m,\ n$ 네 문자에서 중복을 허락하여 두 개를 뽑는 경우의 수와 같으므로 중복조합이다.
$\therefore {}_4\mathrm{H}_2={}_{4+2-1}\mathrm{C}_2={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\cdot 4}{2}=10$

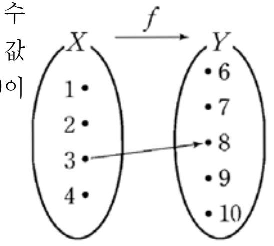
5) 10
자연수 9를 홀수인 세 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수는 등식 $x+y+z=9$를 만족하는 홀수인 세 자연수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 수와 같다. 이때,
$x=2x_1+1,\ y=2y_1+1,\ z=2z_1+1$
(단, $x_1,\ y_1,\ z_1$은 음이 아닌 정수)
로 놓으면 $x_1+y_1+z_1=3$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3=10$
[다른 풀이]
세 자연수의 합이 9가 되는 경우는
$1+3+5,\ 3+3+3,\ 7+1+1$
이고, 이들은 각각 순서를 생각하므로 구하는 경우의 수는
$3!+\dfrac{3!}{3!}+\dfrac{3!}{2!}=6+1+3=10$

6) ③
$x+y+z\le 20$을 만족하는 음이 아닌 짝수 해를 구하면 된다.
즉, $x+y+z=20,\ 18,\ 16,\ \cdots,\ 0$의 음이 아닌 짝수 해의 개수를 구하면
${}_3\mathrm{H}_{10}+{}_3\mathrm{H}_9+\cdots+{}_3\mathrm{H}_0$
$={}_{12}\mathrm{C}_{10}+{}_{11}\mathrm{C}_9+{}_{10}\mathrm{C}_8+\cdots+{}_2\mathrm{C}_0$
$={}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2$

7) ②
$x+y+z<10\ (x\ge 1,\ y\ge 1,\ z\ge 1)$에서
$x-1=a,\ y-1=b,\ z-1=c$로 놓으면
$a+b+c<7\ (a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0)$
$a+b+c=0$의 해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_0$
$a+b+c=1$의 해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1$
$a+b+c=2$의 해의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2$
$\vdots$
따라서 구하는 부등식의 해의 개수는
${}_3\mathrm{H}_0+{}_3\mathrm{H}_1+{}_3\mathrm{H}_2+\cdots+{}_3\mathrm{H}_6$
$={}_2\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_6$
$={}_3\mathrm{C}_0+{}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_6$
$={}_4\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_6$
$={}_5\mathrm{C}_2+\cdots+{}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3$

8) 21가지
주어진 조건에 의하여 B의 원소 1, 2, 3에서 각 원소를 적어도 한 개씩 포함하여 8개를 순서를 생각하지 않고 뽑으면 된다. 즉, 1, 2, 3을 미리 한 개씩 뽑아 놓고 나머지 5개를 중복조합으로 뽑는다.
$\therefore {}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$(가지)

9) 정답 ①
오른쪽 그림에서 $f(1),\ f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 6 또는 7 또는 8, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 8 또는 9 또는 10이므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_3\mathrm{H}_2\times 3={}_4\mathrm{C}_2\times 3=18$



10) 5040
$f(1)<f(2)$ 를 만족하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_2=15$
$f(3)\le f(4)\le f(5)$를 만족하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$
$f(6)$의 값을 정하는 경우는 6가지
따라서 구하는 함수 f의 개수는 $15\times 56\times 6=5040$(개)

1) 15(개)
3개의 문자 $a,\ b,\ c$에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경오의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$(개)

2) ②
서로 다른 세 종류의 공에서 6개의 공을 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_6={}_{3+6-1}\mathrm{C}_6=28$
그런데 빨간색 공을 6개 택하는 경우는 일어나지 않으므로 구하는 경우의 수는 $28-1=27$

3) ②
두 명의 후보를 A, B라 하자. 10명의 선거인이 두 후보 A, B를 대상으로 무기명 투표를 하는 것은 두 문자 A, B에서 중복을 허용하여 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_{10}={}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_{10}={}_{11}\mathrm{C}_1=11$(가지)

4) 36(개)
각 문자에 대해 1차 이상인 항은 $x+y+z=10$을 만족하는 양의 정수해의 개수와 같다.
즉 $x, y, z\ge 1$이므로
$x-1=x_1,\ y-1=y_1,\ z-1=z_1$에서
$x_1+y_1+z_1=7$인 음이 아닌 정수해와 같게 된다.
$\therefore {}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$(개)

5) 252(가지)
$+-+-+-$ 또는 $-+-+-+$와 같이 $+,\ -$를 늘어놓으면 부호의 변화가 5회가 된다. 따라서 $+$의 세 곳에 남은 $+$부호 2개를 덧붙이고, $-$의 세 곳에 남은 $-$부호 5개를 덧붙이면 부호의 변화는 5

회만 된다.
그러므로 구하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2 \times {}_3\mathrm{H}_5 \times 2 = {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_7\mathrm{C}_5 \times 2 = 252$(가지)

6) 126(개)
구하는 자연수의 개수는 주사위 눈의 수 6개 중에서 중복을 허용하여 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_4 = {}_{6+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_9\mathrm{C}_4 = 126$(개)

7) 56(가지)
$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$의 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 조합이므로 ${}_6\mathrm{H}_5 = {}_{10}\mathrm{C}_5$(가지)
$a \le a_2 = a_3 \le a_4 \le a_5$인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_4$
$a \le a_2 \le a_3 \le a_4 = a_5$인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_4$
$a \le a_2 = a_3 \le a_4 = a_5$인 경우의 수는 ${}_6\mathrm{H}_3$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{H}_5 - ({}_6\mathrm{H}_4 + {}_6\mathrm{H}_4 - {}_6\mathrm{H}_3)$(가지)

8) 36(개)
$2^{k+m+n} = 1024 = 2^{10}$에서 $k+m+n=10$을 만족하는 자연수 k, m, n의 순서쌍의 개수를 구하면 된다.
$k = k'+1$, $m = m'+1$, $n = n'+1$이라고 하면
$k+m+n=10$의 양의 정수해의 개수는 $k'+m'+n'=7$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_7 = {}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{9\times 8}{2} = 36$(개)

9) ⑤
방정식 $x+y+z=n$의 해는 서로 다른 3개의 문자 x, y, z에서 n개를 택하여 만들 수 있으므로 주어진 방정식의 해의 개수는 서로 다른 3개에서 n개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_n$과 같다.
이때 방정식의 해의 개수가 78개이므로
${}_3\mathrm{H}_n = {}_{2+n}\mathrm{C}_n = {}_{2+n}\mathrm{C}_2 = 78$
$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2} = 78$
$n^2+3n-154=0$, $(n+14)(n-11)=0$
$\therefore\ n = 11$ ($\because$ n은 자연수)

10) 90(개)
조건 (가)에서 치역의 원소가 2개이므로 집합 Y의 원소에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$개
조건 (나)를 만족시키는 함수의 개수는 치역의 원소 2개에서 중복을 허락하여 10개를 택하는 중복조합의 수에서 2를 뺀 것과 같으므로
${}_2\mathrm{H}_{10} - 2 = {}_{2+10-1}\mathrm{C}_{10} - 2 = {}_{11}\mathrm{C}_{10} - 2 = {}_{11}\mathrm{C}_1 - 2 = 9$개
따라서 구하는 함수의 개수는 $10 \cdot 9 = 90$개

11) 80(가지)
상품에 들어가는 만두의 순서는 고려하지 않아도 되므로 상품을 만드는 방법의 수는 서로 다른 다섯 종류의 만두에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수이다.
$\therefore\ {}_5\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_4 = 70$(가지)

12) 35(가지)
각 상자에 들어갈 구슬의 개수를 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하면 구하는 방법의 수는 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=3$의 음이 아닌 정수해의 개수이므로 5개의 상자에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수이다.
$\therefore\ {}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$(가지)

13) 30(가지)
(i) $z=0$일 때, $x+y=10$의 음이 아닌 정수해의 개수
${}_2\mathrm{H}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_{10} = 11$(가지)
(ii) $z=1$일 때, $x+y=9$의 음이 아닌 정수해의 개수
${}_2\mathrm{H}_9 = {}_{10}\mathrm{C}_9 = 10$(가지)
(iii) $z=2$일 때, $x+y=6$의 음이 아닌 정수해의 개수
${}_2\mathrm{H}_6 = {}_7\mathrm{C}_6 = 7$(가지)
(iv) $z=3$일 때, $x+y=1$의 음이 아닌 정수해의 개수
${}_2\mathrm{H}_1 = {}_2\mathrm{C}_1 = 2$(가지)
(i)~(iv)에 의해 구하는 정수해의 총 개수는
$11+10+7+2=30$(가지)

14) ⑤
사과 4개를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는
${}_2\mathrm{H}_4 = {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = 5$
마찬가지로, 배 5개, 귤 6개를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{H}_5 = {}_{2+5-1}\mathrm{C}_5 = 6$, ${}_2\mathrm{H}_6 = {}_{2+6-1}\mathrm{C}_6 = 7$
따라서 사과 4개, 배 5개, 귤 6개를 두 상자 A, B에 나누어 담는 경우의 수는 $5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$
이때, 빈 상자가 생기는 경우 2가지를 빼야 하므로 구하는 경우의 수는 $210-2=208$

15) 56
선택한 책을 ○, 선택하지 않은 책을 ×로 나타내면 3권을 선택한 결과는

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
×	×	○	×	×	○	×	×	○	×

와 같이 ○○○×××××××를 나열하는 순열로 ○이 사이에 반드시 ×가 존재하는 것이다.
이러한 조합의 수는 다음 그림의 4개의 빈 칸 A, B, C, D에 17개의 ×를 넣되 B, C에는 적어도 한 개 이상 들어가도록 넣는 방법의 수와 같다.

A	○	B	○	C	○	D

A, B, C, D에 각각 x, y, z, w개의 책을 넣는다면 구하는 경우의 수는
$x+y+z+w=7$ $(x \ge 0,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 0)$
의 정수해의 개수와 같고 $y' = y-1$, $z' = z-1$이라고 하면
$x+y'+z'+w=5$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같다.
따라서 구하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{H}_5 = {}_{4+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

16) 575
$|x| = x_1$, $|y| = x_2$, $|z| = x_3$라고 하면 주어진 부등식은
$x_1+x_2+x_3 \le 7$의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 문제로 바뀐다. 만약 $(a,\ b,\ c)$가 $|x|+|y|+|z| \le 7$의 해라 하면
$(\pm a,\ \pm b,\ \pm c)$도 주어진 부등식의 해가 된다.
(i) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$인 경우 : 1개
(ii) x_1, x_2, x_3 중 2개가 0인 경우
예를 들어 $x_2 = x_3 = 0$이라고 하자. 이 때, 부등식은 $|x| \le 7$이므로 구하는 해는 $x = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots,\ \pm 7$의 14가지가 가능하고 x_1, x_2, x_3 중에 2가지가 0인 경우는 총 3가지가 있으므로 이 경우의 해는 $14 \times 3 = 42$(개)이다.
(iii) x_1, x_2, x_3 중 1개가 0인 경우
예를 들어 $x_3 = 0$이라고 하자. 이 때 부등식은
$x_1 + x_2 \le 7$ (x_1, x_2는 자연수)이 된다.
$X = x_1 - 1$, $Y = x_2 - 1$, $Z = 7 - x_1 - x_2$라고 하면
$X+Y+Z=5$ (X, Y, Z는 음이 아닌 정수)
이 경우의 해는 ${}_{5+3-1}\mathrm{C}_{3-1} = 21$(개)이다.
따라서 1개가 0인 경우의 해는 $4 \times 3 \times 21 = 252$(개)이다.

(iv) x_1, x_2, x_3이 모두 0이 아닌 경우

$X=x_1-1$, $Y=x_2-1$, $Z=x_3-1$, $W=7-x_1-x_2-x_3$

라고

하면 $X+Y+Z+W=4$ (X, Y, Z, W는 음이 아닌 정수)

이 경우의 해는 ${}_{4+4-1}\mathrm{C}_{4-1}=35$(개)이다.

따라서 x_1, x_2, x_3가 모두 0이 아닌 경우의 해는 $8\times35=280$ (개)이다.

(i)~(iv)에 의하여 구하는 해의 개수는

$1+42+252+280=575$(개)

확률의 뜻과 활용

1. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?[2점−1007−교육청]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

2. 두 사건 A와 B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{3}{5}$일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?[3점−1007−종로]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1

3. 표본공간 S의 두 사건 A와 B는 서로 배반이고,

$$A\cup B=S,\quad \mathrm{P}(A\cap B)=3\mathrm{P}(A)-2\mathrm{P}(B)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?[3점−1004−대성]

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{5}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{5}$

4. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{11}{40}$$

일 때, $|\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)|$의 값은?[3점−1010−메가]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{10}$　④ $\frac{1}{15}$　⑤ $\frac{1}{20}$

5. 표본공간 S와 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{2}{5},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{9}{10}$$

가 성립할 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?[3점−1008−종로]

① $\frac{1}{20}$　② $\frac{1}{10}$　③ $\frac{3}{20}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{4}$

6. 네 수 1, 2, 3, 4에서 중복을 허락하여 차례로 한 개씩 뽑은 세 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+bc$가 짝수일 확률은? [3점−1008−중앙]

① $\frac{3}{8}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{8}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{7}{8}$

7. 1, 2, 2, 3, 3, 3의 6개의 숫자가 각각 1개씩 적힌 서로 다른 6장의 카드에서 동시에 2장을 뽑을 때, 두 카드에 적힌 숫자의 합이 홀수가 될 확률은?[3점-1010-중앙]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$
④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

8. 남자 탁구 선수 4명과 여자 탁구 선수 4명이 참가한 탁구 시합에서 임의로 2명씩 4개의 조를 만들 때, 남자 1명과 여자 1명으로 이루어진 조가 2개일 확률은?[3점-2010-대수능]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{18}{35}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{24}{35}$ ⑤ $\frac{27}{35}$

9. 어느 디자인 공모 대회에서 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가 각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은?

[3점-2010-대수능]

항목 \ 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사 위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{11}{36}$ ③ $\frac{5}{18}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

10. 6개의 숫자 6, 6, 6, 7, 7, 8 을 일렬로 나열할 때, 양쪽 끝에 있는 두 수의 곱이 짝수일 확률은?[3점-1010-대성]

① $\frac{29}{30}$ ② $\frac{14}{15}$ ③ $\frac{9}{10}$
④ $\frac{13}{15}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

11. 10개의 문자 A, A, A, A, B, B, B, B, B, B를 일렬로 나열할 때, A끼리는 어느 두 개도 서로 이웃하지 않을 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점-1011-대성]

12. 주사위를 3개 던져서 나온 눈의 수 중에서 최댓값이 5인 사건을 A, 최솟값이 3인 사건 B라 할 때, 확률 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?
[3점-1007-종로]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{18}$
④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{36}$

13. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 수를 각각 m, n이라 할 때, $m+n$이 홀수일 확률은?
[3점–1011–중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{5}{9}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

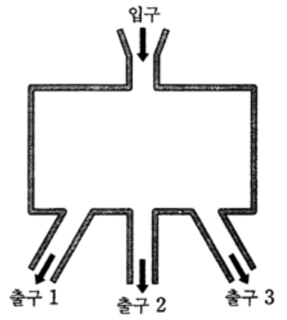
14. 주머니 속에 검은 공 3개, 흰 공 5개가 들어 있다. 갑, 을, 병 세 사람이 이 순서대로 공을 하나씩 꺼낼 때, 적어도 한 사람은 검을 공을 꺼낼 확률은? (단, 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않는다.)
[3점–1010–종로]

① $\frac{5}{7}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{14}$
④ $\frac{23}{28}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

15. 5인승 승용차에 운전자를 포함한 4명이 타고 있었다. 휴게소에서 1명이 더 탑승하려고 하는데 운전자는 그대로 운전을 계속하고 나머지 4명은 임의대로 앉는다고 한다. 처음부터 탑승했던 사람 중 운전자를 제외한 3명이 모두 이전 좌석과 다른 좌석에 앉게 될 확률은?[4점–1009–종로]

① $\frac{7}{24}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{13}{24}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{17}{24}$

16. 그림과 같은 유리관의 입구로 한 개의 공을 넣으면 반드시 세 출구 중 어느 하나로 빠져나가고 각 출구로 빠져나갈 확률은 모두 같다고 한다. 이 유리관의 입구로 서로 다른 네 개의 공을 차례로 넣을 때, 출구 1로 적어도 하나의 공이 빠져나가고, 또 출구 3으로 적어도 하나의 공이 빠져나갈 확률은?[4점–1010–종로]



① $\frac{31}{64}$ ② $\frac{33}{64}$ ③ $\frac{48}{81}$
④ $\frac{50}{81}$ ⑤ $\frac{52}{81}$

17. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑을 때 나오는 세 수 중 가장 큰 수가 홀수일 확률은?[3점–1004–대성]

① $\frac{1}{56}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$
④ $\frac{15}{56}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

18. 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나온 수를 차례로 a, b, c라 하자. 이 때, 함수 $f(x)=ax^2+bx-c$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나고 꼭짓점의 x좌표가 -1이 될 확률은?[2점–1004–교육청]

① $\frac{1}{216}$ ② $\frac{1}{108}$ ③ $\frac{1}{72}$
④ $\frac{1}{54}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

19. 14명의 학생이 특별활동 시간에 연주할 악기를 다음과 같이 하나씩 선택하였다.

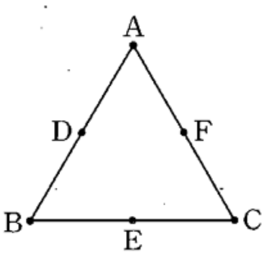
피아노	바이올린	첼로
3명	5명	6명

14명의 학생 중에서 임의로 뽑은 3명이 선택한 악기가 모두 같을 때, 그 악기가 피아노이거나 첼로일 확률은?[3점–1006–평가원]

① $\frac{13}{31}$ ② $\frac{15}{31}$ ③ $\frac{17}{31}$

④ $\frac{19}{31}$ ⑤ $\frac{21}{31}$

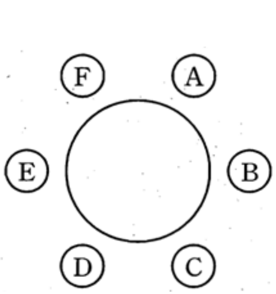
20. 그림은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다. 이 정삼각형의 꼭짓점 A, B, C와 각 변의 중점 D, E, F 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 점 사이의 거리가 1 이하일 확률은?[3점–1007–메가]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

21. 그림과 같이 원탁 둘레에 있는 6개의 의자에 6명의 학생 A, B, C, D, E, F가 앉아 있다. 이 학생들은 선생님이 "결정"을 외치는 순간 그 자리에서 일어서거나 그대로 앉아 있을 수 있다. 이때, 각 학생이 그 자리에서 일어설 확률과 그대로 앉아 있을 확률은 모두 $\frac{1}{2}$로 같고, 각 학생들이 일어서는 사건은 서로 독립이다. 선생님이 "결정"을 한 번 외쳤을 때, 6명 중 서로 이웃하지 않은 2명만 일어설 확률은?[3점–1009–중앙]



① $\frac{9}{64}$ ② $\frac{5}{32}$ ③ $\frac{11}{64}$

④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{13}{64}$

22. 경민, 동선, 중섭 세 사람이 모여서 두 사람씩 게임을 하는데 모든 상대방과 각각 한 번씩 게임을 하는 것을 한번의 “라운드”라고 하고, 한번의 “라운드”에서 2승을 하는 사람이 우승자로 해외여행권을 갖기로 하였다. 경민이 동선을 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 동선이 중섭을 이길 확률과 중섭이 경민을 이길 확률은 모두 $\frac{1}{3}$ 이라고 한다. 첫 번째 “라운드”에서 우승자가 결정되지 않고, 두 번째 “라운드”에서 경미이가 해외여행권을 갖게 될 확률은? (단, 비기는 경우는 없고, 첫 번째 “라운드”의 결과는 두 번째 “라운드”에 반영되지 않는다.)[3점−1008−종로]

① $\frac{5}{54}$ ② $\frac{7}{54}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{11}{54}$ ⑤ $\frac{13}{54}$

23. 1부터 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 20개의 공이 상자에 들어 있다. 이 상자에서 3개의 공을 꺼낼 때, 3개의 공에 적힌 숫자 중 어느 두 수도 연속되지 않을 확률은?[3점−1008−대성]

① $\frac{48}{95}$ ② $\frac{53}{95}$ ③ $\frac{59}{95}$
④ $\frac{64}{95}$ ⑤ $\frac{68}{95}$

24. 세 개의 주머니 A, B, C에 크기와 모양이 같은 구슬이 다음과 같이 들어 있다.

A 주머니 : 흰 구슬 2개
B 주머니 : 파란 구슬 3개
C 주머니 : 흰 구슬 1개, 파란 구슬 1개

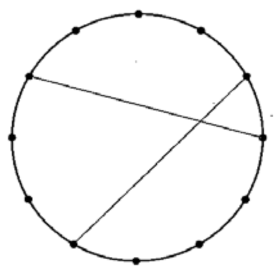
세 개의 주머니 A, B, C에서 한 개의 주머니를 임의로 택하여 한 개의 구슬을 꺼내었더니 흰 구슬이 나왔다.
이때 이 흰 구슬이 A주머니에서 나왔을 확률은? (단, 세 개의 주머니 A, B, C 중 한 개의 주머니를 택할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$ 이다.)
[3점−1010−중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

25. 한 개의 주사위를 10번 던질 때, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6과 같이 1의 눈이 다섯 번 나타나고 2, 3, 4, 5, 6의 눈의 한 번씩만 나타날 확률은 $\frac{a}{2^5 \times 3^7}$ 이다. 자연수 a의 값은?[3점−1009−대성]

① 35 ② 37 ③ 41
④ 43 ⑤ 47

26. 그림과 같이 원 위에 12개의 점이 있다. 이 12개의 점 중에서 임의로 서로 다른 4개의 점을 선택하여 2개씩 짝을 지어 선분으로 이을 때, 두 선분이 원의 내부에서 서로 만날 확률은?[3점−1007−메가]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$
③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

27. 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 눈의 수의 합이 4 이하일 확률은?[3점−1011−대전교]

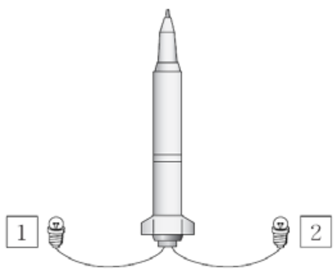
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

28. A와 B, B와 C, C와 A가 앞뒤로 적혀 있는 3장의 카드가 있다. 3장의 카드의 각 면을 펼쳐 나온 문자 중 2장의 카드의 문자가 같으면 갑이 이기고, 문자가 모두 다르면 을이 이기는 게임을 한다. 이 게임에서 갑이 이길 확률은?[3점-1009-종로]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

29. 그림과 같이 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$의 번호가 붙은 2개의 전구에 전선으로 연결된 장난감 로켓이 있다. 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나오면 전구 $\boxed{1}$에 불이 켜지고, 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오면 전구 $\boxed{2}$에 불이 켜진다. 한 번 불이 켜진 전구는 꺼지지 않고, 2개의 전구에 모두 불이 켜지면 장난감 로켓이 발사된다고 한다. 또한, 장난감 로켓이 발사되면 주사위를 더 이상 던지지 않는다고 한다. 주사위를 네 번째 던졌을 때 장난감 로켓이 발사될 확률은?[3점-1007-대성]



① $\frac{10}{81}$ ② $\frac{11}{81}$ ③ $\frac{4}{27}$

④ $\frac{13}{81}$ ⑤ $\frac{14}{81}$

30. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10 개의 공 중에서 서로 다른 3 개를 임의로 꺼내어 작은 수부터 차례로 나열할 때, 세 수가 등차수열을 이룰 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)[3점-1006-대성]

31. 학생 A의 주머니에는 흰 구슬 2개와 빨간 구슬 3개가 들어 있고, 학생 B의 주머니에는 흰 구슬 3개와 빨간 구슬 2개가 들어 있다. 학생 A부터 시작하여 A와 B가 교대로 자신의 주머니에서 구슬 1개씩 꺼내어 먼저 흰 구슬을 꺼내는 사람이 이기는 것으로 한다. 학생 A가 이길 확률은? (단, 모든 구슬의 크기와 모양은 같고, 한 번 꺼낸 구슬은 다시 주머니에 넣지 않는다.)[3점-1007-교육청]

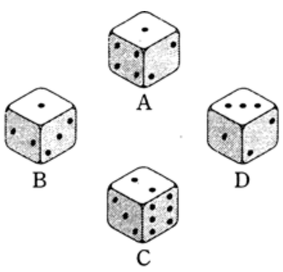
① $\frac{21}{50}$ ② $\frac{12}{25}$ ③ $\frac{27}{50}$

④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{33}{50}$

32. A, B 두 사람이 탁구 시합을 할 때, 한 사람이 먼저 세 세트를 이기거나 연속하여 두 세트를 이기면 승리하기로 한다. 각 세트에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고, B가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 첫 세트에서 A가 이겼을 때, 이 시합에서 A가 승리할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점-1006-평가원]

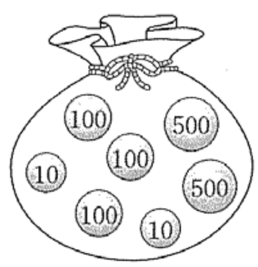
33. 서로 다른 주사위 A, B, C, D를 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b, c, d라 할 때, $a+b+c+d=7$이 될 확률은 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.[3점-1011-종로]



34. 두 농구 선수 갑과 을의 자유투 성공률은 각각 80%, 60%이다. 이 두 선수가 각각 한 번씩 자유투를 할 때, 적어도 한 명이 자유투를 성공할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-중앙]

35. 50원, 100원, 500원짜리 동전이 각각 3개씩 모두 9개가 들어있는 지갑에서 동전 3개를 임의로 꺼낼 때, 꺼낸 모든 동전 금액의 합이 250원 이상일 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1004-교육청]

36. 오른쪽 그림과 같이 주머니에 10원짜리 동전 2개, 100원짜리 동전 3개, 500원짜리 동전 2개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 동전을 꺼낼 때, 나오는 동전의 금액의 합이 300원 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[3점-1009-대성]

37. 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나오는 눈의 수를 십의 자리, 두 번째 나오는 눈의 수를 일의 자리로 하여 두 자리의 자연수를 만들려고 한다. 만들어질 두 자리의 자연수 중에서 일의 자리와 십의 자리 모두에 2와 3이 없는 수가 만들어질 확률이 $\frac{p}{q}$ 이다. 이때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점–1010–중앙]

38. 네 팀 A, B, C, D중에서 A팀이 한 경기에서 상대팀을 이길 확률은 $\frac{2}{3}$, B팀이 한 경기에서 상대팀을 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이라 한다. 먼저 추첨을 통해 두 팀씩 두 조로 나누어 준결승전을 치른 뒤 이긴 팀은 결승전에 진출한다. A팀과 B팀 모두 결승에 오를 확률이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점–1007–대성]

① 30　② 31　③ 32
④ 33　⑤ 34

39. 임의의 두 정수 a, b 가 $|a|<4$, $|b|<4$ 일 때, 삼차방정식 $x(x^2+ax+b)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가질 확률은?

[4점–1006–종로]

① $\frac{25}{49}$　② $\frac{26}{49}$　③ $\frac{27}{49}$
④ $\frac{4}{7}$　⑤ $\frac{29}{49}$

40. A, B, C 세 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재할 확률은?

[4점–1004–종로]

① $\frac{199}{216}$　② $\frac{25}{27}$　③ $\frac{67}{72}$
④ $\frac{101}{108}$　⑤ $\frac{203}{216}$

41. 두 사건 A, B가 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)=k-\frac{1}{4}$ 이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[4점–1004–교육청]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{5}{8}$　③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{7}{8}$　⑤ 1

42. 표본공간 S 의 두 사건 A, B 는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\frac{5}{6}$$

를 만족시킨다. $\mathrm{P}(A)$ 와 $\mathrm{P}(B)$ 가 이차방정식 $ax^2-bx+1=0$의 두 근일 때, 두 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?[4점–1006–대성]

① 18　② 24　③ 30
④ 36　⑤ 42

43. 주머니 속에 크기는 모두 같고, 색깔은 모두 다른 5개의 구슬이 들어 있다. 이 주머니에서 한 개의 구슬을 임의로 꺼내어 그 색을 확인하고 다시 주머니에 넣는다. 이 시행을 5회 반복했을 때, 꺼낸 구슬의 색이 두 가지만 나올 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점 −1010−메가]

44. 두 개의 주사위를 던져서 나온 두 눈의 수의 곱이 홀수이면 3개의 동전을 던지고, 짝수이면 4개의 동전을 던지는 시행을 한 번 할 때, 앞면이 나온 동전이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)[4점 −1010−비상]

45. 과자 봉지 안에는 서로 다른 세 종류의 스티커 중 어느 하나가 들어 있다고 한다. 이 과자를 하나씩 구입하여 세 종류의 스티커를 모두 모으면 장난감을 준다고 할 때, 하나씩 모두 6개의 과자를 구입한 후 처음으로 장난감을 받을 확률은? (단, 과자 봉지에서 세 종류의 스티커가 나올 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.)[4점 −1008−대성]

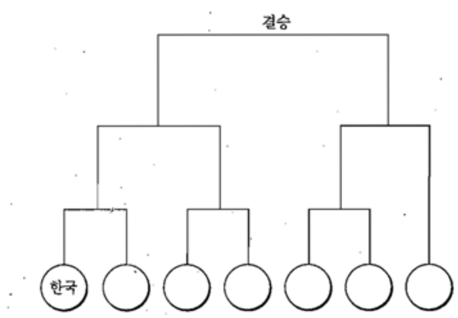
① $\frac{7}{81}$ ② $\frac{10}{81}$ ③ $\frac{13}{81}$
④ $\frac{16}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$

46. 다음과 같은 세 가지 규칙을 따르는 게임이 있다.

(가) k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)번째 시행에서는 k개의 동전을 동시에 던진다.
(나) 짝수 번째 시행에서는 앞면이 홀수 개 나올 때만 상품을 받는다.
(다) 홀수 번째 시행에서는 앞면이 나오지 않거나 앞면이 짝수 개 나올 때만 상품을 받는다.

이 동전을 던지는 시행을 1번째부터 5번째까지 연속으로 실시하여 5번 모두 상품을 받을 확률이 $\frac{q}{p}$일 때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점−1009−중앙]

47. 한국, 북한 등 7 개 나라가 참가하는 국제 축구 대회에서 그림과 같이 토너먼트 방식으로 축구시합을 하고자 한다.



그림과 같이 한국이 먼저 배정되어 있고, 나머지 6개 나라를 추첨으로 배정하여 시합을 할 때, 한국과 북한이 시합을 하게 될 확률은? (단, 각 위치에 배정될 확률은 같으며, 각 팀이 시합을 하여 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 질 확률도 $\frac{1}{2}$이다.)[4점−1006−종로]

① $\frac{5}{24}$ ② $\frac{13}{48}$ ③ $\frac{7}{24}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{17}{48}$

48. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고, 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1009–**평가원**]

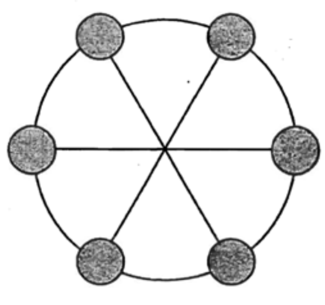
49. 한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?[4점–2010–**대수능**]

11	12	13

21	22	23

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{20}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

50. 오른쪽 그림과 같이 큰 원 위에 6개의 동일한 크기의 작은 원이 일정한 간격으로 배열되어 있고, 마주 보고 있는 작은 원끼리는 선분으로 연결되어 있다. 6개의 작은 원 안에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수를 임의로 하나씩 써 넣을 때, 선분으로 연결된 두 작은 원 안에 써 넣은 두 수의 합이 모두 같게 될 확률은?
[4점–1006–**대성**]



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{1}{10}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{15}$

51. 어느 인터넷 사이트에서 회원을 대상으로 행운권 추첨 행사를 하고 있다. 행운권이 당첨될 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 당첨되는 경우에는 회원 점수가 5점, 당첨되지 않는 경우에는 1점 올라간다. 행운권 추첨에 4회 참여하여 회원 점수가 16점 올라갈 확률은? (단, 행운권을 추첨하는 시행은 서로 독립이다.)[3점–1009–**평가원**]

① $\frac{8}{81}$ ② $\frac{10}{81}$ ③ $\frac{4}{27}$
④ $\frac{14}{81}$ ⑤ $\frac{16}{81}$

52. 52.어떤 제품을 생산하는 세 공장 A, B, C가 있다. 공장 A에서 생산한 제품의 불량률은 2%이고, 공장 B, C에서 생산한 제품의 불량률은 각각 1%이다. 세 공장 중 임의로 한 공장을 선택하고, 그 공장에서 생산한 제품 3개를 임의추출하여 조사할 때, 2개가 불량품일 확률을 p라 하자. $10^6 p$의 값을 구하시오.
[4점–1009–**평가원**]

53. 어느 여객선의 좌석이 A구역에 2개, B구역에 1개, C구역에 1개 남아 있다. 남아 있는 좌석을 남자 승객 2명과 여자 승객 2명에게 임의로 배정할 때, 남자 승객 2명이 모두 A구역에 배정될 확률을 p라 하자. $120p$의 값을 구하시오.[4점–1009–**평가원**]

54. 다섯 개의 숫자 $0, 1, 2, 3, 4$를 중복 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수를 $a_1 a_2 a_3 a_4$라 한다. 예를 들면, 1230인 경우 $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 0$이다. 이와 같이 네 자리 자연수 $a_1 a_2 a_3 a_4$가 $a_1 < a_2 < a_3,\ a_3 > a_4$를 만족할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점–1007–교육청]

55. 빨간색 공 1개, 노란색 공 2개, 파란색 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인한 후, 그 공을 주머니에 다시 넣는다. 이 시행을 6번 할 때, 빨간색 공 1번, 노란색 공 2번, 파란색 공 3번이 뽑힐 확률은? (단, 모든 공의 크기와 모양은 같다.)[4점–1011–대전교]

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{5}{36}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{7}{36}$

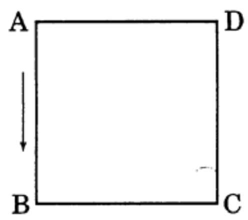
56. 주머니 속에 빨간색 구슬 3개, 노란색 구슬 2개, 파란색 구슬 1개가 들어있다. 이 주머니에서 구슬을 임의로 한 개를 꺼내어 색깔을 확인한 후 다시 넣는다. 색깔이 빨간색, 노란색, 파란색이면 각각 1, 2, 3점의 점수를 얻는다. 이 시행을 3번 할 때 얻은 점수의 합이 5점일 확률은?[3점–1011–대전교]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

57. 철수는 3개의 예선문제와 결과에 따라 1개의 찬스문제가 주어지는 퀴즈대회에 참가하는데, 찬스문제는 예선문제를 2개 맞히고 1개 틀린 경우만 주어진다. 3개의 예선문제를 모두 맞히거나 찬스문제를 맞혀야 예선을 통과한다. 각각의 예선문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{3}$이고, 찬스문제를 맞힐 확률이 $\frac{1}{4}$일 때, 예선을 통과할 확률은?[3점–1007–교육청]

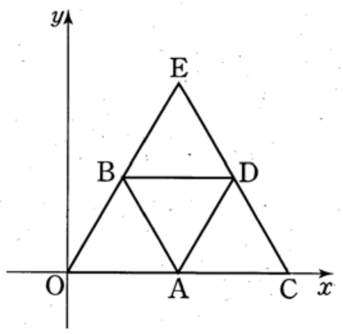
① $\frac{5}{54}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{7}{54}$
④ $\frac{4}{27}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

58. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 k이면 점 P는 정사각형 ABCD의 변을 따라 시계 반대 방향으로 k만큼 이동한다. 예를 들어 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3이면 꼭짓점 A에서 출발한 점 P는 시계 반대 방향으로 3만큼 이동하여 점 D에 오고, 다시 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 2이면 시계 반대 방향으로 2만큼 이동하여 점 B에 온다. 한 개의 주사위를 던지는 시행을 3번 할 때, 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 n번째($n=1,\ 2,\ 3$) 시행 후 다시 꼭짓점 A에 오는 사건을 X_n이라 하자.



$\mathrm{P}(X_1)+\mathrm{P}(X_1 \cap X_2)+\mathrm{P}(X_1 \cap X_2 \cap X_3) = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)[4점–1010–대성]

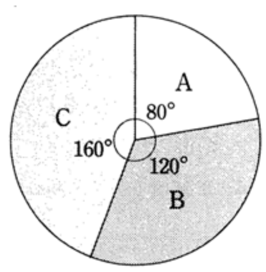
59. 좌표평면 위에 한 변의 길이가 1인 정삼각형 4개를 그림과 같이 겹치지 않게 붙여 놓았다. 주사위 1개를 던져 나온 눈의 수를 k라 할 때, 동점 P가 x축 위에 있으면 x축의 양의 방향을 기준선으로 하여 시계반대방향으로 $(60k)^\circ$ 의 방향에 있는 꼭짓점으로 1만큼 움직인다. 또한, 동점 P가 x축 위에 있지 않으면 동점 P를 지나면서 x축과 평행한 직선을 그어, 그 직선의 양의 방향으로 1만큼 움직인다. 이때, 동점 P가 이동될 꼭짓점이 없으면 그 꼭짓점에서 움직이지 않고 다시 주사위를 던진다. 예를 들어 동점 P가 점 B에 있을 때, 1의 눈이 동점 P는 점 E로 움직인다. 동점 P가 원점 O를 출발점으로 하여 주사위 1개를 2회 던진 후 동점 P가 꼭짓점 A에 있을 확률이 $\frac{a}{b}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a,b는 서로소인 자연수이다.)[4점-1008-중앙]



60. 흰 공 4개와 검은 공 $n\,(n \geq 3)$개가 같이 들어 있는 주머니에서 A 가 먼저 2 개의 공을 꺼낸 다음 B 가 2 개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공이 많은 사람이 이기는 것으로 한다. A가 이길 확률을 a, A가 1개의 흰 공을 꺼내어 이길 확률을 b 라 할 때, $a=2b$ 라고 한다. 이때 n 의 값은? (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)[4점-1008-종로]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

61. 세 개의 주머니 A, B, C가 있다. A 주머니에는 흰 공 1개와 검은 공 3개가 들어 있고, B 주머니에는 흰 공 2개와 검은 공 2개, C 주머니에는 흰 공 3개와 검은 공 1개가 들어 있다. 그림과 같이 중심각의 크기가 80°, 120°, 160° 인 세 개의 부채꼴 모양의 영역 A, B, C로 이루어진 원판을 회전시킨 후 다트를 한 개 던져서 다트가 꽂힌 영역과 같은 이름의 주머니에서 한 개의 공을 꺼내었더니 흰 공이 나왔다. 이때, 다트가 A 영역에 꽂혔을 확률은? (단, 다트가 꽂히지 않거나 영역의 경계선에 꽂히는 경우는 없고, 공의 크기와 모양은 구분하지 않는다.)[4점-1010-비상]



① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{2}{13}$
④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{2}{7}$

62. 어느 지역에서 발생한 식중독과 음식 A의 연관성을 알아보기 위해 300명을 조사하여 다음 결과를 얻었다.

(단위:명)

	식중독에 걸린 사람	식중독에 걸리지 않은 사람	합계
A를 먹은 사람	22	28	50
A를 먹지 않은 사람	24	226	250
합계	46	254	300

조사 대상 300명 중에서 임의로 선택된 사람이 A르 ㄹ먹은 사람일 때 이 사라이 식중독에 걸렸을 확률을 p_1, A를 먹지 않은 사람일 때 이 사람이 식중독에 걸렸을 확률을 p_2라고 하자. $\frac{p_1}{p_2}$의 값은?

[4점-1009-평가원]

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{25}{6}$ ③ $\frac{55}{12}$
④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

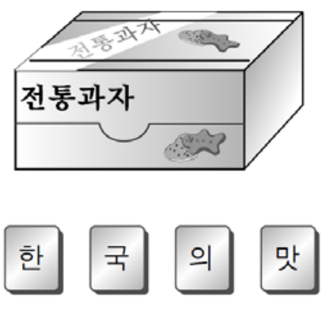
63. A, B 두 학생이 다음과 같은 규칙으로 가위바위보를 한다고 한다.

> <A학생>
> (가) 첫 번째 게임에는 가위, 바위, 보를 낼 확률이 모두 같다.
> (나) k번째 게임에서 이겼을 때, $k+1$번째 게임에서는 k 번째 게임에서 낸 것과 같은 것을 낸다.
> (단, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)
> (다) k번째 게임에서 비기거나 졌을 때, $k+1$번째 게임에 서는 k번째 게임에서 내지 않은 두 가지 중 하나를 같은 확률로 낸다.
> <B학생>
> 직전 게임의 결과에 관계없이 가위, 바위, 보를 낼 확률이 모두 같다.

이때, 가위바위보를 연속 3회 실시하기로 하였는데 첫 번째 게임에서 A 학생이 가위를 내어 이겼다. 남은 두 번의 게임에서 A 학생이 한번은 이기고, 한 번은 질 확률은?[4점-1010-비상]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{7}{27}$ ③ $\frac{8}{27}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{10}{27}$

64. 전통 과자를 판매하는 어느 회사에서는 과자 상자에 '한', '국', '의', '맛'의 네 글자가 각각 하나씩 적혀 있는 네 장의 카드 중 한 장의 카드를 넣어서 판매하고 있는 데, 소비자가 네 글자가 적혀있는 카드 네 장을 모두 가져오면 과자 한 상자를 경품으로 주기로 하였다.

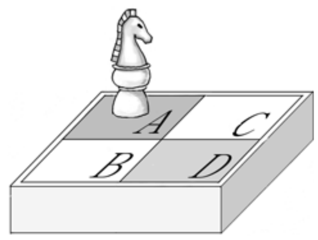


서희가 이 과자를 네 상자 샀을 때, 과자 한 상자를 경품으로 받을 확률은? (단, 모든 과자 상자에 각 글자가 적혀 있는 카드가 들어있을 확률은 모두 같다.)[4점-1010-메가]

① $\frac{3}{32}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{5}{32}$
④ $\frac{1}{24}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

65. $3n$개의 제비 중에 n개의 당첨 제비가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 2개의 제비를 뽑을 때, 적어도 하나의 당첨 제비가 뽑힐 확률을 p_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{a}{b}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.) [4점-1010-중앙]

66. 그림과 같은 말과 말판이 있다. 말은 한 번에 한 칸씩 인접한 칸으로 움직이는 데 인접한 각 칸으로 이동할 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이다. 예를 들어 A에 있던 말이 A와 인접한 칸인 B, C로 이동할 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이다. 최초 A에 있던 말이 n번 이동하여 처음으로 D에 도착할 확률을 P_n이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1003-교육청]



<보 기>

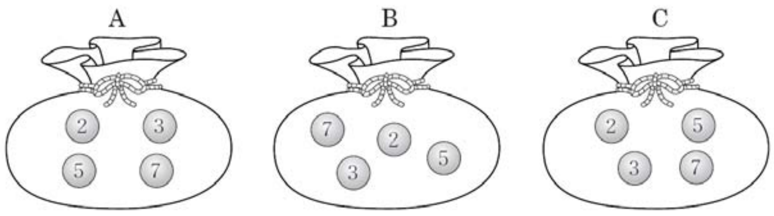
ㄱ. $\mathrm{P}_2 = \frac{1}{2}$

ㄴ. $\mathrm{P}_{2n+2} = \frac{1}{2^{2n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

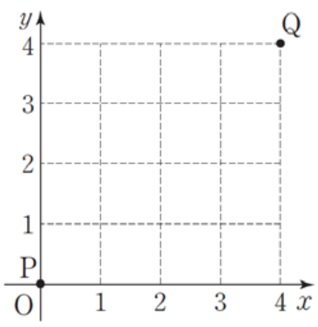
ㄷ. $\sum_{k=1}^{10} \mathrm{P}_k = \frac{1023}{1024}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

67. 그림과 같은 세 주머니 A, B, C에 2, 3, 5, 7의 숫자가 하나씩 적힌 4개의 구슬이 각각 들어 있다. 철수는 주머니 A에서, 영희는 주머니 B에서, 민정이는 주머니 C에서 각자 구슬을 임의로 2개씩 꺼낸다고 한다. 이들이 꺼낸 6개의 구슬에 적힌 숫자들을 모두 곱한 값이 210의 배수가 될 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1007–대성]



68. 그림과 같이 좌표평면 위의 움직이는 두 점 P, Q가 각각 점 (0, 0)과 점 (4, 4)에 위치해있다. 100원짜리 동전1개와 500원짜리 동전 1개를 동시에 던져 다음과 같은 규칙으로 두 점 P, Q를 이동시킨다.



> (가) 100원짜리 동전이 앞면이 나오면 동점 P를 x축의 양의 방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 동점 P를 y축의 양의 방향으로 1만큼 이동시킨다.
> (나) 500원짜리 동전이 앞면이 나오면 동점 Q를 x축의 음의방향으로 1만큼, 뒷면이 나오면 동점 Q를 y축의 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이와 같은 시행을 4번 하였을 때, 점 P와 점 Q가 같은 위치에 있게 될 확률은 $\frac{n}{m}$이다. $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 서로소인 자연수이다.)[4점–1008–비상]

69. 1부터 6까지의 자연수가 각각 한 개씩 적혀 있는 6장의 카드가 주머니에 들어 있다. A, B 두 사람이 다음과 같은 방법으로 주머니에서 카드를 꺼낸다.

> (가) A가 먼저 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 두 장의 카드에 적힌 숫자를 확인하고 그 두 장의 카드를 다시 주머니에 넣는다.
> (나) A가 꺼낸 두 장의 카드를 다시 넣은 후 B가 한 장의 카드를 꺼내어 숫자를 확인한다.

이때, B가 꺼낸 카드에 적힌 숫자가 A가 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자의 사이에 있으면 B가 이기고, 사이에 있지 않으면 A가 이긴다고 한다. 예를 들어 A가 2, 6이 적힌 카드를 꺼냈을 때, B가 3이 적힌 카드를 꺼내면 B가 이기지만 B가 6이 적힌 카드를 꺼내면 A가 이긴다. B가 이길 확률을 $\frac{b}{a}$라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)[4점–1008–중앙]

70. K상점에서는 행사시간에 빨간색, 노란색, 파란색으로 된 3종류의 경품권을 발행하여 고객이 물건을 1개 구매할 때마다 3종류의 경품권 중에서 한 개를 준다. 고객은 3종류의 경품권을 모두 최소한 하나씩 경품권 중 한 개의 경품권을 받을 확률은 각각 $\frac{1}{3}$로 같다고 한다. 경품을 받을 수 있을 때까지 구매해야 할 물건의 개수를 X라고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, n은 1보다 큰 자연수이다.)[4점–1010–중앙]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(X=n)=\mathrm{P}(X>n-1)-\mathrm{P}(X>n)$

ㄴ. $\mathrm{P}(X>n)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

ㄷ. $\mathrm{P}(X=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

71. 씨름경기 결승전에서 3번의 경기를 먼저 이기는 사람이 우승을 하는 경이에 A, B두 사람이 만났다. 우승자와 준우승자의 상금은 총 상금을 5 : 3으로 나누어 가지기로 하였는데, A가 먼저 1번 이상 이긴 상태에서 경기가 중단되어 버렸다. 이에 따라 경기 주최측은 상금의 배분을 새로 조정하여 현 상태에서의 A, B 두 사람의 상금의 기대금액을 근거로 상금을 분배하기로 하였다. 이 때, A, B 두 사람의 상금의 분배 비율은? (단, A, B 두 사람이 각 경기마다 이길 확률은 $\frac{1}{2}$로 같고, 비기는 경우는 없다고 한다.)

[4점–1011–종로]

① 4 : 3 ② 5 : 3 ③ 17 : 13
④ 29 : 17 ⑤ 35 : 29

조건부확률

1. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?

