1. 2008 인천 (2점)

분수방정식 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=2$ 의 모든 근의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2. 2009 평가원(2점)

$\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$의 모든 실근의 합은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

3. 2006 교육청(3점)

분수방정식 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}=\frac{3}{2}$의 모든 근의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

4. 2005 평가원(3점)

방정식 $\frac{\sqrt{x-2}}{3}=\frac{9}{x-2}$의 해를 구하시오.

5. 2005 교육청(3점)

분수방정식 $\frac{x+1}{x^2}+\frac{x^2}{x+1}=\frac{5}{2}$의 모든 근의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

6. 2006 교육청(3점)

분수방정식 $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{x+2}=\frac{2x+5}{x^2+x-2}$ 의 모든 근의 곱은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

7. 2009 교육청(3점)

분수방정식 $\frac{k}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+1=0$ 이 단 하나의 실근 α 를 가질 때, $k+\alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

8. 2010 평가원(3점)

분수방정식 $\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{ax+5}{x^2-1}$가 오직 하나의 실근을 갖도록 하는 모든 상수의 a의 값의 곱은?

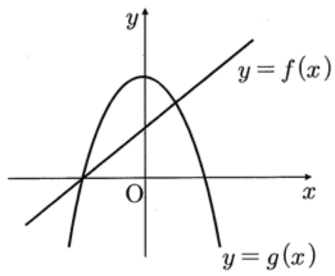
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

9. 2004 교육청(3점)

x에 대한 분수방정식 $\dfrac{b}{x^2-a^2}-\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x-a}$가 근을 갖지 않을 때, $\dfrac{b}{a}$의 값을 구하시오. (단, $ab>0$)

10. 2004 교육청(3점)

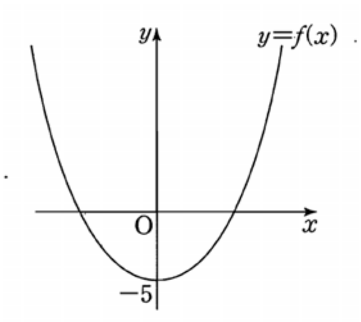
일차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 분수방정식 $\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{2g(x)}{f(x)}=1$의 실근의 개수는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 0

11. 2010 평가원(3점)

꼭짓점의 좌표가 $(0,-5)$인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.
방정식 $|f(x)|-2=\sqrt{4-f(x)}$의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 ② 2
③ 3 ④ 4
⑤ 5

12. 2008 평가원(3점)

어느 회사는 A, B 두 공장에서 자동차를 생산하고 있다.
자동차 50대를 생산하는 경우에 A공장과 B공장을 동시에 가동하여 생산하면 6시간이 걸리고, B공장만 가동하여 생산할 때는 A공장만 가동할 때보다 5시간 더 걸린다고 한다.
A공장만 가동하여 자동차 50대를 생산하는 데 x시간 걸린다.
x의 값을 구하시오.

13. 2005 평가원(3점)

갑은 집에서 10km 떨어져 있는 친구의 집을 자전거를 타고 같은 길로 왕복하였다. 갈 때의 속력은 시속 $a$km였고, 돌아올 때는 갈 때보다 속력을 시속 2km 줄였더니 15분이 더 걸렸다고 한다. a의 값을 구하시오.

14. 2009 교육청(3점)

흐르지 않는 물 위에서 배 A의 최대 속력은 배 B의 최대 속력의 2배이다. 시속 $2km/h$로 일정하게 흐르는 강의 상류를 향해 A, B가 같은 지점에서 최대 속력으로 동시에 출발하였다. B가 $20km$ 운항 후 고장이 나서 그 순간부터 B는 강물의 빠르기로 하류를 향해 표류하기 시작하였고, 동시에 A는 B를 구조하기 위해 선회해서 B를 향해 운항하였다. A가 선회 후 1시간 만에 B를 만났다면, 흐르지 않는 물 위에서 배 A, B의 최대 속력(km/h)의 합을 구하시오.
(단, A의 선회 시간과 배의 크기는 고려하지 않는다.)

15. 2009 교육청(3점)

P 씨의 집은 회사에서 30km 떨어져 있는데, 회사로 출근할 때는 승용차를 운전하여 자동차 전용도로 24km, 일반도로 6km를 달린다고 한다. 다음은 P 씨가 출근할 때의 속력과 시간에 대한 설명이다.

> (가) 평일에 출근할 때 자동차 전용도로에서의 속력은 일반도로에서의 속력의 2 배이다.
> (나) 토요일에 출근할 때 자동차 전용도로에서의 속력은 평일 자동차 전용도로에서의 속력보다 20(km/시)가 빠르고, 일반도로에서의 속력은 평일 일반도로에서의 속력보다 10(km/시)가 빠르다.
> (다) 토요일에 출근할 때는 평일보다 9 분 빨리 회사에 도착한다.

P 씨가 평일에 출근할 때 일반도로에서의 속력은 a(km/시)이다. a 의 값을 구하시오.

16. 2006 평가원(3점)

어느 양어장에서 빈 수조에 물을 급수하여 가득 채우는 데 45분이 걸린다. 어느 날 오후 1시부터 수조에 가득 찬 물을 빼내기 시작하여 수조의 물의 양이 수조 전체 용량의 $\frac{1}{2}$이 되었을 때, 계속하여 물을 빼내면서 동시에 급수를 시작하였더니 같은 날 오후 2시 30분에 물이 다시 가득 찼다. 수조에 급수는 하지 않고 물을 빼내기만 한다면 가득 찬 물을 모두 빼낼 때까지 걸리는 시간은? (단, 단위 시간당 급수하는 물의 양은 일정하고 빼내는 물의 양도 일정하다.)

① 45분 ② 1시간 ③ 1시간 15분
④ 1시간 30 ⑤ 1시간 45분

17. 2005 평가원(3점)

다음은 어느 건물에 있는 세 사무실 A, B, C의 식수 소비량을 조사한 결과이다.

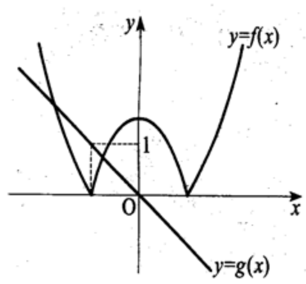
> (가) 사무실 A 의 하루 평균 식수 소비량은 사무실 C의 하루 평균 식수 소비량보다 $5L$ 많다.
> (나) 사무실 B의 하루 평균 식수 소비량은 사무실 C의 하루 평균 식수 소비량보다 $4L$ 적다.
> (다) 세 사무실에 같은 양의 식수를 공급하였을 때, 사무실 A, B, C에 공급된 식수가 모두 소비되는 데 걸리는 날의 수를 각각 a, b, c 라 하면 $a+c=b$ 이다.

사무실 C의 하루 평균 식수 소비량을 $x(L)$ 라 할 때, x 의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

18. 2005 평가원(4점)

이차함수 $y=h(x)$ 에 대하여 $f(x)=|h(x)|$ 이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 그림과 같이 주어져 있을 때, 방정식 $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{f(x)g(x)}$ 의 실근의 개수는? (단, 점선은 좌표축에 평행하다.)



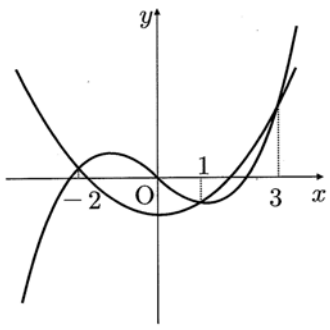
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

19. 2010 평가원(4점)

최고차항의 계수가 1인 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(7)=f(8)=1$일 때, 분수방정식 $\dfrac{1}{f(x)-1}-\dfrac{2}{\{f(x)\}^2-1}=\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 모든 실수 x의 곱을 구하시오.

20. 2004 평가원(4점)

오른쪽 그림은 원점에 대하여 대칭인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭인 이차함수 $y=g(x)$의 그래프이다.



방정식 $\dfrac{f(x)^2-g(x)^2}{x^2-1}=0$의 모든 근의 곱을 구하시오.

21. 2009 평가원(4점)

분수방정식 $\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{a}{x+a}=1$의 근에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

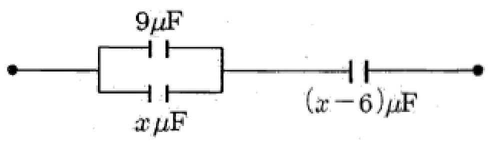
[보 기]

ㄱ. $a=0$일 때, 두 실근의 합은 -2이다.
ㄴ. $a=2$일 때, 세 실근을 갖는다.
ㄷ. 모든 실수 a에 대하여 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. 2008 교육청(4점)

전기용량이 각각 C_1, C_2인 축전기를 연결했을 때, 합성 전기용량의 크기를 C_p라 하자. 직렬 연결된 축전기들의 합성 전기용량은 $\dfrac{1}{C_p}=\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}$이고, 병렬 연결된 축전기들의 합성 전기용량은 $C_p=C_1+C_2$이다.
그림과 같이 세 개의 축전기를 연결한 합성 전기용량의 크기가 $10\mu F$가 되도록 하려고 할 때, x의 값을 구하시오. (단, 전기용량의 크기의 단위는 μF이다.)



23. 2004 교육청(4점)

120km떨어진 두 지점 A, B에 대하여, 어느 날 A지점부터 80km떨어진 지점까지는 일정한 속력으로 갔고, 이후에는 시속 20km를 감속하여 B지점에 도착하였더니 처음 일정한 속력으로 갔을 때의 시간보다 20분이 더 걸렸다. A지점부터 감속하기 시작한 지점까지의 자동차의 속력은 시속 몇 km인지 구하시오.

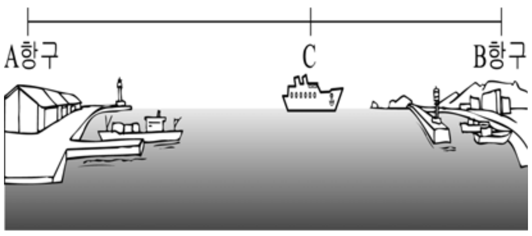
24. 2008 교육청(4점)

일렬로 국토 순례를 하는 순례단의 길이는 $2km$, 순례단의 속력은 $4km/h$이다. 그 순례단의 맨 앞에 있는 A가 일정한 속력으로 맨 뒤에 있는 사람에게 물건을 전달하고 다시 같은 속력으로 자기 자리로 돌아왔을 때 순례단은 $2km$를 전진한 상태였다. A의 속력(km/h)은?

① $4+\sqrt{2}$ ② $4+2\sqrt{2}$ ③ $4+3\sqrt{2}$
④ $4+4\sqrt{2}$ ⑤ $4+5\sqrt{2}$

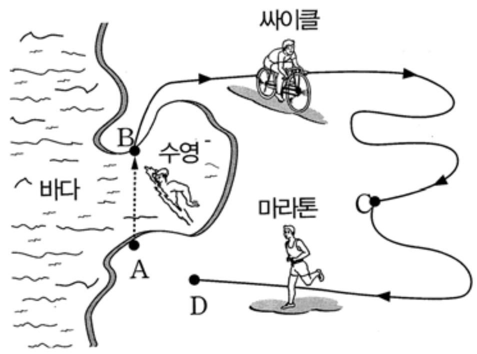
25. 2005 교육청(4점)

A 항구에서 $60km$ 운행하여 B 항구로 가는 모든 여객선의 속력은 $a(km/시)$로 일정하다. 오전 10 시에 A 항구를 출발한 어떤 여객선이 $40km$를 운행한 C지점에서 기관에 이상이 생겨 그 때부터 $10km/시$를 감속하여 일정한 속력으로 B 항구까지 운행하였더니, 같은 날 오전 11 시에 A 항구를 출발한 다른 여객선과 동시에 B 항구에 도착하였다. 이 때, a의 값을 구하시오.



26. 2004 교육청(4점)

다음은 어느 3종경기의 진행과정과 종목별 구간거리를 나타낸 것이다.



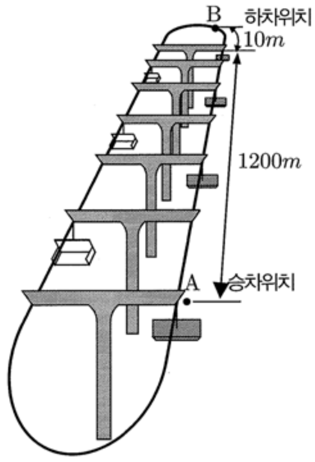
구간	종목	거리(km)
A→B	수영	1.5
B→C	싸이클	40
C→D	마라톤	10

어느 선수의 경기 출전 기록인 120분을 분석한 결과 싸이클에서의 평균속력이 수영에서의 평균속력보다 10배 빨랐고 마라톤에서의 평균속력은 수영에서의 평균속력보다 0.2km/분이 더 빠른 것으로 나타났다. 이 때, 싸이클에서의 평균속력은? (단, 도구와 장비의 교환시간은 무시한다.)

① $\frac{1}{4}$km/분 ② $\frac{1}{3}$km/분 ③ $\frac{1}{2}$km/분
④ $\frac{2}{3}$km/분 ⑤ $\frac{3}{4}$km/분

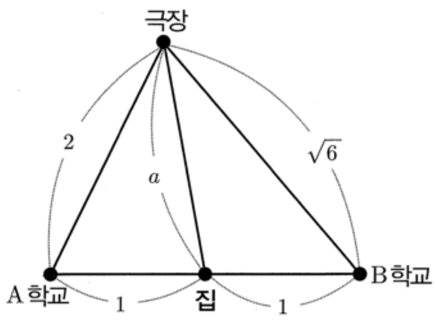
27. 2004 교육청(4점)

그림과 같이 어느 놀이공원의 리프트는 로프에 의자를 매달아 계속 순환하여 운행하는 시설이다. 직선 궤도의 시작 지점인 A에서 승차하여 길이가 1200m인 직선 궤도를 일정한 속력으로 지난 다음, 직선 궤도에서의 속력보다 2m/초 느린 속력으로 길이가 10m인 곡선 궤도를 지난 B지점에 내릴 때까지 6분 50초가 걸렸다. 이 때, 직선 궤도에서의 속력을 구하시오. (단, 속력의 단위는 m/초이다.)



28. 2006 교육청(4점)

A 학교에 다니는 갑과 B 학교에 다니는 을은 극장에서 만나 영화를 보기로 하였다. 두 학교 사이에 있는 을의 집은 학교로부터 거리가 각각 1km, 두 학교에서 극장까지 거리는 각각 2km, $\sqrt{6}$km이고 집에서 극장까지의 거리는 $a$km이다. 갑은 A 학교에서 극장으로 시속 $3km$로 곧장 걸어서 가고 동시에 을은 B학교에서 집까지는 일정한 속력으로 자전거를 타고 가고, 집에서 극장까지는 자전거보다 시속 2km 느린 속력으로 걸어서 갔다. 갑과 을이 동시에 극장에 도착하였을 때, 자전거의 속력은 시속 몇 km인가? (단, 두 학교와 집은 일직선상에 있다.)



① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$
④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

29. 2007 교육청(4점)

어떤 공장에서 두 기계 A, B를 사용하여 동일한 제품을 생산하고 있다. A는 B보다 1시간에 4개의 제품을 더 생산할 수 있고, A, B를 사용하여 각각 240개의 제품을 생산한 후 걸리는 시간을 비교하였더니 A가 16시간이 덜 걸렸다. A,B를 모두 사용하여 240개의 제품을 생산하는 데 걸리는 시간은?

① 12 ② 15 ③ 20
④ 24 ⑤ 30

30. 2004 교육청(4점)

어떤 고속 전철은 역을 출발하여 처음 10km구간과 다음 역에 도착하기 전 10km구간의 평균속력은 최고속력의 $\frac{1}{2}$배이고, 나머지 구간은 최고속력으로 일정하게 달린다고 한다. A, B두 역 중간에 C역을 새로 만들어 5분간 정차하면 A, B사이를 운행하는데 11분이 더 걸린다고 할 때, 이 고속 전철의 최고속력을 구하시오.
(단, 모든 역 사이의 거리는 50km이상이고, 속력의 단위는 km/시이다.)

31. 2008 교육청(2점)

무리방정식 $\sqrt{(x-2)(x+3)}=(x-3)\sqrt{x-2}$ 의 모든 실근의 합은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

32. 2006 교육청(2점)

방정식 $x+3\sqrt{x-1}=11$ 을 만족하는 x 의 값을 구하시오.

33. 2009 교육청(2점)

무리방정식 $\sqrt{2x-3}=x-3$의 실근을 α, 무연근을 β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0
④ 4 ⑤ 8

34. 2007 교육청(2점)

무리방정식 $x^2-x+\sqrt{x^2-x-2}=4$의 모든 실근의 곱은?

① -6 ② -3 ③ 3
④ 6 ⑤ 18

35. 2007 교육청(2점)

무리방정식 $x^4-x^2-\sqrt{x^4-x^2+2}=0$을 만족하는 모든 실근의 곱은?

① -2 ② -1
③ 1 ④ 2
⑤ 3

36. 2004 평가원(2점)

무리방정식 $x^2-2x+2-\sqrt{x^2-2x+4}=0$의 모든 실근의 합을 구하시오.

37. 2004 교육청(2점)

무리방정식 $x+3=\sqrt{6-x-x^2}$ 의 모든 근의 곱은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

38. 2004 교육청(3점)

방정식 $\sqrt{x}=x-3$의 근을 α, 방정식 $-\sqrt{x}=x-3$의 근을 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

39. 2010 평가원(3점)

무리방정식 $(\sqrt{x-1})^3-6\sqrt{x-1}=x-1$의 모든 실근의 합을 구하시오.

40. 2010 교육청(3점)

무리방정식 $\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}=x$의 해를 α라고 할 때, 16α의 값을 구하시오.

41. 2006 평가원(3점)

무리방정식 $x^2-12x+\sqrt{x^2-12x+3}=3$의 모든 실근의 합을 구하시오.

42. 2007 평가원(3점)

무리방정식 $x^2+5x+5\sqrt{x^2+5x}-6=0$의 모든 실근의 합은?

① 10 ② 5 ③ 0
④ -5 ⑤ -10

43. 2005 교육청(3점)

무리방정식 $x-\sqrt{x-3}=3$을 만족시키는 모든 근의 합을 구하시오.

44. 2006 교육청(3점)

x에 대한 무리방정식 $\sqrt{2a-x}+2-x=0$의 해가 존재하기 위한 a의 최솟값은?

① 1 　 ② 2 　 ③ 3
④ 4 　 ⑤ 5

45. 2005 교육청(3점)

무리방정식 $a+\sqrt{a-x}=2x-4$가 실근을 갖기 위한 상수 a의 최솟값은?

① 1 　 ② 2 　 ③ 3
④ 4 　 ⑤ 5

46. 2005 평가원(3점)

무리방정식 $\sqrt{2x-1}=2x+k$가 실근을 가질 때, k의 최댓값은?

① -2 　 ② $-\frac{3}{2}$ 　 ③ -1
④ $-\frac{3}{4}$ 　 ⑤ 0

47. 2010 평가원(3점)

무리방정식 $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+3}=3$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

48. 2007 교육청(3점)

무리방정식 $\sqrt{a-x^2}=x+1$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $0<a<\frac{1}{2}$일 때, 실근은 존재하지 않는다.
ㄴ. $\frac{1}{2}<a<2$일 때, 서로 다른 두 실근이 존재한다.
ㄷ. $2<a<10$일 때, 실근이 오직 하나만 존재한다.

① ㄱ 　 ② ㄴ 　 ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 2005 교육청(3점)

x에 대한 방정식 $a\sqrt{x}=x+b$의 실근의 개수에 대한 옳은 설명을 <보기>에서 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $a<0$, $b>0$이면 실근을 갖지 않는다.
ㄴ. $a>0$, $b<0$이면 한 개의 실근을 갖는다.
ㄷ. $a>0$, $b>0$이면 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ 　 ② ㄱ, ㄴ 　 ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ 　 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

50. 2004 교육청(3점)

곡선 $y=3-\sqrt{2-x}$와 직선 $y=-x-1$이 만나는 점을 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 할 때, $b-a$의 값을 구하시오.

51. 2009 교육청(3점)

방정식 $\sqrt{|x-1|}=x-k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는 $a<k<b$이다. $100a+b$의 값을 구하시오.

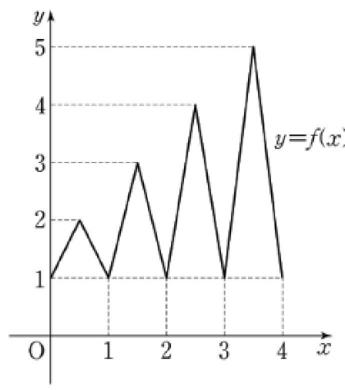
52. 2007 교육청(3점)

양수 a, b에 대하여 무리방정식 $x-b=-\sqrt{ax}$의 실근이 α, $x-b=\sqrt{ax}$의 실근이 β이고 $\alpha+\beta=10$일 때, $a+2b$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

53. 2009 평가원(3점)

구간 $[0, 4]$에서 정의된 연속함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



방정식 $\sqrt{f(x)-x}=2f(x)-2x-1$의 실근의 개수를 구하시오.

54. 2008 교육청(3점)

무리방정식 $\sqrt{1-x^2}=2x+a$가 실근을 가질 때, 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $-2\sqrt{5}$ ② $-\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{5}-2$
④ $\sqrt{5}-1$ ⑤ $\sqrt{5}+1$

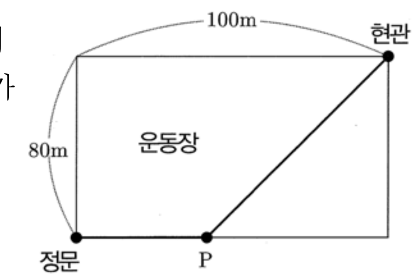
55. 2008 교육청(3점)

무리방정식 $\sqrt{4-x^2}=kx+3$이 실근을 가질 때, k값의 범위는?

① $k\leq-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $k\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$ ② $k\leq-\frac{3}{2}$, $k\geq\frac{3}{2}$
③ $-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}\leq k\leq\frac{3}{2}$

56. 2005 교육청(3점)

K고등학교의 운동장은 가로의 길이가 $100\,m$, 세로의 길이가 $80\,m$인 직사각형 모양이다. 어떤 학생이 학교 정문을 들어선 후 그림과 같이 운동장의 가장자리를 따라 $1m/\text{sec}$의 속력으로 걸어가다가 P지점에서부터는 $2m/\text{sec}$의 속력으로 운동장을 가로질러 현관을 향하여 직선으로 뛰어갔다. 이 학생이 정문에서 현관까지 가는 데 1분 30초 걸렸다면 정문에서 P지점까지의 거리는 ( )m이다.
( )안에 알맞은 수를 구하시오. (단, 정문과 현관은 직사각형의 꼭지점에 위치한다.)



57. 2004 교육청(4점)

무리방정식 $\sqrt{x+1}=|x-k|$의 두 실근의 곱이 음수일 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<0$ ② $-\frac{3}{4}<k<0$

③ $-\frac{3}{4}<k<1$ ④ $-1<k<\frac{3}{4}$

⑤ $-1<k<1$

58. 2004 교육청(4점)

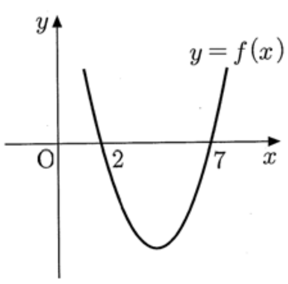
방정식 $\sqrt{x-[x]}=ax$ (a는 상수)가 오직 하나의 실근을 갖기 위한 a의 값의 범위가 $\alpha \leq a \leq \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

① $\frac{5}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{4}$

④ 2 ⑤ $\frac{9}{4}$

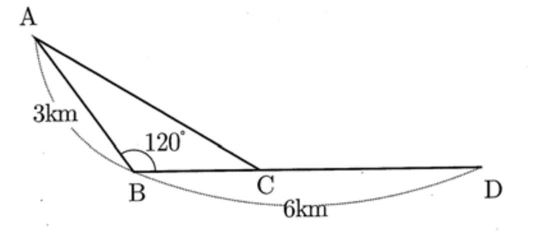
59. 2004 교육청(4점)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 무리방정식 $\sqrt{f(x)-2}=f(x)-4$ 의 실근의 합을 구하시오.



60. 2004 평가원(4점)

그림과 같은 $\angle ABC=120^\circ$, $\overline{AB}=3$km, $\overline{BD}=6$km인 산책로에는 다음과 같은 두 가지 코스가 있다.



[코스1] : A→B→C→D [코스2] : A→C→D

갑이 시속 3km의 일정한 속력으로 산책할 경우, [코스1]을 따라갈 때 소요되는 시간이 [코스2]를 따라가는 것보다 10분 더 걸린다고 한다. $\overline{BC}$의 길이는?

① $\frac{11}{8}$km ② $\frac{5}{4}$km ③ $\frac{9}{8}$km

④ 1km ⑤ $\frac{7}{8}$km

61. 2009 평가원(4점)

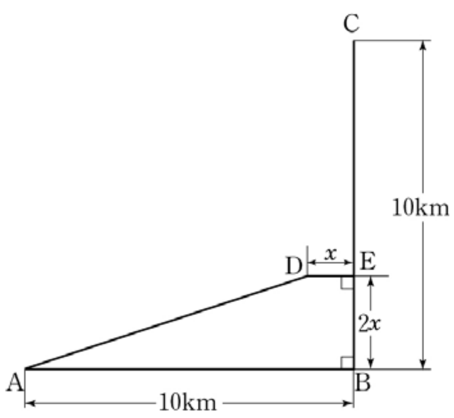
n이 자연수일 때, x에 대한 무리방정식 $\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$이 실수해를 갖도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

62. 2008 평가원(4점)

그림과 같이 A 지점과 B 지점 사이의 거리가 10km, B 지점과 C 지점 사이의 거리가 10km인 도로가 있고 영희와 철수는 다음과 같이 A 지점에서 C 지점까지 이동하였다.

> 영희는 A지점을 출발하여 D지점과 E지점을 거쳐 C지점까지 평균속력 6km/시로 이동하였다.
> 철수는 A지점을 출발하여 B지점까지는 평균속력 3km/시, B지점에서 C지점까지는 평균속력 6km/시로 이동하였다.

B 지점과 E 지점 사이의 거리는 $2x$(km)이고, D 지점과 E 지점 사이의 거리는 x(km)이다. 영희와 철수가 동시에 출발하여 영희가 철수보다 2시간 먼저 도착하였을 때, x의 값은?



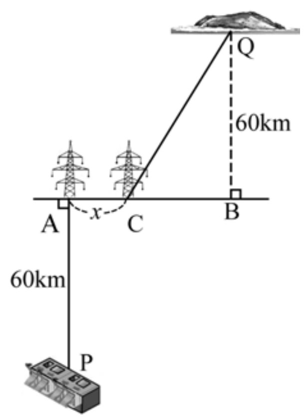
① $\frac{9-3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{9-3\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\frac{9-3\sqrt{6}}{2}$

63. 2007 교육청(3점)

x에 대한 삼차부등식 $(x-1)(x-3)(x-15)<0$을 만족하는 양의 정수해의 개수를 구하시오.

64. 2005 교육청(4점)

그림과 같이 육지의 발전소(P)와 섬(Q)가 해안가 A, B에서 각각 60 km씩 떨어져 있다. 발전소(P)에서 섬(Q)까지 전력을 공급하기 위하여 해안가의 A지점과 C지점에 중계소를 설치하여 전선으로 연결하려고 한다.
발전소에서 중계소(A)까지,
중계소(A)에서 중계소(C)까지,
중계소(C)에서 섬까지 각각 직선으로 연결하면 총 160km의 전선이 필요하다고 한다. 해안가의 두 지점 A, B사이의 거리는 70 km이고 세 지점 A, C, B가 일직선 위에 있다.두 중계소 사이의 거리를 $x$km라 할 때, x의 값을 구하시오.
(단, $\overline{AP}\perp\overline{AB}$, $\overline{AB}\perp\overline{BQ}$이고, C는A, B사이에 있다.)



65. 2009 교육청(3점)

부등식 $x^3-6x^2+3x+10\le 0$을 만족하는 자연수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

66. 2010 평가원(3점)

x에 대한 부등식 $x(x-a)(x-1)^2<0$을 만족시키는 자연수의 개수가 4일 때, 실수 a의 최댓값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

67. 2004 평가원(3점)

부등식 $x^4-5x^3+5x^2+5x-6\leq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

68. 2009 교육청(3점)

부등식 $x^4+(1-m)x^3-2x^2+3mx-2m>0$의 해가 '$x<-2$ 또는 $x>1$'가 되도록 하는 모든 정수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

69. 2006 평가원(3점)

삼차부등식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a<0$ 의 해가 $x<-1$일 때, a의 최솟값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

70. 2004 교육청(3점)

부등식 $x^4-x^3<x^2+2x$를 만족시키는 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $f(x)=-x^2+x+k$가 항상 양의 값을 갖도록 하는 실수 k의 범위는?

① $k>2$ ② $k\geq 2$ ③ $0<k<2$
④ $0\leq k<2$ ⑤ $0<k\leq 2$

71. 2008 평가원(3점)

양수 a에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} x(x+a)(x-2a)<0 \\ x^2+ax-2a^2\leq 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 정수 x가 4개일 때, 이 4개의 정수의 합은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

72. 2008 평가원(3점)

연립부등식 $\begin{cases} x^4-50x^2+49\leq 0 \\ \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-3}\geq 0 \end{cases}$ 를 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

73. 2005 교육청(3점)

연립부등식 $\begin{cases} (x+1)(x^2+x+1)\geq 0 \\ \dfrac{28}{x+2}\leq 9-x \end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

74. 2004 교육청(3점)

분수부등식 $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-5}+\frac{12}{x^2-6x+5}\leq -1$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

75. 2006 교육청(3점)

부등식 $\frac{3x+5}{x-1}\geq x$ 을 만족하는 자연수 x 값들의 합을 구하시오.