[3점–2010–대수능]

2. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?[3점–1010–종로]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{12}$

3. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$일 때, 확률 $\mathrm{P}(B)$ 의 값은?[3점–1006–종로]

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{5}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{3}{4}$

4. 표본공간 S에서 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{5}{6}$$

일 때, 확률 $\mathrm{P}(A)$의 값은?[2점–1011–종로]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{2}{3}$

5. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고, $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?[3점–1009–평가원]

① $\frac{1}{15}$　② $\frac{1}{12}$　③ $\frac{1}{9}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{3}$

6. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{9}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{9}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?

[3점–1010–교육청]

① $\frac{1}{63}$　② $\frac{2}{63}$　③ $\frac{1}{21}$　④ $\frac{4}{63}$　⑤ $\frac{5}{63}$

7. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$일 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은?[3점–1010–비상]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

8. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C|B^C)=\frac{3}{4},\ \mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{2}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은?[3점–1007–대성]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{7}{20}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{17}{20}$

9. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{3}$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은?[3점–1004–메가]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

10. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B^C)$의 값은?[3점–1011–중앙]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{7}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

11. 한 개의 주사위를 던지는 시행에서 일어나는 두 사건 A, B를

A : 짝수의 눈의 수가 나온다.
B : 소수의 눈의 수가 나온다.

라고 정의 할 때, $\mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은?[4점–1005–종로]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12. 두 사건 A,B에 대하여 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cup B)=1$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은?[3점–1011–대성]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

13. $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}$ 인 세 사건 A, B, C에 대하여 두 사건 A와 C는 배반사건이고 두 사건 B와 C는 서로 독립이다. $\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{1}{2}$ 일 때, $\mathrm{P}(A\cup B\cup C)$의 값은?[3점–1010–비상]

① $\frac{11}{18}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{13}{18}$
④ $\frac{7}{9}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

14. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(B|A^C)$의 값은?[3점–1009–중앙]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

15. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\frac{1}{3}$ 이고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{4}$ 일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은?[3점–1010–대성]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

16. 두 사건 A, B에 대하여 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{q}{p}$ 이다. p^2+q^2 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)[3점–1006–대성]

17. 표본공간 S의 세 사건 A, B, C에 대하여 두 사건 A, B는 배반사건이고, 두 사건 B, C는 서로 독립이다.
$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B^C\mid C)=\frac{3}{4}$일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은?

[3점–1010–비상]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{5}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

18. 5개의 자연수 1, 2, 3, 4, 5를 임의로 나열하였을 때, 나열된 수를 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5라 하자. $a_1<a_2$인 사건을 A, $a_2<a_3$인 사건을 B, $a_3<a_4$인 사건을 C라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1011–대성]

<보 기>

ㄱ. 두 사건 A, B는 서로 독립이다.
ㄴ. 두 사건 A, C는 서로 독립이다.
ㄷ. $\mathrm{P}(A\cap B)<\mathrm{P}(A\cap C)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 네 면에 숫자 1, 2, 3, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 주사위와 여섯 면에 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 주사위를 평평한 바닥에 던졌다. 두 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자의 합이 짝수일 때, 정육면체 모양의 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자가 짝수일 확률은?

[3점–1003–교육청]

① $\frac{1}{7}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$

20. 어느 고등학교 3학년에는 안경을 낀 남학생이 72명, 안경을 낀 여학생이 81 명, 안경을 끼지 않은 남학생이 88명이다. 이 학교 3 학년 학생 중 한 명을 선택할 때, 그 학생이 남학생인 사건을 A, 그 학생이 안경을 낀 사건을 B 라 할 때, 두 사건 A, B 는 서로 독립이라고 한다. 이 학교 3 학년 학생의 수를 구하시오.

[3점–1006–종로]

21. 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적힌 6 개의 주머니에 각각 6 개의 공이 들어 있다. 각 주머니에 들어 있는 흰 공의 개수는 주머니에 적힌 숫자와 같다. 6 개의 주머니 중에서 임의로 하나를 택하여 한 개의 공을 꺼낸다. 꺼낸 공이 흰 공일 때, 이 공이 짝수가 적힌 주머니에서 나왔을 확률은?[3점–1011–대전교]

① $\frac{5}{14}$　② $\frac{3}{7}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{4}{7}$　⑤ $\frac{9}{14}$

22. 두 사격 선수 A, B가 한 번의 사격에서 과녁을 명중시킬 확률은 각각 $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 두 선수 중 임의로 한 선수를 택하여 2번의 가격을 실시하도록 하였더니 모두 명중시켰다고 한다. 이때, 선택된 선수가 A이었을 확률은?[3점–1010–비상]

① $\frac{36}{145}$　② $\frac{49}{145}$　③ $\frac{64}{145}$　④ $\frac{81}{145}$　⑤ $\frac{20}{29}$

23. 어떤 고등학교 학생회장 선거에 갑과 을, 두 명의 후보가 출마했다. 갑과 을의 선거운동 시작 전 지지율은 각각 70% , 30% 이었으나 선거 운동 후 갑을 지지하던 학생 중 60% 가 을에게 투표하여 을이 57% 의 득표율로 당선되었다. 투표 후 을에게 투표한 학생 중 한 명을 선택했을 때 이 학생이 선거운동 시작 전에도 을 후보를 지지하던 학생일 확률은? (단, 기권과 무효표는 없다.)

[3점–1007–교육청]

① $\frac{3}{19}$　② $\frac{4}{19}$　③ $\frac{5}{19}$　④ $\frac{6}{19}$　⑤ $\frac{7}{19}$

24. 어떤 경품 행사장에서 A , B , C 세 명이 당첨권 3 매를 포함한 응모권 10 매가 들어 있는 상자에서 A , B , C 순서대로 1장씩 뽑기로 하였다. A , B 중 적어도 한 명이 당첨권을 뽑았을 때, C가 당첨권을 뽑을 확률은? (단, 한 번 뽑은 응모권은 다시 넣지 않는다.)

[3점–1009–대성]

① $\frac{3}{32}$　② $\frac{9}{64}$　③ $\frac{3}{16}$　④ $\frac{15}{64}$　⑤ $\frac{9}{32}$

25. 2010년 월드컵 대회에서 K국가는 6경기를 치러 5승 2패를 하였다. 갑은 K국가의 경기가 열릴 때마다 승패를 예상하였는 데, 다음은 갑의 예상과 그 결과이다.

> ㈎ 무승부로 예상한 경기는 없다.
> ㈏ K국가가 이길 것이라고 예상한 경기는 4경기이고, 그 중 실제로 K국가가 이긴 경기는 3경기이다.

K국가의 경기가 모두 끝난 다음 K국가가 치른 7경기 중 한 경기를 임의로 선택하였더니 K국가가 이긴 경기였다. 이때, 갑이 이 경기에서 K국가가 질 것으로 예상했을 확률은?[3점−1011−대성]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. 주머니 A에서 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 후, 주머니 B에서 2개의 공을 동시에 꺼내었더니 모두 흰 공이었다. 이때, 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공이었을 확률은?[4점−1011−중앙]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$ ④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

27. 남학생 12명, 여학생 8명으로 구성된 20명의 학생 중에서 임의로 2명의 대표를 선발하기로 하였다. 임의로 선발된 대표 두 명의 성별이 같았을 때, 두 명 모두 여학생이었을 확률은? [3점−1008−비상]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{13}{45}$ ④ $\frac{14}{47}$ ⑤ $\frac{16}{47}$

28. 500원짜리 동전 1개, 100원짜리 동전 2개, 50원짜리 동전 3개가 있다. 이 중에서 임의로 3개의 동전을 골라 돼지 저금통에 넣고, 나머지 3개의 동전은 복주머니 저금통에 넣었다. 돼지 저금통에 넣은 동전의 금액의 합이 250원 이상일 때, 복주머니 저금통에 넣은 동전의 금액의 합도 250원 이상일 확률은?[3점−1007−대성]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{4}{11}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{6}{13}$

29. 어느 산악자전거 대회의 참가자 중 50세 미만인 사람이 전체의 80%라고 한다. 50세 미만인 참가자의 남녀 비율은 4 : 1이며, 남자의 20%가 50세 이상이라고 한다. 참가자 중 여자가 우승하였을 때, 우승자가 50세 이상일 확률은?[3점−1004−대성]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

30. 주머니 속에 흰 공과 검은 공 두 종류의 공이 합하여 모두 10개 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼내어 버린 다음 다시 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 나중에 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공일 확률은 $\frac{7}{15}$이라고 한다. 나중에 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공일 때, 처음에 꺼낸 1개의 공이 흰 공이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점−1007−메가]

31. 다음 표는 봉사단 학생들이 활동하는 장애인 시설의 봉사 담당별 배정 학생 수를 나타낸 것이다.

봉사활동	목욕	산책	청소
인원수	4명	4명	2명

두 학생 A, B를 포함하여 10명의 봉사 단원을 담당 인원에 맞도록 배정하였다. A, B가 같은 활동으로 배정되었을 때, A, B가 모두 장애인 산책 도우미로 배정될 확률은 $\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오.[4점-1011-종로]

32. 두 종류의 씨앗이 가득 들어 있는 통이 있다. 이 중에서 $\frac{1}{4}$은 흰색 꽃의 씨앗이고, $\frac{3}{4}$은 빨간색 꽃의 씨앗이며 흰색 꽃의 씨앗과 빨간색 꽃의 씨앗의 발아율은 각각 $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$라고 한다. 이 통 속에 있는 씨앗 중에서 한 개를 뽑아 심었더니 그 씨앗이 발아했을 때, 뽑은 그 한 개의 씨앗이 흰색 꽃의 씨앗일 확률은?[4점-1008-중앙]

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{2}{7}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{3}{8}$

33. 어느 농구 선수는 2번 던지는 자유투에서 처음 자유투를 성공할 확률은 0.7이고, 처음 자유투를 성공하였을 때 두 번째 자유투를 성공할 확률은 0.6이다. 그리고 처음 자유투를 실패하였을 때 두 번째 자유투를 실패할 확률은 0.2이다. 두 번째 자유투를 성공하였을 때, 처음 자유투도 성공하였을 확률은?[3점-1004-종로]

① $\frac{5}{11}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{6}{11}$
④ $\frac{13}{22}$ ⑤ $\frac{7}{11}$

34. 두 개의 주머니 A, B가 있다. 주머니 A에는 흰 공 2개와 검은 공 2개가 들어 있고 주머니 B는 비어 있다. 주머니 A에서 임의로 한 개씩 공을 꺼내어 주머니 B에 옮기는 작업을 3번 시행한 후 주머니 B를 열어 보았더니 흰 공은 2개 있었다. 이때, 주머니 A에서 B로 옮겨진 3개의 공의 색깔이 교대로 나타났을 확률은?

[4점-1011-대성]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

35. A주머니에는 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있고, B주머니에는 검은 공 3개, 붉은 공 3개가 들어 있다. 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오면 A주머니를, 뒷면이 나오면 B주머니를 선택하여 임의로 한 개의 공을 꺼낸 뒤, 다시 한 개의 동전을 던져서 같은 방법으로 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낸다. 두 번째에 꺼낸 공이 붉은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이었을 확률은? (단, 모든 공은 모양과 크기가 같고, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

[4점-1010-비상]

① $\frac{7}{15}$ ② $\frac{8}{15}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{11}{15}$

36. A, B, C, D, E, F, G, H 의 8명 중에서 A, B 는 휴대전화와 디지털카메라를 모두 가지고 있고 C, D, E 는 휴대전화만 가지고 있으며 F, G, H는 디지털카메라만 가지고 있다. 이 8명 중에서 서로 다른 4명을 임의로 뽑았더니 휴대전화를 가지고 있는 사람과 디지털카메라를 가지고 있는 사람이 각각 2명 이상씩 뽑혔다고 한다. 이 때, A, B 중 한 명만 뽑혔을 확률은?[4점-1004-메가]

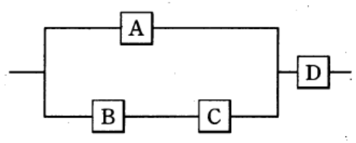
① $\frac{6}{15}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

37. A주머니에는 흰 공 3개, 파란 공 2개가 들어 있고, B주머니에는 파란 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있다. A, B 두 주머니 중에서 하나를 임의로 선택하여 공을 한 개 꺼낸 후, 다시 두 주머니 중에서 하나를 임의로 선택하여 공을 한 개 꺼낸다. 두 번째로 꺼낸 공이 검은 공이었을 때, 첫 번째 꺼낸 공이 파란 공일 확률은? (단, 첫 번째에 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)[4점–1011–중앙]

① $\frac{19}{40}$ ② $\frac{21}{40}$ ③ $\frac{23}{40}$
④ $\frac{27}{40}$ ⑤ $\frac{29}{40}$

38. 어떤 질병은 A, B, C의 세 유형이 있으며, 이 질병에 걸린 사람을 대상으로 반응약을 투여하면 양성 반응을 보이는 비율은 A, B, C의 세 가지 유형에 대하여 각각 30%, 50%, 80%라고 한다. 어느 병원에는 이 질병에 걸린 사람이 A, B, C의 세 가지 유형별로 각각 4명, 2명, 2명이 있다고 한다. 이 중에서 어느 한 사람을 임의로 선택하여 반응약을 투여하였더니 양성 반응이 나왔을 때, 이 사람이 걸린 질병이 A유형일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점–1010–메가]

39. 그림과 같이 A, B, C, D로 된 4개의 스위치를 갖는 회로가 있다. 각각의 스위치가 연결되어 전류가 흐를 확률이 모두 0.5일 때, 주어진 회로에서 전류가 흐를 확률은 $\frac{a}{b}$(a, b는 서로소인 자연수)이다. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. (단, 각 스위치는 독립적으로 작동된다.)[4점–1005–종로]



40. 공사건이 아닌 세 사건 A, B, C에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1009–종로]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A)$이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.
ㄴ. $\mathrm{P}(A \mid B^C)+\mathrm{P}(A^C \mid B^C)=1$
ㄷ. $\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(A^C \mid B^C)=1$이면 두 사건 A와 B는 서로 독립이다.

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

41. 어떤 시행에서 나올 수 있는 모든 결과의 집합을 S라 하자. S의 부분집합인 세 사건 A, B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $A \cup B \cup C = S$
> (나) A, B, C 중 어느 두 사건도 동시에 일어나지 않는다.
> (다) $\mathrm{P}(A) = 2\mathrm{P}(B) = 4\mathrm{P}(C)$

S의 부분집합인 사건 D에 대하여 $\mathrm{P}(D \mid A) = \frac{1}{10}$, $\mathrm{P}(D \mid B) = \frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(D \mid C) = \frac{3}{10}$일 때, $\mathrm{P}(D)$의 값은?

[4점–1010–교육청]

① $\frac{9}{70}$ ② $\frac{11}{70}$ ③ $\frac{13}{70}$
④ $\frac{3}{14}$ ⑤ $\frac{17}{70}$

42. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} ax & (0 \le x < 1) \\ a & (1 \le x < 2) \\ 3a - ax & (2 \le x \le 3) \\ 0 & (x < 0,\ x > 3) \end{cases}$$

$X \le 2$인 사건을 A, $\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}$인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A|B) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, a는 상수이고, p, q는 서로 소인 자연수이다.)[4점–1004–메가]

43. 빨간색 구슬 3개와 파란색 구슬 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 처음으로 한 개의 구슬을 임의로 꺼내어 그 색을 조사한 후 다시 주머니에 넣고, 그 구슬과 같은 색의 구슬을 하나 더 주머니에 넣는다. 이 주머니에서 두 번째로 하나의 구슬을 임의로 꺼냈더니 빨간색이었다. 이때 첫 번째 꺼낸 구슬도 빨간색일 확률이 $\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오.

[4점–1010–종로]

44. 수직선 위의 동점 A가 원점을 출발하여, 주사위를 한 번 던질 때마다 6의 약수의 눈의 수가 나오면 1만큼, 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오면 -1만큼 움직인다. 주사위를 4번 던졌을 때, 동점 A가 원점에 있을 확률은?[3점–1009–종로]

① $\frac{8}{27}$ ② $\frac{10}{27}$ ③ $\frac{29}{64}$
④ $\frac{35}{64}$ ⑤ $\frac{16}{81}$

45. 갑과 을은 각각 3개, 2개의 동전을 가지고 있다. 두 사람이 5개의 동전을 동시에 던질 때, 을이 던져서 나온 동전의 앞면의 개수가 갑이 던져서 나온 동전의 앞면의 개수보다 많을 확률은?

[4점–1010–대성]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{3}{16}$ ③ $\frac{5}{16}$
④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

46. 세 주사위 A, B, C 각각의 6개의 면에는 다음과 같은 숫자가 적혀 있다.

A : 1, 2, 3, 4, 5, 6
B : 1, 1, 1, 2, 2, 2
C : 1, 1, 2, 2, 3, 3

지혜는 주사위 A, B, C 중에서 하나를 임의로 선택한 후 세 번 던져서 모두 1이 나오면 자신이 선택한 주사위를 B라고 판단하기로 하였다. 이 판단이 잘못되었을 확률은?[4점-1010-대성]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

47. 농구 챔피언 결정전에 진출한 A, B 두 팀이 있다. 두 팀이 시합을 한 번 했을 때, A팀이 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이고, B팀이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이라고 한다. 이 결정전에서 네 번 먼저 이기는 팀이 우승한다고 할 때, 6번째 시합에서 우승 팀이 결정될 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)[3점-1010-비상]

① $\frac{160}{729}$ ② $\frac{170}{729}$ ③ $\frac{20}{81}$
④ $\frac{190}{729}$ ⑤ $\frac{200}{729}$

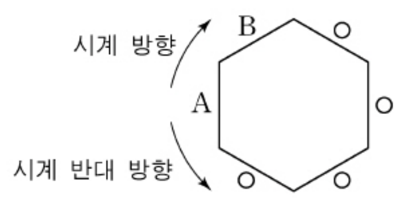
48. 주머니 속에 빨간색 구슬 3개, 노란색 구슬 2개, 파란색 구슬 1개가 들어있다. 이 주머니에서 구슬을 임의로 한 개를 꺼내어 색깔을 확인한 후 다시 넣는다. 색깔이 빨간색, 노란색, 파란색이면 각각 1, 2, 3점의 점수를 얻는다. 이 시행을 3번 할 때 얻은 점수의 합이 5점일 확률은?[3점-1011-대전교]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{7}{24}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

49. A와 B가 바둑을 두었을 때, A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고, B가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$라고 한다. A와 B가 바둑을 두어 3판을 먼저 이긴 사람이 우승한다고 할 때, A가 우승할 확률은 $\frac{b}{a}$이다. 이때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)
[4점-1009-중앙]

50. A, B를 포함한 6명이 정육각형 모양의 탁자에 그림과 같이 둘러 앉아 주사위 한 개를 사용하여 다음 규칙을 따르는 시행을 한다.

주사위를 가진 사람이 주사위를 던져 나온 눈의 수가 3의 배수이면 시계 방향으로, 3의 배수가 아니면 시계 반대 방향으로 이웃한 사람에게 주사위를 준다.



A부터 시작하여 이 시행을 5번 한 후 B가 주사위를 가지고 있을 확률은?[4점-1006-평가원]

① $\frac{4}{27}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{8}{27}$
④ $\frac{10}{27}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

51. 어느 비누회사에서 생산되는 비누 한 개의 무게는 평균이 100 g, 표준편차가 5 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서는 생산되는 비누 중에서 96 g 미만인 것은 판매하지 않는다고 한다. 이 회사에서 생산되는 비누 중에서 임의로 4개를 택할 때, 그 중 판매할 수 있는 비누가 3개일 확률은 $\frac{2^p}{5^q}$이다. 두 자연수 p, q에 대하여 pq의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) = 0.3$으로 계산한다.)[4점-1010-비상]

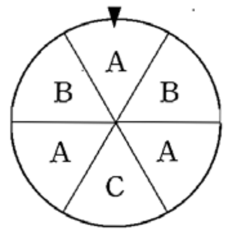
52. 동전 2개를 동시에 네 번 던질 때 k번째 시행에서 모두 앞면이 나오면 $X_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 그렇지 않으면 $X_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$로 나타낸다. 이때 얻어지는 행렬 X_1, X_2, X_3, X_4에 대하여 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$의 역행렬이 존재할 확률을 $\frac{b}{a}$ (a, b는 서로소인 자연수)라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.[4점-1008-종로]

53. 각 면에 1, 1, 2, 3, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 5번 던졌을 때, 윗면에 적힌 수를 차례로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하자. $\sum_{k=1}^{5}(x_k - 3)^2 = 5$일 확률은?

[4점-1004-대성]

① $\frac{1}{243}$ ② $\frac{10}{243}$ ③ $\frac{20}{243}$
④ $\frac{7}{81}$ ⑤ $\frac{8}{81}$

54. 그림과 같이 6개의 영역으로 나누어진 돌림판을 회전시킨 다음 이 돌림판이 멈춰섰을 때, 화살표(▼)가 가리키는 부분에 따라 수직선 위의 점 P를 다음과 같은 규칙으로 이동시킨다. 이때, 화살표가 6개의 영역을 가리킬 확률은 모두 같다.

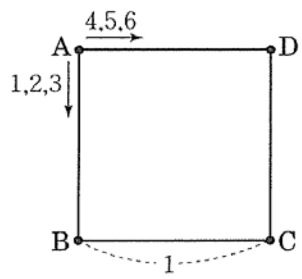


㈎ 화살표가 A부분을 가리키면 점 P를 왼쪽으로 1만큼 이동시킨다.
㈏ 화살표가 B부분을 가리키면 점 P를 오른쪽으로 1만큼 이동시킨다.
㈐ 화살표가 C부분을 가리키면 점 P를 이동시키지 않는다.
㈑ 점 P가 $x=-1$인 점으로 이동하게 되면 더 이상 돌림판을 회전시키지 않는다.

위의 규칙에 따라 돌림판을 5번 회전시켰을 때, 원점에 있던 점 P가 $x=3$인 점으로 이동할 확률은? (단, 화살표 (▼)는 경계선에서는 멈추지 않도록 되어 있다.)[4점-1007-메가]

① $\frac{17}{486}$ ② $\frac{11}{243}$ ③ $\frac{1}{18}$
④ $\frac{16}{243}$ ⑤ $\frac{37}{486}$

55. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 동점 P는 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수에 따라 다음과 같은 규칙으로 정사각형 ABCD의 변 위를 움직여서 각 꼭짓점에 도착한다고 한다.



㈎ 주사위의 눈의 수가 3 이하이면, 시계 반대 방향으로 (눈의 수)×2만큼 움직인다.
㈏ 주사위의 눈의 수가 4 이상이면, 시계 방향으로 (눈의 수)만큼 움직인다.

예를 들어 꼭짓점 A에 있던 동점 P는 3의 눈이 나오면 시계 반대 방향으로 6만큼 움직여서 꼭짓점 C에 도착하고, 다시 5의 눈이 나오면 시계 방향으로 5만큼 움직여서 꼭짓점 B에 도착한다. 동점 P가 꼭짓점 A를 출발하여 주사위를 네 번 던졌을 때, 다시 꼭짓점 A에 도착하게 될 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1009-대성]

확률분포

1. 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$와 분산 $\mathrm{V}(X)$에 대하여 $\mathrm{E}(2X+1)=13$, $\mathrm{V}(2X+1)=8$일 때, $\mathrm{E}(X^2)$의 값을 구하시오. [3점-1011-대성]

2. 이산확률변수 X의 확률분포가 다음 표와 같을 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?[3점-1010-종로]

X	-1	0	1	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a^2	a^2	a	1

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

3. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{2}a^2$	a^2	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 $8X$의 분산 $\mathrm{V}(8X)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)[3점-1010-대성]

4. 다음은 확률변수 X의 확률분포이다.

X	k	$2k$	$4k$	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{4}{7}$	a	b	1

$\frac{4}{7}$, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 X의 평균이 24일 때, k의 값을 구하시오.[3점-1009-종로]

5. 다음은 확률변수 X의 확률분포표이다.

X	0	10	20	30	계
$\mathrm{P}(X)$	0.4	0.3	0.2	0.1	1

확률변수 $Y=\frac{X-3}{4}$이라 할 때, Y의 분산은?[3점-1011-중앙]

① $\frac{1}{4}$ ② 1 ③ $\frac{9}{4}$
④ 4 ⑤ $\frac{25}{4}$

6. 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복할 때, 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 하자. 확률변수 $4X+1$의 분산 $\mathrm{V}(4X+1)$의 값을 구하시오.[3점-2010-대수능]

7. 흰 공과 검은 공을 합하여 모두 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 동시에 3개의 공을 꺼내는 시행을 실시했다. 이때, 꺼낸 공 중에서 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하면 X의 확률분포는 다음 표와 같다고 하자. X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>0$)[3점-1007-메가]

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$4a$	b	c	1

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

8. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	b	1

확률변수 X의 분산이 $\frac{5}{12}$일 때, $(a-b)^2$의 값은?

[3점-1003-교육청]

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

9. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

$p_5-p_1=\frac{8}{25}$, $p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n=0$ $(n=1,2,3)$일 때, 확률변수 $100X$의 기댓값 $\mathrm{E}(100X)$의 값을 구하시오.

[4점-1010-교육청]

10. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{a}$	$\frac{2}{a}$	$\frac{3}{a}$	$\frac{4}{a}$	$\frac{5}{a}$	$\frac{6}{a}$	1

확률변수 $3X$의 평균 $\mathrm{E}(3X)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[3점-1010-비상]

11. 표는 세 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수들 중에서 두 수의 차의 최댓값을 확률변수 X라 할 때, 확률변수 X의 확률분포표이다.

X	0	1	2	3	4	5	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	a	$\frac{2}{9}$	b	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36}$	1

이때, 확률변수 $Y=12X+5$의 평균 $\mathrm{E}(Y)$의 값은?

[4점-1004-교육청]

① 40 ② 44 ③ 48
④ 52 ⑤ 56

12. 확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3-a}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3+a}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{7}{8}$일 때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?

[3점-2010-대수능]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

13. 이산확률변수 X의 확률분포가 아래 표와 같다.

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

실수 a에 대하여, 함수 $S(a)$를

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 p_i$$

라 정의하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점-1007-교육청]

<보 기>

ㄱ. $S(a)=0$일 때, $\mathrm{V}(X)=0$ 이다.
ㄴ. $a_1 < a_2$일 때, $S(a_1)<S(a_2)$이다.
ㄷ. 함수 $S(a)$는 $a=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$일 때, 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 3개의 빨간 공과 2개의 검은 공이 들어 있는 주머니에서 검은 공이 나올 때까지 임의로 공을 1개씩 꺼낸다. 처음으로 검은 공이 나올 때까지 꺼낸 빨간 공의 개수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, 공의 크기와 모양은 구분하지 않는다.)[3점-1010-비상]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

15. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(25,\ p)$를 따르고 $\mathrm{P}(X=2)=48\mathrm{P}(X=1)$이다. 확률변수 X에 대하여 X^2의 평균을 구하시오. (단, $p\neq 0$)[4점-1007-교육청]

16. 한 개의 주사위를 180회 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{E}(X^2)$의 값은?[3점-1010-비상]

① 3500 ② 3560 ③ 3600
④ 3640 ⑤ 3840

17. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{k(k+1)}{a}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

일 때, $\mathrm{P}(X=3)$의 값은?[3점-1009-중앙]

① $\frac{1}{70}$ ② $\frac{3}{70}$ ③ $\frac{2}{35}$
④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{6}{35}$

18. 확률변수 X는 1부터 17까지의 자연수의 값을 취하고 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$\mathrm{P}(X=k)=\begin{cases} a & (k=1) \\ \dfrac{a}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} & (2\le k\le 16) \\ 2a & (k=17)\end{cases}$$

이때, 확률 $\mathrm{P}(1\le X\le 9)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점-1010-종로]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x^2+x+a}{40}\ (\text{단, } x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

일 때, $\mathrm{P}(X\leq 1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)[3점-1010-중앙]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

20. 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

($x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$이고, k는 상수이다.)

일 때, $\mathrm{P}(2\leq X\leq 7)$의 값은?[3점-1011-대성]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

21. 이산확률변수 X에 대한 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{a}{x^2+x}(x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

일 때, $\mathrm{P}(X\leq 3)$의 값은?[3점-1011-종로]

① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{6}{7}$ ③ $\frac{7}{8}$
④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

22. 이산확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{ax+2}{10}\ (x=-1,\ 0,\ 1,\ 2)$$

일 때, 확률변수 $3X+2$의 분산 $V(3X+2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)[4점-2010-대수능]

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

23. 확률변수 X는 1부터 5까지의 자연수의 값을 취하고, X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{x^2}{a}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

으로 주어질 때, $\mathrm{P}(2\leq X\leq 3)$의 값은? (단, a는 상수이다.)
[3점-1011-중앙]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{10}$ ③ $\frac{1}{11}$
④ $\frac{5}{21}$ ⑤ $\frac{13}{55}$

24. 2000명의 지원자가 어느 공단의 공개채용 입사시험을 보았다. 이 시험의 만점은 400점이고, 성적 분포는 표준편차가 30점인 정규분포를 따른다고 한다. 합격에 필요한 최저 점수를 360점으로 하면 46명의 합격자가 나온다고 할 때, 합격자가 134명이 되도록 하는 합격 최저 점수는?[3점-1011-종로]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0\leq Z\leq z)$
1.0	0.341
1.5	0.433
2.0	0.477

① 330점 ② 335점 ③ 340점
④ 345점 ⑤ 350점

25. 갑, 을 두 사람이 화살 한 개를 쏘아 과녁에 맞힐 확률은 각각 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$이다. 이 두 사람이 동시에 각각 화살 한 개씩을 쏠 때, 화살을 과녁에 맞히는 사람의 수를 확률변수 X라 하자. 이때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는?[3점-1010-중앙]

① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{13}{12}$ ③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

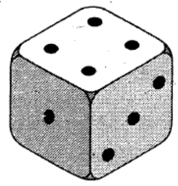
26. 1이 적혀 있는 구슬이 1개, 2가 적혀 있는 구슬이 3개, 3이 적혀 있는 구슬이 5개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 구슬 두 개를 동시에 꺼낼 때, 두 개의 구슬에 적혀 있는 수의 곱을 X라 하자. 확률변수 X의 기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 값은? [4점-1010-교육청]

① $\frac{61}{12}$ ② $\frac{65}{12}$ ③ $\frac{71}{12}$
④ $\frac{73}{12}$ ⑤ $\frac{77}{12}$

27. A, B, C 세 도시는 행정 구역 통합에 관한 여론 조사를 실시하였다. 그 결과 A도시 시민의 $\frac{2}{3}$, B도시 시민의 $\frac{3}{5}$, C도시 시민의 $\frac{1}{2}$이 행정 구역 통합에 찬성하였다. 세 도시에서 임의로 각각 한 명씩 뽑은 세 명의 시민 중 통합에 찬성하는 시민의 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 기댓값은?[3점-1011-대전교]

① $\frac{47}{30}$ ② $\frac{49}{30}$ ③ $\frac{53}{30}$
④ $\frac{58}{30}$ ⑤ $\frac{59}{30}$

28. 한 개의 주사위를 던져 바닥에 닿지 않은 5개의 눈의 수의 합을 확률변수 X라 하자. 이때 $\mathrm{E}(X)$의 값은?[3점-1008-종로]



① $\frac{27}{2}$ ② $\frac{29}{2}$
③ $\frac{31}{2}$ ④ $\frac{33}{2}$ ⑤ $\frac{35}{2}$

29. 1개의 주사위를 2번 던질 때, 확률변수 X를 다음과 같이 정의하자.

(가) 나온 두 눈의 수가 서로 같으면 $X=0$이다. (나) 나온 두 눈의 수가 서로 다르면 두 수 중 큰 수를 X의 값으로 정한다.

이때, 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?[3점-1009-중앙]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{35}{9}$

30. 확률변수 X가 취할 수 있는 값이 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이고, X의 확률분포가 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{x}{a}$ $(x=1, 2, 3, \cdots, 7)$일 때, 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, a는 상수이다.)[3점-1008-중앙]

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5
④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

31. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따를 때, 부등식 $\frac{\{\mathrm{E}(X)\}^2}{\mathrm{E}(X^2)} > \frac{9}{10}$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은?

[3점–1010–종로]

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

32. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(10,\ p)$를 따를 때, $\mathrm{E}(X^2) \geq \mathrm{E}(2X)$가 성립하기 위한 p의 최솟값은? (단, $p>0$)

[3점–1011–종로]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{2}{9}$
④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

33. 이산확률변수 X가 취하는 값이 0, 1, 2, $\cdots$, 10이고 X의 확률분포가

$$\mathrm{P}(X=k) = {}_{10}\mathrm{C}_k \times \frac{3^k}{4^{10}}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

일 때, $\mathrm{E}(10X+5)$의 값을 구하시오.[4점–1009–중앙]

34. 두 명의 양궁 선수 갑, 을이 한 번씩 화살을 쏘아 10점 과녁에 맞출 확률은 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$이다. 갑과 을이 하나씩 화살을 쏜 것을 1회의 시행이라고 하자. 갑 또는 을이 10점 과녁에 화살을 맞추면 "골드"라고 한다. 이 시행을 64회 실시하였을 때, "골드"가 나타나는 횟수를 확률변수 X라 하자. X의 표준편차는? (단, 두 사람이 화살을 쏘아 과녁에 맞히는 사건은 서로 독립이다.)[4점–1010–대성]

① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

35. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 차례대로 a, b라 하고 직선 $y=ax$와 포물선 $y=x^2+b$를 좌표평면에 나타내는 시행을 한다. 이러한 시행을 108 번 할 때, 직선과 포물선이 서로 만나지 않을 횟수를 확률변수 X라 하자. X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?[3점–1004–대성]

① 47 ② 48 ③ 49
④ 50 ⑤ 51

36. 1, 2, 3, 4, $\cdots$, n의 숫자가 각각 1개씩 적힌 카드가 각각 1개씩 적힌 카드가 각각 1장, 2장, 3장, 4장, $\cdots$, n장씩 상자에 들어있다. 이 상자에서 한 장의 카드를 뽑을 때 뽑힌 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X라 하자. X의 평균 $\mathrm{E}(X)=15$일 때, 자연수 n의 값을 구하시오.[4점–1010–중앙]

37. 집합 $A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 부분집합 중 하나를 택할 때, 부분집합의 원소의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 X의 평균을 구하는 과정이다. (단, 모든 부분집합은 택해질 가능성이 동일하다.)

> 집합 A의 모든 부분집합의 개수는 2^n이고,
> 원소의 개수가 r개인 부분집합의 개수는 서로 다른 n개에서 r개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_n\mathrm{C}_r$이다.
> 따라서 $\mathrm{P}(X=r)=$ (가) 이다.
> 한편
> (i) 서로 다른 n명의 후보 선수 중에서 r명의 선수를 선발하 여 그 중 한 명을 주장으로 임명하는 방법의 수는
> $${}_n\mathrm{C}_r \times {}_r\mathrm{C}_1 = r \times {}_n\mathrm{C}_r \text{ 이다.}$$
> (ii) 서로 다른 n명의 후보 선수 중에서 먼저 주장이 될 사람 을 한 명 임명하고 나머지 $(n-1)$명 중에서 $(r-1)$명의 선수를 선발하는 방법의 수는 (나) 이다.
> (i), (ii)에서
> $$r \times {}_n\mathrm{C}_r = \boxed{(나)}$$
> 이므로
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{r=0}^{n} r\mathrm{P}(X=r)=\sum_{r=0}^{n}\left(r\times\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}\right)$$
> $$=\frac{1}{2^n}\sum_{r=1}^{n}\left(\boxed{(나)}\right)=\boxed{(다)}$$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?[3점-1007-종로]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}$	$n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	$\frac{n}{2}$
②	$\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}$	$n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	n
③	$\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}$	${}_{n-1}\mathrm{C}_r$	$\frac{n}{2}$
④	$\frac{r}{2^n}$	${}_{n-1}\mathrm{C}_r$	n
⑤	$\frac{r}{2^n}$	${}_n\mathrm{C}_r$	$\frac{n}{2}$

38. 정육면체 모양의 서로 다른 주사위 3개가 있다. 모든 주사위의 여섯 개의 면 중 세 면에는 빨간색, 두 면에는 파란색, 나머지 한 면에는 노란색이 칠해져 있다. 이 주사위 3개를 동시에 던질 때 세 주사위의 윗면에 칠해진 색이 모두 다른 경우를 "다름"이라고 하자. 이 주사위 3개를 동시에 던지는 시행을 120번 할 때, "다름"이 나타나는 횟수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 분산을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점-1011-대성]

39. 어느 상점에서는 신선한 생선을 매일 1000마리씩 구매하여 그날 판매하며, 팔리지 않은 생선은 모두 수거한다. 이 상점에서 하루 동안 팔리는 생선의 수는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1000, \frac{4}{5}\right)$를 따르며, 판매 이윤은 한 마리당 A원이고, 팔리지 않았을 경우 한 마리당 $\frac{5}{4}A$원의 손해를 본다고 한다. 이 상점에서 하루 동안 이 생선을 팔아서 얻는 이윤의 기댓값은 kA원이다. 상수 k의 값을 구하시오.

[4점-1010-메가]

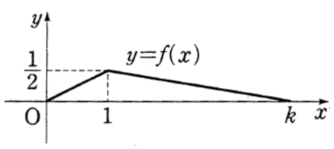
40. 한 퀴즈 대회에 10개의 문제 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}\ \cdots, x_{10}$이 주어져 있다. 문제는 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{10}$의 순서로 차례대로 풀게 되어 있고, 문제 x_k에서 맞힐 확률은

$$\mathrm{P}(x_k)=\frac{11-k}{12-k}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$$

이다. 문제를 차례대로 풀다가 문제 x_k에서 틀리는 순간 상금 k만 원을 받고 탈락되며, 10문제 모두 맞히면 a만 원의 상금을 받는다고 한다. 이 퀴즈 대회에 도전하여 받을 수 있는 상금의 기댓값이 6만 원 이상이 되도록 하는 a의 최솟값은?[4점–1011–종로]

① 11 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

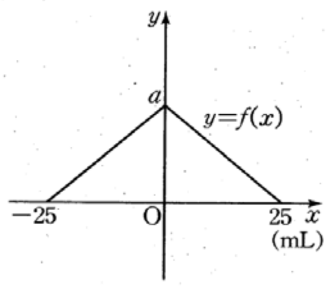
41. $0\le X\le k$에서 정의 된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 이때 $10k$의 값을 구하시오.[3점–1008–종로]



42. $0\le X\le a$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\mathrm{P}(X\le k)=2\mathrm{P}(X\ge k)$를 만족시키는 k의 값은?[4점–1011–종로]

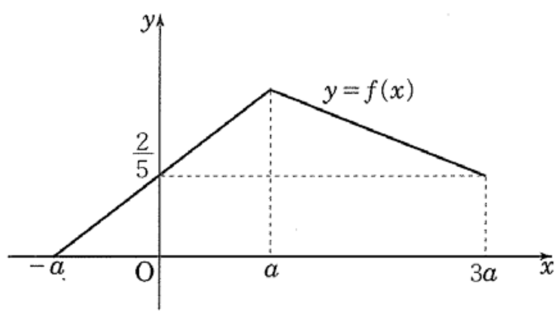
① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

43. K회사에서 생산하는 표시용량이 2L인 생수의 실제용량을 조사하여 실제용량에서 표시용량을 뺀 값을 확률변수 X라 할 때, X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다. K회사에서 생산된 2L들이 생수 2000개 중에서 실제용량이 2.02L이상인 생수의 개수를 확률변수 Y라 할 때, Y의 평균 $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [4점–1010–중앙]



① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

44. 양수 a에 대하여 $-a\le X\le 3a$에서 정의된 확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$X>0$인 사건을 A, $X>1$인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(B|A)$의 값은?
[4점–1009–대성]

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{5}{18}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{7}{18}$ ⑤ $\frac{4}{9}$

45. A, B, C 세 도시는 행정 구역 통합에 관한 여론 조사를 실시하였다. 그 결과 A 도시 시민의 $\frac{2}{3}$, B 도시 시민의 $\frac{3}{5}$, C 도시 시민의 $\frac{1}{2}$ 이 행정 구역 통합에 찬성하였다. 세 도시에서 임의로 각각 한 명씩 뽑은 세 명의 시민 중 통합에 찬성하는 시민의 수를 확률변수 X라 하자. 확률변수 X의 기댓값은?[3점-1011-대전교]

① $\frac{47}{30}$　　② $\frac{49}{30}$　　③ $\frac{53}{30}$
④ $\frac{58}{30}$　　⑤ $\frac{59}{30}$

46. 확률변수 X의 평균과 분산은 각각 10, 16 이다. 두 실수 a, b에 대하여 확률변수 $Y=aX+b$의 평균과 분산이 각각 9, 4 일 때, ab의 값은? (단, $a>0$)[3점-1011-대전교]

① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

47. 확률변수 X의 확률변수가

$$\mathrm{P}(X=r)={}_9\mathrm{C}_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{3}\right)^{9-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$$

일 때, $f(a)=\mathrm{E}((X-a)^2)$의 최솟값은?[3점-1009-종로]

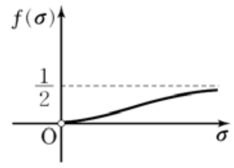
① 1　　② 2　　③ 3
④ 4　　⑤ 5

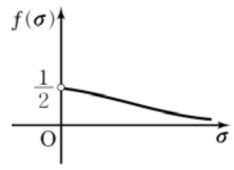
48. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ \sigma^2)$을 따를 때, 함수 $f(\sigma)=\mathrm{P}(X\le 1)\ (\sigma>0)$이라 정의하자. 함수 $y=f(\sigma)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?

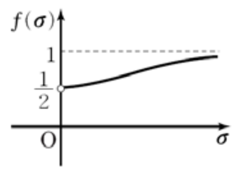
[3점-1007-대성]

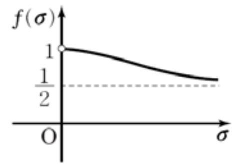
<표준정규분포표>

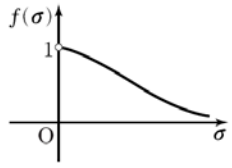
z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.20
1.0	0.35
1.5	0.43
2.0	0.47
3.0	0.49

①


②


③


④


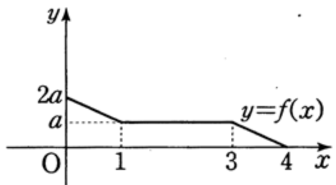
⑤


49. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)=1-ax\quad(1\le x\le 3)$$

확률 $\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[3점-1007-교육청]

50. 그림은 $0 \le X \le 4$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프 이다.
$\mathrm{P}(0 \le X \le k) = 0.5$를 만족시키는 상수 k의 값은?[3점–1009–중앙]



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

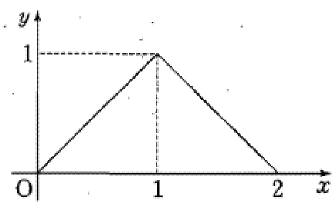
51. 실수 a $(1 < a < 2)$에 대하여 폐구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} & (0 \le x \le a) \\ \dfrac{x-2}{a-2} & (a < x \le 2) \end{cases}$$

이다. $\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \frac{3}{5}$일 때, $100a$의 값을 구하시오.

[3점–1006–평가원]

52. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 2$이고, X의 확률밀도함수의 그래프는 그림과 같다.



확률 $\mathrm{P}\left(a \le X \le a + \frac{1}{2}\right)$의 값이 최대가 되도록 하는 상수 a의 값은?[3점–1009–평가원]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

53. 10개의 수 $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$ 중에서 임의로 9개의 서로 다른 수를 선택하여 모두 곱한 값을 확률변수 X라 할 때, X의 평균은 $\frac{1}{5}(2^m - 2^n)$이다. $m+n$의 값은? (단, m, n은 자연수이다.)[3점–1004–대성]

① 50 ② 67 ③ 79

④ 85 ⑤ 98

54. 정사면체의 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 하나씩 적혀 있다. 이 정사면체를 4번 던질 때, 밑면에 적힌 수의 집합의 원소의 개수를 확률변수 X라 하자. 예를 들어 밑면에 적힌 수가 1, 4, 1, 2가 나오면 밑면에 적힌 수의 집합은 $\{1, 2, 4\}$이므로 $X = 3$이다. 확률변수 X의 평균은?[4점–1009–대성]

① $\frac{115}{64}$ ② $\frac{135}{64}$ ③ $\frac{155}{64}$

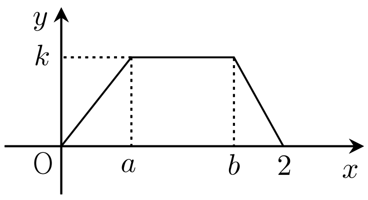
④ $\frac{175}{64}$ ⑤ $\frac{195}{64}$

55. 주머니에 파란색 구슬 2개와 노란색 구슬 8개가 들어 있다. 이 주머니에서 구슬을 임의로 한 개씩 순서대로 꺼내어 X번째에 마지막 파란색 구슬이 나왔다고 할 때, 확률변수 X의 기댓값은? (단, 꺼낸 구슬은 다시 주머니에 넣지 않고, 같은 색의 구슬은 구별하지 않는다.)[4점–1008–중앙]

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$

④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

56. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위가 $0 \le X \le 2$이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다.



$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \frac{1}{2}$ 일 때, k의 값은 $k = \frac{q}{p}$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1011-대전교]

57. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} kx & (0 \le x < 1) \\ -\frac{1}{2}k(x-3) & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le \mathrm{X} \le 3)$의 값은?[3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{6}$

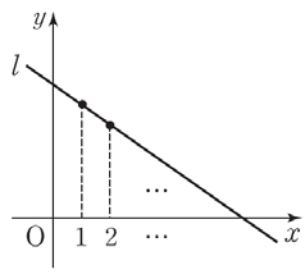
④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

58. 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = 6x(1-x) \ (0 \le x \le 1)$$

일 때, 확률변수 $Y = 80X + 10$의 평균을 a, 분산을 b라 할 때 $a+b$의 값을 구하시오.[3점]

59. 확률변수 X가 될 수 있는 값은 1부터 10까지의 자연수이고, 좌표평면에서 점 $(x, \mathrm{P}(X=x))$ $(x = 1, 2, \cdots, 10)$는 그림과 같이 직선 l 위에 있다. $\mathrm{P}(X=1) = \frac{1}{5}$ 일 때, 직선 l과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수)[4점-1008-비상]



60. 한글을 모르는 500 명에게 $\boxed{\text{어느}}$, $\boxed{\text{고백}}$, $\boxed{\text{따스한}}$, $\boxed{\text{날의}}$ 4 개의 낱말 카드를 임의로 배열하게 하려고 할 때, $\boxed{\text{어느}}$, $\boxed{\text{고백}}$이라는 카드가 이 순서대로 연속해서 배열한 사람의 수를 확률변수 X라 하자. 이때 X의 기댓값은?[4점-1007-종로]

① 50 ② 75 ③ 100

④ 125 ⑤ 150

61. 다음 표는 각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적힌 어떤 사면체를 1000번 던져서 바닥면에 적힌 숫자가 나오는 횟수를 조사하여 나타낸 것이다.

바닥면에 적힌 숫자	1	2	3	4	계
나온 횟수	300	100	400	200	1000

이 사면체를 한 번 던질 때 바닥면에 적힌 숫자가 위의 표의 비율대로 나온다고 가정하자. 이 사면체를 두 번 던져서 나온 숫자 중 작지 않은 수를 확률변수 X라 할 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?

[3점-1008-대성]

① 2.25 ② 2.55 ③ 2.77

④ 3.11 ⑤ 3.25

62. 두 사람 A와 B가 각각 주사위를 한 개씩 동시에 던지는 시행을 한다. 이 시행에서 나온 두 주사위의 눈의 수의 차가 3보다 작으면 A가 1점을 얻고, 그렇지 않으면 B가 1점을 얻는다. 이와 같은 시행을 15회 반복할 때, A가 얻는 점수의 합의 기댓값과 B가 얻는 점수의 합의 기댓값의 차는?[4점-1009-평가원]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

63. 자연수 n $(1 \le n \le 10)$이 적힌 카드가 각각 n장씩 모두 55장이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 뽑아 그 수가 적힌 횟수만큼 주사위를 던져 나오는 눈의 수의 합을 확률변수 X라 할 때, X의 평균 $\mathrm{E}(X)$의 값은?[4점-1008-대성]

① 23 ② $\frac{47}{2}$ ③ 24
④ $\frac{49}{2}$ ⑤ 25

64. 주머니 속에 1, 2, 3, 4의 숫자가 각각 한 개씩 적혀 있는 네 장의 카드가 들어 있다. 이 주머니에서 카드를 한 장 꺼내어 수를 확인한 다음 다시 주머니에 넣는 시행을 한다. 이 시행을 48번 반복했을 때, 1이 적힌 카드가 15회 이상 나올 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 p이다. 이때, $100p$의 값을 구하시오.[3점-1008-중앙]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.34
1.2	0.39
1.5	0.43
1.8	0.46

65. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따를 때, 함수 $f(a)$를 다음과 같이 정의하자.