76. 2008 교육청(3점)

x에 대한 부등식 $\frac{(x-2)^3(x-10)^5}{|x-5|}<0$을 만족하는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

77. 2010 평가원(3점)

분수부등식 $x-4\leq\frac{20}{x-3}$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 구하시오.

78. 2010 교육청(3점)

분수부등식 $\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-2}\leq 0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

79. 2007 교육청(3점)

분수부등식 $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-1}>1$의 정수해의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개
④ 3개 ⑤ 4개

80. 2009 평가원(3점)

분수부등식 $\frac{3}{x+4}-\frac{1}{x-2}\geq 1$을 만족시키는 모든 정수 x의 합은?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

81. 2004 평가원(2점)

부등식 $\frac{x^2-x-56}{|x(x-2)|}\leq 0$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하시오.

82. 2005 교육청(3점)

부등식 $2x-1 \leqq \dfrac{5}{x-2}$ 의 해 중에서 $|x| \leqq 4$ 를 만족하는 모든 정수해의 곱을 구하시오.

83. 2007 평가원(3점)

두 상수 a, b에 대하여 부등식 $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-x+1}<0$의 해가 부등식 $\dfrac{1}{x-2b}<\dfrac{1}{x+2}$의 해와 같을 때, ab의 값은? (단, $a>0$이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

84. 2007 교육청(3점)

두 집합 $A=\{x\,|\,x^2-x-2<0\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}>0\right\}$ 에 대하여 $A \subset B$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

85. 2010 교육청(3점)

실수 a에 대하여 연립부등식

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-3} \geqq 0 \\ (x-a)(x^2-x+1)<0 \end{cases}$$

을 만족시키는 자연수 x가 3개일 때, a의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

86. 2005 평가원(3점)

임의의 자연수 a, b에 대하여 분수부등식 $\dfrac{x-a}{x-b} \leqq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 $n(a, b)$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. $n(a, a)=0$
ㄴ. $n(a, b)=n(b, a)$
ㄷ. $n(a, b)n(b, c)=n(a, c)$ (단, c는 자연수이다.)

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

87. 2008 교육청(3점)

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 $1<x<3$일 때, 분수부등식 $\dfrac{f(x-2)}{f(x+2)} \leqq 0$을 만족하는 정수 x의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

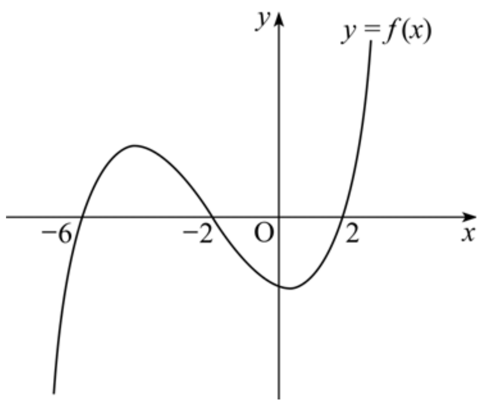
88. 2008 교육청(3점)

정수 a, b, c에 대하여 a는 양수이고 $abc=-12$일 때, 분수부등식 $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(x-a)} \leqq 0$을 만족하는 자연수 x의 최대 개수는?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

89. 2008 교육청(3점)

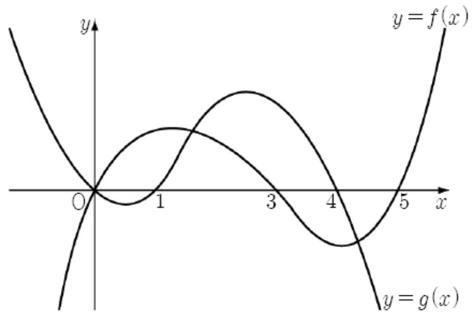
그림과 같이 삼차함수 $f(x)$의 그래프가 x축과 세 점 $(-6, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$에서 만날 때, 부등식 $\dfrac{f(x-2)}{x} \leqq 0$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?



① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

90. 2009 교육청(3점)

다음은 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프이다. 분수부등식 $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqq 0$을 만족하는 모든 정수 x의 값의 합은?



① 9 ② 10 ③ 11
④ 14 ⑤ 15

91. 2010 평가원(3점)

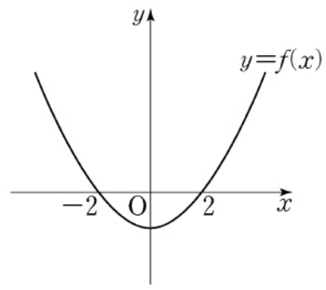
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 두 집합

$A=\left\{x \mid \dfrac{f(x+1)}{f(x-1)} \leq 1\right\}$,

$B=\{x \mid -5<x<5\}$

에 대하여 집합 $A \cap B$에 속하는 정수의 개수는?

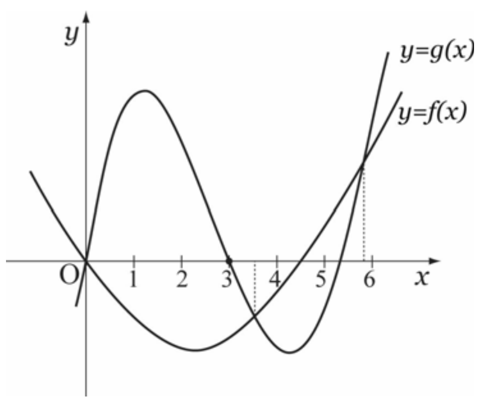
(단, $f(2)=f(-2)=0$)



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

92. 2009 교육청(3점)

그림은 이차함수 $y=f(x)$와 삼차함수 $y=g(x)$의 그래프이다. $x>0$일 때 부등식 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}^2-\dfrac{g(x)}{f(x)} \geqq 0$을 만족하는 모든 정수해의 곱을 구하시오.



93. 2005 교육청(4점)

실수 a에 대하여 분수부등식 $\dfrac{(x-21)}{(x-a)(x-13)} \leqq 0$을 만족시키는 자연수 x의 개수를 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$의 최솟값을 구하시오.

94. 2006 평가원(4점)

x에 대한 분수부등식

$$\frac{x(x-n)}{(x-1)(x+n-1)} \leqq 0$$

을 만족시키는 정수 x가 100개가 되도록 하는 자연수 n의 값을 구하시오.

95. 2008 평가원(4점)

x에 대한 부등식 $\dfrac{a}{x-2a}>1$의 모든 해가 x에 대한 부등식 $\dfrac{10}{x-2b}>1$의 해가 될 때, 좌표평면에서 점 $(a,\ b)$가 나타내는 영역의 넓이를 구하시오. (단, $a>0$이다.)

96. 2005 교육청(4점)

부등식 $\dfrac{x-1}{4-x} > 1$을 만족시키는 모든 실수 x에 대하여 $x^2-6x+k<0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은?

① 3
② $\dfrac{15}{4}$
③ 6
④ $\dfrac{25}{4}$
⑤ 8

97. 2008 교육청(3점)

출발점에서 도착점까지의 거리를 3등분하여 각 구간을 싸이클, 경보, 달리기의 순서로 진행하는 경기가 있다. 싸이클과 경보 구간의 평균 속력이 각각 시속 30km, 시속 9km인 선수가 있다. 이 선수의 전체 구간의 평균 속력이 시속 15km이상이 되기 위한 달리기 구간의 평균 속력의 최솟값이 시속 $a$km일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

98. 2006 교육청(3점)

갑은10km단축마라톤대회에 참가하기 위하여 연습을 하고 있다. 처음 4km 구간의 평균속력을 남은 6km 구간의 평균속력보다 시속 3km 만큼 빠르게 하여 10km 를 1 시간 이내에 달리려고 한다. 처음 4km 구간의 평균속력을 시속 $x$km 라고 할때, x 의 최솟값을 구하시오.

99. 2006 교육청(3점)

희망이은 10 km 단축마라톤대회에 참가하기 위하여 연습을 하고 있다. 처음 4 km 구간의 평균속력을 남은 6km 구간의 평균속력보다 시속 3 km 만큼 빠르게 하여 10 km 를 1 시간 이내에 달리려고 한다. 처음 4 km 구간의 평균속력을 시속 x km 라고 할 때, x의 최솟값을 구하시오.

100. 2009 교육청(3점)

두 부등식 $x-3+\dfrac{4}{x+2}\leqq 0$, $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-k}>0$ 을 동시에 만족시키는 자연수 x 가 존재하기 위한 필요충분조건은 $\alpha<k<\beta$ 이다. $\alpha+\beta$ 의 값은? (단, k 는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

101. 2007 평가원(4점)

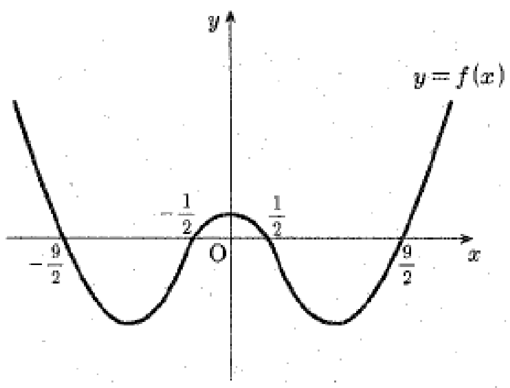
다음 두 식을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 합은?

$$\begin{cases} 2\sqrt{x^2-x-2}+2=x^2-x \\ \dfrac{x-5}{x-1}\leqq 0 \end{cases}$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

102. 2009 교육청(3점)

그림과 같이 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 네 점 $\left(-\dfrac{9}{2},\ 0\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{9}{2},\ 0\right)$ 에서 만날 때, 부등식 $\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}\leqq 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는?



① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

103. 2008 평가원(3점)

세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> (가) $f(x)g(x)>0$
> (나) $\dfrac{g(x)}{f(x)h(x)}\geqq 0$

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

< 보 기 >

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.
ㄴ. 부등식 $g(x)>0$의 해집합은 공집합이거나 실수 전체의 집합이다.
ㄷ. 방정식 $|g(x)|+h(x)=0$은 적어도 1개의 실근을 갖는다.

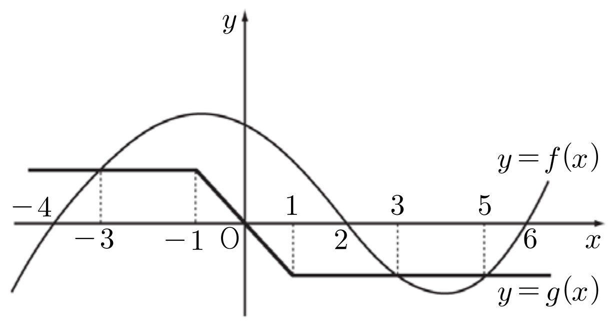
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

104. 2007 교육청(4점)

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같다.

$A=\{x\mid (x+4)(x-6)\leqq 0,\ x \text{는 정수}\}$,

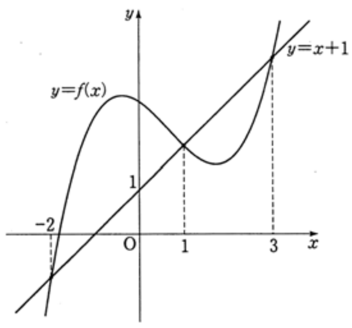
$B=\left\{x\ \middle|\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\geqq 1\right\}$일 때, $A\cap B$의 원소의 개수는?



① 3 ② 4
③ 5 ④ 6
⑤ 7

105. 2009 평가원(4점)

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 세 점에서 만나고 그 교점의 x좌표는 $-2,\ 1,\ 3$이다. 부등식 $\dfrac{x}{f(2x)-1} \geqq \dfrac{1}{2}$을 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?



① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1　⑤ $\dfrac{3}{2}$

106. 2006 평가원(3점)

연립부등식 $\begin{cases}(x-2)(x-4)^2(x-6) \geqq 0 \\ \dfrac{2x-7}{x+1} \leqq 1\end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

107. 2005 평가원(3점)

연립부등식 $\begin{cases}(x+1)(x^2+x+1) \geqq 0 \\ \dfrac{28}{x+2} \leqq 9-x\end{cases}$ 를 만족시키는 실수 x의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

108. 2008 평가원(3점)

a가 음수일 때, 다음 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는?

$$\begin{cases}\dfrac{(x-6)(x-a)}{x-1} \geqq 0 \\ \dfrac{x}{(x-a)(x-10)} \leqq 0\end{cases}$$

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

109. 2006 교육청(3점)

다음 연립부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 합을 구하시오.

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-5} \geqq 0 \\ (x-2)(x-4)(x-8) \leqq 0\end{cases}$$

110. 2008 교육청(3점)

연립부등식 $\begin{cases}x^3-6x^2+5x \geqq 0 \\ \dfrac{x-7}{x} \leqq 0\end{cases}$ 을 만족하는 정수x 의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

111. 2004 교육청(4점)

두 집합 $\mathrm{A}=\left\{x \,\middle|\, \frac{x-a}{x}<-1,\ a>0\right\}$, $\mathrm{B}=\{x \mid -1<x<3\}$에 대하여 $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$일 때, 상수 a의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

112. 2008 교육청(3점)

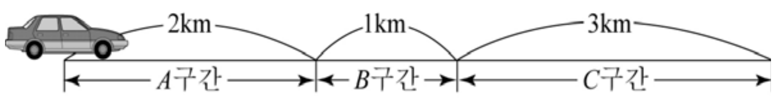
두 집합

$$A=\{x \mid (x-2)(x-4)(x+1)^2<0\},\ B=\left\{x \,\middle|\, \frac{(x+1)^3}{x-a}>0\right\}$$

에 대하여 $A\subset B$일 때, 상수 a의 최댓값을 M이라 하자. 7M의 값을 구하시오.

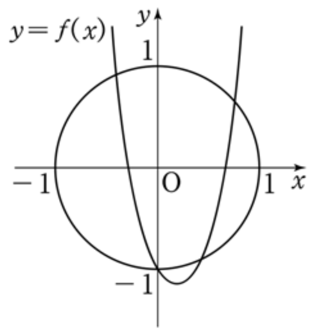
113. 2010 교육청(4점)

자동차의 성능 실험을 위해 그림과 같이 거리가 2km, 1km, 3km인 구간 A, B, C를 주행하였다. A 구간에서의 평균 속력이 C 구간에서의 평균 속력보다 20 km/시 빠르고, B 구간에서의 주행시간은 36초이다. 전체 6km인 구간에서의 평균 속력이 100 km/시 이상이 되기 위한 A 구간에서의 평균 속력의 최솟값은 $a+20\sqrt{b}$ (km/시)이다. 이 때, ab의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)



114. 2008 수능(3점)

오른쪽 그림은 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원과 점 $(0,-1)$을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식



$\frac{1}{f(x)+1}-\frac{1}{f(x)-1}=\frac{2}{x^2}$의 서로 다른 실근 x의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

115. 2008 수능 (3점)

방정식 $\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2-2x}=\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은?

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

116. 2005 수능 (3점)

무리방정식 $x^2+7x+10+\sqrt{x^2+7x+12}=0$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

117. 2009 수능 (3점)

무리방정식 $\sqrt{x^2-7x+15}=x^2-7x+9$의 모든 실근의 곱을 구하시오.

118. 2011 수능 (3점)

무리 방정식 $\sqrt{4x^2-5x+7}-4x^2+5x=1$ 의 모든 실근의 곱은?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$　⑤ $-\frac{9}{2}$

119. 2008 수능 (3점)

최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 최대공약수가 $x+3$, 최소공배수가 $x(x+3)(x-4)$일 때, 분수부등식 $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\leqq 0$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

120. 2004 수능 (2점)

부등식 $x\leqq\frac{10}{x-3}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

121. 2005 수능 (3점)

연립부등식 $\begin{cases}\frac{x+2}{x^2-4x+3}\geqq 0\\ \frac{9}{x-8}\leqq -1\end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 6　② 7　③ 8
④ 9　⑤ 10

122. 2006 수능 (3점)

두 자연수 a, b $(a<b)$에 대하여 분수부등식

$\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}\leq 0$을 만족시키는 정수 x가 2개가 되도록 하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

123. 2006 수능 (3점)

연립부등식 $\begin{cases} x(x-4)(x-5)\geq 0 \\ \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\leq 0 \end{cases}$

을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

124. 2011 수능 (3점)

x에 대한 분수부등식

$$1+\frac{k}{x-k}\leq\frac{1}{x-1}$$

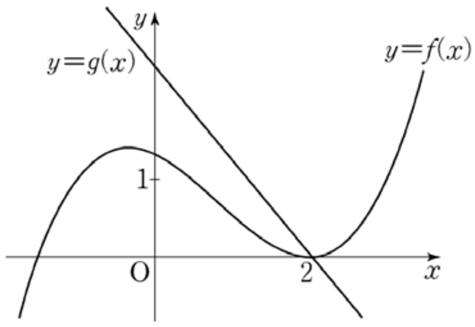
을 만족시키는 정수 x의 개수가 3이 되도록 자연수 k의 값을 구하시오.

125. 2009 수능 (4점)

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $P(2,\ 0)$에서 x축에 접하고 일차함수 $y=g(x)$의 그래프와 한 점 P에서만 만난다. $1<f(0)<g(0)$일 때, 방정식

$$f(x)+g(x)=\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}$$

의 실근의 개수는?



① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

1. 2007 교육청(3점)

$\triangle$ABC에서 $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$일 때,

$\sin A : \sin B : \sin C$는?

① 3 : 3 : 5　② 4 : 4 : 5　③ 5 : 5 : 8
④ 6 : 6 : 7　⑤ 7 : 7 : 8

2. 2006 교육청(3점)

$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{1}{2}$ 일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. 2005 교육청(3점)

다음 중 $\cos 310° + \cos 190°$ 와 같은 값은?

① $\sin 20°$　② $\cos 20°$　③ $-\sin 70°$
④ $\cos 70°$　⑤ $-\cos 70°$

4. 2005 교육청(3점)

$\sin^2\theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ 의 값은?

① 0　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

5. 2005 교육청(3점)

이차방정식 $2x^2 - px + 1 = 0$ 의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 일 때, $\tan(\alpha+\beta) = 3$ 을 만족시키는 p 의 값을 구하시오.

6. 2004 교육청(3점)

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $\cos 2\theta$의 값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$)

① $-\frac{7}{9}$　② $-\frac{2}{3}$　③ $-\frac{5}{9}$
④ $-\frac{4}{9}$　⑤ $-\frac{1}{3}$

7. 2005 교육청(3점)

$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{5}$ 일 때, $\sin 2\theta$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

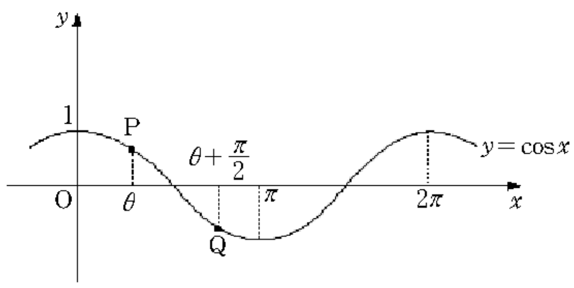
8. 2005 교육청(3점)

$\tan\theta = -\sqrt{8}$ 일 때, $\sin\frac{\theta}{2}$ 의 값은? (단, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$)

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$　⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 2004 교육청(3점)

그림과 같이 곡선 $y=\cos x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(\theta,\ \cos\theta)$, $\mathrm{Q}\left(\theta+\frac{\pi}{2},\ \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right)$에 대하여 선분 PQ의 길이를 l 이라고 할 때, l^2 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하시오.



10. 2007 교육청(3점)

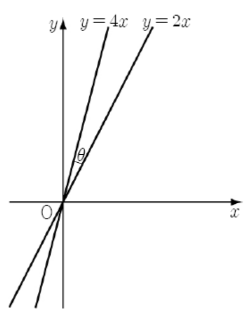
$\tan\frac{\theta}{2}=3$ 일 때, 무한급수

$$1+\sin\theta+\sin^2\theta+\sin^3\theta+\cdots$$

의 합을 S라 하자. $20S$의 값을 구하시오.

11. 2009 교육청(3점)

다음은 두 함수 $y=2x$, $y=4x$의 그래프이다. 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\sin 2\theta$의 값은?]



① $\frac{28}{85}$ ② $\frac{6}{17}$

③ $\frac{32}{85}$ ④ $\frac{34}{85}$

⑤ $\frac{36}{85}$

12. 2006 교육청(3점)

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{15}}{3}$ 일 때, $\cos 2\theta$의 값은? (단 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

① $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

13. 2004 교육청(3점)

$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ 일 때, $\tan\frac{\alpha}{2}$의 값은? (단, α는 제4 사분면의 각이다.)

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

14. 2009 교육청(3점)

직각삼각형 ABC에서 직각이 아닌 두 각의 크기를 α, β라 하고 $\tan\alpha=\frac{3}{2}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{9}{13}$ ③ $\frac{10}{13}$

④ $\frac{11}{13}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

15. 2008 교육청(3점)

수열 $\{\theta_n\}$에 대하여 $\tan\frac{\theta_n}{2}=\frac{n+1}{2n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n$의 값은? (단, $0 \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2}$ 이다.)

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

16. 2010 교육청(3점)

$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은? $\left(단, \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{3-\sqrt{14}}{12}$ ② $\frac{-4+\sqrt{14}}{12}$ ③ $\frac{4-\sqrt{14}}{12}$
④ $\frac{-3+\sqrt{14}}{12}$ ⑤ $\frac{3+\sqrt{14}}{12}$

17. 2010 교육청(3점)

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, $\sin\theta\cos2\theta$의 값은? $\left(단, 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{2}{27}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ $\frac{4}{27}$
④ $\frac{5}{27}$ ⑤ $\frac{2}{9}$

18. 2006 교육청(3점)

α, β가 예각이고 $(\tan\alpha-\sqrt{3})(\tan\beta+\sqrt{3})=-4$일 때, $\alpha-\beta$ 의 값은?

① $-\frac{\pi}{4}$ ② $-\frac{\pi}{6}$ ③ 0
④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{4}$

19. 2007 평가원(3점)

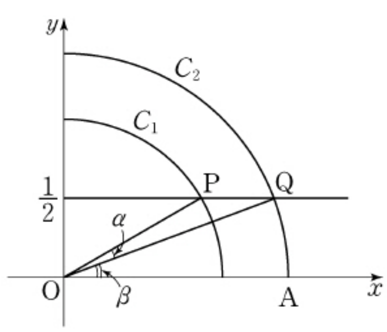
두 실수 x, y에 대하여 $\sin x+\sin y=1$, $\cos x+\cos y=\frac{1}{2}$ 일 때, $\cos(x-y)$의 값은?

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

20. 2010 평가원(3점)

좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다.

직선 $y=\frac{1}{2}$이 원 C_1, C_2와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라고 하자. 점 $A(\sqrt{2}, 0)$에 대하여 $\angle QOP=\alpha$, $\angle AOQ=\beta$라고 할 때, $\sin(\alpha-\beta)$의 값은?



① $\frac{3-\sqrt{14}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{14}}{8}$ ③ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{14}}{8}$
④ $\frac{3-\sqrt{21}}{8}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{21}}{8}$

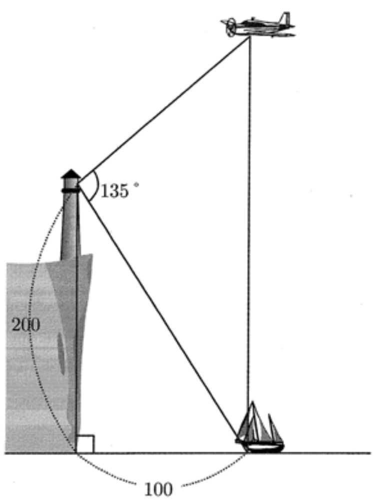
21. 2010 교육청(3점)

점 $(6,\ 2)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 두 접선을 그었을 때, 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각은 각각 $\alpha,\ \beta$이다. $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

22. 2006 교육청(3점)

그림과 같이 등대에서 배를 바라보는 시선과 배위에 수직으로 떠있는 비행기를 바라보는 시선이 이루는 각의 크기가 $135°$이며, 해수면에서 등대까지의 높이가 200, 등대에서 해수면에 내린 수선에서 배까지의 거리가 100이다. 이 때, 배에서 비행기까지의 높이는?$ (단, 비행기와 배의 크기는 무시한다.)



① 300 ② 400 ③ 500
④ 600 ⑤ 700

23. 2008 교육청(3점)

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$ 일 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값을 바르게 구한 것은? (단, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$
③ $\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$
⑤ $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

24. 2008 교육청(3점)

$\sin\alpha+\cos\beta+\sin\gamma=0$, $\cos\alpha+\sin\beta+\cos\gamma=0$을 만족할 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

25. 2010 교육청(3점)

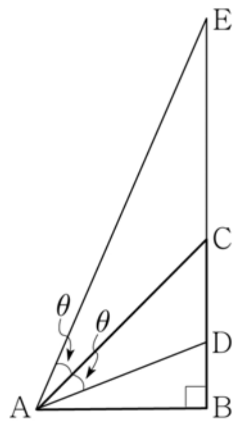
$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=1$일 때, $2\cos\theta\cos2\theta$의 값은?

(단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

26. 2009 교육청(3점)

$\angle$B가 직각인 이등변삼각형 ABC가 있다. 그림과 같이 선분 BC 위의 점 D와 선분 BC의 연장선 위의 점 E를 $\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{CAE} = \theta$가 되도록 잡는다.



$\dfrac{\overline{\mathrm{AE}} - \overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AC}}} = 2$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{4}$

27. 2009 교육청(3점)

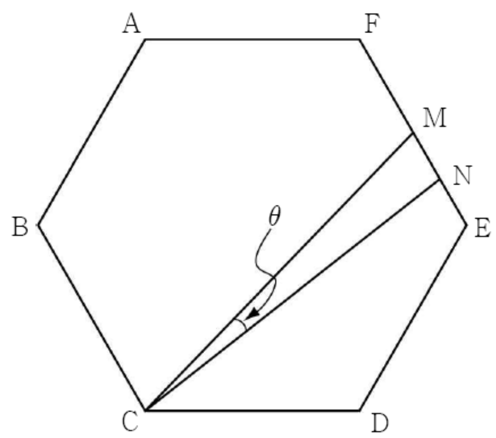
$\sin\alpha = \dfrac{2}{3}\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$이고 $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + \dfrac{a}{3}x + \dfrac{b}{36} = 0$일 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20

④ 21 ⑤ 22

28. 2009 교육청(3점)

정육각형 ABCDEF에서 $\overline{\mathrm{EF}}$의 중점을 M, $\overline{\mathrm{EM}}$의 중점을 N, $\angle \mathrm{MCN} = \theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

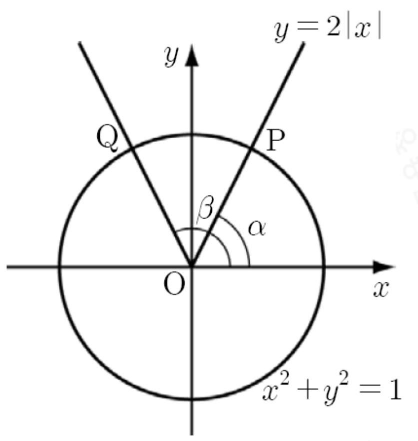


① $\dfrac{2\sqrt{3}}{25}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}}{23}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{3}}{23}$

④ $\dfrac{6\sqrt{3}}{25}$ ⑤ $\dfrac{6\sqrt{3}}{23}$

29. 2008 교육청(3점)

그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 1$과 $y = 2|x|$의 그래프와의 두 교점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{OP}}$, $\overline{\mathrm{OQ}}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?



① 1 ② $\dfrac{3}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

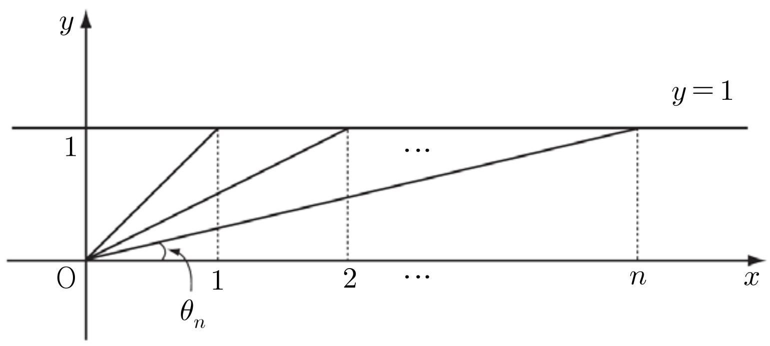
④ $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{5}$

30. 2007 교육청(3점)

원점과 점$(1,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_1, 원점과 점$(2,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_2,

⋮

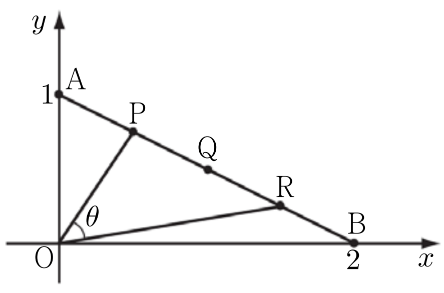
원점과 점$(n,1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하자.



$\theta_1-\theta_2=\theta_p-\theta_q$가 되도록 하는 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<p<q$이고 p, q는 자연수이다.)

31. 2007 교육청(3점)

두 점 A$(0,1)$, B$(2,0)$을 이은 선분 AB를 사등분하는 점을 각각 P, Q, R이라 하자. $\angle$POR$=\theta$라 할 때, $30\tan\theta$의 값을 구하시오.



32. 2004 교육청(3점)

이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 α,β라고 할 때, $\tan2\theta=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$를 만족하는 $\tan\theta$의 값은?