$f(a)=\mathrm{P}(X \ge a+40)$ (단, a는 실수)

이때, $f(0)+f(15)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

[3점-1010-비상]

① 0.1574 ② 0.9544 ③ 0.9789
④ 1.1359 ⑤ 1.8185

66. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 실수 a, b에 대하여 $\mathrm{P}(X<a-3)=\mathrm{P}(X>b+2)$가 성립한다. $Y=\frac{1}{3}X+1$일 때, 확률변수 Y의 평균은 51, 분산은 $\frac{4}{9}$이다. 이 때, $a+b+\sigma$의 값은?[3점-1007-교육청]

① 299 ② 300 ③ 301
④ 302 ⑤ 303

67. 직원의 수가 400명인 어느 회사의 직원들이 점심시간에 구내식당에서 식사할 확률이 90%라 한다. 이 회사의 구내식당에서 372명의 점심식사를 준비했을 때, 구내식당에 온 모든 직원들이 식ㄱ사를 할 수 있을 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면?[3점-1009-종로]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

68. 어느 대나무 숲에서 잘라낸 대나무들의 길이는 평균이 13.2 m, 표준편차가 1.5 m인 정규분포를 따른다고 한다. 이 중에서 임의로 대나무 하나를 선택할 때, 그 길이가 12 m 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점–1009–대성]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.2257
0.8	0.2881
1.0	0.3413
1.2	0.3849
1.4	0.4192

① 0.7257 ② 0.7881 ③ 0.8413
④ 0.8849 ⑤ 0.9192

69. 두 연속확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(am,\ b\sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \ge 0) = \mathrm{P}(Y \ge 0)$
(나) $\mathrm{P}(X \le 1) + \mathrm{P}(Y \ge 2) = 1$

이때, $a+b$의 값은? (단, $a>0, b>0$)[4점–1011–대전교]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

70. 어느 시험에 응시한 수험생들의 시험점수를 확률변수 X라 할 때, X는 정규분포 $\mathrm{N}(57,\ 20^2)$을 따른다고 한다. $\mathrm{P}(X \ge k) = 0.04$이면 k점 이상을 받은 수험생의 성적을 1등급이라 할 때, 이 시험에 응시한 수험생의 성적이 1등급이 되기 위한 최저 점수를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.65	0.450
1.75	0.460
1.96	0.475
2.58	0.495

[4점–1011–중앙]

① 88점 ② 90점 ③ 92점
④ 94점 ⑤ 96점

71. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{4}\right)$을 따를 때, 등식

$$\mathrm{P}(|X-m| \le p\sigma) = \mathrm{P}\left(|Y-m| \le \frac{3}{2}\sigma\right)$$

를 만족시키는 양수 p에 대하여 p^2의 값을 구하시오. (단, $\sigma>0$)
[4점–1010–비상]

72. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고, 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때,

$$\mathrm{P}\left(X \ge \frac{2}{3}m\right) = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{3}{2}\right)$$

이 성립하도록 하는 m, σ에 대하여 $\dfrac{m}{\sigma}$의 값은? (단, $\sigma>0$)
[3점–1010–비상]

① $\dfrac{5}{2}$ ② 3 ③ $\dfrac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\dfrac{9}{2}$

73. 재학생의 수가 각각 1000명인 A, B 두 고등학교의 재학생의 키를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(174.2,\ 10^2)$, $\mathrm{N}(m,\ 15^2)$을 따른다고 한다. B 고등학교에서 키가 185cm 이상인 학생 수가 A고등학교에서 키가 185cm 이상인 학생 수의 $\dfrac{1}{2}$이라고 할 때, m의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.08) = 0.36$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.48) = 0.43$이다.)
[4점–1004–대성]

① 162.8 ② 168.2 ③ 168.8
④ 172.4 ⑤ 174.2

74. 1 부터 5 까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 공 5 개가 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 공을 하나 꺼내어 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는다. 이와 같은 시행을 150 번 반복할 때, 짝수가 적혀 있는 공이 나오는 횟수를 X 라 하자. 확률변수 X 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-교육청]

<보 기>

ㄱ. X 의 분산은 36 이다.
ㄴ. $\mathrm{P}(X=0)<\mathrm{P}(X=150)$
ㄷ. $\mathrm{P}(X\le 51)>\mathrm{P}(X\ge 72)$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

75. 어느 공장에서 생산되는 공 모양 장난감의 지름의 길이는 평균이 6.2 cm, 표준편차가 1.5 cm인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산되는 공 모양 장난감 중에서 한 개씩 두 번을 각각 독립적으로 임의 추출할 때, 선택한 두 개의 장난감의 지름의 길이가 둘 중 하나는 5.0 cm 이하이고 다른 하나는 7.7 cm 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1011-대성]

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.7	0.26
0.8	0.29
0.9	0.32
1.0	0.34

① 0.0336 ② 0.0504 ③ 0.0672
④ 0.0829 ⑤ 0.0986

76. 어느 회사의 입사 시험 응시자의 점수는 평균이 56 점, 표준편차가 6 점인 정규분포를 따르고 최저 합격 점수는 68 점이라고 한다. 이 시험의 응시자 중 400 명을 임의로 추출하였을 때, 합격한 사람이 15명 이상 포함되어 있을 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1010-대성]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 0.01 ② 0.02 ③ 0.04
④ 0.07 ⑤ 0.16

77. 어느 고등학교 학생들의 과학 수행평가의 점수 X는 최저 20점에서 최고 80점이고, 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 6^2)$을 따른다고 한다. 어느 학생들의 수행평가 점수를 $Y=\frac{3}{2}X-19$에 의하여 조정한다고 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 계산한다.)[4점-1009-종로]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.04	0.35
1.56	0.44
1.67	0.45
2.0	0.48

<보 기>

ㄱ. 조정된 점수의 평균은 56점이다.
ㄴ. 조정된 점수로 상위 2 %인 학생의 점수는 70점이다.
ㄷ. 조정 전 보다 조정 후의 점수가 오른 학생은 전체의 98 %이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

78. 여섯 면에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀있는 정육면체 모양의 주사위가 있다. 이 주사위를 100번 반복하여 던질 때, 3의 배수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자.

$\sum_{k=1}^{20}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값은?[4점-1003-교육청]

① $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^{100}-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$

③ $\left(\frac{1}{3}\right)^{100}-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$ ④ $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}-\left(\frac{1}{3}\right)^{50}$

⑤ $\left(\frac{1}{3}\right)^{50}-\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$

79. 양수 a에 대하여 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(a-x)^{n+1}}{x^n+(a-x)^n} & (0\le x\le 2a)\\ 0 & (x<0 \text{ 또는 } x>2a)\end{cases}$$

이때 $30a$의 값을 구하시오.[4점-1004-대성]

80. P축구 교실에서는 훈련생마다 6주간의 훈련결과를 100점 만점으로 평가하여 수료시키고 있다. 훈련생들의 평가점수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 10^2)$을 따르고, 평가점수가 70점 이하이면 재교육 대상이 된다고 한다. 또 이 축구 교실의 훈련생 지도역량을 나타내는 지도력 등급 L은 $L=\frac{m-35}{5}$로 계산하여 홍보에 사용된다고 한다. 6주간의 훈련을 끝낸 임의의 한 훈련생이 재교육대상이 될 확률을 오른쪽 표준 정규분포를 이용하여 구했더니 15%일 때, 이 축구교실의 지도력 등급 L은?[4점-1007-종로]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

81. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 표본을 임의추출한다. 크기가 17인 표본과 크기 24인 표본의 표본평균을 각각 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$라 하고 $\overline{X_A}$와 $\overline{X_B}$의 분포를 이용하여 추정한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 각각 $[a,\ b]$, $[c,\ d]$라고 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1009-종로]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{V}(\overline{X_A})>\mathrm{V}(\overline{X_B})$
ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X_A}\le m+2)<\mathrm{P}(\overline{X_B}\le m+2)$
ㄷ. $b-a>d-c$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

82. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀 있는 흰 공 3개와 검은 공 3개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 최솟값을 확률변수 X라 하자. X의 평균이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)[4점-1003-교육청]

83. 두 연속확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $\mathrm{N}(am,\ b\sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}(Y \geq 0)$
(나) $\mathrm{P}(X \leq 1) + \mathrm{P}(Y \geq 2) = 1$

이때, $a+b$의 값은? (단, $a>0, b>0$)[4점-1011-대전교]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

84. 프로야구 선수들의 작년 리그 전체의 타점을 평균이 43점 표준편차가 12점인 정규분포를 따랐다고 한다. 올해는 타점이 증가되어 타점의 분포가 평균 52점, 표준편차가 11점인 정규분포를 따를 것으로 예상된다. 작년 타점이 79점인 어떤 프로야구 선수가 올해도 동일한 타점 순위를 유지하려면 타점이 몇 점이어야 하는지 구하시오. (단, 다른 모든 상황은 작년과 동일하다고 가정한다.)

[3점-1008-대성]

85. 어떤 게임은 한 번 하여 이기면 8점을 얻고, 지면 4점을 잃는다고 한다. 이때, 이길 확률이 $\frac{1}{3}$, 질 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 이 게임을 0점부터 시작하여 1800회를 독립적으로 시행한 후의 점수가 480점 이상이 될 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1008-대성]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1590
④ 0.3085 ⑤ 0.4562

86. 숫자가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 있다. 이 10장의 카드 중 적혀 있는 숫자가 2, 3, 5 인 카드는 각각 두 장, 세 장, 다섯 장이다. 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 뽑아 숫자를 확인한 후 다시 섞는다. 이 시행을 448번 하였을 때, 세 카드에 쓰여 있는 숫자의 합이 9 이하인 횟수를 확률변수 X라 하자. X가 49 이상 70 이하가 될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1011-대전교]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.6826 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8351 ⑤ 0.9270

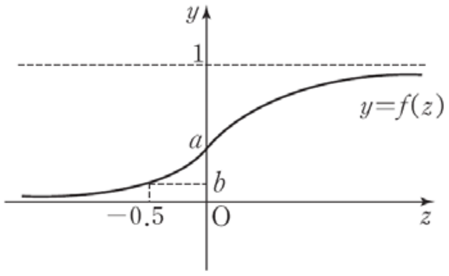
87. 확률변수 Z가 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따를 때, 함수 $f(z)$를 다음과 같이 정의한다.

$$f(z) = \mathrm{P}(Z \le z)$$

함수 $y = f(z)$의 그래프가 다음과 같이 두 점 $(0,\ a)$, $(-0.5,\ b)$를 지날 때, $a+b$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1008-비상]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413



① 0.3830　② 0.6826　③ 0.6915
④ 0.8085　⑤ 0.8413

88. 모집인원이 200명인 어느 대학의 입학시험에 1000명의 수험생이 응시하였다. 수험생의 점수는 평균이 156점이고 표준편차가 20점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격하기 위한 최저 점수를 오른쪽 정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1003-교육청]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.52	0.20
0.67	0.25
0.84	0.30
1.00	0.34

① 166.4점　② 168.8점　③ 169.4점
④ 170.8점　⑤ 172.8점

89. 어느 회사 직원의 하루 생산량은 근무 기간에 따라 달라진다고 한다. 근무 기간이 n개월 $(1 \le n \le 100)$인 직원의 하루 생산량은 평균이 $an+100$(a는 상수), 표준편차가 12인 정규분포를 따른다고 한다. 근무 기간이 16개월인 직원의 하루 생산량이 84 이하일 확률이 0.0228일 때, 근무 기간이 36개월인 직원의 하루 생산량이 100 이상이고 142 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-2010-대수능]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.7745　② 0.8185　③ 0.9104
④ 0.9270　⑤ 0.9710

90. 어느 지역에서 재배되는 2년생 더덕 한 뿌리의 무게는 평균 40g, 표준편차 5g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 지역에서 재배되는 2년생 더덕 중에서 무게가 30g 미만인 것은 상품화 하지 않고, 30g 이상 45g 미만인 것은 일반상품으로 분류하고, 45g 이상인 것은 우수상품으로 분류한다. 이 지역에서 재배되는 2년생 더덕 한 뿌리를 임의로 선택하였을 때 이 더덕이 일반상품으로 분류될 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1010-교육청]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.7745　② 0.8185　③ 0.8256
④ 0.8332　⑤ 0.8413

91. 어느 재래시장을 이용하는 고객의 집에서 시장까지의 거리는 평균이 1740m, 표준편차가 500m인 정규분포를 따른다고 한다. 집에서 시장까지의 거리가 2000m 이상인 고객 중에서 15%, 2000m 미만인 고객 중에서 5%는 자가용을 이용하여 시장에 온다고 한다. 자가용을 이용하여 시장에 온 고객 중에서 임의로 1명을 선택할 때, 이 고객의 집에서 시장까지의 거리가 2000m 미만일 확률은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.52) = 0.2$로 계산한다.)[3점-2010-대수능]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

92. 어느 동물의 특정 자극에 대한 반응 시간은 평균이 m, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 반응 시간이 2.93 미만일 확률이 0.1003일 때, m의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1009-평가원]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.91	0.3186
1.28	0.3997
1.65	0.4505
2.02	0.4783

① 3.47 ② 3.84 ③ 4.21
④ 4.58 ⑤ 4.95

93. 자동차의 안정장치 중에서 '타이어 공기압 감지 시스템' TPMS (Tire Pressure Monitoring System)'이 있다.
TPMS는 실시간으로 자동차의 타이어 공기압을 측정하여 운전자에게 그 측정값을 알려준다. 하지만, 기계적 특성 때문에 TPMS가 측정한 공기압과 실제 타이어 공기압 사이에는 일반적으로 오차가 존재한다. 어떤 자동차에 설치한 TPMS에 대하여 다음이 성립한다고 한다.

> 이 자동차의 TPMS가 측정한 타이어 공기압을 P(psi)라 하고, 실제 타이어 공기압을 R(psi)라 할 때, $X = P - R$와 같이 정의한 값 X는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1.5^2)$을 따른다.

이 자동차의 TPMS가 타이어의 공기압을 $P = 30$(psi)이라고 표시했을 때, 실제 타이어 공기압 R가 27(psi)이상 33(psi)이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, psi는 공기압의 단위이다.)[4점-1004-대성]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.33	0.4082
1.66	0.4515
2.00	0.4772
2.33	0.4901

① 0.9030 ② 0.9082 ③ 0.9544
④ 0.9772 ⑤ 0.9901

94. 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Z가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) Z의 평균은 0이고 표준편차는 1이다.
> (나) $Z = aX + b$ (단, $a > 0$)

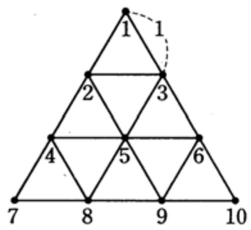
옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-메가]

<보 기>

ㄱ. X의 표준편차는 a이다.
ㄴ. $\mathrm{P}(X \ge 0) = \mathrm{P}(Z \le 0)$이면 $b = 0$이다.
ㄷ. $\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) = \mathrm{P}\left(-\frac{b}{a} \le X \le \frac{1-b}{a}\right)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

95. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 9개를 이어 붙여서 한 변의 길이가 3인 정삼각형을 만들고, 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 각 꼭짓점에 그림과 같이1, 2, 3,$\cdots$, 10의 번호를 붙였다. 한 변의 길이가 1인 처음 정삼각형 9개 중 한 개를 택할 때, 확률변수 X를 다음과 같이 정의한다.



(가) △모양의 정삼각형이면 세 꼭짓점에 있는 수 중 가장 작은 수를 확률변수 X라 한다.
(나) ▽모양의 정삼각형이면 세 꼭짓점에 있는 수 중에 두 번째 큰 수를 확률변수 X라 한다.

이때 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점-1011-종로]

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{9}$
ㄴ. $\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$
ㄷ. $\mathrm{E}(9X-5)=30$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄴ, ㄷ

96. 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따를 때, 함수 $f(k)$를 다음과 같이 정의하자. (단, k는 실수이고, $\sigma>0$이다.)

$f(k)=\mathrm{P}(X\ge m+k\sigma)$

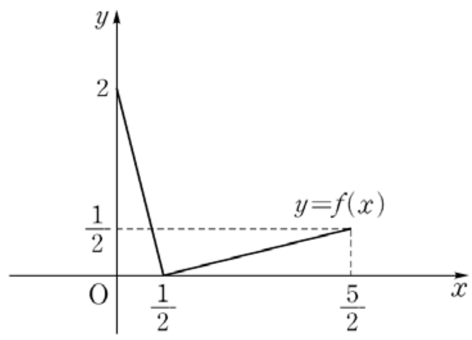
<보 기>

ㄱ. $f(0)=1$
ㄴ. $k_1<k_2$이면 $f(k_1)>f(k_2)$이다.
ㄷ. 임의의 실수 k에 대하여 $f(k)+f(k-1)=1$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1004-메가]

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

97. 연속확률변수 X가 취하는 값의 범위는 $0\le X\le\frac{5}{2}$이고 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 할 때, $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $F(x)$를

$$F(x)=\mathrm{P}\left(x\le X\le x+\frac{1}{2}\right)\ (0\le x\le 2)$$

라 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점-1010-메가]

<보 기>

ㄱ. $F(0)=\frac{1}{2}$
ㄴ. $F(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 최솟값을 갖는다.
ㄷ. $F(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

통계적추정

1. 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의 추출할 때의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\overline{X}^2$의 평균 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$의 값을 구하시오.[3점-1010-비상]

2. 확률변수 X의 확률분포가 오른쪽 표와 같다. 이 모집단에서 크기가 25인 표본을 복원추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 분산 $\mathrm{V}(\overline{X})$의 값은?[3점-1010-비상]

X	1	2	4	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

① $\frac{4}{125}$ ② $\frac{6}{125}$ ③ $\frac{8}{125}$
④ $\frac{2}{25}$ ⑤ $\frac{12}{125}$

3. 다음은 어떤 모집단의 확률변수 X의 확률분포표이다.

X	10	20	30	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}-a$	1

이 집단에서 크기가 2인 표본을 추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\overline{X}$의 평균이 21일 때, $100\mathrm{P}(\overline{X}=20)$을 구하시오.
[4점-1007-종로]

4. 어느 회사에서 생산하는 음료수 1병의 무게는 평균이 500g, 표준편차가 30g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 음료수는 한 상자에 100병씩 넣어 판매된다고 한다. 이 회사에서 판매하는 음료수 상자 중에서 임의로 선택한 한 상자에 들어 있는 음료수 100병의 무게의 평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\mathrm{P}(497 \le \overline{X} \le 506)$의 값을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1010-메가]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6826 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.9104 ⑤ 0.9544

5. H시의 새로운 교통 신호 체계인 직진 후 좌회전에 대한 만족도를 점수화하여 조사했더니 평균이 75점이고, 표준편차가 10점인 정규분포를 이루었다. 이 조사에 참여한 사람 중 임의로 400명을 뽑아 만족도를 조사할 때, 그 평균이 74점 이상 76점 이하일 확률은?[3점-1007-종로]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.7745 ② 0.8664 ③ 0.9332
④ 0.9544 ⑤ 0.9987

6. 어느 공장에서 생산하는 K제품의 길이는 평균 30cm, 표준편차가 5cm인 정규분포를 따르고, 길이가 39cm 이상인 제품은 불량품으로 판정한다고 한다. 이 공장에서 생산되는 K제품 중에서 3750개를 임의로 추출할 때, 불량품이 168개 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1010-중앙]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.2	0.38
1.5	0.43
1.8	0.46
2.0	0.48
2.3	0.49

① 0.01 ② 0.02 ③ 0.04
④ 0.07 ⑤ 0.12

7. 어느 비누 공장에서 생산되는 제품의 무게는 평균 30g, 표준편차 5g인 정규분포를 따르는데 이 제품 4개를 하나의 상자로 포장하여 상품으로 출시한다고 한다. 이 때 한 상자의 무게가 100g 이하인 것을 불량품으로 판정한다면 2500상자 중 불량인 상품 상자가 57개 이상일 확률은? (단, $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.34$, $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$로 계산한다.)[3점-1009-종로]

① 0.02 ② 0.04 ③ 0.16
④ 0.32 ⑤ 0.82

8. 어느 도시에서 공용 자전거의 1회 이용 시간은 평균이 60분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다. 공용 자전거를 이용한 25회를 임의추출하여 조사할 때, 25회 이용시간의 총합이 1450분 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-2010-대수능]

[표준정규분포표]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8351 ② 0.8413 ③ 0.9332
④ 0.9772 ⑤ 0.9938

9. 어느 회사에서 생산하는 비누의 무게는 평균이 250g, 표준편차가 20g인 정규분포를 따른다. 이 회사 비누 중에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 조사한 비누 무게의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(242 \leq \overline{X} \leq 258) \leq 0.9544$를 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점-1011-대전교]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 16 ② 25 ③ 36
④ 49 ⑤ 64

10. 정규분포 $N(3,\ 3^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$ 라 하자. 임의의 양수 a 에 대하여 $P(0 \leq \overline{X} \leq a) = P(0 \leq Z+3 \leq a)$ 가 항상 성립할 때, 표본의 크기 n 의 값은? (단, 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0,\ 1^2)$ 을 따른다.)[3점-1004-대성]

① 2 ② 4 ③ 9
④ 16 ⑤ 25

11. 어느 과자 공장에서 만드는 과자의 무게는 평균이 80g, 표준편차가 6g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 만든 과자 중 임의로 9개를 선택할 때, 그 무게의 합이 684g이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1010-대성]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.0228 ② 0.0401 ③ 0.0668
④ 0.1056 ⑤ 0.1587

12. 정규분포 $N(100,\ 8^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $P(|\overline{X}-100| \leq 1.2) = 0.9282$를 만족하는 n의 값을 구하시오. (단, $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.4641$)[3점-1008-중앙]

13. 어느 회사의 고속버스가 서울에서 청주까지 운행하는 데 걸리는 시간은 평균 100분, 표준편차 5분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사의 고속버스 중 임의로 선택한 4대의 버스가 서울에서 청주까지 운행하는 데 걸린 시간의 평균이 98분 이상 103분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1009-중앙]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.8	0.288
1.2	0.385
1.6	0.445
2.0	0.477

① 0.477 ② 0.673 ③ 0.733
④ 0.830 ⑤ 0.922

14. 어느 공장에서 생산되는 휴대용 건전지의 수명을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 20^2)$을 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 건전지 중 n개를 임의추출하여 측정한 건전지의 수명의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간이 $348.08 \le m \le 355.92$일 때, $n+\overline{X}$의 값은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.)[4점-1010-비상]

① 436 ② 440 ③ 444
④ 448 ⑤ 452

15. 어느 포도 농원에서 수확한 포도 한 송이에 달린 포도알의 개수는 정규분포를 따른다고 한다. 이 포도 농원에서 수확한 포도 25송이를 임의 추출하여 한 송이 당 포도알의 개수를 조사하였더니 평균이 64개 이었다. 이 농원에서 수확한 포도 전체의 한 송이 당 포도알의 개수의 평균 m을 신뢰도 95%로 추정하면 $60.08 \le m \le 67.92$, 신뢰도 99%로 추정하면 $\alpha \le m \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? (단, Z가 표준 정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$이다.)[3점-1011-대성]

① 10.32 ② 9.03 ③ 7.84
④ 7.74 ⑤ 5.16

16. 어느 남자 고등학교 3학년 학생 전체의 50 m 달리기 기록은 평균이 8.5초, 표준편차가 1.2초인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 3학년 학생 중 4명을 임의추출하여 얻은 50 m 달리기 기록의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\overline{X}$가 7.3초 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1008-비상]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
④ 0.3413 ⑤ 0.4772

17. 어떤 자동판매기에서 판매되는 음료수의 용량은 평균이 200(mL), 표준편차가 20(mL)인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자동판매기에서 임의로 100개의 음료수를 추출하였을 때, 음료수의 용량의 평균을 $\overline{X}$라 하자. 확률 $\mathrm{P}(198 \le \overline{X} \le 204)$를 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1009-대성]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6687 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8664 ⑤ 0.9104

18. 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 4^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의로 추출하여 그 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z에 대하여

$$2\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = 1 + \mathrm{P}(|Z| \le b)$$

가 성립할 때, 다음 중 a, b의 관계식으로 옳은 것은? (단, $b>0$)
[4점-1011-종로]

① $a+b=50$ ② $2a+b=25$ ③ $2a+b=50$
④ $a+2b=25$ ⑤ $a+2b=50$

19. 수학능력시험에서 수리 영역 '가'형을 치른 학생들의 표준점수는 평균이 100점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 시험을 치른 학생 중에서 임의로 뽑은 100명의 수리 영역 표준점수의 평균이 a점 이상 102점 이하일 확률이 0.82일 때, a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.[4점-1011-대성]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48

20. 어느 농장에서 생산하는 토마토 한 개의 무게는 평균이 240 g, 표준편차가 40g인 정규분포를 따르고, 이 토마토는 한 상자에 25개씩 넣어서 출하된다. 이 농장에서 출하되는 토마토 한상자의 무게가
6.4 kg 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 상자의 무게는 무시한다.)[4점-1010-비상]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0149 ② 0.0228 ③ 0.1187
④ 0.3413 ⑤ 0.4772

21. 어느 해 대학수학능력 시험에서 수리 영역에서의 원점수 X는 정규분포 $N(50, \sigma^2)$을 따르고, 언어영역에서의 원점수 Y는 정규분포 $N\left(55, \frac{9^2}{10^2}\sigma^2\right)$을 따른다고 한다. 이때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 백분위는 특정집단의 점수분포에서 한 개인의 상대적 위치를 나타낸 것으로, 백분위가 a% 인 것은 자신의 점수보다 낮은 점수의 수험생이 a% 있다는 것을 의미한다.)

[4점-1008-종로]

<보 기>

ㄱ. $P(X \ge 55) < P(Y \le 50)$
ㄴ. 수리 영역에서 60점을 받은 학생의 백분위가 언어영역
역
에서 63점을 받은 학생의 백분위보다 높다.
ㄷ. 수리 영역에 응시한 100명의 평균점수를 $\overline{X}$, 언어영역
역
에 응시한 81명의 평균점수를 $\overline{Y}$라 할 때,
$P(\overline{X} \le 55) > P(\overline{Y} \le 59)$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

22. 어느 제과점에서 만든 초콜릿 1개의 무게는 평균 170g, 표준편차 4g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 제과점에서 만든 초콜릿 중 임의로 추출한 64개의 무게에 대한 평균 $\overline{X}$g이 $169.2 \le \overline{X} \le k$일때, 이 제과점에서 만든 초콜릿을 정품으로 판전하고 있다. 이 제과점에서 만든 초콜릿이 정품으로 판정될 확률이 93.7%일 때, 상수 k의 값을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구하면?

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.6	0.4452
1.8	0.4641
2.0	0.4772
2.2	0.4861
2.4	0.4918

[4점-1010-종로]

① 170.4 ② 170.8 ③ 171.2
④ 171.8 ⑤ 172.2

23. 분산이 σ^2인 정규분포를 따르는 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 추정한 후 신뢰구간의 길이를 구하고자 한다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 79.6%의 신뢰구간의 길이가 l이고, 모평균 m에 대한 신뢰도 α%의 신뢰구간의 길이는 $2l$이다. 이 때, α의 값은?[4점–1004–교육청]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.27	0.3980
1.69	0.4545
1.96	0.4750
2.54	0.4945
3.29	0.4995

① 87.3 ② 90.9 ③ 95.0
④ 98.9 ⑤ 99.9

24. 평균이 m이고 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단이 있다. 어느 조사에서 크기 n인 표본을 임의추출하고 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[a,\ b]$일 때, 조사비용과 추정의 정확도에 따른 수익이 다음과 같다고 한다.

n	$\dfrac{\sqrt{n}}{1+\log n}$
1600	9.51
1700	9.75
1800	9.97
1900	10.19
2000	10.40

비용 : $10n$, 수익 : $10^{\frac{2}{b-a}}$

n이 100의 배수일 때, 수익이 비용보다 크게 되는 n의 최솟값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.4750$이다.)[4점–1009–평가원]

① 1600 ② 1700 ③ 1800
④ 1900 ⑤ 2000

25. 어느 공장에서 생산되는 제품의 무게 X는 평균이 60g, 표준편차가 5g인 정규분포를 따른다고 한다. 제품의 무게가 50g 이하인 제품은 불량품으로 판정한다. 이 공장에서 생산된 제품 중에서 2500개를 임의로 추출할 때, 2500개 무게의 평균을 $\overline{X}$, 불량품의 개수를 Y라고 하자. 위의 표준정규분포표를 이용하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점–1007–교육청]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.19
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

<보 기>

ㄱ. $\mathrm{P}(\overline{X} \ge 60) = \dfrac{1}{2}$

ㄴ. $\mathrm{P}(Y \ge 57) = \mathrm{P}(\overline{X} \le 59.9)$

ㄷ. 임의의 양수 k에 대하여
$\mathrm{P}(60-k \le X \le 60+k) > \mathrm{P}(60-k \le \overline{X} \le 60+k)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 다음은 어느 모집단의 확률분포표이다.

X	-2	0	1	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{1}{4}$	a	$\dfrac{1}{2}$	1

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 표준편차는? (단, a는 상수이다.)[4점–1009–평가원]

① $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ③ $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$
④ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

27. 어느 고등학교에 다니는 학생 1600명의 아침 통학 소요 시간과 학교 도착 시각은 각각 평균과 표준편차가 다음 표와 같은 정규 분포를 따른다고 한다.

	평균	표준편차
아침 통학 소요 시간	30분	10분
학교 도착 시각	오전 7시 40분	8분

오전 8시부터 수업이 시작된다고 할 때, 수업에 지각을 하는 학생은 평균 n명이고, 이 학교의 전교생 중에서 임의로 뽑은 16명의 아침 통학 소요 시간의 평균이 35분 이상일 확률은 p이다. $\frac{n}{p}$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1007-대성]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 200 ② 400 ③ 800
④ 1600 ⑤ 3200

28. 혜진이와 동연이는 정규분포를 따르는 한 모집단의 평균을 각각 추정하였다. 혜진이는 크기가 n_1인 표본을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정하였더니 신뢰구간이 $51.755 \le m \le 52.245$이었고, 동연이는 크기가 n_2인 표본을 임의추출하여 신뢰도 99%로 추정하였더니 신뢰구간이 $49.42 \le m \le 54.58$이었다. 자연수 n_1, n_2에 대하여 $\frac{n_1}{n_2}$의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수 일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2.58) = 0.495$이다.) [4점-1010-대성]

29. 어느 도시 주민의 10%가 과체중이라고 한다. 이 도시에서 주민 100명을 임의추출할 때, 과체중인 사람이 10명 이상 13명 이하일 확률을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1) = 0.6826$)[3점]

30. 어느 지역에 거주하는 사람 중에서 자전거를 가지고 있는 사람의 비율은 20%이다. 이 지역에 거주하는 사람 중 100명을 임의로 추출하였을 때, 자전거를 가지고 있는 사람의 수가 16명 이상 26명 이하일 확률을 위의 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[3점-1010-메가]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.4772 ② 0.7745 ③ 0.8185
④ 0.8664 ⑤ 0.9104

31. A나라의 자동차 보유율은 100명당 10대이다. A나라의 사람 중에 100명의 사람을 임의로 추출하였을 때, 이 사람들 중에 자동차를 보유하고 있는 사람이 9명 이하일 확률은?
(단, $\frac{1}{3} = 0.33$으로 계산하고, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.03) = 0.012$, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.33) = 0.1293$)[3점]

① 0.012 ② 0.0024 ③ 0.3707
④ 0.4880 ⑤ 0.5012

32. 어느 공장에서 생산되는 전구 중에서 임의로 400개를 추출하여 검사하였더니 이 중 8개가 불량품이었다. 이 공장에서 생산되는 전구의 불량품의 비율 p를 신뢰도 95%로 추정할 때의 신뢰구간은 $\alpha \le p \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.475$이다.)[3점-1010-대성]

① 0.028 ② 0.032 ③ 0.036
④ 0.040 ⑤ 0.044

33. 어느 고등학교에서 학생 100명을 임의추출하여 휴대폰을 갖고 있는지를 물었더니 80명이 갖고 있다고 했다. 이 고등학교 전체 학생 중에서 휴대폰을 갖고 있는 학생들의 비율 p에 대하여 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하시오.
(단, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$)[3점]

34. 고등학교 학생 중 안경을 끼는 학생들의 비율을 알아보기 위하여 1000명을 임의추출하여 조사한 결과 530명이 안경을 끼고 있는 것으로 조사되었다. 전체 고등학교 학생들 중 안경을 끼는 학생의 비율에 대하여 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하시오.
(단, $1.96 \times \sqrt{(0.53 \times 0.47) \div 1000}=0.031$로 계산하고, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$)[3점]

35. A 여론 조사 기관에서 어떤 드라마의 시청률을 조사하기 위해 임의로 추출한 1000명을 대상으로 조사한 결과 100명이 시청하였다고 한다. 이 결과를 이용하여 전체 시청자의 시청률을 신뢰도 95%로 신뢰구간을 구하였더니 $[a, b]$이었다. $b-a \le 0.002$를 만족시키려면 최소한 p명을 임의 추출하여 조사해야 한다. 이때, $\sqrt{p}$의 값을 구하시오. (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.95$)[4점-1011-대전교]

36. C 도시에서 주변 도시와 행정 구역 통합을 위하여 이 지역 주민 n명을 대상으로 여론 조사를 실시하였더니 찬성 비율이 $\hat{p}=0.5$이었다. 이 지역 전체 주민의 행정 구역 통합에 대한 찬성률을 p라 할 때, $|\hat{p}-p| \le 0.05$일 확률이 0.95 이상이 되도록 하기 위한 n의 최솟값을 구하시오. (단, 확률변수 Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$이다.)[4점-1004-대성]

37. 우리나라 성인을 대상으로 특정 질병에 대한 항체 보유 비율을 조사하려고 한다. 모집단의 항체 보유 비율을 p, 모집단에서 임의로 추출한 n명을 대상으로 조사한 표본의 항체 보유 비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, $|\hat{p}-p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$일 확률이 0.9544 이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포가 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)=0.4772$이다.)[4점-2010-대수능]

38. A조사 기관에서는 어느 교양 프로그램에 대한 시청률을 전국의 학생을 대상으로 조사하기로 하였다.

전국의 학생 중에서 400명을 임의추출하여 그 교양 프로그램을 시청한 학생 수를 조사하였더니 80명이었다. 이 교양 프로그램에 대한 시청률을 신뢰도 95% 로 추정한 신뢰구간의 길이는? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 2) = 0.95$ 이다.)

[3점-1010-교육청]

① 0.02 ② 0.04 ③ 0.06
④ 0.08 ⑤ 0.1

39. 어느 회사에서 사원 300명을 임의추출하여 자신이 선택한 직업에 대한 만족 여부를 조사하였더니 만족이 75명, 불만족이 225명이었다. 이 회사 전체 사원 중에서 자신이 선택한 직업에 만족하고 있는 사람의 비율 p를 신뢰도 95%로 추정할 때, p의 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$) [4점-1010-중앙]

① $[0.201,\ 0.299]$ ② $[0.211,\ 0.289]$ ③ $[0.222,\ 0.278]$
④ $[0.231,\ 0.269]$ ⑤ $[0.243,\ 0.257]$

40. 인터넷 대학입학 원서접수 대행업체인 A회사에서는 회사 확장 계획을 결정하기 위해서 인터넷 대학입학 원서접수를 마친 수험생 600명을 대상으로 원서를 접수할 때 이용한 회사를 조사하였더니 A회사를 통하여 접수한 수험생은 360명이었다. 이때, 인터넷 대학입학 원서접수를 하는 전체 수험생 중 A회사를 통해 원서를 접수할 수험생의 비율을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.475$) [4점-1009-중앙]

① $[0.50,\ 0.70]$ ② $[0.52,\ 0.68]$ ③ $[0.54,\ 0.66]$
④ $[0.56,\ 0.64]$ ⑤ $[0.58,\ 0.62]$

41. 어느 회사는 전체 직원의 20%가 자격증 A를 가지고 있다. 이 회사의 직원 중에서 임의로 1600명을 선택할 때, 자격증 A를 가진 직원의 비율이 a% 이상일 확률이 0.9772이다. 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 a의 값은?

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

[3점-1009-평가원]

① 16.5 ② 17 ③ 17.5
④ 18 ⑤ 18.5

42. 어느 도시의 고등학생 중 300명을 임의추출하여 인터넷 강의와 학원 수강에 대한 수강 실태를 조사하였다. 조사 결과 인터넷 강의를 수강하는 학생이 55%, 학원 강의를 수강하는 학생이 36%, 인터넷 강의와 학원 강의를 함께 수강하는 학생이 16%이었다고 한다. 이 도시의 고등학생 중에서 인터넷 강의 또는 학원 강의를 수강하는 학생의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, Z는 표준정규분포의 확률변수이고, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.4750$이다.)

[4점-1010-종로]

① $[0.661,\ 0.759]$ ② $[0.671,\ 0.769]$ ③ $[0.681,\ 0.779]$
④ $[0.691,\ 0.789]$ ⑤ $[0.701,\ 0.799]$

43. 어떤 질병에 걸린 환자가 완치될 확률은 0.75이다. 이 병에 걸린 환자 중에서 300명을 임의로 추출할 때, 병이 완치될 환자의 비율이 α% 이상일 확률이 0.1587이다. 이때, 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 α에 대하여 10α의 값을 구하시오.

[표준정규분포표]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

[4점-1010-비상]

44. LED 전구를 생산하는 어느 공장에서는 생산된 LED 전구 중 2%가 불량품이라고 한다. 이 공장에서 생산된 LED 전구 중 40000개를 임의로 추출하여 조사할 때, 불량품의 비율이 1.93% 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1011-중앙]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0228 ② 0.1587 ③ 0.3085
④ 0.8413 ⑤ 0.9332

45. A도시에서 2011학년도 대학수학능력시험에 응시할 학생 중 20%가 수리 '가'형을 선택하였다고 한다. 이 도시에서 대학수학능력시험에 응시할 학생 중에서 임의로 100명을 뽑았을 때, 수리 '가'형을 선택한 학생이 28명 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?[4점-1010-비상]

<표준정규분포표>

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.0062 ② 0.0228 ③ 0.0668
④ 0.1587 ⑤ 0.3413

46. 어느 공장에서 생산하는 MP3 제품의 불량률이 2%라고 한다. 이 공장에서 생산된 400개의 MP3 제품 중에서 불량품이 15개 이하일 확률은?[4점]

[표준정규분포표]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 0.8413 ② 0.7745
③ 0.9332 ④ 0.9772 ⑤ 0.9938

47. 수확기간을 단축시킬 수 있는 신품종의 옥수수를 개발하였다. 이 품종의 발아율을 알아보기 위하여 씨앗 600개를 임의추출하여 파종하였더니 그 중 360개가 발아하였다. 이 품종의 발아율을 신뢰도 99%로 추정하려고 한다. 신뢰구간의 길이를 0.06 이하로 하려고 할 때, 표본의 크기의 최솟값은?(단, $P(|Z| \le 3) = 0.99$)

[4점]

① 600 ② 1200 ③ 2400
④ 360 ⑤ 4800

48. 광역단체장 선거가 열린 어느 지역에서 임의추출한 100명을 대상으로 A, B 두 후보에 대한 지지율을 조사하였더니, 20명이 A후보를 지지하였고, 10명이 B후보를 지지하였다. 이 결과를 이용하여 A, B 두 후보의 지지율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 각각 구하려고 한다. A후보의 지지율에 대한 신뢰구간을 $[a, b]$, B후보의 지지율에 대한 신뢰구간을 $[c, d]$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \le 2) = 0.95$이다.)[4점-1011-대성]

<보 기>

ㄱ. $b-a=0.16$
ㄴ. $d-c>b-a$
ㄷ. 두 신뢰구간 $[a, b]$, $[c, d]$에 모두 속하는 실수가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 어느 도시에서 발전소를 유치하기 위하여 여론 조사를 하였더니 100명 중에 10명이 찬성하였다. 발전소 유치에 대한 찬성률을 신뢰도 95%로 추정할 때, 모비율과 표본비율의 차가 1% 이하가 되게 하려면 표본을 최소 몇 명 이상으로 뽑아야 하는지 구하시오.(단, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$)[4점]

① 3400명 ② 3436명 ③ 3458명
④ 3494명 ⑤ 3522명

정답 및 풀이

1. 정답 ①

[출제의도] 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기

조건 (나)에 의하여 $f(x)=ax^2+b$ 라 하면

$f(0)=-2$ 이므로 $b=-2$

$f(x)=ax^2-2$, $f'(x)=2ax$

$f(f'(x))=f'(f(x))$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2$ 이다.

$F(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x)<0$

즉, $f(x)<0$ 을 만족하는 구간이므로

$\frac{1}{2}x^2-2<0$, $-2<x<2$

∴ 감소하는 구간의 길이는 4

2. 정답 310 이해력 – 다항함수의 적분법

$f'(x)=2x+4$

$\int f(x)dx=\int (x^2+4x+1)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+2x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$g(x)=(2x+4)\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x+C\right)$

이때, $g(0)=4C=4$에서 $C=1$이므로

$g(x)=(2x+4)\left(\frac{1}{3}x^3+2x^2+x+1\right)$

$\therefore g(3)=10\times31=310$

3. 답 14

(나)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ 의 값이 존재하고, $\lim_{x\to0}x=0$ 이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=0$이다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$ ⋯⋯ ㉠

$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$

(가)에서 $f'(0)=a=1$

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2-2+1)dx$

$=2x^3-x^2+x+C$

㉠에서 $f(0)=C=0$

$f(x)=2x^3-x^2+x$

$\therefore f(2)=14$

4. ② 이해능력 – 다항함수의 적분법

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$에 $x=y=0$을 대입하면 $f(0)=0$ 이다.

$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(0)+f(h)+0-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}$

$f'(0)=0$이므로 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=0$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x\right\}=x$

$f(x)=\int xdx=\frac{1}{2}x^2+C$

그런데 $f(0)=0$이므로 $C=0$이다.

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은 ②이다.

5. 55

$\frac{d}{dx}\int h(x)dx=h(x)$이므로

$h(x)=\{f(x)g(x)+C\}'$

$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=\left(\sum_{k=1}^{10}k\cdot x^{k-1}\right)g(x)+f(x)g'(x)$

그런데 $f(1)=0$, $g(1)=1$이므로

$h(1)=\sum_{k=1}^{10}k+0=55$

6. 답 510

[해설] $\int_0^2(1+2x+3x^2+\cdots+8x^7)dx$

$=[x+x^2+x^3+\cdots+x^8]_0^2$

$=2+2^2+2^3+\cdots+2^8=\frac{2(2^8-1)}{2-1}=510$

7. ③ 계산능력 – 다항함수의 적분법

$\int_0^1(1+2x)^2dx=\int_0^1(1+4x+4x^2)dx$

$=\left[x+2x^2+\frac{4}{3}x^3\right]_0^1$

$=1+2+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

8. 4

$\int_{-1}^2(x+|x|)dx$

$=\int_{-1}^0(x-x)dx+\int_0^2(x+x)dx$

$=0+[x^2]_0^2=4$

9. 답 ③

$\int_{-1}^{1}|x^3-x|dx=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

10. 답 ④

[해설] $f(1)=4-2a$이고, $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}(4x^3-2a)dx$

$=[x^4-2ax]_0^1=1-2a$

이므로

$f(1)\cdot\int_{0}^{1}f(x)dx=(4-2a)(1-2a)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $2\times\frac{1}{2}=1$이다.

11. 정답 51

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=3x^2-2x$이므로

$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)dx$

$=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$ (단, C는 적분상수)

그런데 $f(0)=10$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+10$

$\therefore \int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+10\right)dx$

$=2\int_{0}^{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+10\right)dx$

$=2\left[-\frac{1}{6}x^3+10x\right]_0^3$

$=2\left(-\frac{27}{6}+30\right)=51$

12. 정답 16

$\frac{1}{3}\int_{0}^{2}g(t)dt=c$라 하면

$f(x)=3x+c$

$g(x)=(x+1)(3x+c)=3x^2+(3+c)x=c$

$\frac{1}{3}\int_{0}^{2}\{3x^2+(3+c)x+c\}dx=c$에서

$\left[x^3+\frac{3+c}{2}x^2+cx\right]_0^2=3c$

$8+6+2c+2c=3c \quad \therefore c=-14$

$\therefore f(x)=3x-14$

$\therefore f(10)=30-14=16$

13. ④

$a_n=S_n-s_{n-1}\ (n\geq2)$이고

$S_n=\int_{0}^{n}(2x+3)dx$ 이므로

$a_{10}=\int_{0}^{10}(2x+3)dx-\int_{0}^{9}(2x+3)dx=\int_{9}^{10}(2x+3)dx$

$=\left[\ x^2+3x\right]_9^{10}$

$=100+30-(81+27)=22$

14. ①

$c=\int_{0}^{1}f(t)dt$ 로 놓으면

$f'(x)=2x-2c$에서 $f(x)=x^2-2cx$ ($\because f(0)=0$)

$\therefore c=\int_{0}^{1}(t^2-2ct)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-ct^2\right]_0^1=\frac{1}{3}-c$

$\therefore\ c=\frac{1}{6}$

따라서, $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$이고, 구하는 값은

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=2\int_{0}^{1}-\frac{1}{3}x^2dx=-\frac{2}{9}$

15. 정답 ①

[출제의도] 미분과 적분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(t)dt$

위 식의 양변에 극한을 취하면

$\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}f(t)dt$

$g'(x)=f(x)$ 이므로

$g(x)=\int f(x)dx=\int(x^2-4x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-2x^2+C$

$g(x)=0$ 이므로 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+C=0$ 이다.

$\therefore$ 모든 근의 합 6

16. 정답 15 이해력 – 다항함수의 적분법

$f'(0)=f'(p)=f'(q)=0$이므로 $x=0, x=p, x=q$에서 극값을

갖는다.

$$\int_p^q f(x)dx=[f(x)]_p^q=f(q)-f(p)=-2f(p)+5$$

$f(p)+f(q)=5$

따라서 구하는 모든 극값의 합은

$f(0)+f(p)+f(q)=10+5=15$

17. 정답 ②

[출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$F'(x)=f(x)$이므로

$\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기는

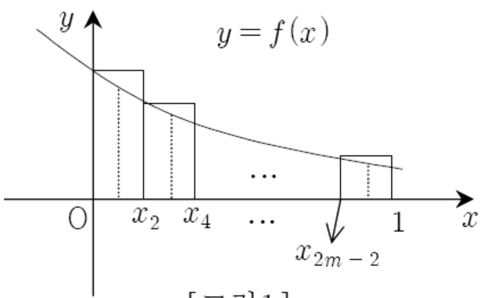
$$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$$

$$=\frac{1}{c}\int_a^{a+c}f(x)dx=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}$$

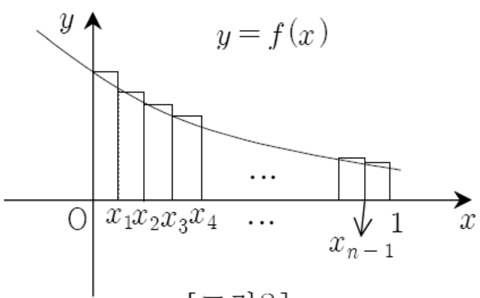
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$$

18. 정답 ②

ㄱ. (반례)



[그림1]



[그림2]

$x_{2k+2}-x_{2k}=\frac{2}{2m}=\frac{1}{m}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n}$ 이므로

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.