① $-2,\ \dfrac{1}{2}$ ② $-1,\ \dfrac{1}{2}$

③ $2,\ -\dfrac{1}{2}$ ④ $1,\ -\dfrac{1}{2}$

⑤ $2,\ \dfrac{1}{2}$

33. 2006 교육청(3점)

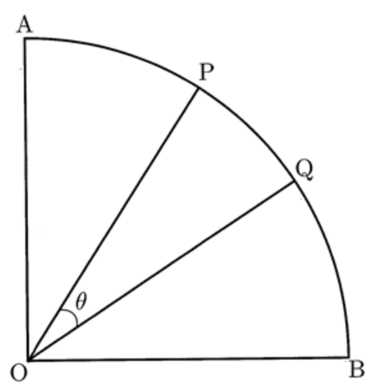
$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{3}$일 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{7}{12}$

④ $\dfrac{3}{13}$ ⑤ $\dfrac{5}{13}$

34. 2006 교육청(3점)

중심각의 크기가 직각인 부채꼴 AOB가 있다. 호 AB 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\angle$POQ$=\theta$라 하자. 호$\overparen{\text{AB}}=4\overparen{\text{PQ}}$일 때, $\cos^2\theta$의 값은?



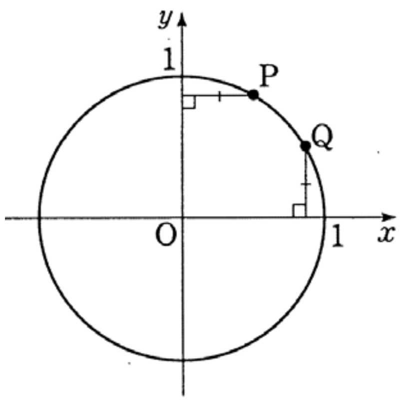
① $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ② $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}$

④ $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

35. 2009 교육청(3점)

좌표평면에서 두 점 P, Q가 점 $(1,\ 0)$을 동시에 출발하여 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 돌고 있으며, 점 P가 $2t$ $(0 \leq t \leq \pi)$만큼 움직일 때 점 Q는 t만큼 움직인다.

점 P에서 y축 까지의 거리와 점 Q에서 x축까지의 거리가 같아지는 모든 t의 값의 합은?

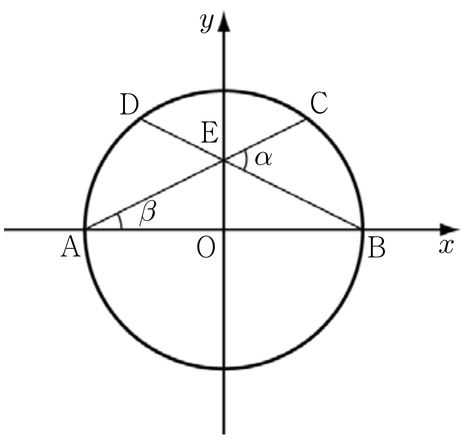


① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π

④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

36. 2008 교육청(3점)

그림에서 원점 O를 중심으로 하는 원이 x축과 만나는 두 점은 A, B이고, 원의 두 현 AC와 BD의 교점 E는 y축 위에 있으며 $\angle \mathrm{CEB}=\alpha$, $\angle \mathrm{CAB}=\beta$이다. $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin^2\beta=\frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로 소인 자연수이다.)



37. 2008 교육청(3점)

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{3}$일 때, $\tan2\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ ② $-\frac{3\sqrt{2}}{7}$ ③ $-\frac{2\sqrt{2}}{7}$

④ $-\frac{\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $-\frac{1}{7}$

38. 2009 교육청(3점)

$\frac{\sin50°+\sin10°}{\cos50°+\cos10°}$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

39. 2004 교육청(3점)

함수 $y=\sqrt{3}\sin x-3\cos x$ 의 주기를 a, 최댓값을 b, 최솟값을 c라 할 때, abc의 값은?

① -24π ② -12π ③ 0

④ 12π ⑤ 24π

40. 2009 교육청(3점)

함수 $y=\sqrt{2}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$는 $x=\theta$일 때 최댓값을 갖는다. $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

41. 2007 교육청(3점)

$y=\cos x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은 ?

① $\sqrt{7}$ ② $2\sqrt{7}$ ③ $3\sqrt{7}$
④ $4\sqrt{7}$ ⑤ $5\sqrt{7}$

42. 2005 교육청(3점)

함수 $f(x)=4\sin x+3\cos x$ 가 $x=\theta$ 에서 최댓값을 가질 때, $3\tan\theta$ 의 값은? (단, $0\leqq x<2\pi$)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

43. 2005 교육청(3점)

실수 a 에 대하여 $\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ 1\end{pmatrix}$ 일 때, k 의 최댓값은?

① 2 ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $\sqrt{10}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

44. 2006 교육청(3점)

함수 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 주기는 4π이다.
ㄴ. 최댓값은 2이고 최솟값은 -2이다.
ㄷ. 함수 $y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45. 2006 교육청(3점)

함수 $y=\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, $0\leqq x<2\pi$)

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
④ 1 ⑤ $\sqrt{3}$

46. 2005 평가원(3점)

폐구간 $[0,\pi]$ 에서 함수 $f(x)=\cos 2x+2\sin x\cos x$ 의 그래프가 직선 $y=a$ 와 세 점에서 만날 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

47. 2006 교육청(3점)

$0 \leq x < 2\pi$에서 함수 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2$는 $x = a$에서 최솟값, $x = b$에서 최댓값을 갖는다. 이 때, $\frac{21}{\pi}(a+b)$의 값을 구하시오.

48. 2006 교육청(3점)

폐구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y = \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M - m$의 값은?

① $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

49. 2007 교육청(3점)

두 함수 $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$에 대하여 폐구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y = (f \circ g)(x)$의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

50. 2008 교육청(3점)

함수 $f(x) = -2\sin^2 x + \sin 2x + 1$의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$
④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

51. 2008 교육청(3점)

함수 $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 $y = 2\cos x$의 그래프와 일치한다. 이 때, a의 값은? (단, $|a| \leq \pi$)

① $-\frac{2}{3}\pi$　② $-\frac{\pi}{3}$　③ $\frac{\pi}{6}$
④ $\frac{\pi}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}\pi$

52. 2005 교육청(3점)

$0 < x < \pi$에서 x에 대한 방정식
$\cos 2x - \sin x = a(\sin x + 1)$ 이 실근을 갖기 위한 실수 a 값의 범위는?

① $-1 \leq a < 1$　② $-1 < a \leq 1$
③ $a < -1$ 또는 $a \geq 1$　④ $-2 \leq a < 0$
⑤ $a < 0$ 또는 $a \geq 2$

53. 2009 교육청(3점)

방정식 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = a$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a값의 범위가 $\alpha \leq a < \beta$일 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값은? (단, $0 \leq x \leq \pi$)

① 5　② 6　③ 7
④ 8　⑤ 9

54. 2009 평가원(3점)

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$ 일 때, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)

① $-\frac{\sqrt{5}}{8}$ ② $-\frac{\sqrt{15}}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$
④ $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{15}}{4}$

55. 2007 교육청(3점)

$\cos 2x+3\sin x=-1$의 모든 근의 합은? (단, $0\leqq x<2\pi$이다.)

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π
④ 3π ⑤ 4π

56. 2007 교육청(3점)

$0\leqq x\leqq 2\pi$일 때, 방정식 $\sin 2x-\cos x=0$을 만족시키는 모든 x의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

57. 2004 교육청(3점)

함수 $y=5\sin x+\cos 2x$ 의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

58. 2006 교육청(3점)

행렬 $\begin{pmatrix} \cos x & \sin 2x \\ \sin 2x & \cos x \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않을 때, 실수 x의 개수는? (단, $-\pi\leqq x\leqq\pi$)

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

59. 2010 교육청(3점)

폐구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 삼각방정식

$$\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)^2-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

의 모든 해의 합은?

① 4π ② $\frac{13}{3}\pi$ ③ $\frac{14}{3}\pi$
④ 5π ⑤ $\frac{16}{3}\pi$

60. 2010 교육청(3점)

$0 \le x \le \pi$에서 삼각방정식 $\cos x + \cos 2x = 2\cos\frac{3}{2}x$를 만족시키는 모든 해의 합은?

① $\frac{4}{3}\pi$ ② $\frac{5}{3}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{7}{3}\pi$ ⑤ $\frac{8}{3}\pi$

61. 2010 평가원(3점)

삼각방정식 $2\sin x - 4\sin x\cos^2 x - \cos 2x + 1 = 0$ 을 만족시키는 모든 근의 합은? (단, $0 \le x < 2\pi$)

① $\frac{5}{2}\pi$ ② $\frac{11}{4}\pi$ ③ 3π
④ $\frac{13}{4}\pi$ ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

62. 2009 교육청(3점)

$0 \leqq x \leqq \pi$ 일 때, 방정식 $2\cos^2 2x - 1 = 2\sin x\cos x$ 를 만족하는 모든 x 의 값의 합은?

① $\frac{3}{4}\pi$ ② π ③ $\frac{5}{4}\pi$
④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{7}{4}\pi$

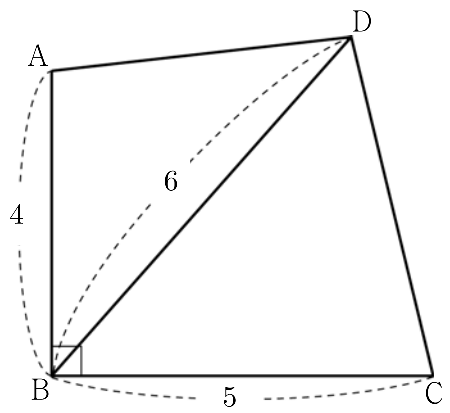
63. 2007 교육청(3점)

$0 \leqq x \leqq 4\pi$일 때, 삼각방정식 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -1$의 실근의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

64. 2008 교육청(3점)

사각형 ABCD에서 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{BD} = 6$일 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은?



① $3\sqrt{41}$ ② $3\sqrt{42}$ ③ $3\sqrt{43}$
④ $6\sqrt{11}$ ⑤ $9\sqrt{5}$

65. 2006 교육청(3점)

부등식 $\cos 2x - 3\sin x + 1 \leqq 0$을 만족시키는 x의 범위는? (단, $0 \leqq x < 2\pi$)

① $\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{5}{6}\pi$ ② $\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{7}{6}\pi$
③ $\frac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \frac{4}{3}\pi$ ④ $\frac{4}{3}\pi \leqq x \leqq \frac{5}{3}\pi$
⑤ $\frac{7}{6}\pi \leqq x \leqq \frac{11}{6}\pi$

66. 2008 교육청(4점)

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$ 일 때, $\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{8\sqrt{5}}{25}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{12\sqrt{5}}{25}$

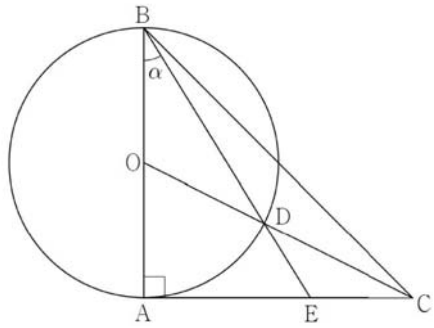
④ $\frac{14\sqrt{5}}{25}$ ⑤ $\frac{16\sqrt{5}}{25}$

67. 2008 교육청(4점)

좌표평면에서 직선 $x+y=\sqrt{2}$ 위의 임의의 점과 원 $(x-5\sqrt{2})^2+(y-5\sqrt{2})^2=16$ 위의 임의의 점 사이의 거리를 l 이라 하자. l 이 최소가 되는 직선 위의 점에서 원에 그은 두 접선이 이루는 예각 θ 에 대하여 $\cos\theta=\frac{b}{a}$ (a, b 는 서로소인 자연수)일 때, $a-b$ 의 값을 구하시오.

68. 2010 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점을 O, $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 지름으로 하는 원 O 와 $\overline{\mathrm{OC}}$ 와의 교점을 D, $\overline{\mathrm{BD}}$ 의 연장선과 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 교점을 E 라 하자. $\angle\mathrm{ABE}=\alpha$ 라 할 때, $\tan\alpha$ 의 값은?

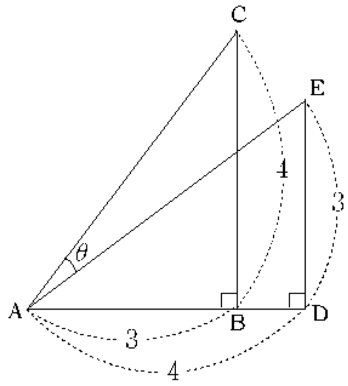


① $\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

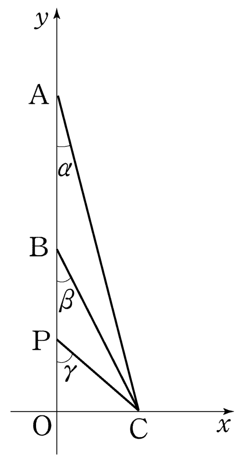
69. 2005 교육청(4점)

그림과 같이 두 직각삼각형 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ADE$ 가 있다. $\overline{AB}=\overline{DE}=3$, $\overline{BC}=\overline{AD}=4$, $\overline{BC}\,/\!/\,\overline{DE}$, $\angle CAE=\theta$ 일 때, $48\tan\theta$ 의 값을 구하시오.



70. 2005 교육청(4점)

오른쪽 그림과 같이 y 축 위의 두 점 $A(0,4)$, $B(0,2)$ 와 x 축 위의 점 $C(1,0)$ 에 대하여 $\angle CAO=\alpha$, $\angle CBO=\beta$ 라 하자. 양의 y 축 위의 점 $P(0,y)$ 에 대하여 $\angle CPO=\gamma$ 라 할 때, $\alpha+\beta=\gamma$ 가 되는 점 P 의 y 좌표는?



① $\frac{5}{4}$

② $\frac{6}{5}$

③ $\frac{7}{6}$

④ $\frac{8}{7}$

⑤ $\frac{9}{8}$

71. 2004 교육청(4점)

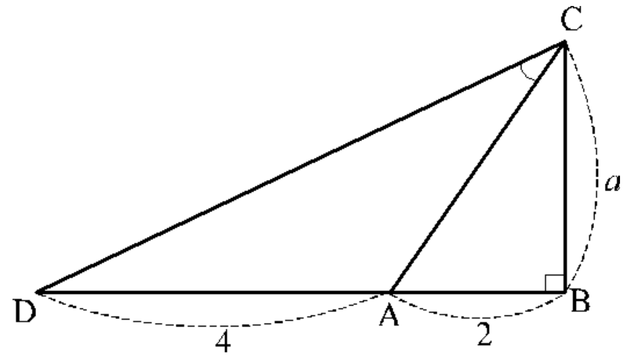
삼각형ABC 에서 $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 C$ 일 때, $\angle A$ 의 크기는?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$

④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ $\frac{3\pi}{4}$

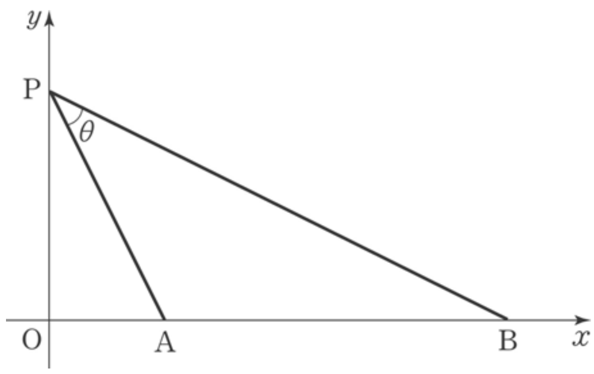
72. 2004 교육청(4점)

그림과 같이 $\overline{AB}=2, \overline{BC}=a$, $\angle B=90°$ 인 직각삼각형ABC 에서 $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 $\overline{AD}=4, \overline{BD}=6$ 인 점D 를 정한다. $\tan(\angle DCA)=\frac{4}{7}$ 를 만족하는 a 의 값을 p, q 라고 할 때, 곱 pq 의 값을 구하시오.