따라서, $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}>\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다. (거짓)

ㄴ. $x_k=\frac{k}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx\right\}$$

$=\int_0^1 f(x)dx$ (참)

ㄷ. (반례)

ㄱ의 [그림2]에서

$\int_0^1 f(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이이고, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 직사각형들의 넓이의 합을 나타내므로 $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}>\int_0^1 f(x)dx$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

19. 정답 31

(가)에서

$$f(b)-f(a)=\int_0^b(t-a)(t-b)dt-\int_0^a(t-a)(t-b)dt$$

$$=\int_a^b(t-a)(t-b)dt=-\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{4}{3}$$

$\therefore (b-a)^3=-8\quad \therefore b-a=-2$

$f(x)=\int_0^a(t-a)(t-b)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-a)(x-b)$

(나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0\quad \therefore a=1$ 또는 $b=1$

$\therefore a=1,\ b=-1$ 또는 $a=3,\ b=1$

(다)에서 $f'(0)=ab>0$이므로 $a=3,\ b=1$

$\therefore 10a+b=31$

20. ⑤

ㄱ. $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}f(t)dt=f(x)$이고 $x=-1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극소이다.(참)

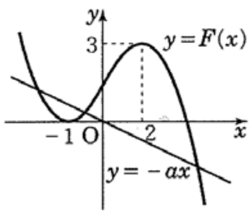
ㄴ. $x=2$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $F(x)$는 $x=2$에서 극대이다. 따라서 함수 $F(x)$의 극댓값은

$F(2)=\int_{-1}^{2}f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$ (참)

ㄷ. 함수 $F(x)$는 $x=-1$에서 극솟값

$F(-1)=\int_{-1}^{-1}f(t)dt=0$ 을 갖는다.

따라서 함수 $F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$a>0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 항상 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $F(x)+ax=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.(참)

21. 정답 ⑤

$f'(x)=-x^2+x+a$이므로

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax+C$(단, C는 상수)

이 때 $f(1)=0$이고 $p<1<q$이므로 점 B의 좌표는 $B(1,0)$임을 알 수 있다.

또한 $f'(1)=2$에서 $a=2,\ C=-\frac{13}{6}$이다.

$f'(x)=-(x+1)(x-2)=0$에서 $p=-1,\ q=2$이다.

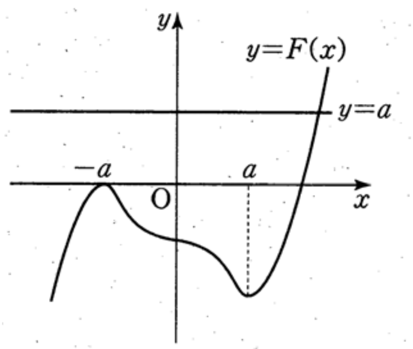
따라서 $P\left(-1,-\frac{20}{6}\right),\ Q\left(2,\frac{7}{6}\right)$이고, 구하는 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\frac{7}{6}-\left(-\frac{20}{6}\right)}{2-(-1)}=\frac{3}{2}$$

22. 답 ⑤

ㄱ. (거짓) $F'(x)=f(x)$이다. 이때,
$F'(0)=f(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. (참) $b=-a$일 때 $F(-a)=\int_{-a}^{-a}f(t)dt=0$ 이고
$F'(x)=f(x)$이므로 함수 $F(x)=\int_{-a}^{x}f(t)dt$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

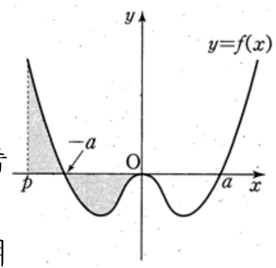


따라서, 임의의 양수 a에 대하여 방정식 $F(x)=a$는 오직 하나의 실근을 갖는다

ㄷ. (참) $F(0)=\int_{b}^{0}f(t)dt=0$을 만족하는 b의 개수를 구하면 된다.

(ⅰ) $b=0$일 때 $\int_{0}^{0}f(t)dt=0$이 성립한다.

(ⅱ) 오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 같도록 하는 음의 상수 p가 오직 하나 존재한다



이때, $b=p$라 하면
$\int_{p}^{0}f(t)dt=0$이 성립한다

(ⅲ) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로
(ⅱ)에서 구한 음수 p에 대하여
$\int_{0}^{-p}f(t)dt=0$ 이 성립한다.

따라서 $b=-p$이면 $\int_{-p}^{0}f(t)dt=0$이 성립한다.

23. ②

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k-1}^{k}(3x^2-2x)dx$$
$$=1+\int_{0}^{n-1}(3x^2-2x)dx$$
$$=1+\left[x^3-x^2\right]_0^{n-1}$$
$$=1+(n-1)^3-(n-1)^2$$
$$\therefore\ a_{10}=1+9^3-9^2=649$$

24. **답 ⑤ 이해력-다항함수의 적분법**

[해설] $F(x)=\int_{2}^{x}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$이므로 $x=0$ 또는 $x=3$에서 $F'(x)=0$이다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↘	극소	↗

또한, $F(2)=\int_{2}^{2}f(t)dt=0,$

$F(0)=\int_{2}^{0}f(t)=-\int_{0}^{2}f(t)dt>0$

$F(3)=\int_{2}^{3}f(t)dt<0$

이므로 함수 $y=F(x)$의 그래프의 개형은 ⑤이다.

25. 답 7

[해설] $\frac{d}{dx}\int_{-3}^{x}f(t)dt=f(x)$

$\frac{d}{dx}\int(x^2+x+1)dx=x^2+x+1$이므로

$f(x)=x^2+x+1,\ f'(x)=2x+1$

$$\therefore\lim_{x\to3}\frac{f(x)-13}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=7$$

26. 정답 ④

$x>3$이므로

$\int_0^3 |t-x|\ dt = \int_0^3 (x-t)dt = \left[xt - \frac{t^2}{2}\right]_0^3 = 3x - \frac{9}{2}$

$\int_0^x |t-3|\ dt = \int_0^3 (3-t)dt + \int_3^x (t-3)dt$

$= \left[3t - \frac{t^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{t^2}{2} - 3t\right]_3^x = \frac{x^2}{2} - 3x + 9$

주어진 조건에서

$3x - \frac{9}{2} = \frac{x^2}{2} - 3x + 9$

$x^2 - 12x + 27 = 0,\ (x-3)(x-9) = 0$

$x > 3$이므로 $x = 9$

27. 답 ③

ㄱ. $f(0) = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $0 < x < 1$에서

$f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)dt + \int_x^1 (-x^2 + t^2)dt$

$= \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$

이므로 $f'(x) = 4x^2 - 2x$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $f'(x) = 4x^2 - 2x = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$일 때 $f(x)$는 극솟값 $\frac{1}{4}$을 갖는다.

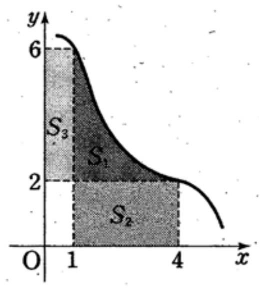
한편, $f(1) = \int_0^1 |t^2 - 1| dt = \frac{2}{3}$ 이므로 $x > 1$일 때, $f(x) > \frac{2}{3}$이다.

또, $f(-x) = f(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{1}{2}$일 때 최소이다. 즉, $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

28. **답** 2

$f(1) > f(4)$이고 역함수가 존재하므로 $f(x)$는 감소함수이다. 그림에서



$\int_1^4 f(x)dx = S_1 + S_2,$

$\int_2^6 f^{-1}(x)dx = S_1 + S_3$

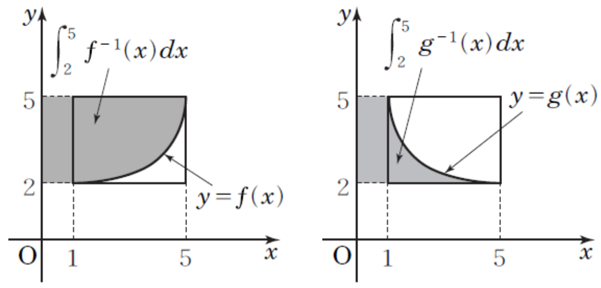
$\therefore \int_1^4 f(x)dx - \int_2^6 f^{-1}(x)dx$

$= (S_1 + S_2) - (S_1 + S_3) = S_2 - S_3 = 6 - 4 = 2$

29. **답** 123

[해설] 함수 f는 일대일 대응이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 증가 또는 감소한다.

한편 $g(x) = f(6-x)$는 함수 $f(x)$의 그래프를 직선 $x = 3$에 대하여 대칭이동한 그래프이다.



위의 그림에서

$\int_2^5 f^{-1}(x)dx + \int_2^5 g^{-1}(x)dx = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 18$

$\therefore \int_2^5 f^{-1}(x)dx = 18 - \frac{13}{3} = \frac{41}{3}$

$\therefore p = 3,\ q = 41$ $\qquad \therefore pq = 123$

30. 정답 1

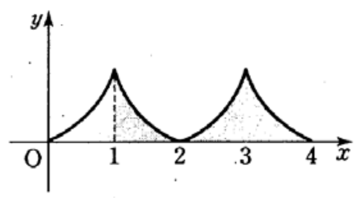
조건(가)에서 $y = f(x)$는 주기가 2이고, 조건 (나)에서

$f(x-3) = f(5-x) \Leftrightarrow f(x-1) = f(3-x)$

$\Leftrightarrow f(x+1) = f(1-x)$

이므로 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = 1$에 대한 대칭이다.

$\int_1^4 f(x)\ dx = 3\int_0^1 f(x)\ dx = 3\int_0^1 x^2\ dx = 1$



31. 정답 ⑤

ㄱ. 조건 (가)에서 임의의 실수 p에 대하여

$\int_{3-p}^{3+p} f(x)dx = 2p \times f(3)$가 성립하므로 양변을 p에 대하여 미분하면 $f(3+p) + f(3-p) = 2f(3)$이다.

따라서, $y = f(x)$는 점 $(3,\ f(3))$에 대하여 점대칭이다. 또한, $f(0) = 1,\ f(6) = 7$이므로 $f(3) = 4$이다.

즉, $y = f(x)$는 점 $(3,\ 4)$에 대하여 점대칭이다.

$\therefore$ 참

ㄴ. ㄱ에서 $y = f(x)$는 점 $(3,\ 4)$에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$를 x축의 방향으로 -3, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동하면 원점 대칭이다.

따라서, 함수 $y = f(x+3) - 4$는 원점 대칭이다.

$\therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에서 함수 $y = f(x+3) - 4$는 기함수이므로

$f(x+3) - 4 = ax^3 + bx$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x = -3$을 대입하면

$f(0) - 4 = -27a - 3b$

즉, $f(0) = 1$이므로 $9a + b = 1$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉡

$f'(x+3) = 3ax^2 + b$이고 $f'(0) = 19$이므로

$27a + b = 19$ $\qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢에서 $a = 1,\ b = -8$

따라서, $f(x+3) - 4 = x^3 - 8x$이고

$f(x+3)=x^3-8x+4$ 이다.

$\therefore \int_0^1 f(x+3)dx=\int_0^1(x^3-8x+4)dx=\frac{1}{4}$

$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

32. 정답 ②

ㄱ. $f(1+x)+f(1-x)=2$에서

$f(1+x)-1=1-f(1-x)$이므로 곡선

$y=f(x+1)-1$을 원점에 대하여 대칭이동하면

$-y=f(-x+1)-1,\ y=1-f(1-x)$

즉, 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x+1)-1$이 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,1)$에 대하여 점대칭이다.

이 때, 직선 $y=x$도 점 $(1,1)$에 대하여 점대칭이므로

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 xdx$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=(x-1)^3+1=x^3-3x^2+3x$는 주어진 조건을 만족하지만

$\int_0^2 \pi\{f(x)\}^2dx$

$=\int_0^2 \pi x^2(x^2-3x+3)^2dx$

$=\pi\int_0^2(x^6-6x^5+15x^4-28x^3+9x^2)dx$

$=\pi\left[\frac{1}{7}x^7-x^6+3x^5-\frac{9}{2}x^4+3x^3\right]_0^2$

$=\frac{16}{7}\pi$

$\int_0^2 \pi x^2dx=\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}\pi$

이므로

$\int_0^2 \pi\{f(x)\}^2dx \neq \int_0^2 \pi x^2dx$(거짓)

33. 답 33

조건 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $b=d=0$

$\therefore\ f(x)=ax^3+cx$

또, 조건 (나)에서 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$이므로

$\int_0^1(ax^3+cx)dx=\frac{1}{2}$

$\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{2}cx^2\right]_0^1=\frac{1}{2},\ \frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ c=\frac{2-a}{2}$ …… ㉠

$\therefore \int_{-1}^1(ax+c)f(x)dx$

$=\int_{-1}^1(ax+c)(ax^3+cx)dx$

$=\int_{-1}^1(a^2x^4+acx^3+acx^2+c^2x)dx$

$=\int_{-1}^1(a^2x^4+acx^2)dx$

$=2\int_0^1(a^2x^4+acx^2)dx$

$=2\left[\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ac}{3}x^3\right]_0^1=2\left(\frac{a^2}{5}+\frac{ac}{3}\right)$

$=\frac{2}{5}a^2+\frac{2a}{3}\left(\frac{2-a}{2}\right)=\frac{1}{15}a^2+\frac{2}{3}a$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{1}{15}(a+5)^2-\frac{5}{3}$

즉, $a=-5,\ c=\frac{2-(-5)}{2}=\frac{7}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{5}{3}$를 갖는다.

$\therefore f(x)=-5x^3+\frac{7}{2}x$

$\therefore f(-2)=(-5)\cdot(-2)^3+\frac{7}{2}\cdot(-2)=33$

34. 답 30

[해설] $\int f(x)dx=(x+1)f(x)+x^4+4x-5$ 의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)+4x^3+4$

$f'(x)=-\frac{4(x^3+1)}{x+1}=-4(x^2-x+1)$

$\int_0^3 f'(x)dx=-4\int_0^3(x^2-x+1)dx=-4\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^3$

$=-4\left(9-\frac{9}{2}+3\right)=-30$ $\therefore \left|\int_0^3 f'(x)dx\right|=30$

35. 32 이해능력 – 다항함수의 적분법

$\int_0^k f(t)dt=m$이라 하면

$\int_0^x f(t)dt=mx^2$ …㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2mx$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt=[mt^2]_0^1=m=4$($\because$ (가))

$\therefore\ f(x)=8x$

(나)에서 $x=1$일 때 $4=\int_0^k f(t)dt$이므로

$\int_0^k 8tdt=[4t^2]_0^k=4k^2=4$

$\therefore\ k=1$($\because k>0$)

$\therefore\ f(4k)=f(4)=8\cdot 4=32$

36. 정답 ④

[출제의도] 적분을 이용하여 주어진 함수의 성질을 추론할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $g(-1)=\int_{-1}^1 f(t)dt=0$ (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(1, 2)$에서 증가한다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $g(x)=2$의 실근은 $-4, -2, 4, 6$이므로 $-4-2+4+6=4$이다. (참)

37. 정답 60

$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$ 이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$0 \le a \le 2$에서

$$g(a)=\int_0^a(-f(x)+f(a))dx+\int_a^2(f(x)-f(a))dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+f(a)x\right]_0^a+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-f(a)x\right]_a^2$$

$$=2\left(-\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}+af(a)\right)+\frac{10}{3}-2f(a)$$

이므로 $g'(a)=2\left(-a^3+a^2-a+f(a)+af'(a)\right)-2f'(a)$

$=2(a-1)f'(a)$

이고, $f'(a)>0$

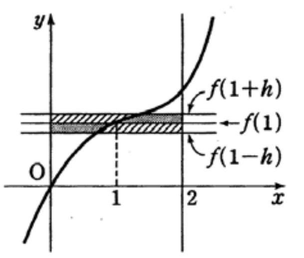
따라서 , $g(a)$는 $a=1$에서 극솟값이면서 최솟값을 갖는다.

$\therefore g(1)=2\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+f(1)\right)+\frac{10}{3}-2f(1)=\frac{5}{2}$

$\therefore 24m=60$

[참고]

$f(x)$의 그래프를 그려보자. 그림에서 $a=1$일 때와 $a=1\pm h$일 때를 비교해 보면 $a=1$일 때가 $a=1+h, 1-h$일 때보다 작다는 것을 알 수 있다. (빗금친 부분의 넓이>어두운 부분의 넓이) 따라서, $a=1$일 때가 최소이다.



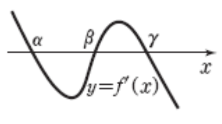
38. 답 ④

ㄱ. (거짓) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에서 감소상태이므로 $f'(0)<0$이다.

ㄴ. (참) 함수 $f(x)$는 $x=\alpha,\ x=\beta, x=\gamma$에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha)=f'(\beta)=f'(\gamma)=0$이다.

그러므로 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

ㄷ. (참)



위의 그림과 같이 $\alpha<x<\beta$에서 $f'(x)<0$이고, $\beta<x<\gamma$에서 $f'(x)>0$이므로

$$\int_\alpha^\gamma\left|f'(x)\right|dx=\int_\alpha^\beta\{-f'(x)\}dx+\int_\beta^\gamma f'(x)dx$$

$$=-[f(x)]_\alpha^\beta+[f(x)]_\beta^\gamma$$

$$=f(\alpha)-2f(\beta)+f(\gamma)$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

39. 정답 30

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립하므로

$y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1f(x)\,dx=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\int_1^3f(x)\,dx=10$$

$$\therefore \int_1^3f(x)\,dx=20$$

$$\therefore \int_{-1}^3f(x)\,dx=\int_{-1}^1f(x)\,dx+\int_1^3f(x)\,dx$$

$$=2\int_0^1f(x)\,dx+\int_1^3f(x)\,dx$$

$$=2\cdot5+20=30$$

40. ①

$$\overline{\mathrm{AP}_k}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BP}_k}^2=36+\left(\frac{8k}{n+1}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\mathrm{AP}_k}^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{36+\left(\frac{8k}{n+1}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left\{36+\left(\frac{8k}{n+1}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\left\{36+\left(\frac{8k}{n+1}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\left\{36+\left(\frac{8k}{n+1}\right)^2\right\}$$

이때 $f(x)=36+64x^2$ 으로 놓으면

(주어진 식)$=\int_0^1(36+64x^2)dx=\left[36x+\frac{64}{3}x^3\right]_0^1=\frac{172}{3}$

41. 답 ④

$f(x)=\frac{x^2}{3^x+1}$이라 하면

$$f(-x)=\frac{x^2}{3^{-x}+1}=\frac{x^2\cdot3^x}{1+3^x}$$

$$f(x)+f(-x)=\frac{x^2}{3^x+1}+\frac{x^2\cdot3^x}{1+3^x}\ \frac{x^2(3^x+1)}{3^x+1}=x^2$$

$$\int_{-3}^3\frac{x^2}{3^x+1}\int_0^3x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$\therefore p=27$

42. 정답 ⑤ 이해력 - 다항함수의 적분법

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{5}\frac{k^m}{m\cdot n^{m+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{5}\frac{1}{m}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^m\cdot\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{k}{n}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{k}{n}\right)^5\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

$=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\frac{1}{4\cdot 5}x^5+\frac{1}{5\cdot 6}x^6\right]_0^1$

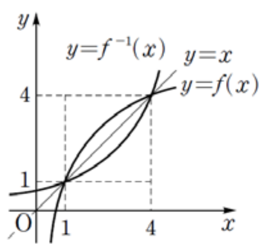
$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$

$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

43. 정답 ⑤

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가함수이므로 주어진 조건을 만족하는 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 그래프를 그려 보면 다음 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{n+3k}{n}\right)\frac{1}{n}=2$이므로

$\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f^{-1}\left(\frac{n+3k}{n}\right)\frac{3}{n}=\frac{1}{3}\int_1^4 f^{-1}(x)dx=2$

$\therefore \int_1^4 f^{-1}(x)dx=6$

이때, $\int_1^4 f(x)dx=15-6=9$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{n+3k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{3}\int_1^4 f(x)dx$

$=\frac{1}{3}\cdot 9=3$

44. 답 ②

[해설] $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin x\,dx$라 하자.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2x-1)\sin x\,dx$

에서 $\cos x=t$라 하면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$\therefore A=\int_1^0(2t^2-1)(-dt)$

$=\int_0^1(2t^2-1)dt=\left[\frac{2}{3}t^3-t\right]_0^1=-\frac{1}{3}$

45. 답 22

$\int_{-\pi}^{\pi}(3-2\sin x)^2dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}(9-12\sin x+4\sin^2x)dx$

$=2\int_0^{\pi}(9+4\sin^2x)dx$

$=2\int_0^{\pi}\left(9+4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$=2\int_0^{\pi}(11-2\cos 2x)dx$

$=2[11x-\sin 2x]_0^{\pi}=22\pi$

$\therefore\ a=22$

46. 답 ③

$\int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx$ 에서

$\ln x=t$ 라 하면 $\frac{1}{x}dx=dt$이고

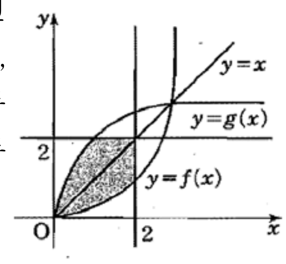
$x=e$일 때, $t=1$

$x=e^2$일 때, $t=2$

$\therefore \int_e^{e^2}\frac{1}{x\ln x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}dt=[\ln t]_1^2=\ln 2$

47. 정답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $x=2$일 때, $f(x)=e-1<2$이므로 주어진 연립부등식이 나타내는 영역은 다음 그림의 어두운 부분과 같다.



따라서 구하는 영역의 넓이는

$2\int_0^2\{x-f(x)\}dx=2\int_0^2(x-e^{\frac{x}{2}}+1)dx$

$=2\left[\frac{x^2}{2}-2e^{\frac{x}{2}}+x\right]_0^2$

$=2\{(2-2e+2)-(0-2+0)\}$

$=12-4e$

48. 정답 61

$f(x)=\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{1}{1+4t^2}dt$에서

$f\left(\tan\frac{11}{25}\pi\right)=\int_0^{\frac{1}{2}\tan\frac{11}{25}\pi}\frac{1}{1+4t^2}dt$

$t=\frac{1}{2}\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dt}{d\theta}=\frac{1}{2}\sec^2\theta=\frac{1}{2}(1+\tan^2\theta)=\frac{1}{2}(1+4t^2)$

$\therefore \frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{2}d\theta$

$t=0$일 때, $\theta=0$

$t=\frac{1}{2}\tan\frac{11}{25}\pi$일 때, $\theta=\frac{11}{25}\pi$

$\therefore\ f\left(\tan\frac{11}{25}\pi\right)=\int_0^{\frac{1}{2}\tan\frac{11}{25}\pi}\frac{1}{1+4t^2}dt$

$=\int_0^{\frac{11}{25}\pi}\frac{1}{2}d\theta$

$=\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{11}{25}\pi}$

$=\frac{11}{50}\pi$

$\therefore\ p+q=50+11=61$

49. 정답 ②

$\int_1^e e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e e^x\ln x\,dx+\int_1^e\frac{e^x}{x}dx$

$=\left[e^x\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{e^x}{x}dt+\int_1^e\frac{e^x}{x}dx=e^e$

50. 답 5

곡선 $y=\ln\frac{2}{1+x^2}$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-1}^1\ln\frac{2}{1+x^2}\,dx$

$=2\int_0^1\{\ln2-\ln(1+x^2)\}\,dx$

$=2\left\{\ln2-\left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1+\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}\,dx\right\}$

$=2\int_0^1\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$

$=4-4\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$

이때, $x=\tan\theta$라 하면

(주어진 식) $=4-4\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=-\pi+4$

$\therefore\ a=-1,\ b=4\qquad\therefore\ b-a=5$

51. ④

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로

$f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$\int_a^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx=\int_a^{2a}x^{-2}\{f(x)\}^2dx$

$=\left[-x^{-1}\{f(x)\}^2\right]_a^{2a}-\int_a^{2a}-x^{-1}\cdot2f(x)f'(x)dx$ ($\because$ 부분적분법)

$=0+\int_a^{2a}x^{-1}\cdot2f(x)f'(x)dx$

$=\int_a^{2a}\frac{2f(x)f'(x)}{x}dx=\int_a^{2a}\frac{f(2x)}{x}dx$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $2dx=dt\Leftrightarrow dx=\frac{1}{2}dt$

$\begin{cases}x=a\rightarrow t=2a\\x=20\rightarrow t=4a\end{cases}$로 변환되므로

$=\int_{2a}^{4a}\frac{1}{2}\frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt=\int_{2a}^{4a}\frac{f(t)}{t}dt=k$

52. ⑤

$I=\int_1^2\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx$라 하자.

$\int_1^2\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx$에서 $2-x=t$라 하면

$\frac{dt}{dx}=-1$이고 $x=1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=0$

$I=\int_1^0\frac{f(2-t)}{f(2-t)+f(t)}(-dt)=\int_0^1\frac{f(2-x)}{f(2-x)+f(x)}(dx)$

$\int_0^1\frac{f(x)}{f(x)+f(2-x)}dx=3$이므로

$I+3=\int_0^1\frac{f(2-x)+f(x)}{f(2-x)+f(x)}dx=\int_0^1 1dx=1$

$\therefore\ I=1-3=-2$

53. 답 ④

ㄱ. $f(x)=\int_a^x\ln x\,dx\ (a>0)$로 놓으면 함수 $f(x)$는 폐구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고 개구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(t)$를 만족하는 실수 t가 개구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 반드시 존재한다.

이 때, $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\int_1^2\ln x\,dx,\ f'(t)=\ln t$이므로

$\int_1^2\ln x\,dx=\ln t$를 만족하는 실수 t가 개구간 $(1,\ 2)$에 존재한다. (참)

ㄴ. $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx\ =2[-\cos x]_0^{\pi}=4$

그런데 임의의 실수 t에 대하여 $|\sin t|\le1$이므로 $|\sin t|=4$인 실수 t가 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $\int_{-1}^2 e^{-x}dx=[-e^{-x}]_{-1}^2=e-\frac{1}{e^2}$

이 때, $e-\frac{1}{e^2}<e$이고

$e-\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e^2}=e-\frac{2}{e^2}>0$

이므로 $e-\frac{1}{e^2}>\frac{1}{e^2}$

$\therefore\frac{1}{e^2}<e-\frac{1}{e^2}<e$

한편, 함수 $y=e^x$은 폐구간 $[-2,\ 1]$에서 연속이고

$e^{-2}=\frac{1}{e^2},\ e^1=e$이므로 중간값의 정리에 의하여

$e^t=e-\frac{1}{e^2}=\int_{-1}^2 e^{-x}dx$인 실수 t가 개구간 $(-2,\ 1)$에 존재한다. (참)

54. 정답 ④

$\int_0^2 xf(tx)dx = 4t^2$에서

$tx = y$로 놓으면

$t = \frac{dy}{dx}$에서 $dx = \frac{dy}{t}$

$x = 0$일 때, $y = 0$

$x = 2$일 때, $y = 2t$

이므로

$\int_0^2 xf(tx)dx = \int_0^{2t} \frac{y}{t} f(y) \frac{dy}{t}$

$= \frac{1}{t^2}\int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^2$

$\therefore \int_0^{2t} yf(y)dy = 4t^4$

양변을 t에 관하여 미분하면 $2tf(2t) \times (2t)' = 16t^3$

$\therefore f(2t) = 4t^2$,$\therefore f(2) = 4$

55. 정답 ④

[출제의도] 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\int_1^{\frac{3}{2}} f(2x)dx = 7$에서 $\int_2^3 f(x)dx = 14$

$\int_1^{\frac{4}{3}} f(3x)dx = 1$에서 $\int_3^4 f(x)dx = 3$

$\int_{2001}^{2012} f(x)dx = \int_1^{12} f(x)dx$

$= \int_1^2 f(x)dx + 5\int_2^4 f(x)dx = 88$

56. 답 ③

$\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{4} tanx} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ ⋯ (가)

$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln\left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\} = \ln\left(1 + \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$

$= \ln\frac{2}{1 + \tan x}$

$\therefore f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln(1 + \tan x) + \ln\frac{2}{1 + \tan x}$

$= \ln\frac{2(1 + \tan x)}{1 + \tan x} = \ln 2$ ⋯ (나)

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left\{f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\}dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2dx$

$= [x\ln 2]_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi \ln 2}{8}$ ⋯ (다)

57. 정답 ①

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x(\sin x + \cos x)\, dx$

$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x\left(\sin x + \frac{d}{dx}(\sin x)\right) dx$

$= \sqrt{2}\,[e^x \sin x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = e^{\frac{\pi}{4}}$

58. 정답 ②

[출제의도] 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$S(a) = 1 + 1 + \int_2^a 2e^{2-x}\, dx$

$= 2 + \left[-2e^{2-x}\right]_2^a$

$= 4 - 2e^{2-a}$

따라서 $\lim_{a \to \infty} S(a) = \lim_{a \to \infty}(4 - 2e^{2-a}) = 4$

59. ③

$g(x) = \int_0^x f(x - t)dt$ 라 하자.

$x - t = u$라 하면 $-dt = du$이고

$t = 0$일 때, $u = x$, $t = x$일 때 $u = 0$이므로

$g(x) = \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u)du$

$g'(x) = f(x)$이고, $x = 0$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $x = 0$에서 극대이고, $x = a$의 좌우에서 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x = a$에서 극소이다.

또한 $g(0) = 0$이므로 $y = g(x)$의 그래프는 ③과 같다.

60. 정답 ③

ㄱ. $g(a) = \int_a^a h(t)\, dt = 0$ $\therefore$ 참

ㄴ. $g'(x) = -h(x)$이므로 $f(x) = -xg'(x)$이다.

$\therefore f(x) = -2x^2$

$\int_0^1 \{g(x) - f(x)\}\, dx = \int_0^1 (x^2 + 2x^2)dx = \int_0^1 3x^2\, dx$

$= [x^3]_0^1 = 1$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\int_0^a \{g(x) - f(x)\} = \int_0^a \{g(x) + xg'(x)\} = \int_0^a \{xg(x)\}'\, dx$

$= [xg(x)]_0^a = ag(a) = 0$ $\therefore$ 참

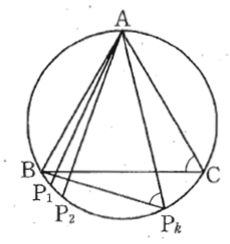
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

61. 정답 ④

$\triangle ABP_k$에서

$\angle BAP_k = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k}{n}$, $\angle AP_kB = \frac{\pi}{3}$이므로

$\angle \mathrm{ABP}_k = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} \cdot \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}$



외접원의 반지름의 길이가 1인 $\triangle \mathrm{ABP}_k$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{AP}_k}}{\sin(\angle \mathrm{ABP}_k)} = 2R = 2(\because R = 1)$$

$$\therefore \overline{\mathrm{AP}_k} = 2\sin(\angle \mathrm{ABP}_k) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{AP}_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \cdot \frac{k}{n}\right)$$

$$= 2\int_0^1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}x\right)dx$$

$$= 2\left[\frac{3}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}x\right)\right]_0^1 = \frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6}{\pi}$$

62. 답 ③

$a_n = \dfrac{1}{3n-2} + \dfrac{1}{3n-1} - \dfrac{2}{3n}$ (단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)이므로

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n+k} = \sum_{n=1}^{2n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n}\right\}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)} \cdot \frac{1}{n}\right\} = \int_1^3 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^3 = \ln 3$$

63. 정답 16

$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt = k$ (k는 상수)라 하면

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + k$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x+\alpha) + k \ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ \tan\alpha = \frac{b}{a}\right)$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값을 가지므로 $\dfrac{\pi}{3} + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ 이다.

$$\frac{b}{a} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ a = b\sqrt{3}$$

$$\therefore\ f(x) = b(\sqrt{3}\sin x + \cos x) + k$$

$$k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

$$= b\int_{-\pi}^{\pi}(\sqrt{3}\sin t\cos t + \cos^2 t)dt + k\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$$

$$= b\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt + k\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\,dt$$

$$= b\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{-\pi}^{\pi} + k[\sin t]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= b\pi$$

$$\therefore\ f(x) = b(\sqrt{3}\sin x + \cos x + \pi)$$

이때, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = b(\pi + 2) = 2\pi + 4$ 이므로 $b = 2$, $a = 2\sqrt{3}$ 이다.

$$\therefore\ a^2 + b^2 = 16$$

64. ③

주어진 조건 (가), (나), (다)에 의하여 구간 $(0, 1)$에서 $f(x) = e^x$ 임을 알 수 있다.

그런데 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다. 따라서 구간 $1 \le x < 2$에서 $f(e) = 1$, $f'(1) = e$이고 (나) 조건에 의하여 $f'(x)$는 증가하는 함수이므로 $e = f'(1) \le f'(x)$이다.

이 때, $1 \le x < 2$인 구간에서 이 식의 양변을 적분하면

$\int_1^x e\,dx \le \int_1^x f'(x)dx$ 즉 $ex \le f(x)$이므로 다음 부등식이 성립한다.

$$\int_1^2 e\,xdx \le \int_1^2 f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx$$

$$\ge \int_0^1 e^x dx + \frac{3e}{2} = \frac{5e}{2} - 1$$

딸서 구하는 최솟값은 $\dfrac{5e}{2} - 1$이다

65. 정답 ⑤

[출제의도] 평균값의 정리를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$g(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\cos x\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt\right\}$이므로

$$g(x) = -\sin x\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt + \cos x \cdot f(x)$$

ㄱ. $g(0) = 0$ ($\because f(0) = 0$) (참)

ㄴ. $g(-x) = -\sin(-x)\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \cos(-x) \cdot f(-x)$

$$= \sin x\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t)dt + \int_{-x}^{x} f(t)dt\right) - \cos x \cdot f(x)$$

$= \sin x\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f(t)dt - \cos x \cdot f(x) = -g(x)$ (참)

ㄷ. $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = g(0)$이므로 평균값의 정리에 의해 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 마찬가지로 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $g'(c) = 0$인 c가 적어도 하나 존재한다. (참)

66. ②

$\displaystyle\int_a^x (x^2 - t^2)f(t)dt = x^2\int_a^x f(t)dt - \int_a^x t^2 f(t)dt$ 이므로

$\int_a^x (x^2-t^2)f(t)dt=\int_a^x t\ln(t^2+a)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x\int_a^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)=x\ln(x^2+a)$

$2x\int_a^x f(t)dt=x\ln(x^2+a)$

$\therefore \int_a^x f(t)dt=\frac{1}{2}\ln(x^2+a)$ ⋯㉠

한편, ㉠에서 $x=a$이면 $\frac{1}{2}\ln(a^2+a)=0$

$\therefore a^2+a=1 \qquad \therefore a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

또, ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=\frac{x}{x^2+a}$에서

$\lim_{x\to -a}\frac{1}{x+a}\int_{-a}^x f(t)dt=f(-a)=\frac{-a}{a^2+a}$

$=-a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

67. 정답 ④

ㄱ. (참) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=\frac{1}{e^{-x}+e^x}$ 이므로

$f'(x)=\frac{-e^x+e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$

$x>0$일 때 $e^x>e^{-x}$이므로 $f'(x)<0$이다.

그러므로 $f(x)$는 $x>0$에서 감소한다.

즉, $0<x_1<x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

ㄴ. (거짓) $f(-x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}=f(x)$이므로

$\int_{-a}^a f'(x)dx=[f(x)]_{-a}^a=f(a)-f(-a)$

$=f(a)-f(a)=0$

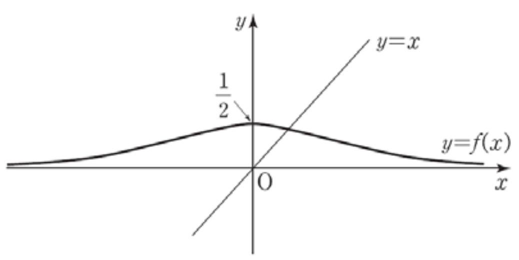
ㄷ. (참) $f'(x)=\frac{-e^x+e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ 이므로

x	⋯	0	⋯
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↘

함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이자 최댓값을 가진다.

또, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 다음 그림과 같이 한 점에서 만난다.



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

68. 답 40

$F'(x)=f(x)$이므로 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{2}\pi$에서 함수 $F(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	⋯	0	⋯	π	⋯	2π	⋯	$\frac{5}{2}\pi$
$F'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$F(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	

즉, 함수 $F(x)$는 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{5}{2}\pi$에서 $x=0,\ x=2\pi$일 때, 극솟값을 갖는다.

한편,

$F(2\pi)-F(0)=\int_{-\pi}^{2\pi}f(t)dt-\int_{-\pi}^{0}f(t)dt=\int_0^{2\pi}f(t)dt$

이므로 두 극솟값 $m_1,\ m_2$의 차 $|m_1-m_2|$의 값은

$|m_1-m_2|=\left|\int_0^{2\pi}e^x\cdot\sin x\,dx\right|$

$\int e^x\cdot\sin x\,dx=e^x\cdot\sin x-\int e^x\cdot\cos x\,dx$

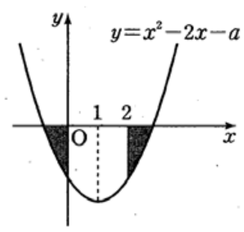
$=e^x\cdot\sin x-e^x\cdot\cos x-\int e^x\cdot\sin x\,dx$

$\therefore \int_0^{2\pi}e^x\cdot\sin x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_0^{2\pi}=\frac{1-e^{2\pi}}{2}$

$\therefore |m_1-m_2|=\left|\int_0^{2\pi}e^x\cdot\sin x\,dx\right|=\frac{e^{2\pi}-1}{2}$

$\therefore a=2,\ b=2 \qquad \therefore 10(a+b)=40$

1. 정답 9



포물선 $y=x^2-2x-a$의 축이 $x=1$이므로 위의 그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같다.

$\therefore S_2-S_1=-\int_0^2(x^2-2x-a)dx$

$=-\frac{8}{3}+4+2a=\frac{58}{3}$

$\therefore a=9$

2. 정답 ④

함수 $f(x)$의한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$S(t)=\int_a^t f(x)dx=F(t)-F(a)$

이때, $F'(x)=f(x)$이므로

$\lim_{t\to a}\frac{S(t)}{t-a}=\lim_{t\to a}\frac{F(t)-F(a)}{t-a}=F'(a)=f(a)$

3. 7

점 (1, 2)를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은

$y=m(x-1)+2=mx-m+2$

곡선 $y=x^2$과 $y=mx-m+2$의 두 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$로 놓으면 α, β는 방정식 $x^2-mx+m-2=0$의 근이므로 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=m-2$

이때

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=m^2-4(m-2)=(m-2)^2+4$

$\therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{(m-2)^2+4}$

따라서 주어진 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=mx-m+2$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(m)$은

$$S(m)=\int_\alpha^\beta(mx-m+2-x^2)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left\{\sqrt{(m-2)^2+4}\right\}^3$$

$m=2$일 때, $S(m)$의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

$\therefore\ p+q=7$

4. 26

점 P의 x좌표를 a라 하면 직선 OP의 방정식은 $y=ax$이다.

$$A=\int_0^a(ax-x^2)dx=\left[\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

$$B=\int_{-a}^0(x^2-ax)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_{-a}^0=\frac{5a^3}{6}$$

$\therefore\ \frac{A}{B}=\frac{1}{5}$

$\therefore\ p^2+q^2=26$

5. ②

삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 l이 $x=0$에서 만나고 $x=2$에서 접하므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 x(x-2)^2dx=\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

6. 정답 83

[출제의도] 구분구적법의 정의를 알고, 이를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$에 대하여

$$A_n(1)+A_n(2)+\cdots+A_n(k)=\int_0^{\frac{k}{n}}f'(x)dx$$

$$=[f(x)]_0^{\frac{k}{n}}=f\left(\frac{k}{n}\right)-f(0)=f\left(\frac{k}{n}\right)-2$$

$f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^3+2\left(\frac{k}{n}\right)+2$이다. 따라서 곡선 $y=xf(x)$와 x축, y축, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_0^1 xf(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{k}{n}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^3+2\left(\frac{k}{n}\right)+2\right\}$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^4+2x^2+2x\right)dx=\frac{53}{30}$$

$\therefore\ 53+30=83$

7. 답 ②

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 $P(t,\ t^2)$에서의 접선에 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t),\ y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

따라서, 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2}+t^2\right)$

직선 $y=\frac{1}{2}+t^2$과 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표가 $\pm\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}$이므로

$$S(t)=\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}}\left(\frac{1}{2}+t^2-x^2\right)dx=2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}}\left(\frac{1}{2}+t^2-x^2\right)dx$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{2}+t^2\right)x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+t^2\right)\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}$$

$$\therefore\lim_{t\to+0}S(t)=\lim_{t\to+0}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}+t^2\right)\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

8. ④

$y=x(x+1)^2$ 에서 $y'=(x+1)^2+2x(x+1)$

$y=ax(x-b)$에서 $y'=a(2x-b)$

두 곡선의 원점에서의 접선의 기울기가 같으므로 $1=-ab$

또, 두 곡선이 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 각각

$$-\int_{-1}^0 x(x+1)^2dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0=\frac{1}{12}$$

$$\int_0^b ax(x-b)dx=a\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}bx^2\right]_0^b=-\frac{1}{6}ab^3$$

따라서 $ab=-1$이고, $-\frac{1}{6}ab^3=\frac{1}{12}$에서 $ab^3=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ b^2=\frac{1}{2},\ a^2=2\quad\therefore\ a^2+b^2=\frac{5}{2}$

9. 정답 ④

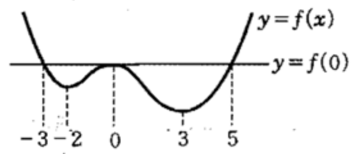
주어진 $y=f'(x)$의 그래프에서 $y=f(x)$는 $x=-2,\ 3$에서 극소, $x=0$에서 극대이고, 두 부분 A, B의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-3}^0 f'(x)dx=0\qquad\therefore\ f(0)=f(-3)$$

두 부분 C, D의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^5 f'(x)=0\qquad\therefore\ f(0)=f(5)$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 부등식 $f(x)<f(0)$을 만족시키는 해는 $-3<x<0$ 또는 $0<x<5$



따라서 구하는 모든 정수 x는 $-2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$의 6개이다.

10. 정답 ⑤ 수학 내적 문제 해결 능력-다항함수의 적분법

$y' = 2x$이므로 접선 l의 방정식은 $y-a^2 = 2a(x-a)$

즉, $y = 2ax - a^2$이다.

이 직선이 곡선 $y = x^2 - n^2$과 만나는 점의 x좌표는 방정식

$x^2 - n^2 = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2ax + a^2 - n^2 = 0$의 실근이므로

$x = a-n,\ x = a+n$

$$\therefore\ S_n = \int_{a-n}^{a+n} \{(2ax - a^2) - (a^2 - n^2)\} dx$$

$$= \frac{1}{6}\{(a+n)-(a-n)\}^3 = \frac{8n^3}{6} = \frac{4}{3}n^3$$

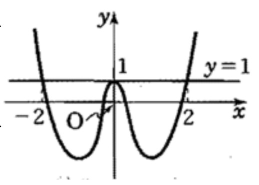
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{9} S_n = \sum_{n=1}^{9} \frac{4}{3}n^3 = \frac{4}{3} \times \left(\frac{9\times 10}{2}\right)^2 = 2700$$

11. 정답 143

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0$ 에서 $x = -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$ 이고

$f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = -3,\ f(0) = 1$이 므 로

함수 $f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



곡선 $y = x^4 - 4x^2 + 1$ 과 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 $a = 1$

이 때, $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$ 에서 $x = -2,\ 0,\ 2$ 이므로 곡선 $y = x^4 - 4x^2 + 1$ 과 직선 $y = 1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

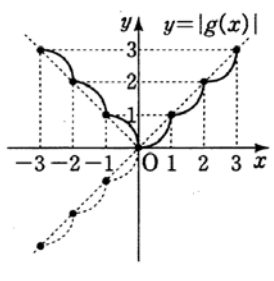
$$\int_{-2}^{2} \{1 - f(x)\} dx = 2\int_{-2}^{2} (4x^2 - x^4) dx$$

$$= 2\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128}{15}$$

$\therefore\ p + q = 15 + 128 = 143$

12. 답 25

함수 $y = |g(x)|$의 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



$$\int_{-1}^{1} |g(x)| dx = 1 \times 1 = 1$$

마찬가지로

$$\int_{-2}^{2} |g(x)| dx = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore\ \int_{-5}^{5} |g(x)| dx = 5 \times 5 = 25$$

13. ④ 연역적 추론 능력(증명) - 다항함수의 적분법

점 O에서 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 길이를 각각 a, b, c (단, a, b, c는 서로 다르다)라 하면

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2}x & (0 \le x < 1) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2}(x-1) & (1 \le x < 2) \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}(x-2) & (2 \le x \le 3) \end{cases}$$

ㄱ. (참) $\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \frac{a}{2} = f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이다.

ㄴ. (거짓) $\lim_{h\to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{\frac{a}{2}(1+h) - \frac{a}{2}}{h} = \frac{a}{2}$

$$\lim_{h\to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to +0} \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}h - \frac{a}{2}}{h} = \frac{b}{2}$$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 미분 가능하지 않다.

같은 방법으로 하면 함수 $f(x)$는 $x = 2$에서도 미분 가능하지 않다.

ㄷ. (참) 개구간 $(1,\ 2)$에서 $f(x) = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}(x-1)$이므로

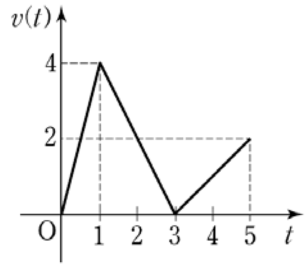
$f'(x) = \frac{b}{2}$이다.

$$\therefore\ \int_1^2 f'(x) dx = \int_1^2 \frac{b}{2} dx = \left[\frac{b}{2}x\right]_1^2 = \frac{b}{2}$$

$$\triangle \mathrm{OBC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot b = \frac{b}{2}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14. ①



시각 $t = 0$ 에서 $t = x$ 까지 움직인 거리를 l_1

시각 $t = x$ 에서 $t = x+2$ 까지 움직인 거리를 l_2

시각 $t = x+2$ 에서 $t = 5$ 까지 움직인 거리를 l_3 이라 하자.

ㄱ. $x = 1$ 인 경우

$l_1 = 2,\ l_2 = 4,\ l_3 = 2$ 이므로

$f(1) = 2$ $\quad\quad$ $\therefore$ 참

ㄴ. $x = 2$ 인 경우

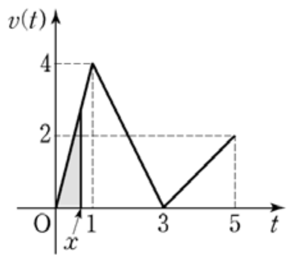
$l_1 = 5,\ l_2 = \frac{3}{2},\ l_3 = \frac{3}{2}$ 이므로 $f(2) = \frac{3}{2}$

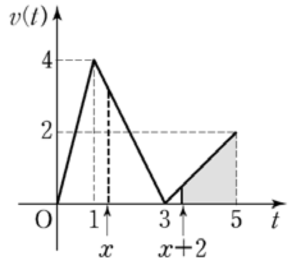
따라서 $f(2) - f(1) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

$$\int_1^2 v(t)dt = \int_1^2 (-2t+6)dt = 3$$

$\therefore\ f(2) - f(1) \ne \int_1^2 v(t)dt$ $\quad\quad$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. h가 충분히 작은 양수일 때 그림에서 보는 것처럼





$1-h<x<1$ 에서

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2 \rightarrow f'(x)=4x \xrightarrow{x\to 1-0} 4$

$1<x<1+h$ 에서

$f(x)=2-\frac{1}{2}((x+2)-3)^2 \rightarrow f'(x)=-x+1 \xrightarrow{x\to 1+0} 0$

따라서 $f'(x)$ 의 $x=1$ 에서의 좌우 미분계수가 다르므로 미분불능

∴ 거짓

15. 정답 6

$M=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx$ 에서 $\int_0^2 f(x)dx=2M$

∴ $\int_0^2 \{f(x)+2M\}dx$

$=\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^2 Mdx$

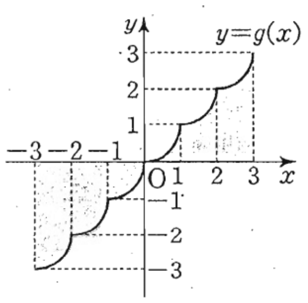
$=2M+4M=6M$

$=3\int_0^2 (x^3-3x^2+3x)dx$

$=3\left[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^2=6$

16. 정답 ⑤

ㄱ. (참)



함수 $g(x)$의 그래프는 그림과 같이 연속이므로 모든 정수 n에 대하여

$\lim_{x\to n} g(x)=g(n)$

ㄴ. (참)

$\int_{-3}^{3}|g(x)|dx$의 값은 그림의 어두운 부분의 넓이와 같다. 이때, $-3\le x\le 0$인 어두운 부분을 x축의 뱡향으로 3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하여 $0\le x\le 3$인 어두운 부분과 합치면 한 변의 길이가 3인 정사각형이 된다.