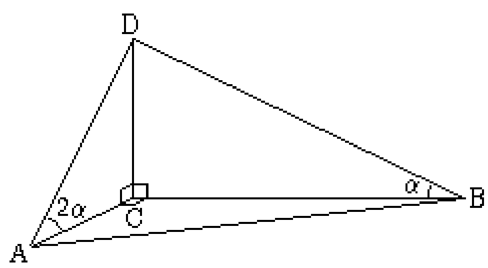
73. 2004 평가원(4점)

그림과 같이 x 축 위의 두 점A(20, 0), B(80, 0)와 양의 y 축 위의 점 P$(0, y)$에 대하여 $\angle APB=\theta$ 라고 할 때, $\tan\theta$ 의 값이 최대가 되는 점 P 의 y 좌표를 구하시오.



74. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 한 점 C에서 서로 직교하는 세 직각삼각형 ABC, ACD, BDC에 대하여 $\angle DBC=\alpha$, $\angle DAC=2\alpha$ 라 하자. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\overline{AB}=5\sqrt{73}$ 일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오.



75. 2005 교육청(4점)

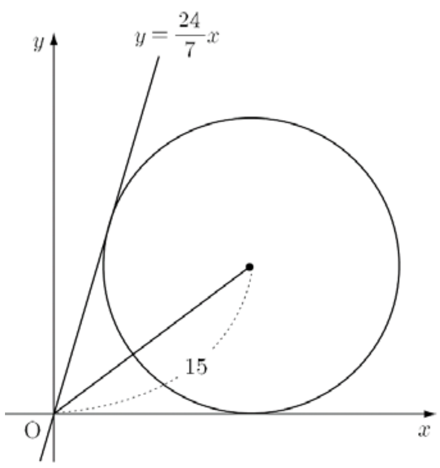
등식 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}$ 을 만족하는 θ 에 대하여

$\cos^2 2\theta = \frac{b}{a}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)

76. 2007 교육청(4점)

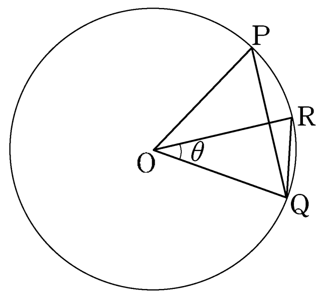
직선 $y = \frac{24}{7}x$와 x축에 동시에 접하고, 중심이 제1사분면에 있는 원이 있다. 원점에서 이 원의 중심까지의 거리가 15일 때, 원의 반지름의 길이는?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

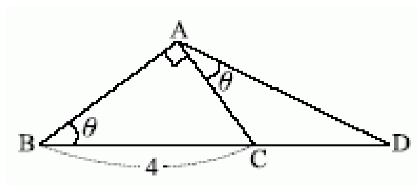
77. 2007 평가원(4점)

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 ∠POQ를 이등분하는 직선이 호 PQ와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 POQ의 넓이와 삼각형 ROQ의 넓이의 비가 3 : 2이고 ∠ROQ $=\theta$라 할 때, $16\cos\theta$의 값을 구하시오.



78. 2005 교육청(4점)

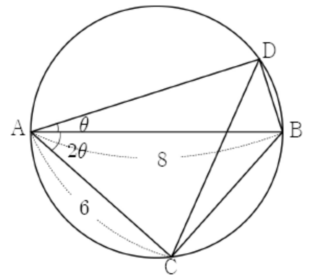
그림과 같이 $\overline{BC}=4$, $\angle BAC = 90°$ 인 직각삼각형 ABC에서 선분 BC의 연장선위에 $\angle ABC = \angle CAD$가 되도록 점 D를 잡는다. $\angle ABC = \theta$ 라 할 때, 다음 중 선분 AD의 길이를 나타내는 것은? (단, $\angle ABC < 45°$)



① $2\tan\theta$ ② $2\tan 2\theta$ ③ $\cos 2\theta$
④ $2\cos 2\theta$ ⑤ $4\sin\theta$

79. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 지름 $\overline{AB}=8$인 원이 있다. 이 원 위의 두 점 C, D에 대하여 $\angle BAD=\theta$, $\angle BAC=2\theta$이고 $\overline{AC}=6$일 때, 사각형 $ACBD$의 넓이는?



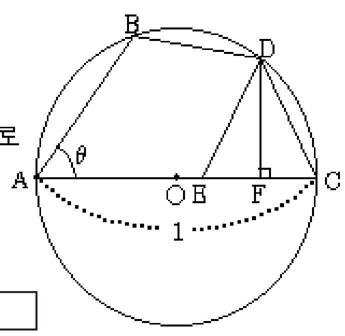
① $7\sqrt{7}$　② $8\sqrt{7}$　③ $9\sqrt{7}$
④ $10\sqrt{7}$　⑤ $11\sqrt{7}$

80. 2006 교육청(4점)

다음은 θ가 예각일 때, $\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}$가 성립함을 증명한 것이다.

[증명]
길이가 1인 선분 AC를 지름으로 하는 원 O 위의 점 B에 대하여 $\angle BAC=\theta$라 하자. 호 BC의 중점을 D, D에서 지름 AC에 내린 수선의 발을 F라 하고, $\overline{AB}=\overline{AE}$가 되도록 지름 AC 위에 점 E를 잡으면

$\triangle BAD \equiv \triangle EAD$
$\overline{CD}=$ (가)
$\therefore \overline{EF}=\overline{CF}=\frac{1}{2}(\overline{AC}-\overline{AB})$
$\angle AFD=\angle ADC=90°$ 이므로
$\overline{CD}^2=$ (나)
$=\frac{1}{2}\overline{AC}(\overline{AC}-\overline{AB})$
$\overline{CD}=\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{AB}=$ (다)
$\therefore \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$

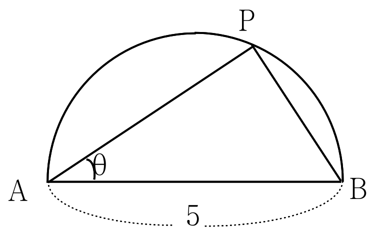


이 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\overline{DE}$	$\overline{AC}\cdot\overline{CF}$	$\sin\theta$
②	$\overline{DE}$	$\overline{AC}\cdot\overline{CF}$	$\cos\theta$
③	$\overline{DE}$	$\overline{AD}\cdot\overline{DF}$	$\sin\theta$
④	$\overline{DF}$	$\overline{AD}\cdot\overline{DF}$	$\cos\theta$
⑤	$\overline{DF}$	$\overline{AC}\cdot\overline{CF}$	$\sin\theta$

81. 2004 교육청(4점)

그림과 같이 길이가 5 인 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원 위의 임의의 점 P 에 대하여, $\overline{AP}+2\overline{BP}$ 가 최대가 되는 $\angle PAB$ 의 크기를 θ라 할 때 cosθ의 값은?



① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{2}{5}$　③ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$
④ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

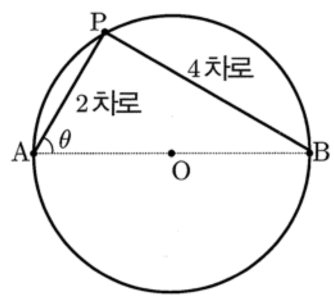
82. 2005 교육청(4점)

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ 일 때, $\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos\beta$ 의 최댓값은?

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{2}$　③ $\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

83. 2006 교육청(4점)

두 도시 A, B는 60km떨어져 있고, 도시 O는 두 도시의 중간 지점에 있다. 신도시의 위치를 도시 O에서 30km 떨어진 지점에 정한 후, 신도시와 도시 A사이에는 2차로 직선 도로를, 신도시와 도시 B사이에는 4차로 직선 도로를 건설하려고 한다. 2차로 도로는 km당 6억 원, 4차로 도로는 km당 8억 원의 공사비가 소요된다. 공사비가 최대가 되는 신도시의 위치를 P라 하고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $\tan\theta$의 값은?



① $\dfrac{4}{3}$　② $\dfrac{5}{3}$　③ 2
④ $\dfrac{7}{3}$　⑤ $\dfrac{8}{3}$

84. 2007 교육청(4점)

두 수열 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$이 각각

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3} \\ x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = \sqrt{3} \\ y_{n+1} = \dfrac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \end{cases}$$

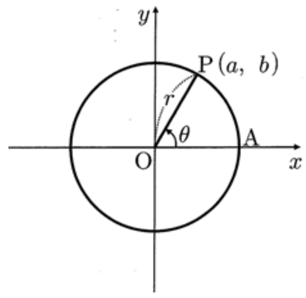
로 정의된다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2 < x_n y_n \leqq 3$이 성립함을 증명한 것이다.

> [증명]
> (1) 수열 $\{x_n\}$의 일반항을 구해보자.
> $x_n = \tan\alpha_n \ (0° < \alpha_n < 90°)$이라 하자.
> $x_{n+1} = \tan\alpha_n + \sec\alpha_n = \dfrac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$ 을
> $\sin\alpha_n = 2\sin\dfrac{\alpha_n}{2}\cos\dfrac{\alpha_n}{2}$, $\cos\alpha_n = \cos^2\dfrac{\alpha_n}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha_n}{2}$ 임을
> 이용하여 정리하면, $x_{n+1} = \boxed{\quad(가)\quad}$ 이다.
> 따라서 $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 75°$, $\alpha_3 = 82.5°, \cdots$이므로
> $\alpha_n = 90° - \dfrac{30°}{2^{n-1}}$이 된다.
> $\therefore \quad x_n = \tan\left(90° - \dfrac{30°}{2^{n-1}}\right) = \cot\left(\dfrac{30°}{2^{n-1}}\right) \cdots$ ㉠
> (2) 수열 $\{y_n\}$의 일반항을 구해보자.
> $y_n = \tan\beta_n \ (0° < \beta_n < 90°)$이라 하자.
> $y_{n+1} = \dfrac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n} = \boxed{\quad(나)\quad}$ 이다.
> 따라서 $\beta_1 = 60°$, $\beta_2 = 30°$, $\beta_3 = 15°, \cdots$이므로
> $\beta_n = \dfrac{60°}{2^{n-1}}$이 된다.
> $\therefore \quad y_n = \tan\left(\dfrac{60°}{2^{n-1}}\right) \cdots$ ㉡ $\qquad \gamma_n = \dfrac{30°}{2^{n-1}}$라 하면,
> ㉠과 ㉡에 의하여 $x_n y_n = \dfrac{2}{1-\tan^2\gamma_n}$이 된다.
> $\therefore$ 모든 자연수 n에 대하여 $0 < \tan\gamma_n \leqq \boxed{\quad(다)\quad}$ 이므로
> $2 < x_n y_n \leqq 3$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan\dfrac{\beta_n}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
②	$\cot\alpha_n$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\sqrt{3}$
③	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\sqrt{3}$
④	$\cot\alpha_n$	$\tan\dfrac{\beta_n}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
⑤	$\tan\left(\dfrac{90°+\alpha_n}{2}\right)$	$\tan(90°+\beta_n)$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

85. 2004 교육청(3점)



그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 x축 위의 점 A에서 출발하여 원 위를 시계 반대 방향으로 회전하고 있다. 동경 OP가 나타내는 일반각 θ에 대하여

함수 $f(\theta)$를 $f(\theta) = \dfrac{a+b}{r}$로 정의하자.

다음 중 함수 $f(\theta)$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면?

<보기>

> ㄱ. 주기함수이고 주기는 2π이다.
> ㄴ. 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.
> ㄷ. $y=\sin\theta$의 그래프를 평행이동시켜 $y=f(\theta)$의 그래프와 일치 시킬 수 있다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

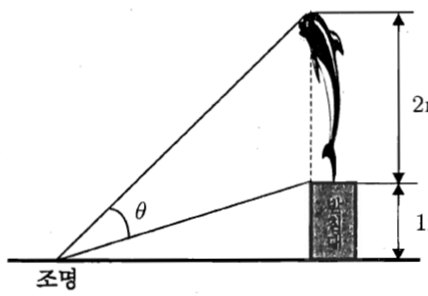
86. 2007 교육청(4점)

$0 \leqq x \leqq \pi$일 때, $f(x) = \sin x + \cos x - 2\sin x\cos x$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① $-\dfrac{5}{4}$ ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ $\dfrac{5}{4}$

87. 2008 교육청(4점)

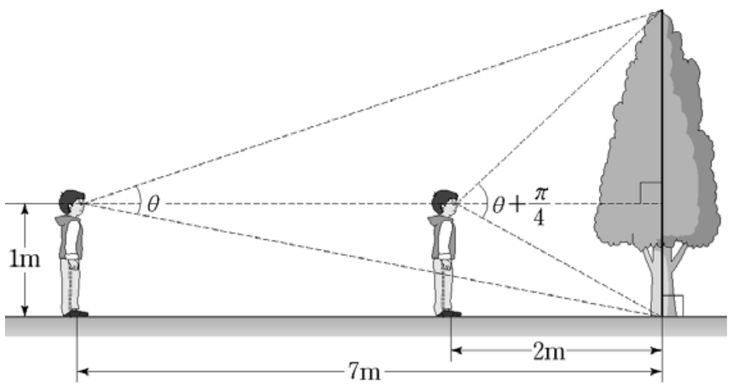
어느 공원에서는 높이 1m인 받침대 위에 놓인 높이 2m인 조형물이 있다. 지면에서 조형물에 비추는 각 θ가 최대인 지점에 그림과 같이 조명을 설치하려고 할 때, 조명과 받침대 사이의 거리는?



① $\sqrt{5}$　② $\sqrt{3}$　③ 1
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

88. 2008 평가원(4점)

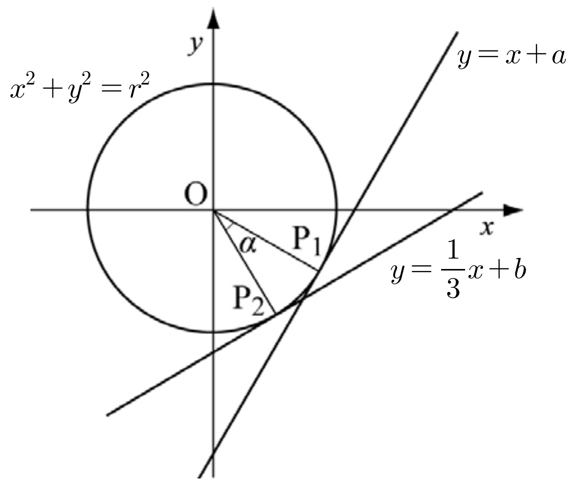
눈높이가 1m인 어린이가 나무로부터 7m 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ이었다. 나무로부터 2m 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\frac{\pi}{4}$가 되었다. 나무의 높이는 a(m) 또는 b(m)이다. $a+b$의 값은?



① 12　② 14　③ 16
④ 18　⑤ 20

89. 2008 교육청(4점)

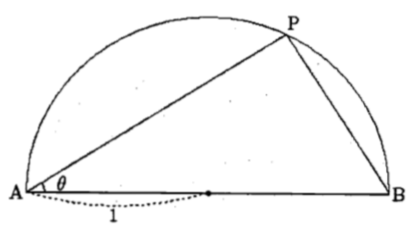
두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$가 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고 $\angle P_1OP_2=\alpha$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, $a<0$, $b<0$)



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$
④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

90. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원 위의 임의의 점 P에서 $\angle PAB=\theta$라 한다. $\overline{AP}+\overline{BP}=a\sin(\theta+b)$일 때, a^2b의 값은? (단, $0\leq b\leq 2\pi$)



① $\frac{\pi}{2}$　② π　③ 2π
④ π^2　⑤ $2\pi^2$

91. 2008 교육청(3점)

$0 \leqq x \leqq 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$의 모든 해의 합은?

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π
④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

92. 2008 평가원(3점)

폐구간 $[0,\ 2\pi]$에서 삼각방정식

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos^2 x$$

의 모든 해의 합은?

① 2π ② 3π ③ 4π
④ 5π ⑤ 6π

93. 2005 교육청(4점)

x에 대한 방정식 $4\sin x - \cos 2x = k$가 근을 가질 때, 정수 k의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

94. 2006 교육청(4점)

방정식 $\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0$ 을 만족시키는 모든 해의개수는? (단, $0 \leqq x < 2\pi$)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

95. 2004 교육청(4점)

$0 \leqq x \leqq 2\pi$일 때, 삼각방정식 $\cos^2 x - \sin^2 2x = 0$ 을 만족하는 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

96. 2009 교육청(4점)

방정식 $3\sin^2 x + 4\cos^2\frac{x}{2} = 12 - 4k$가 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는 $\alpha \le k \le \beta$이다. $30\alpha + \beta$의 값을 구하시오.

97. 2004 교육청(4점)

삼각방정식 $\sin(\pi\cos x) = 0$의 해의 개수는?
(단, $0 \leqq x < 2\pi$)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

98. 2009 교육청(4점)

부등식 $\sin(x+y) \ge \cos(x-y)$를 만족하는 $x,\ y$에 대하여 $x+2y$의 최댓값은? (단, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$)

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi$ ③ π
④ $\frac{5}{4}\pi$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi$

99. 2008 교육청(4점)

방정식 $4(\sin^3 x-\cos^3 x)=3(\sin x-\cos x)$의 모든 실근의 합은? (단, $0 \leqq x \leqq \pi$)

① π ② $\frac{5}{4}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$

④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ 2π

100. 2010 교육청(4점)

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$ 일 때, $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{q}{p}$ 라 하자. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단}, 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}\text{이고, } p,\ q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$

101. 2004 수능 (3점)

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$일 때, $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$의 값은? (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)

① $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

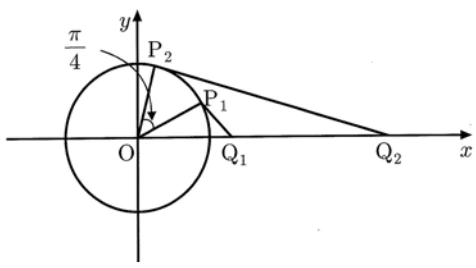
④ $\frac{2-\sqrt{3}}{6}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

102. 2006 수능 (3점)

그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P_1에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_1이라 할 때, 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{4}$이다.

점 P_1을 원점 O를 중심으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전시킨 점을 P_2라 하고, 점 P_2에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q_2라 하자. 삼각형 P_2OQ_2의 넓이는?

(단, 점 P_1은 제1사분면 위의 점이다.)



① 1 ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

103. 2005 수능(3점)

원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l이 있다. 두 점 $A(0,\ 2)$, $B(2\sqrt{3},\ 0)$에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자. 원점 O로부터 점 A'까지의 거리와 점 B'까지의 거리의 합 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$이 최대가 되는 θ의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.)

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

104. 2007 수능 (3점)

$\sin\alpha=\frac{3}{4}$일 때, $\cos2\alpha$의 값은?

① $-\frac{1}{32}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ $-\frac{1}{8}$
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

105. 2009 수능 (3점)

$\tan\theta=-\sqrt{2}$일 때, $\sin\theta\tan2\theta$의 값은? (단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

106. 2008 수능 (3점)

$0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin2x=2\cos x-2\cos^2 x$를 만족시키는 서로 다른 모든 x의 값의 합은?

① π ② $\frac{5}{4}\pi$ ③ $\frac{3}{2}\pi$
④ $\frac{7}{4}\pi$ ⑤ 2π

107. 2011 수능 (3점)

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$일때, $\sec\theta$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

1. 2009 교육청 (2점)

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$ 의 값은?

① 32 ② 16 ③ 8
④ 4 ⑤ 2

2. 2010 교육청 (2점)

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

3. 2009 교육청 (2점)

$\lim_{x \to -1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x+1}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

4. 2009 교육청 (2점)

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

5. 2009 평가원 (2점)

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$의 값은?

① 0 ② 3 ③ 6
④ 9 ⑤ 12

6. 2010 교육청 (2점)

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 2008 평가원 (2점)

$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2-x-3}+ax}{x+3}=b$가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

8. 2008 교육청 (2점)

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax-2}{x-1} & (x\neq 1) \\ b & (x=1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x 에서 연속일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

9. 2007 평가원 (2점)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=b$일 때, ab의 값은?

① 16 ② 4 ③ 1
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{16}$

10. 2010 평가원 (2점)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=14$일 때, $a+b$의 값은?

① -25 ② -23 ③ -21
④ -19 ⑤ -17

11. 2009 평가원 (2점)

$\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax-b}{x^3-1}=3$이 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

12. 2005 평가원 (2점)

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+ax}=b$ (단, $b\neq 0$)가 성립하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

13. 2005 평가원 (2점)

두 실수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$ 일 때, ab의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

14. 2006 교육청 (2점)

두 실수 a, b가 $\lim_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}+a}{x-2}=b$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

15. 2007 평가원 (2점)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to1}\dfrac{ax+b}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 일 때, ab의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

16. 2007 교육청 (2점)

$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{ax+3}-3}{x-3}=b$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

17. 2010 교육청(2점)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{ax^2+b}=\frac{1}{6}$일 때, $a-b$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

18. 2005 평가원 (2점)

방정식 $\cos x - x + 1 = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 실근이 존재하는 구간은?

① $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ② $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$
④ $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ ⑤ $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

19. 2006 교육청 (3점)

$\lim_{x\to1}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-bx+9}=3$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

20. 2007 교육청 (3점)

x에 대한 다항식 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=1$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

21. 2004 교육청 (3점)

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-b}{x-3}=2$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오.

22. 2006 평가원 (3점)

$\lim_{x\to0}\frac{20x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$의 값을 구하시오.

23. 2009 교육청 (3점)

$\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$의 값을 구하시오.

24. 2010 평가원 (3점)

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 -2일 때, $f(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

25. 2008 평가원 (3점)

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 2008 교육청 (3점)

다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$를 만족할 때, $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=a$이다. 이때, 상수 a의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

27. 2008 평가원 (2점)

다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

28. 2004 교육청 (3점)

<보기> 중 개구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $\cos\pi x-x=0$
ㄴ. $2^x+x-2=0$
ㄷ. $\log_2(x+1)+x-1=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

29. 2004 교육청 (3점)

폐구간 $[-5,\ 5]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x} & (x\neq 0)\\ k & (x=0)\end{cases}$$

가 $x=0$에서 연속일 때, 상수 k의 값은?

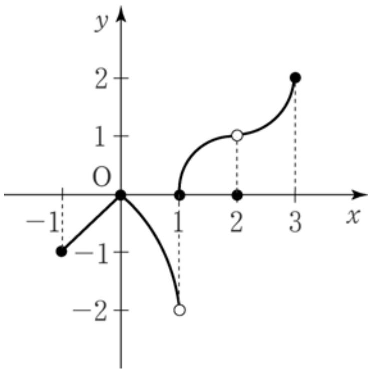
① 0 ② 1 ③ 5
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

30. 2004 평가원 (3점)

$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}$ 의 값을 구하시오.

31. 2004 평가원 (3점)

정의역이 $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$인 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재한다.

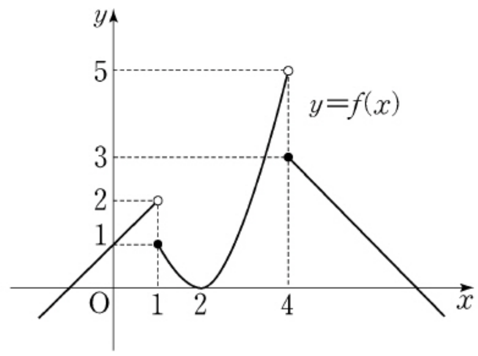
ㄴ. $\lim_{x\to 2} f(x)$가 존재한다.

ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

32. 2010 평가원 (3점)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

33. 2007 평가원 (3점)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(-1)=2$, $f(0)=0$, $f(1)=-2$를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

34. 2006 교육청 (3점)

이차함수 $f(x)=a(x-4)^2-4$에 대하여
로그 방정식 $\log_2 f(x)+\log_2\{f(x)-1\}=1$ 의 두 실근을 α, β
라고 할 때, $\lim\limits_{a\to\infty}\alpha\beta$ 의 값을 구하시오.

35. 2005 교육청 (3점)

$a>1$ 일 때, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x-a|-(a-1)}{x-1}$ 의 값은?

① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ -1 ⑤ -2

36. 2006 교육청 (3점)

함수 $f(x)=a[x]^3+b[x]^2$ $(a\neq0)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\alpha$ (α는 상수) 일 때, a와 b의 관계로 옳은 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $a-b=0$ ② $a+b=0$ ③ $2a-b=0$
④ $a+2b=0$ ⑤ $2a+b=0$

37. 2006 교육청 (3점)

다항함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$	(나) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{f(x)}=\dfrac{1}{4}$

이 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

38. 2008 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=x^2-1$, $g(x)=[x]$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은 ? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다)

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$
ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=-1$
ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}f(g(x))=-1$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

39. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+1}+4x+1}{x^n+b}$ 이 $x=1$에서 연속이 되도록 자연수 a, b의 값을 정할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

40. 2009 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+1 & (x \geq 1) \\ x+2 & (x<1) \end{cases}$, $g(x)=|3x-a|$에 대하여 함수 $y=(g \circ f)(x)$가 모든 실수에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

41. 2008 교육청 (3점)

모든 실수 x에 대하여 연속인 함수 $f(x)$는

$f(x+4)=f(x)$

를 만족시키고, 폐구간 $[0\ ,\ 4]$에서 다음과 같이 정의된다.

$f(x)=\begin{cases} 3x & (0 \leq x < 1) \\ x^2+ax+b & (1 \leq x \leq 4) \end{cases}$

이 때, $f(10)$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

42. 2007 평가원 (3점)

극한 $\lim_{x \to 0} \dfrac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)}=4$를 만족시키는 함수 $f(x)$를 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=4|x|$ ㄴ. $f(x)=2x^2+2x$

ㄷ. $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

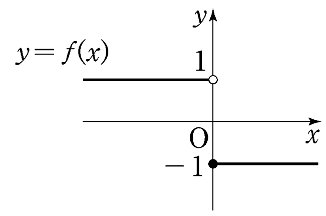
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

43. 2008 평가원 (3점)

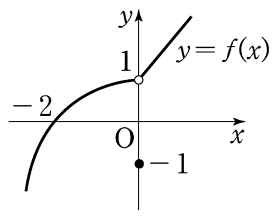
함수 $y=f(x)$의 그래프가 <보기>와 같이 주어질 때, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$이 $x=-1$에서 연속이 되는 경우만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

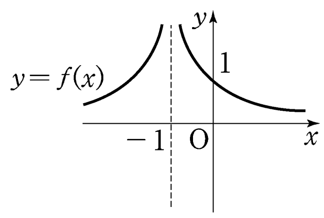
ㄱ.



ㄴ.



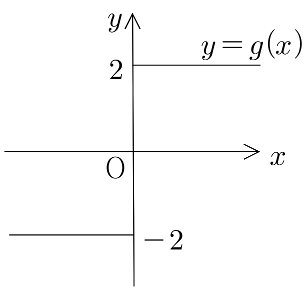
ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 2006 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=x^2$, $y=g(x)$에 대하여 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x \to 0} g(f(x))$의 값은?



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

45. 2007 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=|x-1|$, $g(x)=[x]$일 때, $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $y=h(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

[보 기]

ㄱ. $x=1$에서 함숫값은 0이다.
ㄴ. $x=1$에서 극한값은 1이다.
ㄷ. 모든 정수에서 불연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 2006 평가원 (3점)

집합 $\{x \mid 0<x<2\}$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (0<x\leq 1) \\ \dfrac{1}{x-1}-1 & (1<x<2) \end{cases}$$

일 때, 함수 $y=f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 함수 $g(x)$를 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $g(x)=(x-1)^2 \quad (0<x<2)$
ㄴ. $g(x)=(x-1)^3+1 \quad (0<x<2)$
ㄷ. $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & (0<x\leq 1) \\ (x-1)^3 & (1<x<2) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 2005 평가원 (3점)

함수 $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (|x|>1) \\ -x^2+ax+b & (|x|\leq 1) \end{cases}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a-b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

48. 2007 교육청 (3점)

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} & (x\neq 0) \\ f(0) & (x=0) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를
<보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=x$ ㄴ. $f(x)=x^3+5x+5$
ㄷ. $f(x)=(x+1)^{10}-9x$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

49. 2007 평가원 (3점)

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2x-|x|} & (x \neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$ 일 때,

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

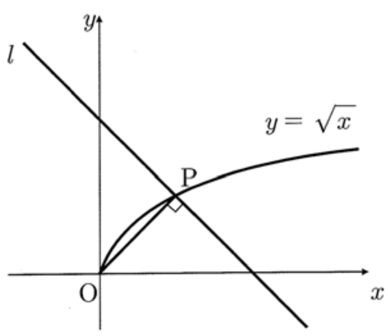
[보 기]

ㄱ. $f(-3)=1$이다.
ㄴ. $x>0$일 때, $f(x)=x$이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 a가 존재한다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

50. 2004 교육청 (4점)

그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$를 지나고 선분OP에 수직인 직선 l의 x절편과 y절편을 각각 $f(t)$, $g(t)$라고 할 때, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)-f(t)}{g(t)+f(t)}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점, $t\neq0$)

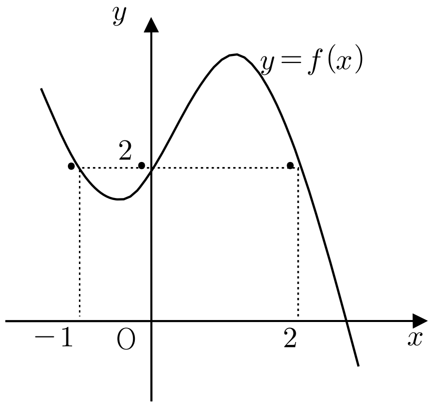


51. 2004 교육청 (4점)

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$는

$$f(-1)=f(0)=f(2)=2$$

를 만족한다. <보기> 중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르면?