$\therefore \int_{-3}^{3}|g(x)|dx=3^2=9$

ㄷ. (참)

모든 자연수 m에 대하여

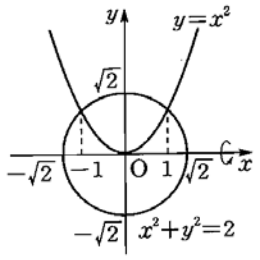
$\int_m^{m+1} g(x)ds=\int_{m-1}^{m} g(x)dx+1$이므로 수열 $\left\{\int_{m-1}^{m} g(x)dx\right\}$는 공차가 1인 등차수열을 이룬다.

따라서 등차중항의 성질에 의해

$2\int_m^{m+1} g(x)ds=\int_{m-1}^{m} g(x)dx+\int_{m+1}^{m+2} g(x)dx$

17. 답 ②

그림에서 어두운 부분을 x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는



$2\pi\int_0^1 \{2-x^2-(x^2)^2\}dx=2\pi\left[2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$=2\pi\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{44}{15}\pi$

18. 정답 ④

[출제의도] 회전체의 부피를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\int_0^1 \pi x^2 dy=\int_0^1 \pi(1-y^2)^2 dy=\int_0^1 \pi(y^4-2y^2+1)dy$

$=\pi\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{2}{3}y^3+y\right]_0^1=\frac{8}{15}\pi$

19. 25

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x+10}$ 의 교점의 x좌표를 구하면

$\sqrt{x}=\sqrt{-x+10}$ 에서 양변을 제곱하면

$x=-x+10$, $x=5$

따라서, 회전체의 부피 V는

$V=\pi\int_0^5 x\,dx+\pi\int_5^{10} -x+10\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5+\pi\left[-\frac{x^2}{2}-10x\right]_5^{10}$

$=\frac{25}{2}\pi+\pi(-50+100+\frac{25}{2}-50)$

$=25\pi$

$\therefore a=25$

20. 정답 53

[출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$0\le x<1$일 때, $g(x)=\int_0^x 2t\,dt=x^2$

$x\ge 1$일 때, $g(x)=\int_0^1 2t\,dt+\int_1^x 2\,dt=2x-1$

$g(x)=\begin{cases} x^2 & (0\le x<1) \\ 2x-1 & (x\ge 1)\end{cases}$

$V=\pi\int_0^1 (x^2)^2\,dx+\pi\int_1^2 (2x-1)^2 dx=\frac{68}{15}\pi$

∴ $q-p=53$

21. 정답 12

$g'(x)=f'(x)=ax^2-a$ 이고,

$g(0)=a+1$ 이므로

$g(x)=\frac{a}{3}x^3-ax+a+1$ 이다.

따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(x)-f(x)=1$ 이다.

$f'(x)=a(x+1)(x-1)=0$ 에서 $x=-1,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{5}{3}a$	↘	$\frac{a}{3}$	↗

따라서, $-1\le x\le 1$ 에서 $f(x)\ge\frac{a}{3}>0$ 이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_{-1}^{1}[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]\,dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}ax^3-2ax+2a+1\right)dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}(2a+1)\,dx=2\pi\Big[\ (2a+1)x\Big]_0^1=2(2a+1)\pi$$

따라서, $2(2a+1)\pi=50\pi$ 에서

$2a+1=25\quad ,\therefore\ a=12$

22. 정답 ①

$$\int_0^x(x-t)\{f(t)\}^2dt=x^3$$

$$x\int_0^x\{f(t)\}^2dt-\int_0^x t\{f(t)\}^2dt=x^3$$

등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x\{f(t)\}^2dt+x\{f(x)\}^2-x\{f(x)\}^2=3x^2$$

$$\int_0^x\{f(t)\}^2dt=3x^2$$

따라서 구하는 회전체의 부피는 $\pi\int_0^3\{f(x)\}^2dx=27\pi$

23. 정답 29

[출제의도] 직선 운동하는 점의 위치를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

t초 후의 P, Q의 좌표는 각각 $(3t+2,0)$, $(0,t-1)$이다.

그런데 $0\le t<1$에서 Q의 y좌표가 음수이므로

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{(3t+2)(1-t)}{2} & (0\le t<1)\\[2mm] \dfrac{(3t+2)(t-1)}{2} & (1\le t\le 2)\end{cases}$$ 이다.

따라서,

$$\int_0^2 S(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}(3t+2)(1-t)dt+\int_1^2\frac{1}{2}(3t+2)(t-1)dt$$

$$=\frac{5}{2}$$

따라서 $p^2+q^2=5^2+2^2=29$

24. 답 512

$t=2$일 때 그릇의 물의 깊이는

$$\int_0^2 v\,dt=\int_0^2 3t(4-t)dt$$

$$=[6t^2-t^3]_0^2=24-8=16$$

따라서 그릇에 고인 물의 부피는

$$\pi\int_0^{16}x^2dy=\pi\int_0^{16}4y\,dy=\pi[2y^2]_0^{16}=512\pi$$

$\therefore a=512$

25. 답 24

함수 $y=\{f(x)\}^2$은 주기가 2인 함수 이므로

$$S=\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=2\int_0^2\{f(x)\}^2dx$$

$$=4\int_0^1\{f(x)\}^2dx=4\int_0^1(2|x|)^2dx$$

$$=16\int_0^1x^2dx=\frac{16}{3}$$

$$V=\pi\int_{-2}^{2}y^2dx=2\pi\int_0^2y^2dx$$

$$=4\pi\int_0^1\{f(x)\}^4dx=4\pi\int_0^1(2|x|)^4dx$$

$$=64\pi\int_0^1x^4dx=\frac{64}{5}\pi$$

$$\therefore\ \frac{10}{\pi}\times\frac{V}{S}=\frac{10}{\pi}\times\frac{\frac{64}{5}\pi}{\frac{16}{3}}=24$$

26. 832

구의 반지름의 길이를 r이라 하면

$8^2+(r-4)^2=r^2$에서 $r=10$

따라서, 잘라낸 렌즈 반쪽의 부피는

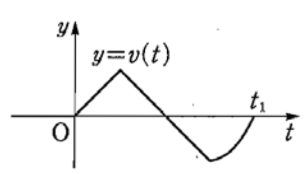
$$V=\pi\int_6^{10}(10^2-x^2)dx=\left(400-\frac{784}{3}\right)\pi=\frac{416}{3}\pi$$

따라서, 구하는 렌즈의 부피는

$2V=\frac{416}{3}\pi\times2=\frac{832}{3}\pi(\text{㎤})\qquad\therefore 3k=832$

27. 답 ⑤

주어진 조건에 의해 $y=v(t)$ $(0\le t\le t_1)$의 그래프의 예는 다음과 같이 그릴 수 있다.



ㄱ. $v(t)<0$인 t가 존재한다. (거짓)

ㄴ. $\int v(t)dt=x(t)$라 하면

$\int_0^{t_1} v(t)dt=x(t_1)-x(0)=0$에서 $x(t_1)=x(0)$

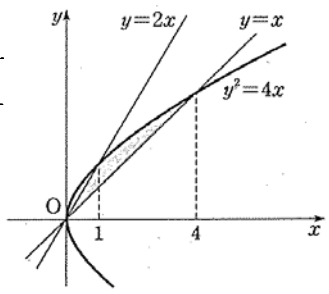
$\therefore\ a=b$ (참)

ㄷ. 위의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=v(t)$의 그래프는 t축과 세 점에서 만나는 연속함수이므로 반드시 극값을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

28. ④

주어진 부분의 넓이는 곡선 $y^2=4x$와 두 직선 $y=x$, $y=2x$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 구하는 넓이 S는 (그림 참조)



$\int_0^4 (2\sqrt{x}-x)dx-\int_0^1 (2\sqrt{x}-2x)dx$

$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right]_0^1$

$=\left(\frac{32}{3}-8\right)-\left(\frac{4}{3}-1\right)=\frac{7}{3}$

29. 정답 ④

ㄱ. $(g\circ f)(x)=e^{x^2-ax-b}=e^{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-b-\frac{a^2}{4}}$이므로 $x=\frac{a}{2}$에서 극소이다.

즉, $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 구간 $\left(-\infty,\ \frac{a}{2}\right)$에서 감소하고, 구간 $\left(\frac{a}{2},\ \infty\right)$에서 증가한다.

따라서 $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)=e^{-b}$는 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다. $\therefore$ 참

ㄴ. $(f\circ g)(x)=-e^{-2x}+ae^{-x}+b$이므로

$\frac{d}{dx}\{(f\circ g)(x)\}=2e^{-2x}-ae^{-x}=e^{-x}(2e^{-x}-a)=0$

$2e^{-x}=a,\ -x=\ln\frac{a}{2}$

따라서, $x=\ln\frac{2}{a}$이면 $\frac{d}{dx}\{(f\circ g)(x)\}>0$이고,

$x>\ln\frac{2}{a}$이면 $\frac{d}{dx}\{(f\circ g)(x)\}<0$이므로 $x=\ln\frac{2}{a}$에서

$y=(f\circ g)(x)$는 극댓값(최댓값)을 갖는다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. $y=(2x-a)(g\circ f)(x)=(2x-a)e^{x^2-ax-b}$이므로

$\left(0,\ \frac{a}{2}\right)$에서 $(2x-a)(g\circ f)(x)<0$

따라서 $y=(2x-a)(g\circ f)(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이S는

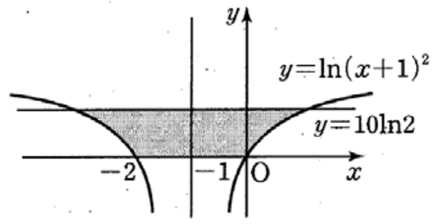
$S=-\int_0^{\frac{a}{2}}(2x-a)e^{x^2-ax-b}dx$

$=-\left[e^{x^2-ax-b}\right]_0^{\frac{a}{2}}$

$=e^{-b}-e^{-\frac{a^2}{4}-b}=e^{-b}\left(1-e^{-\frac{a^2}{4}}\right)$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30. 정답 124



$y=\ln(x+1)^2=2\ln|x+1|$

(i) $x>-1$일 때, $y=2\ln(x+1)$

(ii) $x<-1$일 때, $y=2\ln(-x-1)$

두 그래프는 $x=-1$에 대칭이므로 $y=\ln(x+1)^2$의 그래프를 x축의

방향으로 1만큼 이동시키면

$y=2\ln|x+1| \Rightarrow y=2\ln|x|$

$x>0$인 부분의 넓이를 구하여 2배하면 구하는 넓이가 된다.

$y=2\ln|x|$에서 $x>0$일 때 $x=e^{\frac{y}{2}}$이다.

$\therefore\ S=2\int_0^{10\ln2} e^{\frac{y}{2}}dy=2\left[2e^{\frac{y}{2}}\right]_0^{10\ln2}$

$=4(e^{5\ln2}-1)=4(2^5-1)=124$

31. 답 12

곡선 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$에서 $(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=2^2$이므로 $x^{\frac{1}{3}}=2\cos\theta$,

$y^{\frac{1}{3}}=2\sin\theta$라 하면

$x=8\cos^3\theta,\ y=8\sin^3\theta\ \left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{dx}{d\theta}=-24\cos^2\theta\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=24\sin^2\theta\cos\theta$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-24\cos^2\theta\sin\theta)^2+(24\sin^2\theta\cos\theta)^2}\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}24\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\,d\theta$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta d\theta$

$=12\left[-\frac{\cos2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=12$

32. 정답 ④

$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $f'(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$s=\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$

$$=\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^a \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^a \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^a=\frac{e^a-e^{-a}}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, $\left(\frac{e^a+e^{-a}}{2}\right)^2=1+\left(\frac{e^a-e^{-a}}{2}\right)^2$이므로

$$\frac{e^a+e^{-a}}{2}=\sqrt{1+s^2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$e^a=s+\sqrt{1+s^2}$

$\therefore a=\ln(s+\sqrt{1+s^2})$

33. 정답 19

두 곡선 $y=\tan^n x$와 $y=-\tan^{n+2}x$은 원점에서 만나므로 구하는 넓이 S_n은

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\tan^n x-(-\tan^{n+2}x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^n x+\tan^{n+2}x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\cdot\sec^2 x dx=\int_0^1 t^n dt\ \ (\because\ \tan x=t)$$

$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

$S_n=\frac{1}{20}$으로부터 $\frac{1}{n+1}=\frac{1}{20}$ $\quad\therefore n=19$

34. 답 ①

회전체의 부피를 V라 하면

$\ln x=t$라 하면 $x=e^t$이고 $\frac{1}{x}dx=dt$

$x=1$일 때, $t=0$

$x=e$일 때, $t=1$이므로

$$V=\pi\int_0^1\frac{t^2}{t^t}dt=\pi\int_0^1 t^2e^{-t}dt$$

$u=t^2$, $v'=e^{-t}$이라 하면 $u'=2t$, $v=-e^{-t}$이므로

$$\int t^2e^{-t}dt=-t^2e^{-t}+\int 2te^{-t}dt$$

$u=2t$, $v'=e^{-t}$이라 하면 $u'=2$, $v=-e^{-t}$이므로

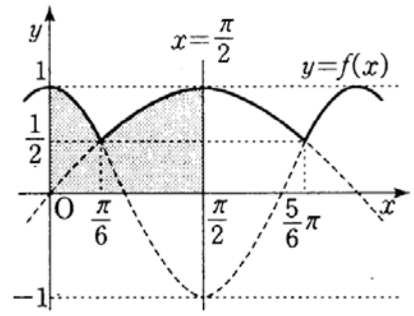
$$\int 2te^{-t}dt=-2te^{-t}+\int 2e^{-t}dt=-2te^{-t}-2e^{-t}$$

$$\therefore V=\pi[(-t^2-2t-2)e^{-t}]_0^1=\pi\{(-5e^{-1})-(-2)\}$$

$$=\left(2-\frac{5}{e}\right)\pi$$

35. 답 ②

$\cos 2x=\sin x$를 만족하는 x를 구해보면 다음과 같다.



$\cos 2x=\sin x$에서 $1-2\sin^2 x=\sin x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\therefore\ \sin=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=-1$

따라서 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin x & \left(\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 위의 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{2}$로 둘러싸인 도형을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 2x\ dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\ dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 4x}{2}\ dx+\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\ dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right)-0\right\}$$

$$+\frac{\pi}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\pi^2+\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi$$

36. 답 25

$x=(1-t^2)\cos t$, $y=(1-t^2)\sin t$에서

$$\frac{dx}{dt}=(-2t)\cos t-(1-t^2)\sin t$$

$$\frac{dy}{dt}=(-2t)\sin t+(1-t^2)\cos t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$=4t^2\cos^2 t+(1-t^2)^2\sin^2 t+4t^2\sin^2 t+(1-t^2)^2\cos^2 t$$

$$=4t^2+(1-t^2)^2=(t^2+1)^2$$

움직인 거리는

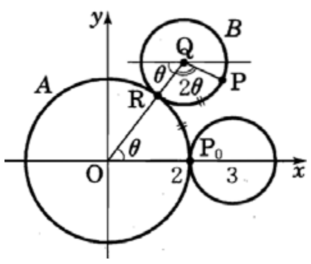
$$\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1 \sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$

$$=\int_0^1 (t^2+1)dt=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

$\therefore a=4,\ b=3$

$\therefore a^2+b^2=16+9=25$

37. 24



오른쪽 그림과 같이 점 $(2,\ 0)$을 P_0, 움직인 원 B의 중심을 Q, 두 원 A, B의 접점을 R 라 하면 호 $\mathrm{P_0R}$ 의 길이와 호PR 의 길이는 서로 같다.

따라서 $\angle \mathrm{ROP}_0=\theta$라 하면

$\widehat{\mathrm{P_0R}}=2\theta=\widehat{\mathrm{RP}}$ 이고, $\overline{\mathrm{QR}}=1$ 이므로

$\angle\mathrm{PQR}=2\theta$ 이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(3\cos\theta, 3\sin\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(\cos(\pi+3\theta),\ \sin(\pi+3\theta))=(-\cos 3\theta,\ -\sin 3\theta)$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(3\cos\theta-\cos 3\theta,\ 3\sin\theta-\sin 3\theta)$

$x=3\cos\theta-\cos 3\theta,\ y=3\sin\theta-\sin 3\theta$라 하면

$$\frac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta+3\sin 3\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=3\cos\theta-3\cos 3\theta$$

$0\le\theta\le 2\pi$이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{18(1-\cos 2\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}6|\sin\theta|d\theta=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=24$$

정답 및 풀이

1. 답 72

남자 4명이 원탁에 앉는 방법의 수는 $3!=6$

남자 사이에 여자 2명이 앉는 방법의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 방법의 수는 $6\times12=72$

2. 144

컵 받침대 하나를 고정시킨 후, 나머지 3개의 컵 받침대를 놓는 경우의 수는 $3!=6$(가지)

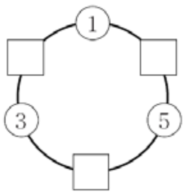
컵 받침대를 놓은 각각에 대하여 컵을 놓는 경우의 수는

$4!=24$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$(가지)

3. 답 ⑤



2번 공과 4번 공만 직접 연결이 되지 않고, 나머지 번호의 공은 서로 직접 연결되므로 막대기를 따라 이동할 때, 5개의 공을 모두 한 번씩만 지나서 다시 출발한 공으로 돌아오는 방법의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자를 원형으로 배열할 때, 2와 4가 서로 이웃하지 않게 배열하는 방법의 수와 같다. 1, 3, 5를 원형으로 배열하는 방법의 수는 $(3-1)!=2$(가지)

3개의 빈 곳에 2, 4를 넣는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$(가지)

즉, 2와 4가 서로 이웃하지 않게 원형으로 배열하는 방법의 수는 $2\times6=12$(가지)

따라서 처음 출발하는 공을 선택하는 경우의 수가 5(가지)이므로

$\sum_{n=1}^{5} f(n)=12\times5=60$(가지)

4. 정답 ⑤

수학 외적 문제 해결 능력-순열과 조합

남자 4명을 마주보지 않도록 앉히는 방법의 수는 다음과 같다.

우선 한 명을 앉히는 방법의 수는 2가지이다.

다음 남자를 이미 앉은 남자와 마주보지 않도록 앉히는 방법의 수는 6가지

다음 남자를 이미 앉은 남자와 마주보지 않도록 앉히는 방법의 수는 4가지

다음 남자를 이미 앉은 남자와 마주보지 않도록 앉히는 방법의 수는 2가지이다.

$\therefore\ 2\times6\times4\times2=96$(가지)

이제, 여자 4명을 앉히는 방법의 수는

$4!=24$(가지)

따라서, 구하는 방법의 수는 $96\times24=2304$

5. 정답 ②

6명을 의자에 앉히는 방법의 수는 $5!$(가지)

6명 중 의자 뒤에 서는 두 명을 이웃하지 않게 택하는 방법의 수는

${}_6C_2-6=\dfrac{6\cdot5}{2}-6=9$(가지)

따라서 구하는 방법의 수는

$5!\times9$(가지)

6. 답 840

정육각형 안을 색칠하는 경우의 수는 7(가지)

정육각형의 바깥쪽에 색칠하는 경우의 수는 $5!$이므로 구하는 경우의 수는

$7\times5!=7\times120=840$

7. 답 ④

(ⅰ) 1, 1, 2, 2인 경우 : $\dfrac{4!}{2!2!}=6$

(ⅱ) 1, 1, 2, 3과 1, 2, 2, 3인 경우 : $2\times\dfrac{4!}{2!}=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $6+24=30$이다.

8. ④

ㄱ. (참) $\dfrac{8!}{2!2!2!}=7!$

ㄴ. (거짓) 자음을 ㅇ, 모음을 ㅁ이라 하면

ㅇㅁㅇㅁㅇㅁㅇㅁ 또는 ㅁㅇㅁㅇㅁㅇㅁㅇ이므로

$\left(\dfrac{4!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\right)+\left(\dfrac{4!}{2!}\times\dfrac{4!}{2!2!}\right)$

$=2\cdot(3!)^2+2\cdot(3!)^2=4\cdot(3!)^2$

ㄷ. (참) e를 a로 생각하고 배열하면 되므로

$\dfrac{8!}{4!2!}=7\times5!$

9. 정답 ②

C로 시작하는 문자열의 개수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$(개)

H로 시작하는 문자열의 개수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$(개)

L로 시작하는 문자열의 개수는 $\dfrac{5!}{2!}=60$(개)

O로 시작하는 문자열의 개수는 $5!=120$(개)

한편, SCHOOL은 S로 시작하는 문자열 중에서 3번째 문자열이다.

$\therefore\ n=60+60+60+120+3=303$

10. ①

현수막 B는 2곳 이상 설치해야 하므로 B가 2곳, 3곳, 4곳에 설치하는 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

(ⅰ) A 1곳, B 2곳, C 2곳에 설치하는 경우

$\dfrac{5!}{2!2!}=30$(가지)

(ⅱ) A 1곳, B 3곳, C 1곳에 설치하는 경우

$\frac{5!}{3!}=20$(가지)

(iii) A 1곳, B 4곳에 설치하는 경우

$\frac{5!}{4!}=5$(가지)

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하려는 경우의 수는
$30+20+5=55$(가지)

11. 정답 ⑤
수학, 영어, 국어를 각각 1시간씩 공부하는 경우의 수를 a, b, c 라 하면 수학을 2시간 공부하고 영어나 국어를 2시간 공부하는 경우는 $aabbc$ 또는 $aabcc$ 이고 이것을 나열하는 방법에서 같은 문자끼리 이웃하는 경우를 빼면 되므로

$2\times\left\{\frac{5!}{2!2!1!}-\left(\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}-3!\right)\right\}=24$

또, 수학을 3시간 공부하고 영어, 국어를 1시간씩 공부하는 경우는 $aaabc$를 나열하는 방법에서 a끼리 이웃하지 않아야 하므로 $abaca$와 $acaba$ 두 가지이다. 따라서 26가지가 된다.

12. 답 ②
[해설] 함숫값의 합이 5가 되는 경우는 (1, 1, 3), (1, 2, 2)의 두 가지 경우뿐이다.
(i) 1, 1, 3을 배열하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하는 방법의 수는

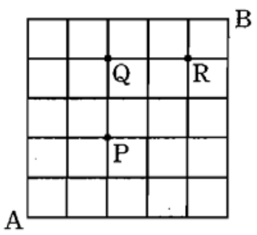
$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

(ii) 1, 2, 2를 배열하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값으로 정하는 방법의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$(가지)

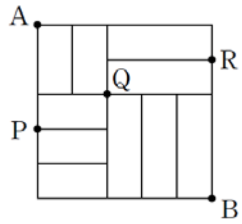
따라서 (i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $3+3=6$(가지)이다.

13. 답 46



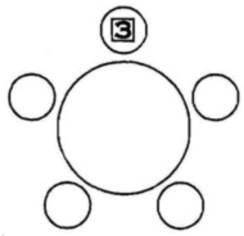
(i) A에서 B로 가는 최단 경로의 수는
$\frac{10!}{5!5!}=252$(가지)
(ii) A에서 P를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는
$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{6!}{3!3!}=120$(가지)
(iii) A에서 P를 거치지 않고 Q를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는
$\left(\frac{6!}{2!4!}-\frac{4!}{2!2!}\right)\times\frac{4!}{3!}=9\times4=36$(가지)
(iv) A에서 P, Q를 거치지 않고 R를 거쳐 B로 가는 최단 경로의 수는
$\left\{\frac{8!}{4!4!}-\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{2!2!}-\left(\frac{6!}{4!2!}-\frac{4!}{2!2!}\right)\right\}\times2=50$(가지)
(i)~(iv)에서 구하는 최단 경로의 수는
$252-(120+36+50)=46$(가지)

14. 정답 17
A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경로가 중복되지 않도록 세 지점 P, Q, R를 오른쪽 그림과 같이 정하자.



(i) $A\to P\to B$: $1\times\frac{3!}{2!}=3$
(ii) $A\to Q\to B$: $\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{3!}=12$
(iii) $A\to R\to B$: $2\times1=2$
따라서 구하는 경로의 수는 $3+12+2=17$(가지)

15. ① 이해 능력 - 순열과 조합
그림과 같이 카드 3을 한 의자 위에 올려놓았을 때, 나머지 카드를 각 의자 위에 올려놓는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!2!}=6$(가지)이다.



16. 답 ⑤
구하고자 하는 경우의 수는 AABCC를 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\frac{5!}{2!2!}=30$(가지)
[다른 풀이]
같은 기둥에 꽂혀 있는 원판은 꺼내는 순서가 정해져 있으므로 기둥을 고르는 방법을 구하면 된다. 따라서, A, B, C를 각각 두 번, 한 번, 두 번 고르면 된다. 구하고자 하는 경우의 수는
${}_5C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_2C_2=30$(가지)

17. 정답 ④
수학 외적 문제 해결 능력 - 순열과 조합
(i) 첫째 자리의 경우의 수: 2(가지)
(ii) 둘째 자리부터 다섯째 자리의 경우의 수: 2, 3, 5 중에서 하나를 더 추가하여 네 자리를 만들어야 하므로 $3\times\frac{4!}{2!}=36$(가지)
(iii) 마지막 두 자리의 경우의 수: 여섯째 자리의 수는 0부터 9까지 모두 가능하고, 조건 (다)를 만족시키는 일곱째 자리의 수는 각각 하나뿐이므로 10(가지)
따라서 구하는 경우의 수는 $2\times36\times10=720$(가지) 이다.

18. ⑤
각 자리의 숫자의 합이 7인 네 자리의 자연수가 되는 경우는 $(1,1,1,4)$, $(1,1,2,3)$, $(1,2,2,2)$ 의 세 가지뿐이다.
(i) $(1,1,1,4)$로 만들어지는 네 자리의 자연수의 개수

$\frac{4!}{3!}=4$(개)

(ii) $(1,1,2,3)$로 만들어지는 네 자리의 자연수의 개수

$\frac{4!}{2!}=12$(개)

(iii) $(1,2,2,2)$로 만들어지는 네 자리의 자연수의 개수

$\frac{4!}{3!}=4$(개)

따라서 각 자리의 숫자의 합이 7인 네 자리의 자연수는 20개다.

19. 정답 ②

$f(a,\,b)$는 점 P가 원점에서 1만큼씩 이동하여 점 $(a,\,b)$로 가는 최단 경로의 수이므로

$f(a,\,b)=\frac{(a+b)!}{a!b!}$

ㄱ. $f(2,3)=\frac{5!}{2!3!}=10$ $\therefore$참

ㄴ. $f(a,b)=\frac{(a+b)!}{a!b!}=\frac{(b+a)!}{b!a!}=f(b,a)$ $\therefore$참

ㄷ. $f(1,2)=\frac{3!}{2!}=3$, $f(2,3)=\frac{5!}{2!3!}=10$

$f(f(1,2),3)=f(3,3)=\frac{6!}{3!3!}=20$

$f(1,f(2,3))=f(1,10)=\frac{11!}{10!}=11$

$f(f(1,\,2),\,3)\neq f(1,\,f(2,\,3))$ $\therefore$거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

20. 19 이해 능력 - 순열과 조합

각 상자에 들어가는 공의 수는 모두 같으므로 먼저 흰 공을 넣었을 때, 검은 공을 넣는 방법의 수는 한 가지 뿐이다.

그러므로 흰 공을 다음과 같이 나누어 넣는다.

(ⅰ) 1, 1, 1, 1로 나누어 넣는 경우 : 1가지

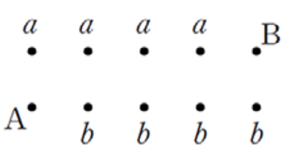
(ⅱ) 0, 1, 1, 2로 나누어 넣는 경우 : $\frac{4!}{2!}=12$가지

(ⅲ) 0, 0, 2, 2로 나누어 넣는 경우 : $\frac{4!}{2!2!}=6$가지

따라서 구하는 방법의 수는 $1+12+6=19$(가지)이다.

21. 정답 ③

동이가 이동한 경로가 서로 만나지 않으려면 각 줄에 있는 4그루의 나무들을 반드시 왼쪽부터 차례로 조사해야 한다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 각 줄의 나무들을 모두 같은 것으로 생각할 수 있으므로 구하는 방법의 수는 $a,\,a,\,a,\,a,\,b,\,b,\,b,\,b$를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같다.

$\therefore \frac{8!}{4!4!}=70$(가지)

22. 정답 17

0을 한 개 이하 사용하여 만든 다섯 자리 자연수 중에서 각 자리의 수의 합이 5인 자연수는

ⅰ) 모두 1만 사용한 경우

11111 한가지

ⅱ) 11120처럼 1을 3개, 0, 2를 각각 1개 사용한 경우

전체 경우에서 0이 맨 앞에 사용되는 경우를 빼면 되므로

$\frac{5!}{3!}-\frac{4!}{3!}=16$

ⅰ), ⅱ)에서 전체 경우의 수는 17가지이다.

23. 정답 66

[출제의도] 순열을 이용하여 실생활 문제해결하기

(ⅰ) A→P→Q→B 경로의 경우:

$1\times1\times\frac{6!}{4!2!}=15$

(ⅱ) A→P→R→B 경로의 경우:

$1\times1\times\frac{5!}{4!}=5$

(ⅲ) A→P→S→B 경로의 경우:

$1\times1\times1=1$

(ⅳ) A→Q→R→B 경로의 경우:

$\frac{5!}{4!}\times1\times\frac{5!}{4!}=25$

(ⅴ) A→Q→S→B 경로의 경우:

$\frac{5!}{4!}\times1\times1=5$

(ⅵ) A→R→S→B 경로의 경우:

$\frac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$

따라서 총 66가지이다.

24. 114

(가)에서 $f(1)\neq f(2)$인 경우의 수는 $3\times2=6$ ……㉠

이 6가지 중 $f(1)=a$, $f(2)=b$일 때를 알아보자.

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 모두 a 또는 b인 경우의 수는 $2^3=8$이므로

$3^3-2^3=19$ ……㉡

㉠, ㉡에서 (가), (나)를 모두 만족하는 함수 f의 개수는 $6\times19=114$

25. 정답 136

[출제의도] 함수의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(ⅰ) $f(3)=2$인 경우

1, 2는 1로, 4, 5, 6은 3, 4, 5, 6 중 하나로 대응되므로 경우의 수는 ${}_1\Pi_2\times{}_4\Pi_3=64$

(ⅱ) $f(3)=4$인 경우

1, 2는 1, 2, 3중 하나로 4, 5, 6은 5, 6중 하나로 대응되므로 경우의 수는 ${}_3\Pi_2\times{}_2\Pi_3=72$

(ⅲ) $f(3)=6$인 경우는 없다.

따라서 구하는 모든 함수의 개수는 $64+72=136$ 이다.

26. 답 ③ 순열

[해설]1부터 1000까지의 자연수 중에서

□□5와 같이 일의 자리가 5인 수들의 개수는 ${}_{10}\Pi_2=10^2$(개)

□5□와 같이 십의 자리가 5인 수들의 개수는 ${}_{10}\Pi_2 = 10^2$(개)
5□□와 같이 백의 자리가 5인 수들의 개수는 ${}_{10}\Pi_2 = 10^2$(개)
따라서 12345678910111213⋯9991000에서 5가 나타나는 횟수는 $3\times10^2 = 300$(회)이다.
[다른 풀이]
1부터 999까지의 수를 000부터 999까지로 생각하면
000001002003⋯998999⋯⋯ (∗)
나열된 수는 모두 1000개이고 각 수에 사용된 숫자는 3개씩이므로 (∗)은 모두 3000개의 숫자가 나열된 것이다.
이때, 사용된 0, 1, 2, 3, ⋯, 9는 모두 $\frac{3000}{10} = 300$(개) 씩이다.

27. 정답 ③
추론 능력(추측) - 순열과 조합
$f(0)$는 집합 A의 임의의 원소와 대응할 수 있다.
(i) $f(0)=0$인 경우의 수는 1(가지)
이때, 1, 2는 각각 0을 제외한 4개의 원소에 임의로 대응할 수 있으므로 4^2(가지)
이때, $-1, -2$가 대응하는 원소는 (가)에 의해 각각 유일하게 결정된다.
$\therefore\ 1\times4^2 = 16$
(ii) $f(0)=k\ (k\neq0)$인 경우의 수는 4(가지)
이때, 1, 2는 각각 k와 $-k$를 제외한 3개의 원소에 임의로 대응할 수 있으므로 3^2(가지)
이때, -1, -2가 대응하는 원소는 각각 유일하게 결정된다.
$\therefore\ 4\times3^2 = 36$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $16+36=52$

28. 답 576
3개의 빨간 공을 노란 상자 또는 빨간 상자에 넣는 방법의 수는
${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$(가지)
2개의 파란 공을 노란 상자 또는 파란 상자에 넣는 방법의 수는
${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$(가지)
따라서 구하는 방법의 수는 $64\times9 = 576$(가지)

29. 답 ②
$(2x+3)^5$에서 x^3의 계수는
${}_5C_2\cdot2^3\cdot3^2 = \frac{5!}{3!2!}\cdot2^3\cdot3^2 = 720$

30. 답 60 **이항정리**
$\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r\cdot x^r\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{6-r} = {}_6C_r\cdot2^{6-r}\cdot x^{2r-6}\ \ (0\le r\le 6)$
이므로 x^2의 계수는 $2r-6=2$, 즉, $r=4$일 때,
${}_6C_4\cdot2^{6-4} = \frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot4 = 60$

31. 정답 20
$\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은
${}_6C_r\left(\frac{x}{2}\right)^{6-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = {}_6C_r\,2^{2r-6}\cdot x^{6-2r}$ 이므로 $r=3$일 때 상수항이다.
$r=3$을 대입하면 ${}_6C_3=20$

32. [출제의도] 이항계수를 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$(x^2-1)^7$의 전개식에서 일반항은 ${}_7C_r(x^2)^{7-r}(-1)^r$이므로 x^6의 계수는 ${}_7C_4(-1)^4=35$이다.

33. 정답 **280**
$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^7 = \sum_{r=0}^{7}{}_7C_r\,(2x)^{7-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$
$=\sum_{r=0}^{7}{}_7C_r\,2^{7-r}x^{7-3r}$
$7-3r=-5\quad\therefore r=4$
따라서 $\frac{1}{x^5}$ 의 계수는 ${}_7C_4\,2^3 = 280$ 이다.

34. 정답 ①
[출제의도] 이항계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$(x+a)^{10}$의 전개식에서 x, x^2, x^4의 계수는
${}_{10}C_1\,a^9$, ${}_{10}C_2\,a^8$, ${}_{10}C_1\,a^9$
즉, $10a^9$, $45a^8$, $210a^6$
이 순서로 등비수열을 이루므로 $(45a^8)^2 = 10a^9\cdot210a^6$
$\therefore\ a=\frac{28}{27}$

35. 10
[출제 의도] 이항정리를 이용하여 식을 전개할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 일반항은
${}_5C_r\,(x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_5C_r\,x^{10-3r}$에서 $10-3r=4\quad\therefore r=2$
따라서, x^4의 계수는 ${}_5C_2=10$

36. 답 135
$\left(x-\frac{3}{x}\right)^6$의 전개식에서 일반항은
${}_6C_rx^{6-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}_6C_r(-3)^rx^{6-2r}$
$6-2r=2$일 때 $r=2$이므로 x^2의 계수는
${}_6C_2\cdot(-3)^2=135$

37. ②

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$ 의 일반항은

${}_7C_3x^{7-r}\left(-\frac{2}{x}\right)^r={}_7C_r(-2)^rx^{7-2r}$

따라서 x항의 계수는 $r=3$일 때이므로

${}_7C_3(-2)^3=-280$

38. 정답 32

[출제의도] 이항정리를 이용하여 이항계수 이해하기

${}_4C_1\,x^3\times\frac{1}{x^3}+{}_8C_2\,x^6\times\left(\frac{1}{x^3}\right)^2={}_4C_1+{}_8C_2$

$\therefore$ 32

39. ③

$\left(x^2+\frac{a}{x^2}\right)^4=\sum_{r=0}^{4}{}_4C_r(x^2)^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r=\sum_{r=0}^{4}{}_4C_r\,a^r\,x^{2(4-2r)}$

상수항이 24이므로

$2(4-2r)=0$ $\therefore$ $r=2$

$\therefore$ ${}_4C_2a^2=24$

$6a^2=24$ $\therefore$ $a^2=4$

40. 정답 ②

$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식에서 일반항을 생각하면

${}_4C_r(x^3)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_rx^{12-3r}\cdot x^{-r}={}_4C_rx^{12-4r}$

$12-4r=8$ $\therefore$ $r=1$

$12-4r=-4$ $\therefore$ $r=4$

$a={}_4C_1=4$, $b={}_4C_4=1$

$\therefore$ $a+b=5$

41. 답 4

${}_8C_r(ax^2)\left(\frac{b}{x}\right)^{8-r}={}_8C_r(ax^2)b^{8-r}x^{3r-8}$에서

x^7의 계수는 $r=5$일 때 ${}_8C_5a^5b^3=80$

x의 계수는 $r=3$일 때 ${}_8C_3a^3b^5=5$

${}_8C_5={}_8C_3$이므로 위 두식을 변변 나누면 $\frac{a^2}{b^2}=16$

$\therefore$ $\frac{a}{b}=4$

42. 정답 ⑤

x^r과 x^{3r}의 계수는 각각 ${}_{100}C_r$, ${}_{100}C_{3r}$이다.

${}_{100}C_r={}_{100}C_{3r}={}_{100}C_{100-3r}$

$r=100-3r$ $\therefore$ $r=25$

43. 정답 ②

이해력 - 순열과 조합

$(x-2)^9$의 전개식에서 x^4의 계수는 ${}_9C_4(-2)^5$이고, x^5의 계수는 ${}_9C_5(-2)^4$이므로 $x(x+a)(x-2)^9=(x^2+ax)(x-2)^9$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_9C_4(-2)^5+a\times{}_9C_5(-2)^4$

$={}_9C_4(-2)^4\{(-2)+a\}=0$

$\therefore a=2$

44. 160

$(x+2y)^5(x-2y)^5=(x^2-4y^2)^5$이므로 이 전개식에서 x^6y^4항은

${}_5C_3(x^2)^3(-4y^2)^2=160x^6y^4$

따라서 x^6y^4의 계수는 160이다.

45. 정답 32

[출제의도] 이항정리를 이용하여 계산하기

$\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\left(\frac{3}{8}\right)^k\left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}=\left(\frac{3}{8}+\frac{13}{8}\right)^5=2^5=32$

46. 정답 ③

(주어진 식)

$={}_{20}C_0\sin\frac{\pi}{6}+{}_{20}C_2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$+{}_{20}C_2\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cdots+{}_{20}C_{20}\sin\left(20\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}{}_{20}C_0+\left(-\frac{1}{2}\right){}_{20}C_1+\frac{1}{2}{}_{20}C_2+\left(-\frac{1}{2}\right){}_{20}C_3+\cdots+\frac{1}{2}{}_{20}C_{20}$

$=\frac{1}{2}({}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+\cdots+{}_{20}C_{20})$

$=\frac{1}{2}(1-1)^{20}=0$

47. 답 165

$(1+x)^n$ $(n\geq 2)$에서 x^2의 계수는 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$이므로 주어진 다항식에서 x^2의 계수는

$\sum_{k=2}^{10}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-\frac{10\cdot 11}{2}\right)=165$

48. 정답 10

$\left(ax+\frac{1}{x}\right)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r(ax)^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_ra^{5-r}x^{5-2r}$에서 x^3의 계수 a_3은 $5-2r=3$일 때이므로 $r=1$이다.

$\therefore$ $a_3={}_5C_1a^4=5$, $a^4=1$

x^{-1}의 계수 a_7은 $5-2r=-1$일 때이므로 $r=3$이다.

$a_7={}_5C_3a^2=10a^2=10$ ($\because$ a는 실수)

49. 답 ④

$(ax-2)^5$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합은 $(ax-2)^5$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로 $(a-2)^5$이다.

즉, $(a-2)^5=1$에서 $a-2=1$이므로 $a=3$

따라서 다항식 $(3x-2)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는

${}_5\mathrm{C}_3 \cdot 3^3 \cdot (-2)^2 = 10 \cdot 27 \cdot 4 = 1080$

50. [출제의도] 이항분포의 분산을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

10 이하의 음이 아닌 정수를 확률변수 X라 하면

$f(r) = {}_{10}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \mathrm{P}(X=r)$이므로

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{2}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X) = 10\times\frac{1}{2} = 5$, $\mathrm{V}(X) = 10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\therefore 2\sum_{r=0}^{10} r^2 f(r) = 2\mathrm{E}\left(X^2\right) = 2\left[\mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2\right] = 55$

51. 정답 ④

ㄱ. ${}_{10}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2$

ㄴ. 공이 놓일 자리는 모두 열 군데이고, 그 중 파란공이 놓일 자리는 2곳만 선택하면 빨간 공이 놓일 자리는 정해지므로 10개의 공을 배열하는 방법의 수 $\frac{10!}{8!\times 2!}$은 ${}_{10}\mathrm{C}_2$와 같다.

ㄷ. 똑같은 공 11개를 일렬로 놓은 다음 공과 공의 사이사이의 빈 곳 10곳 중에 2곳에 칸막이를 설치하여 세 그룹으로 공을 분할하여 제일 왼쪽 그룹은 A가 가운데 그룹은 B가, 제일 오른쪽 그룹은 C가 갖기로 하면 되므로 칸막이 위치를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_2$이다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 같다.

52. **정답** 42

$(x+1)^4$의 전개시기에서 이차이하의 항은

${}_4C_2 \cdot x^2 + {}_4C_3 \cdot x + {}_4C_4 = 6x^2+4x+1$

$(2x+1)^3$의 전개시기에서 이차이하의 항은

${}_3C_1 \cdot (2x)^2 + {}_3C_2 \cdot 2x + {}_3C_3 = 12x^2+6x+1$

따라서 다항식 $(x+1)^4(2x+1)^3$의 전개식에서 이차항은

$6x^2 \cdot 1 + 4x \cdot 6x + 1 \cdot 12x^2 = 42x^2$

이므로 구하는 x^2의 계수는 42이다.

53. **답** ③

[해설] $(1+x)^m(1+x^2)^n$의 전개식에서 x의 계수는

${}_m\mathrm{C}_1 = \mathrm{m}$이고, x^2의 계수는 ${}_m\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 = 12$이므로

$\frac{m(m-1)}{2} + n = 12$

$m(m-1) = 24-2n$

m, n이 자연수이므로 $0 \le m(m-1) \le 22$

$\therefore m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

따라서 구하는 x의 계수의 최댓값은 5이다.

54. ③

(주어진 식)$=\log_3(1+2)^{10} = \log_3 3^{10} = 10$

55. 정답 165

$f(x-1) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$에서 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x) = 1+(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^{10}$

$a_2 = {}_2\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{10}\mathrm{C}_2$

$= \sum_{k=2}^{10} {}_k\mathrm{C}_2 = \sum_{k=2}^{10}\frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{10}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - \frac{10 \cdot 11}{2}\right) = 165$

56. 정답 ②

$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$에서 $w^3=1$, $w^2+w+1=0$이므로

$(1+w)^{60} = (-w^2)^{60} = w^{120} = (w^3)^{40} = \boxed{1}$

이항정리를 이용하여 $(1+w)^{60}$을 전개하면

$(1+w)^{60}$

$= {}_{60}C_0 + {}_{60}C_1 w + {}_{60}C_2 w^2 + {}_{60}C_3 w^3 + \cdots + {}_{60}C_{60} w^{60}$

$= ({}_{60}\mathrm{C}_0 + {}_{60}\mathrm{C}_3 + {}_{60}\mathrm{C}_6 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{60})$

$+ ({}_{60}\mathrm{C}_1 + {}_{60}\mathrm{C}_4 + {}_{60}\mathrm{C}_7 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{58})\mathrm{w}$

$+ ({}_{60}\mathrm{C}_2 + {}_{60}\mathrm{C}_5 + {}_{60}\mathrm{C}_8 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{59})\mathrm{w}^2$

여기서

$A = {}_{60}\mathrm{C}_0 + {}_{60}\mathrm{C}_3 + {}_{60}\mathrm{C}_6 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{60}$

$B = {}_{60}\mathrm{C}_1 + {}_{60}\mathrm{C}_4 + {}_{60}\mathrm{C}_7 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{58}$

$C = {}_{60}\mathrm{C}_2 + {}_{60}\mathrm{C}_5 + {}_{60}\mathrm{C}_8 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{59}$

라 하면 $A+B+C = {}_{60}\mathrm{C}_0 + {}_{60}\mathrm{C}_1 + {}_{60}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{60}\mathrm{C}_{60}$

$= \boxed{2^{60}}$

$(1+w)^{60} = A+Bw+Cw^2$

$= A+Bw+C(-1-w)$

$= (A-C)+(B-C)w = 1$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\therefore\ A = C+1,\ B = C$

$A+B+C = (C+1)+C+C = 2^{60}$에서

$C = \frac{2^{60}-1}{3}$

$\therefore\ {}_{60}C_2 + {}_{60}C_5 + {}_{60}C_8 + \cdots + {}_{60}C_{59} = \boxed{\frac{2^{60}-1}{3}}$

57. ④

$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} \boxed{{}_n\mathrm{C}_k \cdot (-1)^k} \cdot x^{2k}$ … ㉠

$(1-x)^n(1+x)^n = \left\{\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (-1)^k x^k\right\}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\, x^k\right)$ … ㉡

$r=0, 1, 2, \cdots , \dfrac{n-1}{2}$ 인 r에 대하여 x^{2r+1}항의 계수를 비교

하면 ㉠에서 홀수차 항이 없으므로 x^{2r+1}항의 계수는 $\boxed{0}$

이고 ㉡에서

x^{2r+1}항의 계수는 $\sum_{k=0}^{2r+1} {}_{n}\mathrm{C}_{k}(-1)^{k}\boxed{{}_{n}\mathrm{C}_{2r+1-k}}$ 이다.

그러므로 $\sum_{k=0}^{2r+1} {}_{n}\mathrm{C}_{k}(-1)^{k}{}_{n}\mathrm{C}_{2r+1-k}=0$이 성립한다.

따라서 $r=\dfrac{n-1}{2}$일 때,

$$\sum_{k=0}^{2r+1} {}_{n}\mathrm{C}_{k}(-1)^{k}{}_{n}\mathrm{C}_{2r+1-k}=\sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k}(-1)^{k}{}_{n}\mathrm{C}_{n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}({}_{n}\mathrm{C}_{k})^{2}=0$$

정답 및 풀이

1. 정답 ②

[출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률 계산하기

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 에서

$\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{4}$ 이므로

$\therefore\ P(B)=\frac{1}{3}$

2. 정답 ③

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)=\frac{3}{5}$ 에서

$P(A\cap B)=\frac{2}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

3. 정답 ③

A 와 B 가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$

$P(S)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)=1$ …… ㉠

$P(S)=P(A\cup B)=3P(A)-2P(B)=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$P(A)=\frac{3}{5},\ P(B)=\frac{2}{5}$

4. 정답 ⑤

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{10}=\frac{21}{20}$

이때, $P(A)=x,\ P(B)=y$라 하면

$x+y=\frac{21}{20},\ xy=\frac{11}{40}$ 이므로

$|P(A)-P(B)|^2=(x+y)^2-4xy=\left(\frac{21}{20}\right)^2-4\cdot\frac{11}{40}$

$=\frac{21^2-440}{20^2}=\frac{1}{20^2}$

$\therefore\ |P(A)-P(B)|=\frac{1}{20}$

5. 정답 ②

$P(A^C)=\frac{2}{5}$ 에서 $P(A)=\frac{3}{5}$ 이므로

$\therefore P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

6. 정답 ②

bc가 홀수일 확률이 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이므로

bc가 짝수일 확률은 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$a+bc$가 짝수가 되기 위해서는

(i) a와 bc가 모두 짝수

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

(ii) a와 bc가 모두 홀수

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ 이다.

7. 정답 ④

6장의 카드에서 두 장의 카드를 뽑는 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(i) 1과 2가 뽑히는 경우의 수 : $1\times2=2$

(ii) 2와 3이 뽑히는 경우의 수 : $2\times3=6$

따라서, 구하는 확률은 $\frac{2+6}{15}=\frac{8}{15}$ 이다.

8.[정답] ④

남자 탁구선수 4명과 여자 탁구선수 4명에서 2명씩 4개의 조를 만드는 경우의 수는

${}_8C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{4!}=105$

이 때 남자 1명과 여자 1명으로 이루어진 조가 2개인 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2\times2\times1=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{105}=\frac{24}{35}$

9. ③

철수가 받은 두 점수의 합이 70 인 경우는 다음과 같다.

관람객 투표	$A\left(\frac{1}{2}\right)$	$B\left(\frac{1}{3}\right)$	$C\left(\frac{1}{6}\right)$
심사위원	$C\left(\frac{1}{6}\right)$	$B\left(\frac{1}{3}\right)$	$A\left(\frac{1}{2}\right)$
확률	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$

10. 정답 ②

주어진 6개의 숫자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{6!}{2!3!}=60$(가지)

이 중에서 양쪽 끝에 있는 두 수의 곱이 홀수가 되는 것은 7…7 의 꼴 뿐이고, 이것의 개수는 $\frac{4!}{3!}=4$(가지)

따라서 구하는 확률은 $1-\frac{4}{60}=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

11. **정답** 7
주어진 10 개의 문자를 나열하는 방법의 수는
$\frac{10!}{4!\,6!}=210$
A 끼리는 어느 두 개도 서로 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는 다음 그림과 같이 7 개의 ∨에서 4 개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_7C_4={}_7C_3=35$

$\boxed{\vee B \vee B \vee B \vee B \vee B \vee B \vee}$

$\therefore \frac{q}{p}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$
$\therefore p+q=7$

12. 정답 ③
사건 $A\cap B$의 경우의 수는 나온 눈의 수의 집합에 따라 다음 3가지로 나눌 수 있다.

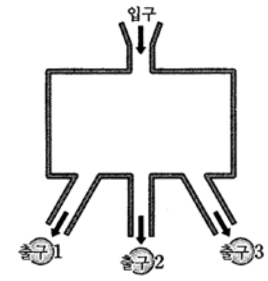
$\{3,\ 3,\ 5\}$의 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$(가지)
$\{3,\ 5,\ 4\}$의 경우 : $3!=6$(가지)
$\{3,\ 5,\ 5\}$의 경우 : $\frac{3!}{2!}=3$(가지)
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3+6+3}{6^3}=\frac{12}{6^3}=\frac{1}{18}$

13. 정답 ③
$m+n$이 홀수이기 위해서는 한 개는 홀수, 다른 한 개는 짝수이어야 한다. 1부터 10까지의 자연수에는 홀수가 5개, 짝수가 5개 있으므로 구하는 확률은
$\frac{{}_5C_1\times{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{5}{9}$

14. 정답 ④
적어도 한 사람이 검은 공을 꺼내는 사건의 여사건은 세 사람이 모두 흰 공을 꺼내는 사건이다.
세 사람이 모두 흰 공을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$
따라서 구하는 확률은 $1-\frac{5}{28}=\frac{23}{28}$

15. 정답 ②
운전자를 제외한 4명이 4개의 좌석에 앉는 경우의 수는
$4!=24$(가지)
(i) 비어 있는 자리에 새로운 사람이 앉을 경우
처음 자동차에 탑승했던 3명끼리 자리를 바꾸어 앉을 경우의 수는 2(가지)
(ii) 비어 있는 자리에 처음 자동차를 탑승했던 3명 중 1명이 앉을 경우
처음 자동차를 탑승했던 3명 중 1명이 비어 있는 자리에 앉는 경우의 수는 3(가지)
새로운 사람이 나머지 자리에 앉을 경우의 수는 1(가지)
$\therefore\ 3\times3\times1=9$(가지)
(i), (ii)에 의하여 처음부터 자동차에 탑승했던 3명이 모두 이전 좌석과 다른 좌석에 앉게 되는 경우의 수는
$2+9=11$(가지)
따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{24}$이다.

16. 정답 ④
네 개의 공이 출구 1 또는 출구 2 로 빠져나가는 사건을 A, 출구 2 또는 출구 3 으로 빠져나가는 사건을 B라 하면, 구하는 사건은 $(A\cup B)^C$이다.



$\therefore \mathrm{P}\left((A\cup B)^C\right)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$
$=1-\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B)$
$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{50}{81}$

17. ⑤
8 장의 카드에서 임의로 3 장의 카드를 뽑는 방법의 수는
${}_8C_3=56$ (가지)
이 때, 가장 큰 수가 홀수가 되는 경우는 5, 7, 9 이므로
(i) 가장 큰 수가 5 인 경우는 3, 4 의 수가 적힌 2 장의 카드에서 2 장을 꺼내야 하므로 그 방법의 수는 ${}_2C_2=1$ (가지)
(ii) 가장 큰 수가 7 인 경우는 3, 4, 5, 6 의 수가 적힌 4 장의 카드에서 2 장을 꺼내야 하므로 그 방법의 수는 ${}_4C_2=6$ (가지)
(iii) 가장 큰 수가 9 인 경우는 3, 4, 5, 6, 7, 8 의 수가 적힌 6 장의 카드에서 2 장을 꺼내야 하므로 그 방법의 수는 ${}_6C_2=15$ (가지)
(i), (ii), (iii)에서 가장 큰 수가 홀수가 되는 경우의 수는
$1+6+15=22$ (가지)
따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{56}=\frac{11}{28}$

18. 정답 ②
[출제의도] 확률을 이용하여 문제해결하기
$a,\ b,\ c$를 정하는 방법의 수는 모두 $6^3=216$(가지)이고,
$f(1)=0$이므로 $c=a+b$ …… ㉠
꼭짓점의 x좌표가 -1이므로 $b=2a$ …… ㉡
㉠과 ㉡에서 $c=3a$ …… ㉢
㉡과 ㉢에서 $a=1$이면 $b=2,\ c=3$
$a=2$이면 $b=4,\ c=6$
따라서, 구하는 확률은 $\frac{2}{216}=\frac{1}{108}$이다.

19. 정답 ⑤
3명이 모두 피아노, 바이올린, 첼로를 선택할 사건을 각각 $A,\ B,\ D$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}$, $\mathrm{P}(D)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}$

또, 3명이 선택한 악기가 모두 같은 사건을 E라 하면, 세 사건 A, B, D는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cup B\cup D)\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(D)\\&=\frac{{}_3\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}=\frac{31}{{}_{14}\mathrm{C}_3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(D)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{{}_3\mathrm{C}_3+{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{14}\mathrm{C}_3}}{\frac{31}{{}_{14}\mathrm{C}_3}}=\frac{1+20}{31}=\frac{21}{31}$$

20. 정답 ④

임의로 두 점을 선택할 때, 두 점 사이의 거리가 2인 경우가 3가지, 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{3}$인 경우가 3가지이므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2-6}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

21. 정답 ①

6명이 각각 2가지씩 선택할 수 있으므로 모든 방법의 수는

$2^6=64$(가지)

6명 중 이웃하지 않은 두 명을 택하는 방법의 수는

$${}_6\mathrm{C}_2-6=\frac{6\cdot5}{2}-6=9$$

이때, 선택된 2명은 일어서고, 나머지 4명은 그대로 앉아 있는 방법의 수는 1가지이므로 구하는 확률은 $\frac{9}{64}$이다.

22. 정답 ①

한 번의 "라운드"에서 세 사람이 우승할 확률은 각각

경민 : $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, 동선 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$, 중섭 : $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

따라서, 첫 번째 "라운드"에서 우승자가 결정될 확률은

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=\frac{13}{18}$ 이므로 구하는 확률은

$$\left(1-\frac{13}{18}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{54}$$

23. 정답 ⑤

20개의 공이 들어 있는 상자에서 3개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{20}\mathrm{C}_3$(가지)

뽑은 세 수를 $a<b<c$라 하면 $b>a+1$이고, $c>b+1$이므로

$1\le a<b-1<c-2\le18$

어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 ${}_{18}\mathrm{C}_3$(가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_{18}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_3}=\frac{68}{95}$$

24. 정답 ③ **이해력-확률**

A를 택하고 흰 구슬이 나올 확률 : $\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$

B를 택하고 흰 구슬이 나올 확률 : $\frac{1}{3}\times0=0$

C를 택하고 흰 구슬이 나올 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

따라서, 흰 구슬이 나올 확률은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$이므로 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

25. 정답 ①

1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6을 배열하는 방법의 수는 $\frac{10!}{5!}$이고 주사위를 한 번 던져서 각각의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$이므로 구하는 확률은 $\frac{10!}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{6^{10}}=\frac{140}{6^7}=\frac{35}{2^5\times3^7}$

$\therefore\ a=35$

26. 정답 ④

12개의 점 중에서 4개의 점을 선택하여 2개씩 선분으로 이을 수 있는 경우의 수는

$$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2\times{}_{10}\mathrm{C}_2}{2!}=3\times11\times5\times9$$

이고, 원의 내부에서 두 선분이 서로 만나는 경우는 12개의 점 중에서 동시에 4개의 점을 선택하는 방법의 수와 마찬가지이므로

$${}_{12}\mathrm{C}_4=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot0}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=11\times5\times9$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{11\cdot5\cdot9}{3\cdot11\cdot5\cdot9}=\frac{1}{3}$$

다른 풀이

네 개의 점 중 서로 다른 두 점끼리 선분으로 연결할 때, 그 두 선분이 서로 만나는 경우는 그 두 선분이 네 개의 점으로 이루어진 사각형의 대각선인 경우 뿐이므로 구하는 확률은 $\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_1}=\frac{1}{3}$

27. 정답 ②

[출제 의도] 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

두 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면, 합이 4 이하가 되는 경우는

$(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(3,1)$의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

28. 정답 ⑤
3장의 카드를 펼쳐서 나올 수 있는 경우는 $2^3=8$(가지)
이때 2장의 카드가 같은 문자인 경우는 (A, B, A), (A, C, A), (B, B, A), (B, B, C), (A, C, C), (B, C, C)
의 6가지이므로 갑이 이길 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

29. 정답 ①
주사위를 한 번 던졌을 때, 전구 $\boxed{1}$에 불이 켜질 확률은 $\frac{1}{3}$, 전구 $\boxed{2}$에 불이 켜질 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 네 번째 시행에서 장난감 로켓이 발사되는 경우는 주사위의 눈의 수가 순서대로 다음과 같이 나올 때이고, 각각의 확률을 구하면
(i) 세 번 연속 3의 배수의 눈의 수가 나오고, 네 번째 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 경우
$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{81}$
(ii) 세 번 연속 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오고, 네 번째 3의 배수의 눈의 수가 나오는 경우
$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$
따라서 구하는 확률은
$\frac{2}{81}+\frac{8}{81}=\frac{10}{81}$

30. 정답 7
10개의 공 중에서 3개의 공을 꺼내어 작은 수부터 차례로 나열하는 방법의 수는 ${}_{10}C_3=120$(가지)
i) 공차가 1인 등차수열을 이루는 경우
$(1,2,3),(2,3,4),\cdots,(8,9,10)$의 8가지
ii) 공차가 2인 등차수열을 이루는 경우
$(1,3,5),(2,4,6),\cdots,(6,8,10)$의 6가지
iii) 공차가 3인 등차수열을 이루는 경우
$(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9),(4,7,10)$의 4가지
iv) 공차가 4인 등차수열을 이루는 경우
$(1,5,9),(2,6,10)$의 2가지
따라서 구하는 확률은
$\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$ $\quad\therefore p+q=7$

31. 정답 ③
[출제의도] 확률의 곱의 법칙 이해하기
$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$
$=\frac{2}{5}+\frac{3}{25}+\frac{1}{50}=\frac{27}{50}$

32. 정답 118
첫 세트에서 A가 이겼을 때, A의 입장에서 A가 승리하는 경우는 다음 표와 같다.

1세트	2세트	3세트	4세트	5세트	확률
승	승				$\frac{1}{3}$
승	패	승	승		$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$
승	패	승	패	승	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$

그러므로 이 시합에서 A가 승리할 확률은
$\frac{1}{3}+\frac{2}{27}+\frac{4}{81}=\frac{27+6+4}{81}=\frac{37}{81}$
$\therefore\ p=81,\ q=37$
$\therefore\ p+q=118$

33. 정답 329
네 개의 주사위의 눈의 수의 순서쌍의 개수는 6^4이고, 네 개의 주사위에서 나온 눈의 수의 합이 7이 되는 경우는
$(1,1,1,4),(1,1,2,3),(1,2,2,2)$이다.
(i) $(1,1,1,4)$인 경우 : $\frac{4!}{3!}=4$
(ii) $(1,1,2,3)$ 경우 : $\frac{4!}{2!}=12$
(iii) $(1,2,2,2)$인 경우 : $\frac{4!}{3!}=4$
(i), (ii), (iii)으로부터 구하는 확률은
$\frac{4+12+4}{6^4}=\frac{5}{324}$
$\therefore p+q=324+5=329$

34. 정답 48
두 농구 선수 갑과 을의 자유투 성공률이 각각 $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$이므로 적어도 한 명이 자유투를 성공할 확률은 여사건의 확률에 의하여
$1-\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=1-\frac{2}{25}=\frac{23}{25}$
$\therefore p+q=25+23=48$

35. 정답 79
[출제의도] 여사건의 확률을 이용하여 문제해결하기
꺼낸 3 개 동전 금액의 합이 250 원 미만일 경우의 수는 50 원짜리 동전 3 개일 경우 1 가지, 50 원짜리 동전 2 개와 100 원짜리 동전 1 개일 경우 ${}_3C_2\times{}_3C_1=9$ 가지이다.
따라서 구하는 확률은 $1-\frac{10}{{}_9C_3}=\frac{37}{42}$ 이므로 $p+q=79$ 이다.

36. 정답 61
꺼낸 동전의 금액의 합이 300원 미만일 경우는 120원, 210원일 때 뿐이다.
i) 합이 120원인 경우

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{3}{35}$$

ii) 합이 210원인 경우

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{6}{35}$$

따라서 구하는 확률은 $1-\left(\frac{3}{35}+\frac{6}{35}\right)=\frac{26}{35}$ 이다.

$\therefore p+q=35+26=61$

37. 정답 13

일의 자리와 십의 자리에 2와 3이 없어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 수는 4가지이고, 마찬가지로 십의 자리에 올 수 있는 수도 4가지이다.

따라서, 구하는 확률은 $\frac{4\times4}{36}=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

$\therefore p+q=4+9=13$

38. 정답 ②

추첨을 통해 A팀과 B팀이 한 조가 되지 않을 확률은

$$\frac{2}{{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}}=\frac{2}{3}$$

이때, 준결승에서 A팀과 B팀이 모두 상대팀을 이길 확률은

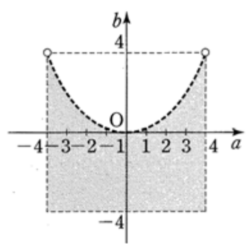
$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{27}$

$\therefore\ p=27,\ q=4$ $\qquad\therefore\ p+q=31$

39. 정답 ①

$|a|<4$, $|b|<4$를 만족하는 정수의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 49개이다.



$x(x^2+ax+b)=0$에서 $x=0$ 또는 $x^2+ax+b=0$이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$\therefore\ b\neq0,\ D=a^2-4b>0$ 즉, $b\neq0,\ b<\frac{a^2}{4}$

(i) $a=\pm3$일 때, $b=-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $2\times5=10$(개)이다.

(ii) $a=\pm2$ 또는 $a=\pm1$ 또는 $a=0$일 때, $b=-3,\ -2,\ -1$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $5\times3=15$(개)이다.

따라서 (i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{25}{49}$이다.

40. 정답 ①

행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}$가 역행렬이 존재하지 않으면 $ac-2b=0$

이때 $2b=ac$를 만족시키는 $a,\ b,\ c$의 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는

(1, 1, 2), (2, 1, 1)
(1, 2, 4), (2, 2, 2), (4, 2, 1)
(1, 3, 6), (2, 3, 3), (3, 3, 2), (6, 3, 1)
(2, 4, 4), (4, 4, 2)
(2, 5, 5), (5, 5, 2)
(2, 6, 6), (3, 6, 4), (4, 6, 3), (6, 6, 2)

따라서 역행렬이 존재할 확률은

$$1-\frac{2+3+4+2+2+4}{6\times6\times6}=1-\frac{17}{216}=\frac{199}{216}$$

41. 정답 ⑤

[출제의도]독립사건의 확률 계산하기

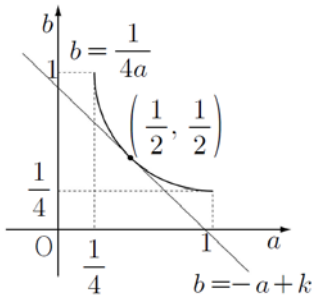
$P(A)=a$, $P(B)=b$라 하면 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=ab$이다.

따라서, $ab=\frac{1}{4}$ $(0<a\leq1,\ 0<b\leq1)$이다.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$a+b=k$이다.



$\therefore\ 1\leq k\leq\frac{5}{4}$

42. 정답 ③

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)=\frac{5}{6}$

$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이므로

$P(A)P(B)=P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ .... ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ .... ㉡

따라서 ㉠, ㉡에 의하여 $P(A)$와 $P(B)$를 두 근으로 하고 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$이다.

$\therefore\ 6x^2-5x+1=0$ $\qquad\therefore\ ab=30$

43. 정답 137

주어진 시행을 5회 반복했을 때, 가능한 경우의 수는 ${}_5\Pi_5=5^5$이다. 이 중에서 두 가지의 색으로 선택 가능한 경우의 수는 ${}_2\Pi_5-2=2^5-2$이고, 5가지의 색 중에서 두 가지의 색을 선택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(2^5-2)\times 10}{5^5}=\frac{6\times 2}{5^3}=\frac{12}{125}$$

$\therefore p+q=125+12=137$

44. 정답 11 이해능력 – 확률

두 개의 주사위를 던져서 나온 두 눈의 곱이 홀수이려면 두 눈의 수가 모두 홀수이여야 하므로 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

두 눈의 수의 곱이 짝수일 확률은

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 시행에서 앞면이 나온 동전이 2개일 확률은

$$\frac{1}{4}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{4}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}=\frac{q}{p}$$

$\therefore\ p+q=8+3=11$

45. 정답 ②

세 종류의 스티커 중 하나가 들어 있는 6개의 과자를 하나씩 구입하는 모든 경우의 수는 3^6(가지)

1	2	3	4	5	6
세 종류 중 두 종류의 스티커가 나옴					마지막 한 종류의 스티커가 나옴

하나씩 6개의 과자를 구입한 후 처음으로 장난감을 받으려면 위의 표와 같이 1회에서 5회까지는 두 종류의 스티커가 각각 적어도 한 번은 나온 후 마지막에 나머지 한 종류의 스티커가 나오면 된다.

먼저 두 종류의 스티커를 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$(가지)

1회에서 5회까지 두 종류의 스티커가 각각 적어도 한 번 나오는 경우의 수는 $2^5-2=30$(가지)

마지막에 나올 스티커의 종류는 1가지이므로 경우의 수는 1(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3\cdot 30\cdot 1}{3^6}=\dfrac{10}{81}$

46. 정답 33

$k=1$일 때 앞면이 0개 나올 확률은 ${}_1\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

$k=2$일 때 앞면이 1개 나올 확률은 ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$k=3$일 때 앞면이 0개 또는 2개 나올 확률은

$$ {}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$k=4$일 때 앞면이 1개 또는 3개 나올 확률은

$$ {}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$k=5$일 때 앞면이 0개 또는 2개 또는 4개 나올 확률은

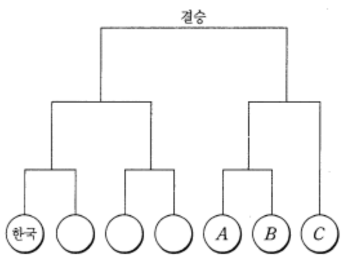
$$ {}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률 $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

$\therefore\ p+q=32+1=33$

47. 정답 ③

한국과 북한이 만날 경우의 확률을 다음과 같이 나누어 생각한다.



(i) 첫 경기에서 만날 경우 : $\frac{1}{6}$

(ii) 준결승에서 만날 경우 : $\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

(iii) 결승에서 만날 경우 :

그림에서 북한이 A 또는 B에 배정될 경우

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$$

그림에서 북한이 C에 배정될 경우

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$$

$\therefore\ \frac{1}{48}+\frac{1}{48}=\frac{1}{24}$

따라서 (i), (ii), (iii)으로부터 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{7}{24}$$

48. 정답 11

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지를 $(a,\ b,\ c)$로 나타내기로 하자.

카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 각각 (0, 1, 2)이면 두 번의 시행으로는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)를 만들 수가 없다.

또한, 세 번의 시행으로 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3\times 3\times 3=27$

이고 세 번의 시행에서 (0, 0, 0)이 되는 경우는

(0, 1, 2) → (0, 2, 2) → (0, 2, 3) → (0, 3, 3)

(0, 1, 2) → (0, 2, 2) → (0, 3, 2) → (0, 3, 3)

(0, 1, 2) → (0, 1, 3) → (0, 2, 3) → (0, 3, 3)

의 3가지이고 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2)가 될 수 있는 경우도 각각 3가지씩이다.

따라서 3번째 시행에서 사건 A가 일어나지 않을 확률은

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3+3+3}{27}=\frac{2}{3}$$

또한, 3번의 시행 후에는 모든 카드에 붙어 있는 스티커의 수를 3으로 나눈 나머지가 (0, 1, 2) 또는 (0, 0, 0) 또는 (1, 1, 1) 또는 (2, 2, 2) 이므로 4번째 , 5번째 시행에서는 사건 A가 일어나지 않고 6번째 시행에서 사건 A가 일어날 확률은 같은 방법으로

생각하면 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 구하고자 하는 확률은

$1\times1\times\frac{2}{3}\times1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

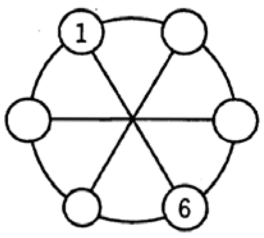
$\therefore p+q=11$

49. 정답 ④

6명의 학생을 6개의 좌석에 앉히는 방법의 수는 6!(가지)
또한, 같은 나라의 두 학생끼리 좌석번호의 차가 1 또는 10이 되도록
앉으려면 다음과 같이 세 가지 방법이 있다.
(ⅰ) (11, 12), (21, 22), (13, 23)
(ⅱ) (11, 21), (12, 13), (22, 23)
(ⅲ) (11, 21), (12, 22), (13, 23)
(ⅰ)의 방법에 세 나라를 정하는 방법의 수는 3!(가지)
각 좌석에 두 학생을 앉히는 방법의 수는 2^3(가지)
따라서 (ⅱ), (ⅲ)의 방법으로 앉히는 방법의 수는 같으므로 구하고자 하는 확률은

$\frac{3!\times2^3\times3}{6!}=\frac{1}{5}$

50. 정답 ⑤



6개의 수를 써 넣는 경우의 수는 5!(가지)이고, 선분으로 연결된 두 작은 원 안에 써 넣은 두 수의 합이 모두 같아지려면 모든 수의 합이 21이므로 3개의 각 선분마다 연결된 두 작은 원 안에 써 넣은 두 수의 합은 7이 되어야 한다.
1, 2, 3을 차례로 쓴다고 할 때, 1을 쓰면 6의 자리는 유일 하게 정해지므로 2를 써 넣을 수 있는 경우는 4(가지), 2의 자리가 정해지면 5의 자리는 유일하게 정해지므로 3을 써 넣을 수 있는 경우는 2(가지), 3을 써 넣으면 4의 자리는 유일하게 정해진다.
따라서 주어진 조건을 만족하는 방법의 수는 $4\times2=8$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{5!}=\frac{1}{15}$이다.

51. 정답 ①

4회 참여에 16점을 얻기 위해서는 3회는 5점, 1회는 1점이 올라가야 한다.
따라서 구하고자 하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)=4\times\frac{1}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

52. 정답 590

A공장에서 임의로 추출한 3개 중에서 2개가 불량품일 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_3C_2\times\left(\frac{2}{100}\right)^2\times\frac{98}{100}=\frac{392}{10^6}$

B, C공장에서 임의로 추출한 3개 중에서 2개가 불량품일 확률은

$2\times\frac{1}{3}\times{}_3C_2\times\left(\frac{1}{100}\right)^2\times\frac{99}{100}=\frac{198}{10^6}$

$\therefore p=\frac{392}{10^6}+\frac{198}{10^6}=\frac{590}{10^6}$

$\therefore 10^6p=590$

53. 정답 20

남아 있는 4개의 좌석에 4명의 승객이 앉는 방법의 수는 $4!=24$
남자 승객 2명이 A구역에 배정되는 방법의 수는
$2!=2$
나머지 여자 승객 2명이 B, C 구역에 배정되는 방법의 수는
$2!=2$

$\therefore\ p=\frac{2+2}{24}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 120p=20$

54. 정답 103

[출제의도] 확률을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기
중복을 허락하여 만들 수 있는 네 자리 자연수는
${}_5\Pi_4-{}_5\Pi_3=625-125=500$ 가지
$a_1<a_2<a_3$ 이므로 a_3 는 3 또는 4 이다.
(ⅰ) $a_3=3$ 일 때
$a_1<a_2<a_3$ 이므로, $a_1=1$, $a_2=2$ 이고
a_4 는 $0, 1, 2$ 중 한 가지이므로 3가지
(ⅱ) $a_3=4$ 일 때
a_1, a_2 는 $1, 2, 3$ 중 2개의 수를 선택하여 큰 수가 a_2, 작은 수가 a_1 $(a_1\neq0)$이다.
따라서 a_1, a_2 가 될 수 있는 경우는 ${}_3C_2=3$가지, a_4 는 $0, 1, 2, 3$ 중 한 가지이므로 4가지이다.
조건에 맞는 경우의 수는 ${}_3C_2\times4=12$가지

구하고자 하는 확률은 $\frac{3+12}{500}=\frac{3}{100}$

$\therefore\ p+q=103$

55. 정답 ③

빨간색 공 1개, 노란색 공 2개, 파란색 공 3개를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_1\cdot{}_5C_2\cdot{}_3C_3$이므로 구하는 확률은

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{5}{36}$

56. 정답 ②

[출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.
1회 시행에서 빨강, 노랑, 파랑 구슬이 나올 확률은 각각 $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$이다. 빨강, 노랑, 파랑 구슬이 나오는 횟수를 각각 x, y, z라 하면
$x+y+z=3,\ z+2y+3z=5$에서

$x=1,\ y=2,\ z=0$ 또는 $x=2,\ y=0,\ z=1$이므로

(i) $x=1,\ y=2,\ z=0$일 때 ${}_3C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}$

(ii) $x=2,\ y=0,\ z=1$일 때 ${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$

57. 정답 ①

[출제의도] 확률을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

(i) 3개의 예선문제 모두 맞힌 경우

${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii) 예선문제 2개 맞히고, 찬스문제 맞힌 경우

${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{18}$

$\therefore\ \frac{1}{27}+\frac{1}{18}=\frac{5}{54}$

58. 259

주사위를 한 번 던져서 점 P가 꼭짓점 A에 오는 경우는 4의 눈이 나오는 경우 밖에 없으므로 $P(X_1)=\frac{1}{6}$

$X_1\cap X_2$는 첫 번째 주사위를 던져서 4의 눈이 나오고 두 번째 주사위도 4의 눈이 나오는 경우이므로 $P(X_1\cap X_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$

마찬가지로

$P(X_1\cap X_2\cap X_3)=\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{6}\right)^3$

$\therefore\ \frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{43}{216}$

$\therefore\ p+q=216+43=259$

59. 정답 43

(i) O→O→A일 때 $\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

(ii) O→A→A일 때 $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$

(iii) O→B→A일 때 $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$\therefore\ \frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$

$\therefore\ a=7,\ b=36$

$\therefore\ a+b=7+36=43$

60. ②

(i) A가 흰 공 2개를 꺼내어 이길 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{n+4}C_2}\times\left\{\frac{{}_2C_1\times{}_nC_1+{}_nC_2}{{}_{n+2}C_2}\right\}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

(ii) A가 흰 공 1개를 꺼내어 이길 확률은

$$\frac{{}_4C_1\times{}_nC_1}{{}_{n+4}C_2}\times\frac{{}_{n-1}C_2}{{}_{n+2}C_2}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠+㉡$=a$, ㉡$=b$이므로

$a=2b$로부터 ㉠=㉡

$\therefore\ {}_4C_2({}_2C_1\times{}_nC_1+{}_nC_2)={}_4C_1\times{}_nC_1\times{}_{n-1}C_2$

$6\left\{2n+\frac{n(n-1)}{2}\right\}=4n\times\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$3n(n+3)=2n(n-1)(n-2)$

$3n+9=2n^2-6n+4$

$\therefore\ 2n^2-9n-5=0$

$(n-5)(2n+1)=0$

$\therefore\ n=5$

61. **답 ①**

한 개의 다트가 A, B, C 영역에 꽂히는 사건을 각각 $A,\ B,\ C$라 하면

$P(A)=\frac{80^\circ}{360^\circ}=\frac{2}{9},\ P(B)=\frac{120^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{3},\ P(C)=\frac{160^\circ}{360^\circ}=\frac{4}{9}$

또, 흰 공이 나오는 사건을 E라 하면

$P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)+P(C\cap E)$

$=\frac{2}{9}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\mid E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{10}$$

62. 정답 ③

$p_1=\frac{22}{50},\ p_2=\frac{24}{250}$ 이므로 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{22}{50}}{\frac{24}{250}}=\frac{55}{12}$

63. 정답 ①

A학생이 첫 번째 게임에서 가위를 내어 이겼으므로 두 번째 게임에서도 가위를 내게 된다.

남은 두 번의 게임에서 A학생이 한 번은 이기고, 한번은 지는 경우를 표로 정리하면 다음과 같다.

두 번째 게임		세 번째 게임	
A	B	A	B
가위	보	가위	바위
가위	바위	바위	가위
가위	바위	보	바위

따라서 구하는 확률은

$$\left\{\left(1\times\frac{1}{3}\right)\times\left(1\times\frac{1}{3}\right)\right\}+\left\{\left(1\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right\}+\left\{\left(1\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$

64. 정답 ①
각 글자가 적힌 카드가 들어 있을 확률이 모두 같으므로 이 과자를 네 상자 샀을 때 나타날 수 있는 경우의 ${}_4\Pi_4=4^4$이다.
한편, 네 글자가 모두 서로 다른 경우의 수는 4!이므로 구하는 확률은 $\frac{4!}{4^4}=\frac{4\times3\times2}{4\times4\times4\times4}=\frac{3}{32}$

65. 14
$3n$개에서 2개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{3n}C_2$, 2개가 모두 당첨 제비가 아닌 제비 2개를 뽑는 방법의 수는 ${}_{3n}C_2$이므로

$p_n=1-\frac{{}_{2n}C_2}{{}_{3n}C_2}=1-\frac{2n(2n-1)}{3n(3n-1}=\frac{5n-1}{3(3n-1)}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}p_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-1}{3(3n-1)}=\frac{5}{9}$

$\therefore a+b=14$

66. 정답 ②
[출제의도] 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
ㄱ. $P_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (참)
ㄴ. 짝수 번을 이동하면 말은 A 또는 D에 도착하게 된다. 말이 $(2n+2)$번째에 처음으로 D에 도착하려면 처음 2번을 이동한 후 A에 있고 그 이후 $2n$번을 이동하여 처음으로 D에 도착해야 하므로

$P_{2n+2}=\frac{1}{2}{}_{2n}$ (참)

ㄷ. $P_{2n-1}=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이므로

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{2n}P_k=P_2+P_4+P_6+P_8+P_{10}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}=\frac{31}{32}$ (거짓)

67. 정답 55
$210=2\times3\times5\times7$이므로 6개의 숫자 중에서 2, 3, 5, 7의 숫자가 적어도 하나씩은 있어야 한다.
만약 철수가 임의의 두 구슬을 꺼냈을 때, 다음 세 가지 경우로 나누어진다.
(ⅰ) 영희는 철수와 같은 숫자가 적힌 2개의 구슬을 꺼내고, 민정이는 나머지 숫자가 적힌 2개의 구슬을 꺼낼 확률
예) 철수(②, ③), 영희(②, ③), 민정(⑤, ⑦)

$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{36}$

(ⅱ) 영희는 철수가 꺼낸 2개의 구슬과 비교하여 적힌 숫자가 하나는 같고 하나는 다른 2개의 구슬을 꺼내고, 민정이는 나머지 숫자가 적힌 구슬을 포함하여 2개의 구슬을 꺼낼 확률
예) 철수(②, ③), 영희(②, ⑤), 민정(⑤, ⑦)

$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}\times\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{12}{36}$

(ⅲ) 영희는 철수와 모두 다른 숫자가 적힌 2개의 구슬을 꺼내고, 민정이는 구슬에 적힌 숫자에 상관없이 2개의 구슬을 꺼낼 확률
예) 철수(②, ③), 영희(⑤, ⑦), 민정(②, ⑦)

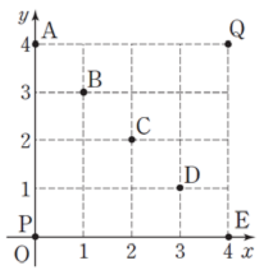
$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_4C_2}=\frac{6}{36}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{36}+\frac{12}{36}+\frac{6}{36}=\frac{19}{36}$

$\therefore p=36,\ q=19\quad\therefore\ p+q=55$

68. 정답 163 수학 내적 문제 해결 능력 - 확률
시행을 4번 하였을 때, 두 점 P와 Q가 올 수 있는 같은 위치는 오른쪽 그림과 같이 A, B, C, D, E의 5개이다. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.



같은 위치	100원짜리 동전	500원짜리 동전	
A	뒷면 4번	앞면 4번	…①
B	앞면 1번, 뒷면 3번	앞면 3번, 뒷면 1번	…②
C	앞면 2번, 뒷면 2번	앞면 2번, 뒷면 2번	…③
D	앞면 3번, 뒷면 1번	앞면 1번, 뒷면 3번	…④
E	앞면 4번	뒷면 4	…⑤

①의 경우 : ${}_4C_0\times{}_4C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

②의 경우 : ${}_4C_1\times{}_4C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

③의 경우 : ${}_4C_2\times{}_4C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

④의 경우 : ${}_4C_3\times{}_4C_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

⑤의 경우 : ${}_4C_4\times{}_4C_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^8$

따라서 구하는 확률은

$\frac{1+16+36+16+1}{256}=\frac{35}{128}$

$\therefore m+n=128+35=163$

69. 답 11
[해설] A가 두 장의 카드를 꺼내는 방법은 ${}_6C_2=15$(가지)
B가 한 장의 카드를 꺼내는 방법은 6(가지)
따라서, 모든 경우의 수는 $15\times6=90$(가지)
A가 꺼낸 카드가 다음과 같을 때, B가 이기는 경우의 수를 생각

할 수 있다.
(1, 3)인 경우 1가지, (1, 4)인 경우 2가지
(1, 5)인 경우 3가지, (1, 6)인 경우 4가지
(2, 4)인 경우 1가지, (2, 5)인 경우 2가지
(2, 6)인 경우 3가지, (3, 5)인 경우 1가지
(3, 6)인 경우 2가지, (4, 6)인 경우 1가지
따라서, B가 이기는 경우의 수는 모두 20가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$ 이다.

$\therefore a+b=9+2=11$

70. 정답 ⑤
ㄱ. (참)

$\mathrm{P}(X>n)=\mathrm{P}(X=n+1)+\mathrm{P}(X=n+2)+\mathrm{P}(X=n+3)+\cdots$

$\mathrm{P}(X>n-1)=\mathrm{P}(X=n)+\mathrm{P}(X=n+1)$

$=\mathrm{P}(X=n+2)+\mathrm{P}(X=n+3)+\cdots$

$\therefore \mathrm{P}(X=n)=\mathrm{P}(X>n-1)-\mathrm{P}(X>n)$

ㄴ. (참)

n개의 경품권에서 빨간색 경품권이 없을 사건을 A_1, n개의 경 품권에서 노란색 경품권이 없을 사건을 A_2, n개의 경품권에서 파란색 경품권이 없을 사건을 A_3이라 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X>n)&=\mathrm{P}(A_1\cup A_2\cup A_3)\\&=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\mathrm{P}(A_3)-\mathrm{P}(A_1\cap A_2)\\&\quad-\mathrm{P}(A_2\cap A_3)-\mathrm{P}(A_3\cap A_1)+\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+0\\&=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

ㄷ. (참)

ㄱ, ㄴ에서

$\mathrm{P}(X=n)=\mathrm{P}(X>n-1)-\mathrm{P}(X>n)$

$=\left\{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}-\left\{3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{2}{3}\right)-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

71. 답 ⑤
우승을 하려면 3승을 하여야 하므로, A는 앞으로 2승을 더하여야 한다.
A가 이기는 경우 ○, 자넌 경우 ×라 하면

(i) ○○인 경우 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(ii) ○×○, ×○○ 인 경우 $2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

(iii) ○××○, ××○○, ×○×○인 경우

$3\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{16}$

따라서, A가 우승할 확률은 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{11}{16}$ 이고,

B가 우승할 확률은 $\frac{5}{16}$ 이다.

따라서, 기대 금액에 근거한 상금의 배분은

A : $\frac{11}{16}\times\frac{5}{8}+\frac{5}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{70}{128}$

B : $\frac{5}{16}\times\frac{5}{8}+\frac{11}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{58}{128}$

따라서 A, B 두 사람의 상금의 분배 비율은 70 : 58 = 35 : 29 이다.

1. 정답 ④
A, B 가 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ 이다.
따라서 $P(A)\cdot P(B)=P(A)-P(B)$
$P(B)$를 x로 두면

$\frac{2}{3}\cdot x=\frac{2}{3}-x \quad \frac{5}{3}x=\frac{2}{3}$

$\therefore x=\frac{2}{5}$

2. 정답 ②

$\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$ 이므로 $\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B는 독립이므로
$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{5}{6}=\mathrm{P}(A)+\frac{1}{3}-\mathrm{P}(A)\times\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$ $\qquad\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

3. 정답 ③
두 사건 A , B 가 서로 독립이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+P(B)-\frac{1}{6}P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{2}{5}$

4. 정답 ④
$P(A\cap B^C)=P(A\cup B)-P(B)$이므로

$\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-P(B) \quad \therefore P(B)=\frac{2}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{5}{6}=P(A)+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}P(A)$, $\frac{1}{3}P(A)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A)=\frac{1}{2}$

5. 정답 ③

$P(A)=P(B)$이므로

$P(A)+P(B)=2P(A)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ P(A)=\frac{1}{3}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

6. 정답 ④

[출제의도] 독립사건의 성질을 이해하여 확률의 곱셈정리를 이용할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}\left(A^{\mathrm{C}}\cap B\right)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{7}{9}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{2}{7}\quad\therefore\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{4}{63}$

7. 정답 ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(B)=p$로 놓으면

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}+p-\frac{1}{4}p=\frac{1}{3}$

$\therefore\ p=\frac{1}{9}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$

8. 정답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C|\,B^C)=\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$

$\mathrm{P}(B^C|\,A^C)=\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{5}$

에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}$이고, 두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

$\therefore\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{3}{20}=\frac{7}{10}$

9. 답 ①

[해설] 조건부확률

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)$

$\mathrm{P}(B|A^C)=\mathrm{P}(B)$

$\therefore\mathrm{P}(A^C)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A^C)\}\mathrm{P}(B)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2}{9}$

10. 정답 ①

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{2}{5}$

$P(A\cap B)=\frac{2}{5}P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$

$\therefore P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$

11. 정답 ②

사건 A는 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$이고, 사건 B는 $B=\{2,\ 3,\ 5\}$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A)-\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}-\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$

$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}$

12. 정답 ④

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}\mathrm{P}(A)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \frac{1}{4}P(A)=\frac{1}{3}P(B)$

$\therefore\ P(B)=\frac{3}{4}P(A)$

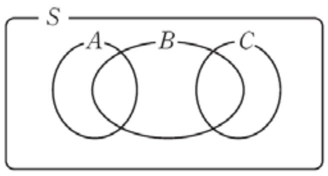
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+\frac{3}{4}P(A)-\frac{1}{4}P(A)=\frac{3}{2}P(A)=1$

$\therefore\ P(A)=\frac{2}{3}$

13. 정답 ③

세 사건의 관계는 다음과 같다.



두 사건 A와 C는 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=0$

두 사건 B와 C는 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B\cup C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$$

$$-\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(B\cap C)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{13}{18}$$

14. 정답 ⑤

$$\mathrm{P}(B|A^{C})=\frac{\mathrm{P}(A^{C}\cap B)}{\mathrm{P}(A^{C})}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$$

15. 정답 ⑤

$$\mathrm{P}(A^{C}\cap B^{C})=\mathrm{P}\left((A\cup B)^{C}\right)$$

$$=1-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{4}{9}$$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$ 에서

$$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$$

16. 정답 26

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$\therefore\ p^2+q^2=26$$

17. 정답 ④

두 사건 A, B는 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3} \quad\cdots\cdots\ ㉠$$

두 사건 B, C가 서로 독립이면 두 사건 B^C와 C도 서로 독립이므로

$$\mathrm{P}(B^{C}\mid C)=\mathrm{P}(B^{C})=\frac{3}{4}$$

$$1-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\qquad\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

18. 정답 ④

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{{}_5C_2\times 3!}{5!}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{{}_5C_3\times 2!}{5!}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap C)=\frac{{}_5C_2\times {}_3C_2}{5!}=\frac{1}{4}$$

ㄱ. $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다. (거짓)

ㄴ. $P(A\cap C)=P(A)P(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다. (참)

ㄷ. $\frac{1}{6}=P(A\cap B)<P(A\cap C)=\frac{1}{4}$ (참)

19. 정답 ①

두 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자의 합이 짝수인 사건을 A, 정육면체 모양의 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자가 짝수인 사건을 B라 하자. 두 주사위의 바닥에 닿은 면에 적힌 숫자의 합이 짝수이려면 두 숫자 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P(A)}}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}}{\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{6}}=\frac{1}{7}$$

20. 정답 340

3학년의 학생 수를 N이라 하자.

A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)\cdots\cdots$ ㉠

$$\mathrm{P}(A)=\frac{78+88}{N},\ \mathrm{P}(B)=\frac{72+81}{N},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{72}{N}$$

㉠으로부터 $\frac{72}{N}=\frac{160}{N}\cdot\frac{153}{N}$

$$\therefore N=\frac{160\cdot 153}{72}=340$$

21. 정답 ④

[출제의도] 조건부확률의 개념을 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ⅰ) 홀수번호의 주머니에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{4}$$

ⅱ) 짝수번호의 주머니에서 검은 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{4}{7}$

22. 정답 ④

(ⅰ) 선택된 두 선수가 A일 때, A가 두 번의 사격에서 모두 명중

시킬 확률은 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{32}$

(ii) 선택된 두 선수가 B일 때, B가 두 번의 사격에서 모두 명중시킬 확률은 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{9}{32}}{\frac{9}{32}+\frac{2}{9}}=\frac{81}{145}$

23. 정답 ③

[출제의도] 조건부 확률 이해하기

투표 결과 / 투표 전	갑에게 투표	을에게 투표
갑 지지	0.28	0.42
을 지지	0.15	0.15
계	0.43	0.57

을에게 투표한 학생이 선택된 사건을 C, 투표 전과 후에 지지했던 후보를 바꾸지 않은 학생이 선택된 사건을 D라 하면, 구하고자 하는 확률은

$$\mathrm{P}(D|C)=\frac{\mathrm{P}(C\cap D)}{\mathrm{P}(C)}=\frac{0.15}{0.42+0.15}=\frac{5}{19}$$

24. 정답 ④

A, B 중 적어도 한 명이 당첨권을 뽑는 사건을 E, C가 당첨권을 뽑는 사건을 F라 하면 구하는 확률은 P(F E)이다. A, B 중 적어도 한 명이 당첨권을 뽑는 경우는 오른쪽 표와 같다.

A	B	C
○	×	○
×	○	○
○	○	○

$$\mathrm{P(E)}=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{8}{15}$$

$$\mathrm{P(E\cap F)}=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(E\cap F)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{8}{15}}=\frac{15}{64}$$

25. 답 ③

갑의 예상과 경기 결과를 표로 나타내자.

예상 / 결과	승	패	합계
승	3	2	5
패	1	1	2
합계	4	3	7

K국가가 치른 7경기 중 한 경기를 임의로 선택할 때, K국가가 이긴 경기인 사건을 A라 하고, 갑이 K국가가 질 것으로 예상한 경기인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

위의 표에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{7}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{7}$이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{7}}{\frac{5}{7}}=\frac{2}{5}$$

26. 답 ④

(i) 주머니 A에서 꺼낸 공이 흰 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률

$$\frac{2}{5}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$$

(ii) 주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공이고, 주머니 B에서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 확률

$$\frac{3}{5}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{4}{25}}{\frac{4}{25}+\frac{3}{2}5}=\frac{4}{7}$

27. 정답 ④

20명의 학생 중에서 임의로 2명을 선발하는 경우의 수는

${}_{20}\mathrm{C}_2=\frac{20\times19}{2}=190$(가지)이다.

2명의 대표가 성별이 같을 사건을 X, 2명의 대표가 여학생일 사건을 Y라 하자.

남학생 2명이 선발되는 경우의 수는 ${}_{12}C_2=66$(가지)

여학생 2명이 선발되는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$(가지)

이므로 $P(X)=\frac{66+28}{190}=\frac{47}{95}$이고,

$P(X\cap Y)=\frac{20}{190}=\frac{14}{95}$이다.

$$\therefore P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{14}{47}$$

28. 정답 ⑤

돼지 저금통에 넣은 동전의 금액의 합이 250원 이상일 사건을 A라 하면 250원 미만일 사건 A^C은 동전 3개를 (100, 50, 50) 또는 (50, 50, 50)으로 고른 경우이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{13}{20}$$

한편 복주머니 저금통에 넣은 동전의 금액의 합이 250원 이상일 사건을 B라 하면 사건 $A\cap B$는 동전 3개를 (500, 50, 50) 또는 (100, 100, 50)으로 고른 경우이므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{6}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{6}{20}}{\frac{13}{20}}=\frac{6}{13}$$

29. 정답 ③

성별＼연령	50세 미만	50세 이상(A)	계
남자	$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
여자(B)	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
계	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

위의 표와 같이 우승자가 50세 이상일 사건을 A, 여자일 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}=\frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}$$

30. 정답 11

처음에 꺼낸 1개의 공이 흰 공일 사건을 A, 나중에 꺼낸 공 2개가 모두 검은 공일 사건을 B라 하고, 주머니 속에 들어 있는 검은 공의 개수를 x라 하면

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{10-x}{10}\times\frac{{}_{x}\mathrm{C}_2}{{}_{9}\mathrm{C}_2}+\frac{x}{10}\times\frac{{}_{x-1}\mathrm{C}_2}{{}_{9}\mathrm{C}_2}$

$=\frac{x(x-1)(10-x+x-2)}{10\cdot 9\cdot 8}$

$=\frac{x(x-1)}{10\cdot 9}=\frac{7}{15}$

$\therefore\ x=7$

$$\therefore \mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{12}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{8}$$

$\therefore\ p+q=8+3=11$

31. 정답 19

(ⅰ) A, B를 목욕 도우미로 배정하는 경우의 수

$${}_{8}\mathrm{C}_2\times{}_{6}\mathrm{C}_4\times{}_{2}\mathrm{C}_2=\frac{8\times7}{2}\times\frac{6\times5}{2}\times1=420(\text{가지})$$

(ⅱ) A, B를 산책 도우미로 배정하는 경우의 수는

$${}_{8}\mathrm{C}_2\times{}_{4}\mathrm{C}_4\times{}_{2}\mathrm{C}_2=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=\frac{4\times3}{2}\times1=420(\text{가지})$$

(ⅲ) A, B를 청소 도우미로 배정하는 경우의 수는

$${}_{8}\mathrm{C}_4\times{}_{4}\mathrm{C}_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}\times1=70(\text{가지})$$

따라서 구하는 확률은

$\frac{420}{420+420+70}=\frac{420}{910}=\frac{6}{13}$

$\therefore p+q=13+6=19$

[다른 풀이]

$\frac{{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{4}\mathrm{C}_2+{}_{4}\mathrm{C}_2+{}_{2}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{13}$

32. 정답 ③

발아하는 사건을 F, 흰색 꽃의 씨앗인 사건을 W, 빨간색 꽃의 씨앗인 사건을 R라 하면

$P(F)=P(F\cap W)+P(F\cap R)$

$\quad=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$

따라서, 구하는 확률은

$$P(W|F)=\frac{P(F\cap W)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{10}}=\frac{2}{7}$$

33. 정답 ⑤

처음 자유투가 성공할 사건을 A, 두 번째 자유투가 성공할 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.7\times0.6}{0.7\times0.6+0.3\times0.8}$

$=\frac{42}{42+24}=\frac{42}{66}=\frac{7}{11}$

34. 정답 ④

흰 공을 W, 검은 공을 B라 하자.

주머니 B의 공 중에서 흰 공이 2개인 사건을 X라 하면 사건 X는 $(W,\ W,\ B)$, $(W,\ B,\ W)$, $(B,\ W,\ W)$와 같이 세 가지의 경우가 있으므로

$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

옮겨진 3개의 공의 색깔이 교대로 나타난 사건을 Y라 하면

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{1}{3}$

35. 정답 ①

이해 능력 - 확률

(ⅰ)첫 번째 꺼낸 공이 흰 공이고, 두 번째 꺼낸 공이 붉은 공일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$

(ⅱ)첫 번째 꺼낸 공이 검은 공이고, 두 번째 꺼낸 공이 붉은 공일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{7}{60}$

(ⅲ)첫 번째 꺼낼 공이 붉은 공이고, 두 번째 꺼낸 공도 붉은 공일 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{7}{60}}{\frac{1}{12}+\frac{7}{60}+\frac{1}{20}}=\frac{7}{5+7+3}=\frac{7}{15}$$

36. 답 ④

A, B, C, D, E, F, G, H의 8명 중에서 서로 다른 4명을 임의로

뽑을 때, 휴대전화를 가지고 있는 사람과 디지털카메라를 가지고 있는 사람이 각각 2명 이상씩 뽑히는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

i) A, B 를 모두 뽑지 않는 경우

$_2C_0 \times {_3C_2} \times {_3C_2} = 9$ (가지)

ii) A, B 중 한 명만 뽑은 경우

$_2C_1 \times ({_6C_3} - {_3C_3} \times 2) = 2 \times (20-2) = 36$ (가지)

iii) A, B 를 모두 뽑은 경우

$_2C_2 \times {_6C_2} = 15$ (가지)

따라서 구하는 확률은

$$\frac{36}{9+36+15} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}$$

37. 정답 ③

(i) 첫 번째에 A 또는 B 주머니에서 파란 공을 꺼낸 후, 두 번째는 B 주머니에서 검은 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}=\frac{23}{200}$$

(ii) 첫 번째에 A 주머니에서 흰 공을 꺼낸 후, 두 번째는 B 주머니에서 검은 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{3}{50}$$

(iii) 첫 번째에 B 주머니에서 검은 공을 꺼낸 후, 두 번째도 B 주머니에서 검은 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{40}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{23}{200}}{\frac{23}{200}+\frac{3}{50}+\frac{1}{40}}=\frac{23}{23+12+5}=\frac{23}{40}$$

38. 정답 25

A유형의 질병에 걸린 사람이 선택되어 양성 반응을 보일 확률은

$$\frac{4}{8}\times\frac{30}{100}=\frac{3}{20}$$

B유형의 질병에 걸린 사람이 선택되어 양성 반응을 보일 확률은

$$\frac{2}{8}\times\frac{50}{100}=\frac{1}{8}$$

C유형의 질병에 걸린 사람이 선택되어 양성 반응을 보일 확률은

$$\frac{2}{8}\times\frac{50}{100}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{20}}{\frac{3}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{19}{40}}=\frac{6}{19}$$

$\therefore p+q=19+6=25$

39. 정답 21

스위치 A, B, C, D가 연결되어 전류가 흐르는 사건을 A, B, C, D라 하면 회로에 전류가 흐를 사건은 $\{A\cup(B\cap C)\}\cap D$이다.

$$\mathrm{P}(\{A\cup(B\cap C)\}\cap D)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{4+2-1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16}$$

$\therefore a+b=21$

40. 정답 ⑤

ㄱ. $\mathrm{P}(A\mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\mathrm{P}(A)$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\mathrm{P}(A\mid B^C)+\mathrm{P}(A^C\mid B^C)$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}((A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C))}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=1$$ $\therefore$ 참

ㄷ. ㄴ에 의해 $\mathrm{P}(A\mid B^C)=\mathrm{P}(A\mid B)$이므로

$$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B^C)}$$

$=\mathrm{P}(A)$ ($\because$ 가비의 리)

독립의 정의에 의해 A와 B는 서로 독립이다. $\therefore$ 참

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

41. 정답 ②

[출제의도] 확률의 덧셈정리와 조건부 확률을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

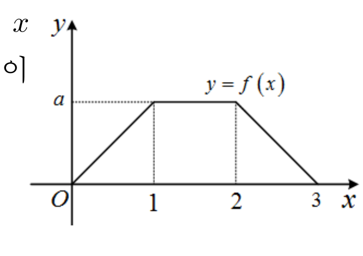
$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{7}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{7}$, $\mathrm{P}(C)=\dfrac{1}{7}$

$\mathrm{P}(D)=\mathrm{P}(D\cap A)+\mathrm{P}(D\cap B)+\mathrm{P}(D\cap C)$

$=\mathrm{P}(D\mid A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(D\mid B)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(D\mid C)\mathrm{P}(C)=\dfrac{11}{70}$

42. 답 11 확률밀도함수

확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 되어야 하므로



$\frac{1}{2}(1+3)a=1$

$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}\left(\frac{3}{2}\le X\le 2\right)=\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}$$

$P(B)=P\left(\frac{3}{2}\le X\le\frac{5}{2}\right)=a-\frac{1}{8}a=\frac{7}{8}a=\frac{7}{16}$

$\therefore P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}}=\frac{4}{7}$

$\therefore p+q=7+4=11$

43. 정답 5

n번째 꺼낸 공의 색이 빨간색일 사건을 A_n이라 하자.

$P(A_1\cap A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$

$P(A_1^C\cap A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

$\therefore P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1^C\cap A_2)=\frac{3}{5}$

이때 $P(A_1|A_2)=\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ p+q=5$

44. 정답 ①

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

주사위를 4번 던졌을 때, 동점 A가 원점에 도달하려면 6의 약수의 눈의 수가 2번, 그 이외의 눈의 수가 2번 나와야 한다. 이때 주사위를 던지는 것은 독립시행이므로 주사위를 4번 던졌을 때 동점 A가 원점에 있을 확률은

${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

45. 정답 ②

갑, 을이 던져서 나온 동전의 앞면의 개수를 각각 a, b라 하면

ⅰ) $a=0,\ b=1$일 때

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

ⅱ) $a=0,\ b=2$일 때

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{32}$$

ⅲ) $a=1,\ b=2$일 때

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{32}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$

46. 정답 ②

선택한 주사위가 A, B, C 일 사건을 각각 A, B, C라 하고 주사위 하나를 세 번 던져서 모두 1이 나오는 사건을 E라 하자.

$$P(A\cap E)=P(A)P(E|A)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$P(B\cap E)=P(B)P(E|B)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(C\cap E)=P(C)P(E|C)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{P(A\cap E)+P(C\cap E)}{P(E)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3}$$

$$=\frac{1+2^3}{1+3^3+2^3}=\frac{1}{4}$$

47. 정답 ⑤

A팀이 우승하기 위해서는 5번의 시합 중 3번을 이기고, 6번째 시합에서 이겨야 하므로

${}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{160}{729}$

마찬가지로 B팀이 우승할 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{40}{729}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{160}{729}+\frac{40}{729}=\frac{200}{729}$

48. 정답 ②

[출제의도] 독립시행의 확률을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

1회 시행에서 빨강, 노랑, 파랑 구슬이 나올 확률은 각각 $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$이다. 빨강, 노랑, 파랑 구슬이 나오는 횟수를 각각 x, y, z라 하면 $x+y+z=3$, $x+2y+3z=5$에서

$x=1,\ y=2, z=0$ 또는 $x=2,\ y=0, z=1$이므로

ⅰ) $x=1,\ y=2, z=0$일 때, ${}_3C_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}$

ⅱ) $x=2,\ y=0, z=1$일 때, ${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

따라서, ⅰ)과 ⅱ)에 의하여 구하는 확률은 $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$

49. 정답 98

(ⅰ) A가 3판을 우승할 확률을 p_1이라 하면

$$p_1=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

(ⅱ) A가 4판 만에 우승할 확률을 p_2이라 하면

$$p_2={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$$

(ⅲ) A가 5판 만에 우승할 확률을 p_3이라 하면

$$p_3={}_4C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$$

따라서 구하는 확률 p는

$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{8}{81} = \frac{17}{81}$

$\therefore\ a + b = 81 + 17 = 98$

50. 정답 ③

5번 시행 후 B가 주사위를 가지고 있기 위해서는 시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하거나 시계 반대방향으로 5번 이동해야 한다.

시계 방향으로 3번, 반대 방향으로 2번 이동하는 확률은 주사위를 던지는 시행은 독립이므로 ${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$이고

시계반대방향으로 5번 이동하는 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^5$이다.

두 확률의 합은 $\frac{8}{27}$

51. 정답 32

비누 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따른다. 한 개의 비누를 선택했을 때, 판매할 수 있는 비누일 확률은

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 96) &= P\left(Z \geq \frac{96-100}{5}\right) \\
&= P(Z \geq -0.8) \\
&= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 0.8) \\
&= 0.5 + 0.3 = 0.8 = \frac{4}{5}
\end{aligned}
$$

따라서 구하는 확률은 ${}_4C_3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} = \frac{2^8}{5^4}$

$\therefore\ pq = 8 \times 4 = 32$

52. 정답 229

모두 앞면이 나오는 경우를 사건 A라 하면 사건 A가 r번 일어날 때,

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \begin{pmatrix} 2r & 4 \\ 4 & 2(4-r) \end{pmatrix}$$

이고, $2r \cdot 2(4-r) = 16$일 때, 즉 $r = 2$이면 역행렬이 존재하지 않는다.

따라서 행렬 $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$가 역행렬이 존재하려면 사건 A가 2번 나오는 경우만 아니면 된다.

$\therefore\ 1 - {}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{27}{128} = \frac{101}{128}$

$\therefore\ a + b = 101 + 128 = 229$

53. 정답 ④

(i) 정육면체 모양의 상자를 5번 던졌을 때, 모두 2 또는 4가 나오는 경우의 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^5$

(ii) 정육면체 모양의 상자를 5번 던졌을 때, 2 또는 4가 1번, 1이 1번, 나머지 3번은 모두 3이 나오는 경우의 확률은

$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 20\left(\frac{1}{3}\right)^5$

(i),(ii)에서 구하는 확률은

$\left(\frac{1}{3}\right)^5 + 20\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{7}{81}$

54. 정답 ①

C가 1번 나오는 경우 돌림판을 4회 회전시켜서 동점 P를 수직선 위의 $x = 3$인 점으로 옮길 수 없으므로 C는 2번 또는 0번 나오는 경우뿐이다.

(i) B가 3번, C가 2번 나올 확률은

$\frac{5!}{3!2!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{486}$

(ii) B가 4번, A가 1번 나올 때, 처음에 A가 나오면 규칙 ㈑에 의하여 더 이상 돌림판을 회전시킬 수 없으므로 처음에는 B가 나와야 한다.

이때, 구하는 확률은

$\frac{1}{3} \times \frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{486} + \frac{2}{81} = \frac{17}{486}$

55. 정답 841

점 A에서 출발한 동점 P가 주사위를 한 번 던졌을 때 도착하게 되는 점은 다음 표와 같다.

눈의 수	1	2	3	4	5	6
도착점	C	A	C	A	D	C

이와 같이 주사위를 한 번 던졌을 때, 점 P는 출발점을 기준으로 시계방향 (△)으로 1만큼 움직일 확률이 $\frac{1}{6}$, 대각선 방향(◇)으로 움직일 확률이 $\frac{1}{2}$, 제자리(☆)에 오게 될 확률이 $\frac{1}{3}$이다.

따라서 점 P가 꼭짓점 A에서 출발하여 주사위를 4번 던져서 다시 꼭짓점 A에 도착하게 되는 경우는 △을 기준으로 다음과 같이 3가지 경우로 나눌 수 있다.

i) △가 없을 때

◇◇◇◇을 배열 : $\frac{4!}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4}$

◇◇☆☆을 배열 : $\frac{4!}{2!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}$

☆☆☆☆을 배열 : $\frac{4!}{4!}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3^4}$

ii) △가 2번 있을 때

△△◇☆을 배열 : $\frac{4!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 6}$

iii) △가 4번 있을 때

△△△△을 배열 : $\frac{4!}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6^4}=\frac{3^4+6^3+2^4+2\cdot 6^2+1}{6^4}=\frac{193}{648}$$

이때, $648=2^3\cdot 3^4$이고, 193은 2 또는 3으로 나누어떨어지지 않으므로 648과 193은 서로소이다.

$\therefore p+q=648+193=841$

정답 및 풀이

1. 정답 38

$E(2X+1)=2E(X)+1=13$

$\therefore\ E(X)=6$

$V(2X+1)=4V(X)=8$

$\therefore\ V(X)=2$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=2+6^2=38$

2. 정답 ②

$a^2+a^2+a=2a^2+a=1$ 이므로

$(2a-1)(a+1)=0\quad \therefore\ a=\frac{1}{2}\ (\because\ a>0)$

$\therefore E(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

3. 정답 80

확률의 합은 1 이므로

$a+\frac{1}{2}a^2+a^2+\frac{1}{8}=1,\ 12a^2+8a-7=0$

$(2a-1)(6a+7)=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X의 평균과 분산은

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}=2$

$V(X)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{8}-2^2=\frac{5}{4}$

$\therefore\ V(8X)=64V(X)=80$

4. 정답 14

$\frac{4}{7}$, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=\frac{4}{7}b$ .... ㉠

또, 확률의 총합은 1이므로

$\frac{4}{7}+a+b=1$ .... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{2}{7},\ b=\frac{1}{7}$

$\therefore\ E(X)=\frac{4}{7}\times k+\frac{2}{7}\times 2k+\frac{1}{7}\times 4k=\frac{12}{7}k=24$

$\therefore\ k=14$

5. 정답 ⑤

$E(X)=0\times 0.4+10\times 0.3+20\times 0.2+30\times 0.1$

$=3+4+3=10$

$V(X)=0^2\times 0.4+10^2\times 0.3+20^2\times 0.2+30^2\times 0.1-10^2$

$=30+80+90-100=100$

$\therefore V(Y)=V\left(\frac{X-3}{4}\right)=\frac{1}{16}V(X)=\frac{100}{16}=\frac{25}{4}$

6. 정답 30

두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때, $V(X)=10\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$ 이므로

$V(4X+1)=16V(X)=30$

7. 답 ②

검은 공의 개수를 x라 하면

$a=\frac{{}_{9-x}C_3}{{}_9C_3}$ ...... ㉠

$4a=\frac{{}_{9-x}C_2\times{}_xC_1}{{}_9C_3}$ ...... ㉡

㉠÷㉡하면 $\frac{7-x}{3x}=\frac{1}{4}$

$7x=28\quad \therefore\ x=4$

$\therefore P(X=0)=a=\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$,

$P(X=1)=4a=\frac{10}{21}$,

$P(X=2)=b=\frac{{}_5C_1\cdot{}_4C_2}{{}_9C_3}=\frac{5}{14}$,

$P(X=3)=c=\frac{{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{1}{21}$

$\therefore E(X)=4a+2b+3c$

$=\frac{10}{21}+2\cdot\frac{5}{14}+3\cdot\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$

8. 정답 ④

[출제의도] 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

$a+\frac{1}{3}+b=1$에서 $a+b=\frac{2}{3}$

$E(X)=-a+b,\ E(X^2)=a+b=\frac{2}{3}$ 이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{2}{3}-(-a+b)^2=\frac{5}{12}$

$\therefore\ (a-b)^2=\frac{1}{4}$

9. 정답 380

[출제의도] 수열의 성질과 이산확률분포의 성질을 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

수열 $\{p_n\}$은 등차수열이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$ 에서 $p_1+p_5=\frac{2}{5}$

$p_5 - p_1 = \dfrac{8}{25}$ 에서 $p_1 = \dfrac{1}{25}$, $p_5 = \dfrac{9}{25}$

$\mathrm{E}(100X) = 100\left(\dfrac{1}{25} + \dfrac{6}{25} + \dfrac{15}{25} + \dfrac{28}{25} + \dfrac{45}{25}\right) = 380$

10. 정답 13

확률의 합이 1이므로

$\displaystyle\sum_{x=1}^{6} P(X=x) = \sum_{x=1}^{6} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \times \frac{6\times 7}{2} = \frac{21}{a} = 1$

$\therefore\ a = 21$

$\therefore\ \displaystyle E(X) = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X=x)$

$\displaystyle = \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{x}{21} = \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{6} x^2$

$= \dfrac{1}{21} \times \dfrac{6\times 7\times 13}{6} = \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ E(3X) = 3E(X) = 13$

11. 정답 ①

[출제의도] 이산확률변수의 평균 구하기

$a = \dfrac{5}{36}$, $b = \dfrac{1}{4}$ 이므로 $\mathrm{E}(X) = \dfrac{35}{12}$ 이다.

$\therefore\ \mathrm{E}(Y) = 12\mathrm{E}(X) + 5 = 40$

12. 정답 ②

$P(0 \le X \le 2) = \dfrac{7}{8}$ 이므로

$P(X=-1) = \dfrac{3-a}{8} = \dfrac{1}{8}$

$\therefore\ a = 2$

$E(X) = -1\times\dfrac{1}{8} + 0\times\dfrac{1}{8} + 1\times\dfrac{5}{8} + 2\times\dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4}$

13. 정답 ③

[출제의도] 분산의 성질 추론하기

ㄱ. $S(a) = 0$ 이면 $\mathrm{V}(X) = 0$ 이다. $\therefore$ 참

ㄴ. (반례) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = m$ 라 할 때,

$S(m-1) = S(m+1)$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $S(a)$ 는 a 가 X 의 평균일 때, 최솟값을 갖는다.

확률변수 X 의 평균 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i = m$ 이라 하면

$\displaystyle S(a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} \left\{(x_i - m) + (m-a)\right\}^2 p_i$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} \left\{(x_i - m)^2 + 2(x_i - m)(m-a) + (m-a)^2\right\} p_i$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^{n} \left\{(x_i - m)^2 + (m-a)^2\right\} p_i$

($\because\ \displaystyle (m-a)\sum_{i=1}^{n} (x_i - m) p_i = 0$ 이므로)

$S(a)$ 는 $a = m$ 일 때,

최솟값 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$ 를 갖는다. $\therefore$ 참

14. 정답 ②

$\mathrm{P}(X=0) = \dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(X=1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{10}$

$\mathrm{P}(X=2) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(X=3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{10}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X) = 0\times\dfrac{2}{5} + 1\times\dfrac{3}{10} + 2\times\dfrac{1}{5} + 3\times\dfrac{1}{10}$

$= \dfrac{3+4+3}{10} = 1$

15. 정답 404

[출제의도] 확률질량함수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

이항분포를 따르는 확률변수 X 의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x (1-p)^{n-x}$

$\mathrm{P}(X=2) = 48 \times \mathrm{P}(X=1)$

${}_{25}\mathrm{C}_2\, p^2 (1-p)^{23} = 48 \times {}_{25}\mathrm{C}_1\, p\, (1-p)^{24}$

$p = \dfrac{4}{5}$

$\mathrm{E}(X) = np = 20$, $\mathrm{V}(X) = np(1-p) = 4$ 이므로

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\therefore\ \mathrm{E}(X^2) = 404$

16. 정답 ④

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X) = 180\times\dfrac{1}{3} = 60$, $\mathrm{V}(X) = 180\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = 40$ 이다.

그런데, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$ 이므로

$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{V}(X) + \{\mathrm{E}(X)\}^2 = 40 + 3600 = 3640$

17. 정답 ⑤

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5} P(X=k) = \sum_{k=1}^{5} \frac{k(k+1)}{a}$

$\displaystyle\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{5} (k^2 + k) = \frac{1}{a}\left(\frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} + \frac{5\cdot 6}{2}\right) = \frac{70}{a} = 1$

$\therefore\ a = 70$ $\quad\therefore\ \dfrac{3\cdot 4}{70} = \dfrac{6}{35}$

18. 정답 ③

$\sum_{k=2}^{16} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{16} \frac{a}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^{16} \{a(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})\}$

$= a\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}$

$= 3a$

$a+\sum_{k=2}^{16} \mathrm{P}(X=k)+2a=1$이므로 $a=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(1 \le X \le 9)$

$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$= \frac{1}{2}$

19. ②

확률의 총합은 1이므로

$\frac{0+a}{40}+\frac{2+a}{40}+\frac{6+a}{40}+\frac{12+a}{40}=1$

$20+\frac{4a}{40}=1$ $\therefore a=5$

$\therefore \mathrm{P}(X \le 1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$= \frac{0+a}{40}+\frac{2+a}{40}+\frac{3+2a}{40}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}$

20. 답 ②

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$\sum_{x=1}^{8} \mathrm{P}(X=x)=k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$

$= k(\sqrt{9}-\sqrt{1})=2k=1$

$\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(2 \le X \le 7)=\sum_{x=2}^{7} \mathrm{P}(X=x)=\frac{1}{2}(\sqrt{8}-\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

21. 정답 ⑤

$\sum_{x=1}^{5} \frac{a}{x(x+1)}=\sum_{x=1}^{5} a\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{5}{6}a=1$

$\therefore a=\frac{6}{5}$

$\mathrm{P}(X \le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$= \sum_{x=1}^{3} \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$= \frac{6}{5}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{10}$

22.[정답] ①

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$에서

$\frac{-a+2}{10}+\frac{2}{10}+\frac{a+2}{10}+\frac{2a+2}{10}=1$

$\frac{2a+8}{10}=1$ $\therefore a=1$

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{2}{10}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{4}{10}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{2}{10}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{4}{10}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=1$

$\therefore \mathrm{V}(3X+2)=3^2\cdot\mathrm{V}(X)=9$

23. 답 ⑤

확률의 합은 1이므로

$\frac{1}{a}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=\frac{55}{a}=1$ $\therefore a=55$

$\therefore \mathrm{P}(2 \le X \le 3)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{2^2}{55}+\frac{3^2}{55}=\frac{13}{55}$

24. 정답 ④

2000명 중에서 합격자가 46명일 확률은 $\frac{46}{2000}=0.023$

평균을 m이라 하면

$0.023=0.5-0.477=0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{360-m}{30}\right)$

$\therefore m=300$

한편 합격자가 134명일 때, 합격 최저 점수를 X라 하면

$\frac{134}{2000}=0.067=0.5-0.433$

$= 0.5-\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{X-300}{30}\right)$

$\therefore X=345$

따라서, 합격 최저 점수는 345점이다.

25. 정답 ④

확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$P(X=0)=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{12}$

$P(X=1)=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}$

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{6}{12}=\frac{17}{12}$

26. 정답 ③

[출제의도] 이산확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	3	4	6	9
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{10}{36}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\frac{1}{36}(2\times3+3\times5+4\times3+6\times15+9\times10)=\frac{71}{12}$

27. 정답 ③

[출제의도] 기댓값의 정의를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

i) $X=0$일 확률은 세 시민 모두가 반대하는 경우이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{30}$

ii) $X=1$일 확률은 세 시민 중 한 명만 찬성하는 경우이므로

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{30}$

iii) $X=2$일 확률은 세 시민 중 한 명만 반대하는 경우이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{30}$

iv) $X=3$일 확률은 세 시민 3명 모두 찬성하는 경우

이므로 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

따라서, 구하는 기댓값은

$0\times\frac{2}{30}+1\times\frac{9}{30}+2\times\frac{13}{30}+3\times\frac{6}{30}=\frac{53}{30}$

28. 정답 ⑤

$1+2+3+4+5+6=21$이므로

$X=21-k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$이고

$P(X=21-k)=\frac{1}{6}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$이다.

$\therefore\ E(X)=\sum_{k=1}^{6}(21-k)\cdot\frac{1}{6}=6\cdot\frac{21}{6}-\frac{6\cdot7}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{2}$

29. 정답 ⑤

X가 취할 수 있는 값은 0, 2, 3, 4, 5, 6이다.

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{6}{36}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times1\times1}{36}=\frac{2}{36}$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times2\times1}{36}=\frac{4}{36}$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times3\times1}{36}=\frac{6}{36}$

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times4\times1}{36}=\frac{8}{36}$

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times5\times1}{36}=\frac{10}{36}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=0\times\frac{6}{36}+2\times\frac{2}{36}+3\times\frac{4}{36}+4\times\frac{6}{36}+5\times\frac{8}{36}+6\times\frac{10}{36}$

$=\frac{4+12+24+40+60}{36}=\frac{140}{36}=\frac{35}{9}$

30. 정답 ③

$\sum_{x=1}^{7}\frac{x}{a}=1$이므로 $a=\sum_{x=1}^{7}x=28$

$E(X)=\sum_{x=1}^{7}\left(x\times\frac{x}{28}\right)=\frac{1}{28}\times\frac{7\times8\times15}{6}=5$

31. 정답 ④

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{n}{3}$, $\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{2n}{9}+\left(\frac{n}{3}\right)^2=\frac{n^2+2n}{9}$

$\frac{\{\mathrm{E}(X)\}^2}{\mathrm{E}(X^2)}=\frac{\left(\frac{n}{3}\right)^2}{\frac{n^2+2n}{9}}=\frac{\frac{n^2}{9}}{\frac{n(n+2)}{9}}=\frac{n}{n+2}>\frac{9}{10}$

이때 $n>18$이므로 자연수 n의 최솟값은 19이다.

32. 답 ①

$\mathrm{B}(10,\mathrm{p})$에서 $E(X)=10p$, $V(X)=10p(1-p)$이고

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$, $E(2X)=2E(X)$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=10p(1-p)+(10p)^2$

$=10p(1-p+10p)=10p\cdot(9p+1)$

또한 $E(2X)=20p$이므로 $E(X^2)\ge E(2X)$이므로

$10p\cdot(9p+1)\ge20p,\quad 10p(9p-1)\ge0$

$\therefore\ p\ge\frac{1}{9}$

33. 정답 80

$\mathrm{P}(X=k)={}_{10}\mathrm{C}_k\times\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(X)=10\times\frac{3}{4}=\frac{15}{2}$이므로

$\mathrm{E}(10X+5)=10\mathrm{E}(X)+5=10\times\frac{15}{2}+5=80$

34. ⑤

갑, 을이 10점 과녁을 맞히는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

두 사건은 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

갑 또는 을이 10점 과녁에 화살을 맞히는 사건은 $A\cup B$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$

따라서 확률분포 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{7}{8}\right)$을 따르므로 X의 표준편차는 $\sqrt{64\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{8}}=\sqrt{7}$

35. 정답 ⑤

직선 $y=ax$ 와 포물선 $y=x^2+b$ 가 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 이 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D 라 하면 $D=a^2-4b<0$

즉 한 번의 시행에서 $a^2<4b$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)
(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)
(4, 5), (4, 6)

의 17 개다.

즉, 한 번의 시행에서 직선 $y=ax$ 와 포물선 $y=x^2+b$ 가 만나지 않을 확률은 $\frac{17}{36}$ 이고, 이와 같은 시행을 108 번 반복하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(108,\ \frac{17}{36}\right)$ 을 따른다.

$\therefore \mathrm{E}(X)=108\times\frac{17}{36}=51$

36. 정답 22

$$\mathrm{P}(X=k)=\frac{k}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2k}{n(n+1)}$$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\times\frac{2k}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n+1}{3}$$

$\therefore \frac{2n+1}{3}=15 \qquad \therefore n=22$

37. 정답 ①

(가) : $\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}$ (나) ${}_n\mathrm{C}_1\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}=n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{r=0}^{n}r\mathrm{P}(X=r)=\sum_{r=0}^{n}\left(r\times\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}\right)=\sum_{r=1}^{n}\left(r\times\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{2^n}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\sum_{r=1}^{n}(n\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1})=\frac{n}{2^n}\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

$$=\frac{n}{2^n}\times2^{n-1}=\frac{n}{2}$$

$\therefore$ (다): $\frac{n}{2}$

38. 정답 53

주어진 주사위 3개를 동시에 던질 때 "다름"이 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times3!=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\frac{1}{6}\right)$을 따르므로 구하는 분산은 $120\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{50}{3}$ $\qquad\therefore\ p+q=53$

39. 정답 550

하루 동안 팔리는 생선의 수를 X라 하면 팔리지 않는 생선의 수는 $1000-X$이다.

따라서 하루 동안 이 생선을 팔아서 얻는 이윤을 Y라 하면

$Y=AX-\frac{5}{4}A(1000-X)=\frac{9}{4}AX-1250A$

한편, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1000,\ \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=1000\times\frac{4}{5}=800$

$\therefore \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{9}{4}AX-1250A\right)$

$=\frac{9}{4}A\mathrm{E}(X)-1250A=\frac{9}{4}A\times800-1250A$

$=550A$

$\therefore k=550$

40. 정답 ①

문제를 풀다가 x_k에서 처음으로 틀릴 확률은

$$\frac{11-1}{12-1}\times\frac{11-2}{12-2}\times\cdots\times\frac{11-(k-1)}{12-(k-1)}\times\left(1-\frac{11-k}{12-k}\right)$$

$$=\frac{10}{11}\times\cdots\times\frac{12-k}{13-k}\times\frac{1}{12-k}=\frac{1}{11}$$

10문제 모두 맞힐 확률은 $\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{1}{2}=\frac{1}{11}$

$\therefore$ (상금의 기댓값)$=\sum_{k=1}^{10}\left(k\cdot\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{11}\cdot a$

$=\frac{1}{11}\cdot55+\frac{1}{11}a$

$=5+\frac{1}{11}a$(만 원)

$5+\frac{1}{11}a\ge6$으로부터 $a\ge11$

따라서, a의 최솟값은 11이다.

41. 정답 40

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times k\times\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore\ k=4$

$\therefore\quad 10k=40$

42. 정답 ③

$y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\frac{1}{2}=1 \qquad \therefore\quad a=4$

$\mathrm{P}(X\le k)=2\mathrm{P}(X\ge k)$일 때 $\mathrm{P}(X\le k)+\mathrm{P}(X\ge k)=1$에서

$3\mathrm{P}(X\ge k)=1 \qquad \therefore\quad \mathrm{P}(X\ge k)=\frac{1}{3}$

한편 $x\ge1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(X\ge k)=\mathrm{P}(k\le X\le4)=\frac{1}{2}(4-k)\left(-\frac{k}{6}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$(k-4)^2=4$에서 $k=2$ ($\because$ $1<k<4$)

43. 정답 ①

$P(-25 \le X \le 25)=1$에서

$2\times\frac{1}{2}\times 25\times a=1$

$\therefore a=\frac{1}{25}$

$x>0$일 때, $f(x)=-\frac{1}{625}x+\frac{1}{25}$이므로

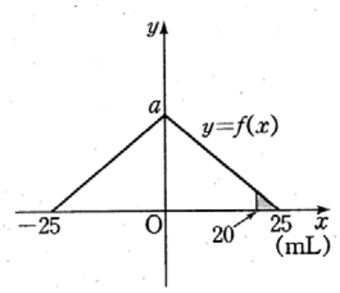
$f(20)=-\frac{1}{625}\times 20+\frac{1}{25}=\frac{1}{125}$

2.02L 이상의 생수가 생산될 확률은

$P(X\ge 20)=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{1}{125}=\frac{1}{50}$이다.

따라서, 생산된 2000개의 생수 중에서 실제 용량이 2.02L 이상인 생수의 개수 Y는 이항분포 $B\left(2000,\ \frac{1}{50}\right)$을 따른다.

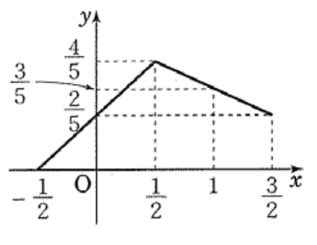
$\therefore E(Y)=2000\times\frac{1}{50}=40$



44. 정답 ②

$y=f(x)$는 $\left(a,\ \frac{4}{5}\right)$를 지나고 주어진 그래프와 x축 및 직선 $x=3a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$2a\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}=1$ $\therefore\ a=\frac{1}{2}$



$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(X>0)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(X>1)=\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{10}}=\frac{5}{18}$

45. 정답 ③

[출제의도] 기댓값의 정의를 이용하여 기댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(i) $X=0$일 확률은 세 시민 모두가 반대하는 경우이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{30}$

(ii) $X=1$일 확률은 세 시민 중 한 명만 찬성하는 경우이므로

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{30}$

(iii) $X=2$일 확률은 세 시민 중 한 명만 반대하는 경우이므로

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{30}$

(iv) $X=3$일 확률은 세 시민 3명 모두 찬성하는 경우이므로

$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 기댓값은

$0\times\frac{2}{30}+1\times\frac{9}{30}+2\times\frac{13}{30}+3\times\frac{6}{30}=\frac{53}{30}$

46. 정답 ②

$\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b=10a+b=9$,

$\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)=16a^2=4$에서

$a=\frac{1}{2}$, $b=4$ $\therefore\ ab=2$

47. 정답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=9\times\frac{2}{3}=6,\ \mathrm{V}(X)=9\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=2$

또한 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(\mathrm{X})\}^2$이므로

$f(a)=\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)=\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2-2a\mathrm{E}(X)+a^2$

$=2+36-12a+a^2=(a-6)^2+2$

따라서 $a=6$일 때 최솟값은 2이다.

48. 정답 ④

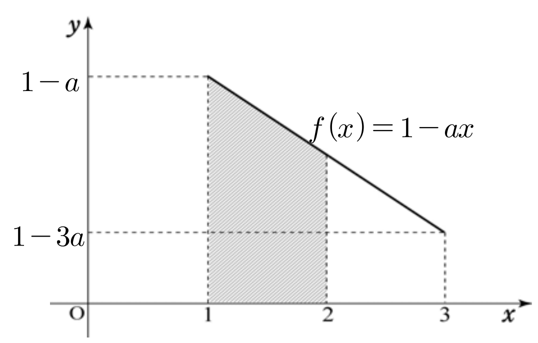
$f(\sigma)=\mathrm{P}(X\le 1)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1}{\sigma}\right)$ $(\sigma>0)$이고, σ가 커질수록 $\frac{1}{\sigma}$은 0에 가까워지므로

$f(\sigma)\to\frac{1}{2}$, σ가 작아질수록 $\frac{1}{\sigma}$은 무한히 커지므로 $f(\sigma)\to 1$이다.

따라서 조건에 맞는 그래프는 ④이다.

49. 정답 13

[출제의도] 확률밀도함수 이해하기



$f(x)=1-ax$ 가 확률밀도함수이므로

$\frac{1}{2}\times(2-4a)\times 2=1$, $a=\frac{1}{4}$ 이다.

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)$ 은 어두운 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}\times 1=\frac{5}{8}$

$\therefore\ p+q=13$

50. 정답 ④

$\mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\mathrm{P}(1\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 4)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times(2a+a)\times 2\times a+\frac{1}{2}\times 1\times a$

$=\frac{3}{2}a+2a+\frac{a}{2}=4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

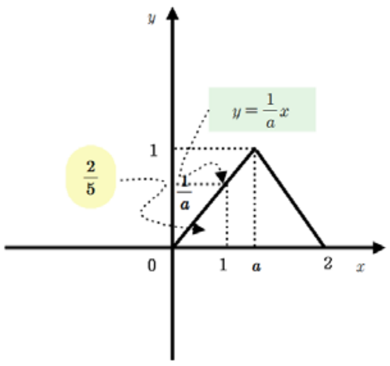
이때, $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{3}{8}<2$이고,

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}$ 이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le k)=0.5$ 에서 $1<k<3$이다.

따라서, $\mathrm{P}(0\le X\le k)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}(k-1)=\frac{1}{2}$에서 $k=\frac{3}{2}$

51. 정답 125



$\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{a}=\frac{3}{5}$ 이므로 $a=\frac{5}{4}$ 이다.

$100a=100\times\frac{5}{4}=125$

52. 정답 ④

확률 $\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)$의 값이 최대가 되려면 구간

$a\leqq x\leqq a+\frac{1}{2}$ 안에 1이 포함되어있어야 하므로 $\frac{1}{2}<a<1$인 경우를 생각한다.

$\frac{1}{2}<a<1$일 때 $1<a+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$ 이므로

$\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3-2a}{2}\right)^2$

$=-a^2+\frac{3}{2}a-\frac{1}{8}$

$=-\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$

따라서 $a=\frac{3}{4}$일 때 확률 $\mathrm{P}\left(a\le X\le a+\frac{1}{2}\right)$의 값이 최대이다

53. 정답 ⑤

10개의 수 $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,\ 2^7,\ 2^8,\ 2^9,\ 2^{10}$ 중에서 $2^k\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10)$을 제외한 9개의 수를 선택한 경우 $X=2^{55-k}$이며, 그 확률은 $\mathrm{P}(X=2^{55-k})=\frac{1}{10}$ 이다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{10}2^{55-k}\cdot\frac{1}{10}=\frac{2^{55}}{10}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

$=\frac{2^{55}}{10}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{2^{54}}{5}\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)=\frac{1}{5}(2^{54}-2^{44})$

$\therefore\ m=54,\ n=44 \quad \therefore\ m+n=98$

54. 정답 ④

정사면체를 한 번 던질 때, 밑면에 적힌 수가 1, 2, 3, 4일 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이다.

$\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{64}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{36}{64}$

$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\times 4!\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{6}{64}$

$\mathrm{P}(X=2)=1-\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=3)-\mathrm{P}(X=4)$

$=1-\frac{1+36+6}{64}=\frac{21}{64}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{64}+2\cdot\frac{21}{64}+3\cdot\frac{36}{64}+4\cdot\frac{6}{64}$

$=\frac{1+42+108+24}{64}=\frac{175}{64}$

55. 정답 ⑤

$P(X=k)\ (k\ge 2)$는 $(k-1)$번째까지 구슬을 꺼낼 때 $(k-2)$개의 노란색 구슬과 한 개의 파란색 구슬을 꺼내고 k번째 구슬을 꺼낼 때 이 구슬이 파란색일 확률이므로

$P(X=k)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_{k-2}}{{}_{10}C_{k-1}}\times\frac{1}{10-(k-1)}$

$=\frac{2}{11-k}\times\frac{\frac{8!}{(k-2)!(10-k)!}}{\frac{10!}{(k-1)!(11-k)!}}=\frac{k-1}{45}$

$\therefore E(X)=\sum_{k=2}^{10}\left(k\times\frac{k-1}{45}\right)=\frac{1}{45}\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$

$=\frac{1}{45}\left(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-\frac{10\cdot 11}{2}\right)=\frac{22}{3}$

56. 정답 25

[출제의도] 연속확률변수의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\frac{1}{2}=\mathrm{P}(a \le X \le b)=(b-a) \quad \therefore \ (b-a)k=\frac{1}{2}$ …… ①

$1=\mathrm{P}(0 \le X \le 2)=\frac{1}{2}ak+(b-a)k+\frac{1}{2}(2-b)k$ 에서

$(b-a+2)k=2$ …… ②

①, ②을 연립하여 풀면 $k=\frac{3}{4}$

$p^2+q^2=4^2+3^2=25$

57. 정답 ③

$\int_0^3 f(x)dx=1$에서

$\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$=\int_0^1 kxdx+\int_1^3\left\{-\frac{1}{2}k(x-3)\right\}dx$

$=k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-\frac{1}{2}k\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_1^3=\frac{3}{2}k=1$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(2 \le X \le 3)=-\frac{1}{3}\int_2^3(x-3)dx$

$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_2^3=-\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{9}{2}-9\right)-(2-6)\right\}$

$=\frac{1}{6}$

58. 정답 370

[출제의도] 연속확률변수 X의 평균, 분산을 구한 후 $\mathrm{E}(aX+b)$, $\mathrm{V}(aX+b)$를 구할 수 있다.

$\mathrm{E}(X)=\int_0^1 x\cdot 6x(1-x)dx=\left[-\frac{6}{4}x^4+2x^3\right]_0^1=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=\int_0^1 x^2\cdot 6x(1-x)dx=\left[-\frac{6}{5}x^5+\frac{6}{4}x^4\right]_0^1=\frac{6}{20}$ 이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{6}{20}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

따라서 확률변수 Y의 평균 $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{V}(Y)$는

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(80X+10)=80\mathrm{E}(X)+10$

$=80\times\frac{1}{2}+10=50$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(80X+10)=80^2\mathrm{V}(X)=80^2\times\frac{1}{20}=320$

59. 정답 19

직선 l의 방정식을 $y=ax+b$로 놓으면 $x=1$일 때,

$y=\frac{1}{5}$ 이므로 $a+b=\frac{1}{5}$ ………………㉠

확률의 합은 1이므로

$\sum_{k=1}^{10}(ak+b)=55a+10b=1$ ……………㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{45}$, $b=\frac{2}{9}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot 10=\frac{10}{9}$

$\therefore p=9,\ q=10$

$\therefore p+q=19$

60. 정답 ④

임의로 4개의 카드를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$ (가지)이고 이 중 $\boxed{\text{어느}}$, $\boxed{\text{고백}}$ 이라는 카드가 이 순서대로 연속하여 나오는 경우의 수는 $3!=6$ 가지이므로,

$\boxed{\text{어느}}$ 와 $\boxed{\text{고백}}$ 이 연속하여 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다.

X의 분포는 $\mathrm{B}\left(500,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=500\times\frac{1}{4}=125$

61. 정답 ④

사면체를 한 번 던질 때 바닥면에 적힌 숫자 1, 2, 3, 4가 나올 통계적 확률은 각각 $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$ 이다.

따라서 확률변수 X ($X=1,\ 2,\ 3,\ 4$)의 확률을 각각 구하면

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$

$\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}-\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{7}{100}$

$\mathrm{P}(X=3)=\mathrm{P}(X\le 3)-\mathrm{P}(X=2)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}-\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{48}{100}$

$\mathrm{P}(X=4)=1-\mathrm{P}(X\le 3)$

$=1-\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{36}{100}$

이므로 구하는 X 의 평균 $\mathrm{E}(X)$는

$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{9}{100}+2\cdot\frac{7}{100}+3\cdot\frac{48}{100}+4\cdot\frac{36}{100}$

$=\frac{311}{100}=3.11$

62. 정답 ③

두 주사위의 눈의 수의 차가 3보다 크거나 같은 경우는 모두 12가지 이므로 1번의 시행에서 A가 점수를 얻을 확률은 $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ 이고

B가 점수를 얻을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 15회 시행에서 A가 얻는 점수의 합을 확률변수 X라고 하면 X는 이항분포 $B\left(15,\frac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\therefore\ E(X)=15\times\frac{2}{3}=10$

한편 15회 시행에서 B가 얻는 점수의 합을

확률변수 Y라고 하면 Y는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$를 따르므로

$E(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$

따라서 두 기댓값의 차는 5이다.

63. 정답 ④

숫자 n이 적힌 카드를 뽑았을 때, 주사위를 n번 던져 나온 눈의 수를 각각 X_1, X_2, X_3, $\cdots$, X_n이라 하면 확률변수

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n}{n}$

은 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수의 평균과 같으므로

$E(\overline{X})=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$

즉, 주사위를 n번 던져 나온 눈의 수의 합의 평균은 $\frac{7}{2}n$이고,

X_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에서

$P(i=n)=\frac{n}{55}$ 이므로

$E(X)=\sum_{n=1}^{10}P(i=n)\cdot\frac{7}{2}n=\sum_{n=1}^{10}\frac{n}{55}\cdot\frac{7}{2}n$

$=\frac{7}{110}\sum_{n=1}^{10}n^2=\frac{7}{110}\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=\frac{49}{2}$

64. 정답 **답** 16

48번 카드를 꺼냈을 때 1이 나온 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(X)=48\cdot\frac{1}{4}=12$

$\sigma^2=48\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=3^2$

따라서, 확률변수 X는 정규분포 $N(12,\ 3^2)$을 따르므로

$P(X\geq 15)=P\left(Z\geq\frac{15-12}{3}\right)=P(Z\geq 1)$

$=0.5-P(0\leq Z\leq 1)=0.5-0.34=0.16$

$\therefore 100p=100\times 0.16=16$

65. **답** ④

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-50}{5}$이라 하면

$f(a)=\mathrm{P}(X\geq x+40)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-10}{5}\right)$

$\therefore\ f(0)+f(15)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -2)+\mathrm{P}(z\geq 1)$

$=\{0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)\}+\{0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)\}$

$=1+(0.4772-0.3413)=1.1359$

66. 정답 ⑤

[출제의도] 기댓값과 표준편차의 성질 이해하기

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고

$\mathrm{P}(X<a-3)=\mathrm{P}(X>b+2)$이므로

$\frac{(a-3)+(b+2)}{2}=m$

$m=\frac{a+b-1}{2}$ .... ㉠

$Y=\frac{1}{3}X+1$, $\mathrm{E}(Y)=51$ 이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}\left(\frac{1}{3}X+1\right)=\frac{1}{3}m+1$

$m=150$ .... ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a+b=301$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}\left(\frac{1}{3}X+1\right)=\frac{1}{9}\mathrm{V}(X)$

$\frac{1}{9}\mathrm{V}(X)=\frac{4}{9}$ 이므로 $\mathrm{V}(X)=4$, $\sigma=2$

$\therefore\ a+b+\sigma=303$

67. 정답 ④

각 직원이 구내식당에서 점심을 먹을 확률이 90%이므로 구내식당에서 점심을 먹는 사람 수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=400\times\frac{9}{10}=360$

$\mathrm{V}(X)=400\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=36$

$n=400$이 충분히 크므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(360,\ 6^2)$을 따른다.

그런데 구내식당에서 온 모든 직원들이 식사를 할 수 있으려면 $X\leq 372$인 경우이므로

$\mathrm{P}(X\leq 372)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{372-360}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\leq 2)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)=0.5+0.4772=0.9772$

68. 정답 ②

잘라낸 대나무의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(13.2,\ 1.5^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\geq 12)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{12-13.2}{1.5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -0.8)=0.5+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.8)$

$=0.5+0.2881=0.7881$

69. 정답 ②

[출제의도] 정규분포를 표준화하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(X\geq x)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\geq\frac{x-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{x-m}{\sigma}\right)$,

$\mathrm{P}(Y\geq y)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\geq\frac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$이므로

(가)에서 $-\frac{m}{\sigma}=-\frac{am}{\sqrt{b}\,\sigma}$

$\therefore\ a=\sqrt{b}$ .... ㉠

(나)에서

$1=\mathrm{P}(X\le 1)+\mathrm{P}(Y\ge 2)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\le\frac{1-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(\frac{Y-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\ge\frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1-m}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}\right)$

이므로 $\frac{1-m}{\sigma}=\frac{2-am}{\sqrt{b}\,\sigma}$ .... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=2,\ b=4$이다.

70. 정답 ③

$P(X\ge k)=0.04$에서 $P\left(Z\ge\frac{k-57}{20}\right)=0.04$

$P\left(0\le Z\le\frac{k-57}{20}\right)=0.46$

$\frac{k-57}{20}=1.75$

$\therefore k=92$

따라서, 최저 점수는 92점이다.

71. 정답 27

$\mathrm{P}(|X-m|\le p\sigma)=\mathrm{P}(m-p\sigma\le X\le m+p\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{-p\sigma}{\sqrt{3}\,\sigma}\le Z\le\frac{p\sigma}{\sqrt{3}\,\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{-p}{\sqrt{3}}\le Z\le\frac{p}{\sqrt{3}}\right)$

$\mathrm{P}\left(|Y-m|\le\frac{3}{2}\sigma\right)=\mathrm{P}\left(m-\frac{3}{2}\sigma\le Y\le m+\frac{3}{2}\sigma\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{-\frac{3}{2}\sigma}{\frac{\sigma}{2}}\le Z\le\frac{\frac{3}{2}\sigma}{\frac{\sigma}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le 3)$

$\frac{p}{\sqrt{3}}=3$에서 $p=3\sqrt{3}$ 이다. $\therefore\ p^2=27$

72. 정답 ⑤

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}\left(X\ge\frac{2}{3}m\right)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma}\ge\frac{\frac{2}{3}m-m}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{m}{3\sigma}\right)$

이때, $\mathrm{P}\left(Z\le\frac{3}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{3}{2}\right)$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{m}{3\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge-\frac{3}{2}\right),\ -\frac{m}{3\sigma}=-\frac{3}{2}$

$\therefore\ \frac{m}{\sigma}=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$

73. ①

$\mathrm{P}(X\ge 185)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{185-174.2}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.08)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.08)$

$=0.5-0.36=0.14$

따라서 A 고등학교에서 키가 185cm 이상인 학생은 $1000\times 0.14=140$ (명)이므로 B 고등학교에서 키가 185cm 이상인 학생은 70 (명)이다.

즉, $\mathrm{P}(Y\ge 185)=0.07$ 이므로

$\mathrm{P}(Y\ge 185)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{185-m}{15}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{185-m}{15}\right)$

$=0.07$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{185-m}{15}\right)=0.43$ 이므로 $\frac{185-m}{15}=1.48$

$\therefore m=162.8$

74. 정답 ③

[출제의도] 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(150,\ \frac{2}{5}\right)$를 따른다.

ㄱ. $\mathrm{V}(X)=150\times\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{2}{5}\right)=36$ (참)

ㄴ. ${}_{150}\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{5}\right)^{150}>{}_{150}\mathrm{C}_{150}\left(\frac{2}{5}\right)^{150}$ (거짓)

ㄷ. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 6^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(X\le 51)=\mathrm{P}(Z\le -1.5),\ \mathrm{P}(X\ge 72)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 51)>\mathrm{P}(X\ge 72)$ (참)

75. 정답 ③

장난감의 지름의 길이를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X\le 5.0)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{5.0-6.2}{1.5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -0.8)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.8)$

$=0.5-0.29=0.21$

$\mathrm{P}(X\ge 7.7)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{7.7-6.2}{1.5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.5-0.34=0.16$

따라서 구하는 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\times 0.21\times 0.16=0.0672$

76. 정답 ①

응시자 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(56,\ 6^2)$을 따른다. 최저 합격 점수가 68점이므로 이 시험에 합격할 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 68)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{68-56}{6}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 2)$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.48 = 0.02$

이 시험의 응시자 중 400명을 임의로 추출하였을 때, 합격한 사람의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B\left(400,\ \frac{1}{50}\right)$을 따른다.

$$E(Y) = 400 \times \frac{1}{50} = 8$$

$$V(Y) = 400 \times \frac{1}{50} \times \frac{49}{50} = \left(\frac{14}{5}\right)^2$$

이고, 400은 충분히 큰 수이므로 Y는 근사적으로 정규분포 $N\left(8,\ \left(\frac{14}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$$\therefore\ P(Y \ge 15) = P\left(Z \ge \frac{15-8}{\frac{14}{5}}\right) = P(Z \ge 2.5)$$

$= 0.5 - P(0 \le Z \le 2.5) = 0.01$

77. 정답 ③

ㄱ. $E(Y) = \frac{3}{2}E(X) - 19 = \frac{3}{2} \cdot 50 - 19 = 56 \quad \therefore$ 참

ㄴ. $\sigma(Y) = \sigma\left(\frac{3}{2}X - 19\right) = \frac{3}{2}\sigma(X) = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$

표준정규분포표에 의하면 상위 2%인 z의 값이 2이므로 상위 2%인 학생의 점수는

$E(Y) + 2\sigma(Y) = 56 + 2 \cdot 9 = 74 \quad \therefore$ 거짓

ㄷ. $P\left(\frac{3}{2}X - 19 > X\right) = P(X > 38) = P\left(Z > \frac{38-50}{6}\right)$

$= P(Z > -2) = 0.5 + P(0 < Z < 2) = 0.5 + 0.48 = 0.98 \quad \therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

78. 정답 ②

[출제의도] 독립시행의 확률과 이항정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$P(k) = {}_{100}C_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{100-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 100)$$

$$\sum_{k=1}^{50}\{P(2k-1) - P(2k)\}$$

$= \{P(1) - P(2)\} + \{P(3) - P(4)\} + \cdots + \{P(99) - P(100)\}$

$= {}_{100}C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{99} - {}_{100}C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{98} + {}_{100}C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{97}$

$-\cdots + {}_{100}C_{99}\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\left(\frac{2}{3}\right) - {}_{100}C_{100}\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$

$= -\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^{100} + \left(\frac{2}{3}\right)^{100} = \left(\frac{2}{3}\right)^{100} - \left(\frac{1}{3}\right)^{100}$

79. 정답 20

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1} + (a-x)^{n+1}}{x^n + (a-x)^n}$$

$$\begin{cases} x & (|x| \ge |a-x| \text{일 때}) \\ a-x & (|x| < |a-x| \text{일 때}) \end{cases}$$

$|x| \ge |a-x|$의 양변을 제곱하면

$$x^2 \ge (a-x)^2 \quad \therefore\ x \ge \frac{a}{2}$$

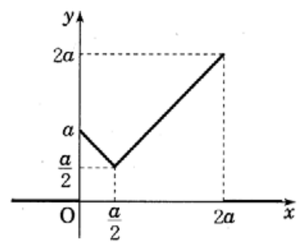
또, $|x| < |a-x|$의 양변을 제곱하면

$$x^2 < (a-x)^2 \quad \therefore\ x < \frac{a}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$는 다음과 같다.

$$f(x)\begin{cases} a-x & \left(0 \le x < \frac{a}{2} \text{일 때}\right) \\ x & \left(\frac{a}{2} \le x \le 2a \text{일 때}\right) \\ 0 & (x < 0 \text{ 또는 } x > 2a \text{ 일 때}) \end{cases}$$

그러므로 $y = f(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.



한편, $y = f(x)$는 확률변수 X의 확률밀도함수이므로 x축과 이루는 영역의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + 2a\right) \cdot \frac{3a}{2} = 1$$

$$\frac{3}{8}a^2 + \frac{15}{8}a^2 = 1,\quad a^2 = \frac{4}{9}$$

$$\therefore\ a = \frac{2}{3}\ \ (\because\ a > 0)$$

$$\therefore\ 30a = 20$$

80. 정답 ②

임의의 훈련생 점수를 X라 하면 $X \le 70$일 때 재교육대상이 되므로

$$P(X \le 70) = P\left(Z \le \frac{70-m}{10}\right)$$

$$= 0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{m-70}{10}\right) = 0.15$$

$$P\left(0 \le Z \le \frac{m-70}{10}\right) = 0.35$$

$$\frac{m-70}{10} = 1 \qquad \therefore m = 80$$

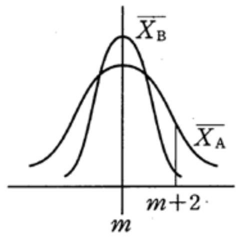
$$\therefore\ L = \frac{m-35}{5} = \frac{80-35}{5} = 9$$

81. 정답 ⑤

ㄱ. 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$이므로 분산은 표본의 크기에 반비례하므로 $V(\overline{X_A}) > V(\overline{X_B})$이다.

$\therefore$ 참

ㄴ. $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$의 분포는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(\overline{X_A} > m+2) > \mathrm{P}(\overline{X_B} > m+2)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X_A} \le m+2) < \mathrm{P}(\overline{X_B} \le m+2)$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. $Z \sim \mathrm{N}(0,\ 1^2)$에서 $\mathrm{P}(|Z| \le K) = 0.95$로 놓으면

$b-a = 2K\dfrac{2}{\sqrt{17}}$, $d-c = 2K\dfrac{2}{\sqrt{24}}$

$\therefore\ b-a > d-c$ $\quad\therefore$ 참

82. 정답 **37**

[출제의도] 확률변수의 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 숫자 중에서 최솟값이 k ($k=1,\ 2,\ 3$)가 되는 경우의 수는 k이상의 숫자 중에서 2개의 숫자를 뽑는 경우의 수에서 k보다 큰 숫자 중에서 2개의 숫자를 뽑는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$$P(X=1) = \frac{{}_6C_2 - {}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 - {}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

따라서 확률변수 X의 평균은

$1\times\dfrac{3}{5} + 2\times\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{22}{15}$ 이다.

$\therefore p+q = 15+22 = 37$

83. 정답 ②

[출제의도] 정규분포를 표준화하여 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$\mathrm{P}(X \ge x) = \mathrm{P}\left(\frac{X-x}{\sigma} \ge \frac{x-m}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{x-m}{\sigma}\right),$$

$$\mathrm{P}(Y \ge y) = \mathrm{P}\left(\frac{Y-am}{\sqrt{b}\sigma} \ge \frac{y-am}{\sqrt{b}\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{y-am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$$

(가)에서 $-\dfrac{m}{\sigma} = -\dfrac{am}{\sqrt{b}\sigma}$

$\therefore\ a = \sqrt{b}$ ……… ㉠

(나)에서

$1 = \mathrm{P}(X \le 1) + \mathrm{P}(Y \ge 2)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{X-m}{\sigma} \le \dfrac{1-m}{\sigma}\right) + \mathrm{P}\left(\dfrac{Y-am}{\sqrt{b}\sigma} \ge \dfrac{2-am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{1-m}{\sigma}\right) + \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{2-am}{\sqrt{b}\sigma}\right)$

이므로 $\dfrac{1-m}{\sigma} = \dfrac{2-am}{\sqrt{b}\sigma}$ ……… ㉡

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

84. 정답 85

프로야구 선수의 작년 타점을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(43,\ 12^2)$을 따라고 올해 타점을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ 11^2)$을 따른다.

올해도 같은 순위를 유지하기 위한 올해 타점을 k라 하면

$\mathrm{P}(X \ge 79) = \mathrm{P}(Y \ge k)$

$\mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{79-43}{12}\right) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{k-52}{11}\right)$

에서 $\dfrac{79-43}{12} = \dfrac{k-52}{11}$, $k-52 = 3\cdot 11$

$\therefore\ k = 85$

따라서 구하는 타점은 85(점)이다.

85. 정답 ①

8점을 얻는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1800,\ \dfrac{1}{3}\right)$을 따른다.

이때, 1800은 충분히 큰 수이므로 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(600,\ 20^2)$을 따른다.

1800회의 독립시행 중 4점을 잃는 횟수를 확률변수 Y라 하면

$X+Y = 1800$ ……… ㉠

$8X - 4Y = 480$ ……… ㉡

㉠, ㉡에서 $X = 640$, $Y = 1160$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \ge 640) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{640-600}{20}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge 2)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

86. **정답** ③

[출제의도] 이항분포에서의 확률을 정규분포에서의 확률을 이용하여 구할 수 있는 가를 묻는 문제이다.

ⅰ) 한 번의 시행에서 5가 쓰여 있는 카드가 한 번도 나오지 않으면 세 수의 합이 9이하이고, 이때의

확률은 $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{12}$

ⅱ) 5가 쓰여 있는 카드가 한 번 나오면, 2가 쓰여 있는 카드가 2번 나올 때만 세 수의 합이 9 이하이고 이때의 확률은

$\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{24}$

따라서 한 번의 시행에서 세 숫자의 합이 9이하일

확률은 $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{8}$

한편, 세 숫자의 합을 확률변수 X로 하는 확률분포는 이항분포 $\mathrm{B}\left(448,\ \dfrac{1}{8}\right)$을 따른다. 그러므로 X는 근사적으로 정규분포

$\mathrm{N}(56,\ 7^2)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(49 \le X \le 70) = \mathrm{P}\left(\dfrac{49-56}{7} \le Z \le \dfrac{70-56}{7}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$
$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

87. 정답 ④
$z=0$ 일 때, $f(0) = \mathrm{P}(Z \le 0) = 0.5$
$\therefore\ a = 0.5$
$z = -0.5$ 일 때,
$f(-0.5) = \mathrm{P}(Z \le -0.5) = \mathrm{P}(Z \ge 0.5)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5)$
$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$
$\therefore\ b = 0.3085$
$\therefore\ a + b = 0.5 + 0.3085 = 0.8085$

88. 정답 ⑤
[출제의도] 정규분포를 활용할 수 있는가를 묻는 문제이다.
수험생의 점수를 확률변수 X라 하면, X는 정규분포 $\mathrm{N}(156,\ 20^2)$을 따른다.
합격하기 위한 최저 점수를 k(점)이라 하면
$\mathrm{P}(X \ge k) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{k-156}{20}\right) = \dfrac{200}{1000} = 0.2$
$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{k-156}{20}\right) = 0.3$
$\dfrac{k-156}{20} = 0.84$
$\therefore k = 172.8$

89. 정답 ③
근무 기간이 16개월인 직원의 하루 생산량을 X라 하면
$X \sim Z(16a + 100,\ 12^2)$
$\mathrm{P}(X \le 84) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{-16a-16}{12}\right) = 0.0228$이고
$\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$이므로
$\dfrac{-16a-16}{12} = -2\ \ \therefore\ a = \dfrac{1}{2}$
근무 기간이 36개월인 직원의 하루 생산량을 Y라 하면
$Y \sim \mathrm{N}(118,\ 12^2)$
$\mathrm{P}(100 \le Y \le 142) = \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 2) = 0.9104$

90. 정답 ②
[출제의도] 정규분포를 따르는 확률변수에 대한 확률을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
더덕 한 뿌리의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 5^2)$을 따른다.
$\mathrm{P}(30 \le X < 45) = \mathrm{P}(-2 \le Z < 1) = 0.8185$

91. 정답 ②
집에서 시장까지의 거리를 확률변수 X라 하면
X는 정규분포 $\mathrm{N}(1740,\ 500^2)$을 따른다.
따라서, $\mathrm{P}(X \ge 2000) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{2000-1740}{500}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 0.52) = 0.3$
여기에서 집에서 시장까지의 거리와 자가용 이용에 관한 표를 만들면

	자가용 이용	자가용 이용 안 함	계
2000m 미만	0.05×0.7	0.95×0.7	0.7
2000m 이상	0.15×0.3	0.85×0.3	0.3
계			1

따라서 $\dfrac{0.05 \times 0.7}{0.05 \times 0.7 + 0.15 \times 0.3} = \dfrac{35}{80} = \dfrac{7}{16}$

92. 정답 ③
반등 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$을 따른다.
따라서 $\mathrm{P}(X < 2.93) = 0.1003$이므로
$\mathrm{P}(X < 2.93) = \mathrm{P}\left(Z < \dfrac{2.93-m}{1}\right) = \mathrm{P}(Z > m - 2.93)$
$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le m - 2.93) = 0.1003$
$\mathrm{P}(0 \le Z \le m - 2.93) = 0.3997$
즉, $m - 2.93 = 1.28$이므로 $m = 4.21$

93. 정답 ③
$\mathrm{P}(27 \le R \le 33) = \mathrm{P}(27 \le P - X \le 33)$
$\mathrm{P}(27 \le 30 - X \le 33) = \mathrm{P}(-3 \le X \le 3)$
$\mathrm{P}\left(\dfrac{-3}{1.5} \le X \le \dfrac{3}{1.5}\right)$
$= \mathrm{P}(-2 \le Z \le 2) = 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$
$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$

94. 정답 ⑤
ㄱ. $a > 0$이므로 $\sigma(Z) = \sigma(aX + b) = a\sigma(X) = 1$
$\therefore \sigma(X) = \dfrac{1}{a}$ (거짓)
ㄴ. $\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b = 0$에서
$\mathrm{E}(X) = -\dfrac{b}{a}$ 이므로
$\mathrm{P}(X \ge 0) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{0 - \left(-\dfrac{b}{a}\right)}{\dfrac{1}{a}}\right) = \mathrm{P}(Z \ge b)$
이때, $\mathrm{P}(Z \le 0) = \mathrm{P}(Z \ge 0)$이므로 $b = 0$이다. (참)
ㄷ. 확률변수 Z는 표준정규분포를 따르므로
$\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1)$
$Z = 0$일 때, $0 = aX + b$에서 $X = -\dfrac{b}{a}$ 이고,
$Z = 1$일 때, $1 = aX + b$에서 $X = \dfrac{1-b}{a}$ 이므로
$\mathrm{P}(-1 \le Z \le 0) = \mathrm{P}\left(-\dfrac{b}{a} \le X \le \dfrac{1-b}{a}\right)$ (참)
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

95. 정답 ③

한 변의 길이가 1인 정삼각형 9개에서 꼭짓점에 대응 되는 수를 순서쌍으로 나타내면 다음과 같다.

(가) △모양의 삼각형 $(1,2,3)$, $(2,4,5)$, $(3,5,6)$, $(4,7,8)$, $(5,8,9)$, $(6,9,10)$

(나) ▽모양의 삼각형 $(2,3,5)$, $(4,5,8)$, $(5,6,9)$

확률변수 X에 대한 확률분포표를 만들면

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

ㄱ. $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{9}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $\mathrm{P}(1 \le X \le 3)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$

$\mathrm{P}(4 \le X \le 6)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

$\mathrm{P}(1 \le X \le 3) \ne \mathrm{P}(4 \le X \le 6)$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. $\mathrm{E}(X)=\frac{1+2+6+4+10+12}{9}=\frac{35}{9}$

$\therefore \mathrm{E}(9X-5)=9\mathrm{E}(X)-5=9\cdot\frac{35}{9}-5=30$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

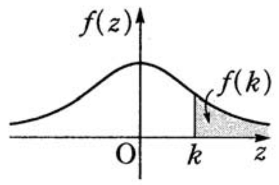
96. 정답 ⑤

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$$f(k)=\mathrm{P}(X \ge m+k\sigma)=\mathrm{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \ge k\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z \ge k)$$

ㄱ. $f(0)=\mathrm{P}(Z \ge 0)=\frac{1}{2}$ (거짓)

ㄴ. k의 값이 커질수록 $f(k)$의 값은 작아지므로 $k_1 < k_2$이면 $f(k_1) > f(k_2)$이다. (참)



ㄷ. $f(k)+f(-k)=\mathrm{P}(Z \ge k)+\mathrm{P}(Z \ge -k)$

$=\mathrm{P}(Z \ge k)+\mathrm{P}(Z \le k)$

$=1$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

97. 정답 ①

$$f(x)=\begin{cases} 2-4x & \left(0 \le x < \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{8} & \left(\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$ 이므로

(i) $0 \le x < \frac{1}{2}$일 때

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-x\right)(2-4x)+\frac{1}{2}x\left\{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\right\}$$
$$=\frac{17}{8}x^2-2x+\frac{1}{2}$$

(ii) $\frac{1}{2} \le x \le 2$일 때

$$F(x)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\right\}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}$$

ㄱ. $F(0)=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $0 \le x < \frac{1}{2}$일 때 $F(x)=\frac{17}{8}x^2-2x+\frac{1}{2}$에서 대칭축 $x=\frac{8}{17}<\frac{1}{2}$이므로 $x=\frac{8}{17}$에서 최솟값 $\frac{1}{34}$을 갖는다.

한편, $\frac{1}{2} \le x \le 2$일 때

$F(x)=\frac{1}{8}x-\frac{1}{32} \ge \frac{1}{32} > \frac{1}{34}$이다.

따라서 $F(x)$는 $x=\frac{8}{17}$에서 최솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $0 \le x < \frac{1}{2}$일 때 $F(x)$는 $x=0$에서 최댓값 $\frac{1}{2}$을 갖고, $\frac{1}{2} \le x \le 2$일 때 $F(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $\frac{7}{32}$을 가지므로 $F(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ이다.

1. 정답 101

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=1$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=1+10^2=101$

2. **답 ②**

모집단의 평균을 m, 분산을 σ^2이라 하면

$m=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}=2$

$\sigma^2=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}-2^2=\frac{6}{5}$

$\therefore\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{6}{5}}{25}=\frac{6}{125}$

3. 정답 37

$E(\overline{X})=E(X)=21$이므로

$E(X)=10\cdot a+20\cdot\frac{1}{2}+30\cdot(\frac{1}{2}-a)$

$=25-20a=21$

$\therefore a=\frac{1}{5}$

크기가 2인 표본을 복원추출할때 $\overline{X}=20$인 경우는 10과 30, 20과 30과 10을 추출하는 경우이므로

$P(\overline{X}=20)$

$=P(X=10)\cdot P(X=30)+P(X=20)\cdot P(X=20)$

$+P(X=30)\cdot(X=10)$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{37}{100}$

$\therefore 100\mathrm{P}(\overline{X}=20)=37$

4. 정답 ③

$\mathrm{E}(\overline{X})=500,\ \sigma(\overline{X})=\frac{30}{\sqrt{100}}=3$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(500,3^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(497\le\overline{X}\le 506)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{497-500}{3}\le Z\le\frac{506-500}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

5. 정답 ④

$\mathrm{E}(\overline{X})=75,\ \sigma(\overline{X})=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

따라서, 표본평균 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(75,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$\mathrm{P}(74\le\overline{X}\le 76)=\mathrm{P}\left(\frac{-1}{\frac{1}{2}}\le Z\le\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le 2)=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\ =0.9544$

6. 정답 ④ 수학 외적 문제 해결 능력 – 확률분포와 통계적 추정

K제품의 길이를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(30,5^2)$을 따르므로 X가 $39cm$ 이상일 확률은

$\mathrm{P}(X\ge 39)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{39-30}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.8)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.8)$

$=0.5-0.46=0.04$

따라서, 불량품의 개수를 Y라 하면 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(3750,\frac{4}{100}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=3750\times\frac{4}{100}=150$

$\mathrm{V}(Y)=3750\times\frac{4}{100}\times\frac{96}{100}=144$

3750은 충분히 큰 수이므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 12^2)$을 따른다. 따라서, 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y\ge 168)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{168-150}{12}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)$

$0.5-0.43=0.07$

7. 정답 ③

제품의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(30,5^2)$을 따르므로 크기가 4인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(30,\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

상품 상자 1개가 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 25)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{25-30}{\frac{5}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le -2)=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.02$

불량품의 개수를 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(2500,\ 0.02)$를 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=2500\times 0.02=50$

$\mathrm{V}(Y)=2500\times 0.02\times 0.98=49$

따라서 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ 7^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y\ge 57)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{57-50}{7}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.16$

8. 정답 ②

공용 자전거의 1회 이용 시간을 확률변수 X라고 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(60,10^2)$을 따른다.

따라서 25회 이용 시간의 평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\frac{10^2}{25}\right)$

즉, $\mathrm{N}(60,2^2)$을 따른다.

$\therefore\mathrm{P}(25\overline{X}\ge 1450)=\mathrm{P}(\overline{X}\ge 58)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{58-60}{2}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)$

$=0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.5+0.3413=0.8413$

9. 정답 25

비누의 무게 X가 정규분포 $\mathrm{N}(250,\ 20^2)$을 따르므로 크기 n인 표본평균의 분포는 정규분포 $\mathrm{N}\left(250,\ \frac{20^2}{n}\right)$을 따른다. 따라서

$\mathrm{P}(242\le\overline{X}\le 258)=\mathrm{P}\left(\frac{242-250}{20}\sqrt{n}\le Z\le\frac{258-250}{20}\sqrt{n}\right)$

에서 $\frac{8}{20}\sqrt{n}\le 2\quad\therefore\ n\le 25$이므로 최댓값은 25이다.

10. 정답 ③

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(3,\ \frac{3^2}{n}\right)$을 따르므로 임의의 양수 a에 대하여

$\mathrm{P}(0\le\overline{X}\le a)=\mathrm{P}\left(\frac{-3}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{a-3}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)$ …… ㉠

한편, 주어진 조건에 의해

$\mathrm{P}(0\le\overline{X}\le a)=\mathrm{P}(0\le X+3\le a)$

$=\mathrm{P}(-3\le Z\le a-3)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 등식

$\mathrm{P}\left(\frac{-3}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{a-3}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right)=\mathrm{P}(-3\le Z\le a-3)$

이 임의의 양수 a에 대하여 성립하므로 특히 $a=3$ 일 때

$\mathrm{P}\left(\dfrac{-3}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \le Z \le 0\right) = \mathrm{P}(-3 \le Z \le 0)$이 성립한다.

$\therefore \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 1 \qquad \therefore n = 9$

11. 정답 ①

표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차는 각각

$\mathrm{E}(\overline{X}) = 80,\ \sigma(\overline{X}) = \dfrac{6}{\sqrt{9}} = 2$

이고 모집단의 정규분포를 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(80, 2^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(9\overline{X} \le 684) = \mathrm{P}(\overline{X} \le 76) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{76-80}{2}\right)$

$\mathrm{P}(Z \le -2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

12. 정답 144

$\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\dfrac{8}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(|\overline{X}-100| \le 1.2) = \mathrm{P}(-1.2 \le \overline{X}-100 \le 1.2)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{-1.2}{\frac{8}{\sqrt{n}}} \le \dfrac{\overline{X}-100}{\frac{8}{\sqrt{n}}} \le \dfrac{1.2}{\frac{8}{\sqrt{n}}}\right)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{-3\sqrt{n}}{20} \le Z \le \dfrac{3\sqrt{n}}{20}\right)$

$= 2\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{3\sqrt{n}}{20}\right) = 0.9282$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{3\sqrt{n}}{20}\right) = 0.4641$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.8) = 0.4641$에서 $\dfrac{3\sqrt{n}}{20} = 1.8 \qquad \therefore n = 144$

13. 정답 ②

이 회사의 버스 중 임의로 선택한 버스 1대가 서울에서 청주까지 운행하는 데 걸리는 시간을 확률변수 X(분)라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 5^2)$을 따른다. 따라서 이 회사의 고속버스 중 임의로 선택한 4대의 버스가 서울에서 청주까지 운행하는 데 걸린 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(98 \le \overline{X} \le 103)$

$= \mathrm{P}\left\{\dfrac{98-100}{\frac{5}{2}} \le \dfrac{\overline{X}-100}{\frac{5}{2}} \le \dfrac{103-100}{\frac{5}{2}}\right)$

$= \mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{5} \le Z \le \dfrac{6}{5}\right) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{4}{5}\right) + \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{6}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.2)$

$= 0.288 + 0.385 = 0.673$

14. 정답 ⑤

표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \dfrac{20^2}{n}\right)$을 따르므로 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2 \times 1.96 \times \dfrac{20}{\sqrt{n}} = 355.92 - 348.08 = 7.84$

$\therefore n = 100$

$\overline{X} + 1.96 \times \dfrac{20}{\sqrt{100}} = 355.92$

$\therefore \overline{X} = 352 \qquad \therefore n + \overline{X} = 452$

15. 정답 ①

모평균을 m, 모표준편차를 σ라 할 때, $= 25$이므로 신뢰도 95%인 신뢰구간은

$64 - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{25}} \le m \le 64 + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{25}} \Leftrightarrow$

$60.08 \le m \le 67.92$

$1.96 \times \dfrac{\sigma}{5} = 3.92$에서 $\sigma = 10$

따라서 구하는 신뢰도 99%의 신뢰구간에서

$\beta - \alpha = 2 \times 2.58 \times \dfrac{10}{5} = 10.32$

16. 정답 ①

이 학교 3학년 학생의 50m 달리기 기록을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(8.5,\ 1.2^2)$을 따른다.

이때, 3학년 학생 중 4명을 임의추출하여 얻은 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(8.5,\ \left(\dfrac{1.2}{\sqrt{4}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(\overline{X} \le 7.3) = \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{7.3-8.5}{0.6}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le -2) = \mathrm{P}(Z \ge 2)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

17. 정답 ③

확률변수 X가 $\mathrm{N}(200, 20^2)$을 따르므로 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(200, \left(\dfrac{20}{\sqrt{100}}\right)^2\right)$,

즉 $\mathrm{N}(200, 20^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(198 \le \overline{X} \le 204)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{198-200}{2} \le Z \le \dfrac{204-200}{2}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

18. 정답 ⑤

$2\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = 1 + \mathrm{P}(-b \le Z \le b)$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{P}(\overline{X} \ge a) = 1 + 2\mathrm{P}(0 \le Z \le b)$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{P}(\overline{X} \geq a) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq b)$

$\Leftrightarrow \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{a-50}{\dfrac{4}{2}}\right) = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq b)$

$\Leftrightarrow -\dfrac{a-50}{2} = b$

$\therefore a + 2b = 50$

19. 답 99

수학능력시험의 수리 영역 가형을 치른 학생들의 표준점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 10^2)$을 따른다. 이 중 임의로 선택한 100명의 표준점수의 평균을 확률변수 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(X) = 100,\ \sigma(\overline{X}) = \dfrac{10}{\sqrt{100}} = 1$

따라서 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 1^2)$을 따르고 $\overline{X}$가 a점 이상 102점 이하일 확률이 0.82이므로 $a < 100$이다.

$\mathrm{P}(a \leq \overline{X} \leq 102)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{a-100}{1} \leq Z \leq \dfrac{102-100}{1}\right)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 100-a) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 100-a) + 0.48 = 0.82$

$\therefore\ \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 100-a) = 0.34$

$100 - a = 1 \qquad \therefore\ a = 99$

20. 정답 ②

토마토 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포

$\mathrm{N}\left(240,\ \left(\dfrac{40}{5}\right)^2\right)$

을 따른다. 따라서 토마토 한 상자의 무게의 분포는 $25\overline{X}$의 확률분포와 같으므로 $Y = 25\overline{X}$라고 하면

$\mathrm{E}(25\overline{X}) = 25\mathrm{E}(\overline{X}) = 6000,$

$\sigma(25\overline{X}) = 25\sigma(\overline{X}) = 200$

이므로 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(6000,\ 200^2)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(Y \geq 6400) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{6400-6000}{200}\right)$

$= P(Z \geq 2)$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) = 0.0228$

21. 정답 ⑤

ㄱ. $\mathrm{P}(X \geq 55) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{55-50}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{5}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Y \leq 50) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{55-50}{\dfrac{9}{10}\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{-50}{9\sigma}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \dfrac{50}{9\sigma}\right)$에서

$\dfrac{5}{\sigma} < \dfrac{50}{9\sigma}$이므로

$\mathrm{P}(X \geq 55) = \mathrm{P}(Y \leq 50)$ $\therefore$ 거짓

ㄴ. $\mathrm{P}(X \leq 60) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{60-50}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{10}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(Y \leq 63) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{63-55}{\dfrac{9}{10}\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{80}{9\sigma}\right)$

이때 $\dfrac{10}{\sigma} > \dfrac{80}{9\sigma}$이므로

$\mathrm{P}(X \leq 60) > \mathrm{P}(Y \leq 63)$

따라서 수리영역에서의 60점이 언어영역에서의 63점보다 백분위
가 높다. $\therefore$ 참

ㄷ. 수리영역에서의 100명의 평균점수를 $\overline{X}$는 $\mathrm{N}\left(50,\ \dfrac{\sigma^2}{100}\right)$을 따르고 언어영역에서의 81명의 평균점수 $\overline{Y}$는 $\mathrm{N}\left(55,\ \dfrac{\sigma^2}{100}\right)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X} \leq 55) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{55-50}{\dfrac{\sigma}{10}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{50}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(\overline{Y} \leq 59) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{59-55}{\dfrac{\sigma}{10}}\right) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{40}{\sigma}\right)$

$\dfrac{50}{\sigma} > \dfrac{40}{\sigma}$이므로 $\mathrm{P}(\overline{X} \leq 55) > \mathrm{P}(\overline{Y} \leq 59)$이다. $\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

22. 정답 ③

초콜릿의 무게는 정규분포 $N(170, 4^2)$을 따르므로 임의로 추출한 64개에 대한 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(170, \left(\dfrac{4}{\sqrt{64}}\right)^2\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(170, \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore\ \therefore \mathrm{P}(169.2 \leq \overline{X} \leq k)$

$= \mathrm{P}\left(\dfrac{169.2-170}{\dfrac{1}{2}} \leq Z \leq \dfrac{k-170}{\dfrac{1}{2}}\right)$

$= \mathrm{P}(-1.6 \leq Z \leq 2(k-170))$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.6) + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2(k-170))$

$= 0.4452 + P(0 \leq Z \leq 2(k-170))$

이때 $0.4452 + \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2(k-170)) = 0.9370$에서

$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2(k-170)) = 0.4918$

$2(k-170) = 2.4 \ \therefore\ k = 171.2$

23. 정답 ④

[출제 의도] 모평균에 대한 신뢰구간의 길이 구하기

$\mathrm{P}(-z \leq Z \leq z) = 0.796$인 z의 값은 1.27이므로

$l = 2 \times 1.27 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

따라서, 신뢰구간의 길이가 $2l$이면

$2l = 2 \times 2.54 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2{,}54 \leq Z \leq 2.54) = 2\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.45)$

$= 2 \times 0.4945 = 0.989$

$\therefore\ \sigma=98.9$

24. 정답 ③

$b-a=2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$ 이므로

$10n<10^{\frac{2}{b-a}}$ 에서 $10n<10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

양변에 상용로그를 취하면 $\log 10n<\log 10^{\frac{\sqrt{n}}{9.8}}$

$1+\log n<\frac{\sqrt{n}}{9.8}$, $9.8<\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}$

따라서 $n=1700$일 때 $\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}=9.75$

$n=1800$일 때 $\frac{\sqrt{n}}{1+\log n}=9.97$

이므로 n의 최솟값은 1800이다.

25. 정답 ③

[출제의도] 확률변수에 따른 확률분포 추론하기

확률변수 X가 정규분포 $N(60,\ 5^2)$ 을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(60,\ 0.1^2)$을 따른다. 또한, 불량품으로 판정될 확률은

$P(X\le 50)=P(Z\le -2)=0.02$

이므로 확률변수 Y는 이항분포 $B(2500,\ 0.02)$를 따르고, 근사적으로 정규분포 $N(50,\ 7^2)$을 따른다.

ㄱ. $P(\overline{X}\ge 60)=\frac{1}{2}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $P(Y\ge 57)=P(Z\ge 1)=0.16$

$P(\overline{X}\le 59.9)=P(Z\le -1)=0.16$ $\therefore$ 참

ㄷ.

$P(60-k\le X\le 60+k)=P\left(-\frac{k}{5}\le Z\le\frac{k}{5}\right)$

$P(60-k\le \overline{X}\le 60+k)=P\left(-\frac{k}{0.1}\le Z\le\frac{k}{0.1}\right)$

$P(60-k\le X\le 60+k)<P(60-k\le\overline{X}\le 60+k)$

$\therefore$ 거짓

26. 정답 ①

$E(X)=-2\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}=0$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=(-2)^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{6}}{8}$

27. 정답 ③

한 학생의 학교 도착 시각을 확률변수 T라 하면 수업에 지각할 확률은

$P(T\ge 8\text{시})=P\left(Z\ge\frac{8\text{시}-7\text{시 }40\text{분}}{8\text{분}}\right)$

$=P(Z\ge 2.5)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2.5)$

$=0.5-0.49=0.01$

1600명 중 지각하는 학생의 수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포$B(1600,\ 0.01)$을 따르므로

$n=E(Y)=1600\times0.01=16$(명)

한편, 한 학생의 아침 통학 소요 시간을 확률변수 X, 16명의 아침 통학 소요 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 크기가 16인 표본평균과 같다. 따라서 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30,\ \frac{10^2}{16}\right)$, 즉 $N(30,\ 2.5^2)$을 따른다.

$\therefore p=P(\overline{X}\ge 35)=P\left(Z\ge\frac{35-30}{2.5}\right)$

$=P(Z\ge 2)=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.48=0.02$

$\therefore\ \frac{n}{p}=\frac{16}{0.02}=800$

28. 정답 64

모집단의 표준편차를 σ라 하면

혜진 : $2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=52.245-51.755=0.49$

동연 : $2\times2.58\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=54.58-49.42=5.16$

$\sqrt{n_1}=\frac{2\times1.96\sigma}{0.49}=8\sigma,\ \sqrt{n_2}=\frac{2\times2.58\sigma}{5.16}=\sigma$

$\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}}=\frac{8\sigma}{\sigma}=8$ $\therefore\ \frac{n_1}{n_2}=64$

29. 정답 0.3413

표본에 있는 100명의 주민 중에서 과체중인 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $P(0.1\le\hat{p}\le 0.13)$이다.

여기서 모비율 $p=0.1$이고 $n=100$은 충분히 크므로 $\hat{p}$은 정규분포 $N\left(0.1,\ \frac{9}{10000}\right)$에 가까워 진다.

따라서 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{0.03}$은

표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore P(0.1\le\hat{p}\le 0.13)=P\left(\frac{0.1-0.1}{0.03}\le Z\le\frac{0.13-0.1}{0.03}\right)$

$=P(0\le Z\le 1)=0.3413$

30. 정답 ②

이 지역에 거주하는 사람 100명 중 자전거를 가지고 있는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 구하는 확률은

$P(0.16\le\hat{p}\le 0.26)$이다.

이때, 모비율은 $p=0.2$이고, $\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}=0.04$이므로 $\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.04^2)$에 가까워진다.
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(0.16\le\hat{p}\le0.26)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{0.16-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.26-0.2}{0.04}\right)$
$=\mathrm{P}(-1\le Z\le1.5)$
$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$
$=0.3413+0.4332=0.7745$

31. 정답 ③
100명의 사람 중에 자동차를 보유한 사람의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}\left(\hat{p}\le\frac{9}{100}\right)$이다.
이때 모비율은 $p=\frac{10}{100}$이고 $np=100\times\frac{10}{100}=10$
$nq=100\times\frac{90}{100}=90$은 모두 5보다 크므로
$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.1}{\frac{3}{100}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.
$\therefore\mathrm{P}(\hat{p}\le0.09)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.09-0.1}{0.03}\right)$
$=\mathrm{P}(Z\le-0.33)$
$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le0.33)$
$=0.5-0.1293=0.3707$

32. ①
표본비율은 $\hat{p}=\frac{8}{400}=0.02$이고 $n\hat{p}\ge5,\ n(1-\hat{p})\ge5$이므로 표본비율 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다. 모비율 p를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간이 $\alpha\le p\le\beta$이므로
$\beta-\alpha=2\cdot2\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{400}}=0.028$

33. 정답 [0.7216, 0.8784]
$n=100,\ \hat{p}=0.8$ 이므로 모비율 p를 신뢰도 95%로 추정하면
$0.8-1.96\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{100}}\le p\le0.8+1.96\sqrt{\frac{0.8(1-08)}{100}}$
$\therefore0.7216\le p\le0.8784$

34. 정답 [0.499, 0.561]
$n=1000,\ \hat{p}=\frac{530}{1000}=0.53$ 이므로
모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은
$0.53-1.96\sqrt{\frac{0.53\times0.47}{1000}}\le p\le0.53+1.96\sqrt{\frac{0.53\times0.47}{1000}}$
$\therefore0.499\le p\le0.561$

35. 정답 588
[출제의도] 표본비율로부터 모비율을 추정할 수 있는가를 묻는 문제이다.
표본비율은 $\hat{p}=\frac{100}{1000}=0.1$이고 표본비율 $\hat{p}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{0.1\times0.9}{1000}\right)$을 따른다.
따라서 표본의 크기가 n일 때, 모비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\left[\hat{p}-19.6\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}},\ \hat{p}+19.6\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}\right]$에서
$b-a=2\times19.6\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}$ 이다.
따라서 $2\times19.6\sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{p}}{n}}\le0.002$에서
$\sqrt{n}\ge588$이므로 $\sqrt{p}=588$이다.

36. 정답 385
표본의 크기 n에 대하여
$|\hat{p}-p|\le1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 이므로 $1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{n}}\le0.05$
$\frac{1.96\times0.5}{0.05}\le\sqrt{n}$
$\sqrt{n}\ge19.6\qquad\therefore n\ge384.16$
따라서 구하는 n의 최솟값은 385이다.

37. 정답 157
n이 충분히 큰 경우 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따른다.
$\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p|\le2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)=0.9544$이므로
$\therefore\ \frac{2}{\sqrt{n}}=0.16,\ \ \sqrt{n}=\frac{2}{0.16}=\frac{25}{2}$
$n=\frac{625}{4}=156.\times\times\times$
따라서 n은 157 이상이어야 한다.
[다른 풀이]
$|\hat{p}-p|\le0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$에서
$\hat{p}-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\le p\le\hat{p}+0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$ 이므로
$\mathrm{P}\left(\hat{p}-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\le p\le\hat{p}+0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}\right)$
$=\mathrm{P}\left(\frac{-0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}}\right)$
$\ge0.9544=2\times0.4772$
따라서 $\frac{0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}}\ge2,\ \ 0.16\sqrt{n}\ge2$
$\sqrt{n}\ge\frac{25}{2},\ \ n\ge156.25$

따라서 n의 최솟값은 157이다.

38. 정답 ④

[출제의도] 신뢰구간의 길이를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\hat{p}=0.2$이므로 $2\times2\times\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}=2\times2\times\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}=0.08$

39. ①

300명 중에서 자신의 직업에 만족하고 있는 사람의 비율은 $\hat{p}=\frac{75}{300}=0.25$이고 $\hat{p}$의 분포는 근사적으로 정규분포를 따른다.

$0.25-1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le0.25+1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}$

$0.201\le p\le0.299$

따라서, 구하는 신뢰구간은 $[0.201,\ 0.299]$이다.

40. 정답 ④

표본평균 $\hat{p}=\frac{360}{600}=0.6$이고 $n=600$이므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.6-2\sqrt{\frac{0.6\cdot0.4}{600}}\le p\le0.6+2\sqrt{\frac{0.6\cdot0.4}{600}}$

$0.6-0.04\le p\le0.6+0.04$

$\therefore\ 0.56\le p\le0.64$

41. 정답 ④

모비율은 $p=0.2$이고

$np=1600\times0.2=320,\ nq=1600\times0.8=1280$

은 모두 5보다 크므로

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{1600}}}=100(\hat{p}-0.2)$

에서

$\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{a}{100}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge100\left(\frac{a}{100}-0.2\right)\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge a-20)=0.9772$

따라서 $\mathrm{P}(0\le Z\le20-a)=0.4772$이므로 $20-a=2$

$\therefore\ a=18$

[다른 풀이]

자격증을 가진 사람의 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(1600,\ \frac{1}{5}\right)$를 따른다.

구하는 확률은 $X\ge16a$일 확률이다.

1600은 충분히 큰 수이므로 X는 정규분포 $\mathrm{N}(320,\ 16^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\ge16a)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{16a-320}{16}\right)=\mathrm{P}(Z\ge a-20)=0.9772$

$\mathrm{P}9a-20\le Z\le0)=0.4772$이므로 $a-20=-2$

$\therefore\ a=18$

42. 정답 ⑤

300명 중 인터넷 강의와 학원 강의를 수강하는 사건을 각각 $A,\ B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.55,\ \mathrm{P}(B)=-.36,\ \mathrm{P}(A\cap B)=0.16$

이므로 인터넷 강의 또는 학원 강의를 수강할 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.55+0.36-0.16=0.75$

이때 표본비율 $\hat{p}=0.75$이므로 모비율 p를 95%로 추정하면

$0.75-1.96\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}\le p\le0.75+1.96\sqrt{\frac{0.75(1-0.75)}{300}}$

$0.75-1.96\times0.025\le p\le0.75+1.96\times0.025$

$\therefore\ 0.701\le p\le0.799$

43. **답** 775

이 변에 걸린 환자 300명 중에서 병이 완치될 환자의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 표본비율 $\hat{p}$은 정규분포

$\mathrm{N}\left(0.75,\ \frac{0.75\times0.25}{300}\right)\approx\mathrm{N}(0.75,\ (0.025)^2)$에 가까워진다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{\alpha}{100}\right)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{\frac{\alpha}{100}-0.75}{0.025}\right)$

$=0.1587=0.5-0.3413=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$\frac{\frac{\alpha}{100}-0.75}{0.025}=1,\ \frac{\alpha}{100}=0.775$

따라서 $\alpha=77.5$이므로 $10\alpha=775$

44. 답 ②

모비율 $p=0.02$, 표본의 개수 $n=40000$, 표본비율 $\hat{p}=0.0193$이므로 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.02}{\sqrt{\frac{0.02\times0.98}{40000}}}=\frac{\hat{p}-0.02}{0.007}$는 표준정규분포

$\mathrm{N}(0,\ 1)$에 가까워진다.

$\mathrm{P}(\hat{p}\le0.0193)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{0.0193-0.02}{0.007}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-1)=0.5-0.3413=0.1587$

45. 정답 ②

모비율을 p, 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$np=100\times\frac{20}{100}=20>5,\ nq=100\times\frac{80}{100}=80>5$이므로

$$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}}=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$$

는 정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{28}{100}\right)=\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.28)$

$=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{0.28-0.2}{0.04}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \geq 2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)=0.0228$

46. 정답 ⑤

400개의 MP3제품 중에 불량품의 비율을 $\hat{p}$이라고 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}\left(\hat{p} \leq \frac{15}{400}\right)=\mathrm{P}(\hat{p} \leq 0.0375)$

이때 모비율은 0.02이고

$np=400\times 0.02=8$, $nq=400\times 0.98=392$는 모두 5보다 크므로

$Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}=\frac{\hat{p}-0.02}{\sqrt{\frac{0.02\times 0.98}{400}}}=\frac{\hat{p}-0.02}{\frac{7}{1000}}$

는 표준정규분포 N(0, 1)을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(\hat{p} \leq 0.0375)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{0.0375-0.02}{\frac{7}{1000}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq 2.5)$

$=0.5+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5)$

$=0.5+0.4938=0.9938$

47. 정답 ③

600개 중 360개가 발아하였으므로 표본비율을 구하면

$\hat{p}=\frac{360}{600}=\frac{6}{10}$

모비율을 신뢰도 99%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이는

$2\times 3\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 이다.

그런데 신뢰구간의 길이를 0.06 이하로 만들려고 하므로

$2\times 3\times\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.06$

$\sqrt{\frac{6}{10}\left(1-\frac{6}{10}\right)} \leq 0.01roo$수

$100\sqrt{\frac{24}{100}} \leq \sqrt{n}$, $\sqrt{2400} \leq roo$수

$\therefore n \geq 2400$

따라서 n의 최솟값은 2400이다.

48. 답 ③

A후보의 지지율을 p_{A}라 할 때, 표본비율이 $\widehat{p_{\mathrm{A}}}=\frac{20}{100}=0.2$이므로 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.2-2\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{100}} \leq p_{\mathrm{A}} \leq 0.2+2\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{100}}$

$\therefore [a,\ b]=[0.12,\ 0.28]$

B후보의 지지율을 p_{B}라 할 때, 표본비율이 $\widehat{p_{\mathrm{B}}}=\frac{10}{100}=0.1$이므로 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$0.1-2\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{100}} \leq p_{\mathrm{A}} \leq 0.1+2\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{100}}$

$\therefore [a,\ b]=[0.04,\ 0.16]$

ㄱ. $b-a=0.28-0.12=0.16$ (참)

ㄴ. $d-c=0.16-0.04=0.12$ $\quad\therefore d-c>b-a$ (거짓)

ㄷ. $[0.12,\ 0.28]\cap[0.04,\ 0.16]\neq\phi$이므로 두 신뢰구간에 모두 속하 는 실수가 존재한다.

49. **정답** 3458

구하는 표본의 크기를 n이라고 하면 표본비율이

$\hat{p}=\frac{10}{100}=0.1$이고, 95%의 신뢰도에서

$|\hat{p}-p| \leq 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 이므로

$1.96\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}} \leq 0.01$

$\frac{1.96\times 0.3}{0.01} \leq \sqrt{n}$, $\quad \sqrt{n} \geq 58.8$

$\therefore n \geq 3457.44$

따라서 최소 3458명 이상을 뽑아야 한다.