[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{f(x)-2}$
ㄴ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-2}{f(x-2)}$
ㄷ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x-2)}{x-2}$

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

52. 2005 평가원 (3점)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.
ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

53. 2007 평가원 (3점)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$, $g(x)=|x|$일 때, $(g \circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

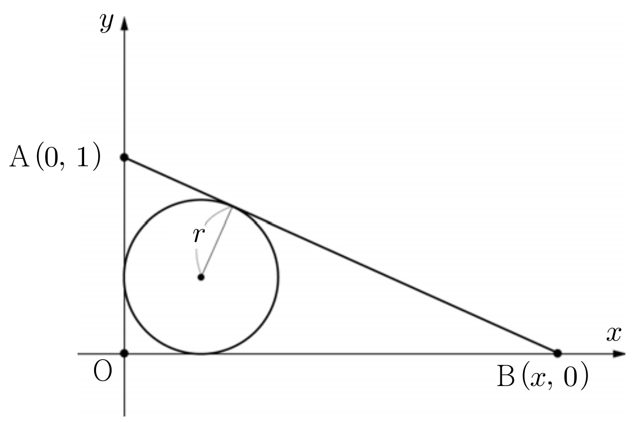
ㄴ. $(g \circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $(f \circ f)(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

54. 2007 교육청 (3점)

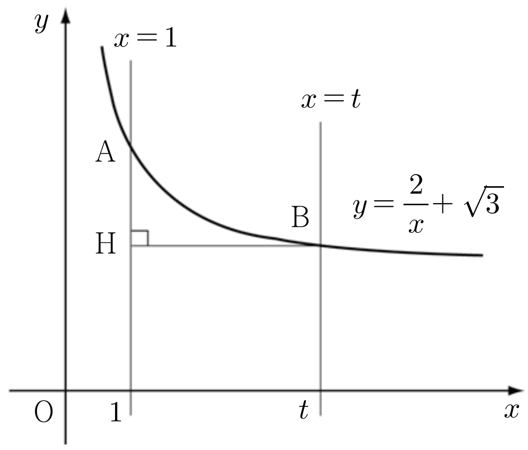
그림과 같이 세 점 A(0, 1), O(0, 0), B(x, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형과 그 삼각형에 내접하는 원이 있다. 점 B가 x축을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, △AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이 r에 대하여 $\dfrac{r}{x}$의 극한값은? (단, $x>0$)



① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

55. 2007 교육청 (3점) 2

곡선 $y=\dfrac{2}{x}+\sqrt{3}$ $(x>0)$과 두 직선 $x=1$, $x=t$의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 이 때, $\lim\limits_{t\to1}\dfrac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$의 값은? (단, $t>1$이다.)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

56. 2008 교육청 (3점)

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$가 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$도 존재한다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$도 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)$가 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))$도 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

57. 2007 교육청 (3점)

함수의 극한에 대한 설명으로 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)=1$이면 $f(0)=1$이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}f(x)=1$이면 $\lim_{x\to\infty}f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$이다.

ㄷ. $f(x)<g(x)<h(x)$이고 $\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}h(x)=0$이면 $\lim_{x\to0}g(x)=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

58. 2010 교육청(3점)

함수 $y=[f(x)]$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$를 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?58. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

[보 기]

ㄱ. $f(x)=\begin{cases}0 & (x\le0)\\ \frac{1}{2} & (x>0)\end{cases}$

ㄴ. $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le0)\\ 1-x^2 & (x>0)\end{cases}$

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}-1 & (x\le0)\\ -x^3+x^2-1 & (x>0)\end{cases}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

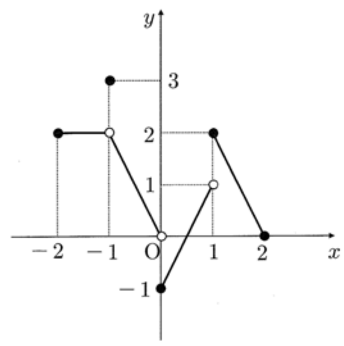
59. 2005 교육청 (3점)

$f(x)$ 가 다항함수일 때, 모든 실수에서 연속인 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1} & (x\neq1)\\ k & (x=1)\end{cases}$$

로 정의하자. $\lim_{x\to\infty}g(x)=2$ 일 때, $k+f(3)$ 의 값을 구하시오. (단, k는 상수)

60. 2005 교육청 (3점)



그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 있다. 위 그래프에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $-2\leqq x\leqq2$)

[보 기]

ㄱ. 불연속점의 개수는 3 개이다.
ㄴ. 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 3 개이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$는 폐구간 $[-2, 2]$에서 최댓값과 최솟값이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

61. 2005 평가원 (3점)

곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(t, \sqrt{t})$에서 점 $(1, 0)$까지의 거리를 d_1, 점 $(2, 0)$까지의 거리를 d_2라 할 때, $\lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{8}$ ⑤ 0

62. 2006 교육청 (3점)

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

63. 2005 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=\sin x$ 에 대하여 $\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))}{g(f(x))}$ 의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

64. 2007 교육청 (3점)

$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$ 의 값은?

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

65. 2009 교육청 (3점)

$\lim_{x\to 0}\frac{x-1+\cos x}{x+\sin x}$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

66. 2007 교육청 (3점)

$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

67. 2009 교육청 (3점)

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{px+q}-1}=2$가 성립하도록 하는 상수 p,q에 대하여 $p+q$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

68. 2006 교육청 (3점)

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos kx}{2\sin^2 x} = 1$ 을 만족하는 양수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

69. 2004 교육청 (3점)

$\lim_{x \to 0} 2x\cot x$ 의 값을 구하시오.

70. 2005 교육청 (3점)

$\lim_{x \to 0} \frac{ax\sin 2x}{\cos x - 1} = 8$ 일 때, a 의 값은?

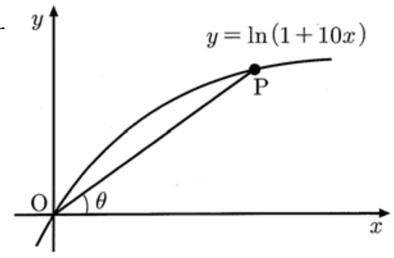
① -2 ② -1
③ 1 ④ 2
⑤ 3

71. 2008 교육청 (4점)

$\lim_{x \to 0} \frac{3x\sin(\sin 2x)}{1-\cos x}$ 의 값을 구하시오.

72. 2005 교육청 (3점)

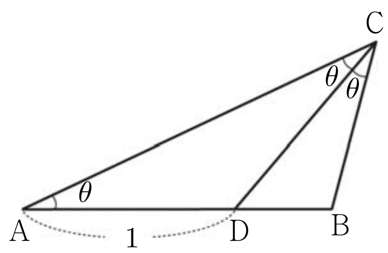
곡선 $y = \ln(1+10x)$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 한다. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때 $\tan\theta$ 의 극한값은?



① 1 ② 5
③ 10 ④ e
⑤ $\ln 10$

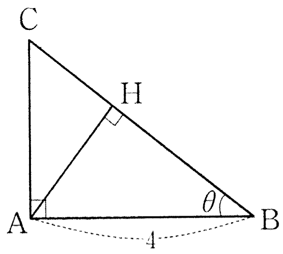
73. 2007 교육청 (3점)

삼각형 ABC에서 각 C의 이등분선이 변 AB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC가 이등변삼각형이고 $\overline{AD} = 1$일 때, $\lim_{\theta \to 0} \overline{AB}$의 값은?



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

74. 2007 교육청 (3점)

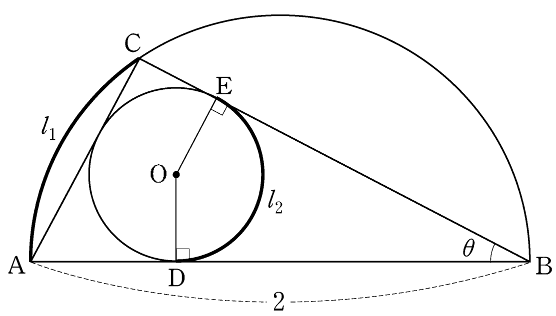


오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 에서 $\angle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = 4$ 이다. 꼭지점 A 로부터 빗변 BC 에 내린 수선의 발을 H, $\angle B = \theta$ 라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\overline{CH}}{\theta \cdot \ln(1+2\theta)}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ $\frac{\pi}{2}$
④ 2 ⑤ π

75. 2007 평가원 (3점)

그림과 같이 지름의 길이가 2이고, 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 하는 반원 위에 점 C가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 중심 O에서 선분 AB와 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. $\angle ABC = \theta$이고, 호 AC의 길이를 l_1, 호 DE의 길이를 l_2라 할 때, $\lim_{\theta \to 0} \frac{l_1}{l_2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)



① 1 ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$
④ $\frac{2}{\pi}$ ⑤ $\frac{3}{\pi}$

76. 2008 교육청 (3점)

$f(n) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx}$ 일 때,

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{f(k)}$ 의 값을 구하시오.

77. 2005 평가원 (3점)

연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\ln(1-x)} = 4$를 만족할 때,

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값은?

① -4 ② -1
③ 1 ④ 2
⑤ 4

78. 2007 평가원 (3점)

양수 a가 $\lim_{x \to 0} \frac{(a+12)^x - a^x}{x} = \ln 3$을 만족시킬 때, a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

79. 2008 교육청 (3점)

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x^2 - x}$ 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$
④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

80. 2010 평가원 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

81. 2010 교육청 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin x}+e^{x\sin 2x}-2}{x\ln(1+x)}$ 의 값은?

3

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

82. 2009 교육청 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x+b}{\ln(x+1)}=\ln3\,(a>0,\ a\neq1)$을 만족하는 상수 $a-b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

83. 2008 교육청 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)}{e^{4x}-1}$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ $\dfrac{1}{4}\ln(e+1)$ ⑤ $2\ln(e+16)$

84. 2008 교육청 (3점)

연속함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}=1004$를 만족할 때, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2008}$ ② $\dfrac{1}{1004}$ ③ 502
④ 1004 ⑤ 2008

85. 2004 교육청 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ 의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{e}{2}$
④ 2 ⑤ e

86. 2009 평가원 (3점)

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ $2e$

87. 2009 교육청 (3점)

연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q$이다. $p+q$의 값은? (단, $p>0$, $q>0$이다.)

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

88. 2006 평가원(4점)

두 양수 a, b가 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln 2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하시오.

89. 2004 평가원(3점)

실수에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0} xf(x)=1$을 만족할 때, $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$이 존재하는 $g(x)$를 <보기>에서 모두 고르면?

[보 기]
ㄱ. $g(x)=\sin x$
ㄴ. $g(x)=\cos x$
ㄷ. $g(x)=\ln(1+x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

90. 2004 평가원(3점)

실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$$

로 정의한다. $x=1$에서 $f(x)$가 연속일 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

91. 2008 교육청(3점)

함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}} & \left(x\neq\frac{\pi}{2}\right)\\ b & \left(x=\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$가 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속일 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

92. 2004 평가원(3점)

다음의 함수 중에서 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}$이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $f(x)=2x$
ㄴ. $f(x)=e^{2x}-1$
ㄷ. $f(x)=1-\cos x$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

93. 2008 평가원(3점)

함수 $f(x)=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x (x>1)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=e$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty} f(x)f(x+1)=e^2$

ㄷ. $k\geqq 2$일 때, $\lim_{x\to\infty} f(kx)=e^k$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

94. 2005 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0} f(x)=1$

ㄴ. $\lim_{x\to -1+0} f(x)=1$

ㄷ. $\lim_{x\to 2-0} f(x)=-\dfrac{1}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

95. 2010 평가원 (4점)

세 양수 a, b, c에 대하여

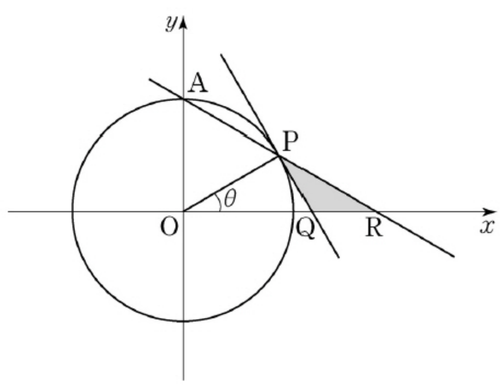
$$\lim_{x\to\infty} x^a \ln\left(b+\frac{c}{x^2}\right)=2$$

일 때, $a+b+c$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

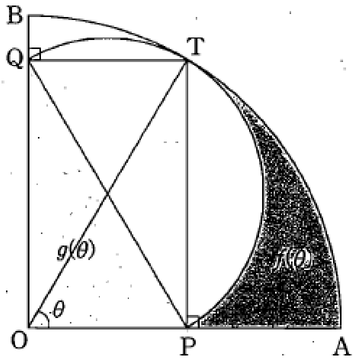
96. 2010 평가원 (4점)

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 $A(0,1)$과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle QOP=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 제1사분면 위의 점이다.)



97. 2010 평가원 (4점)

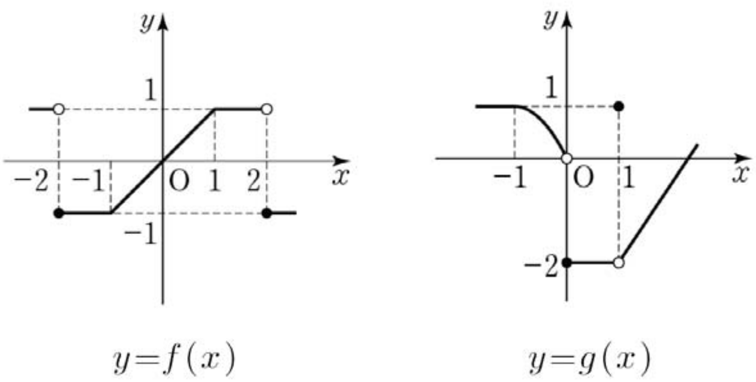
그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 T에서 선분 OA와 선분 OB에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고 $\angle\top=\theta$라 하자. 점 P와 점 Q를 지름의 양끝으로 하고 점 T를 지나는 반원을 C라 할 때, 반원 C의 호 TP, 선분 PA, 부채꼴 OAT의 호 AT로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 OPQ의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.



$\lim\limits_{\theta\to+0}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

98. 2009 평가원 (4점)

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 일부가 다음 그림과 같고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?



$y=f(x)$ $y=g(x)$

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}g(f(x))=-2$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2}g(f(x))=1$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4}g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)=-2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

99. 2009 교육청 (4점)

모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$인 함수 $f(x)$가 $f(x)=-2\left|x-\frac{1}{2}\right|+1\ \left(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}\right)$이고 함수 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\{1+f(x)\}^n-1}{\{1+f(x)\}^n+1}$일 때, $g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})$의 값은?

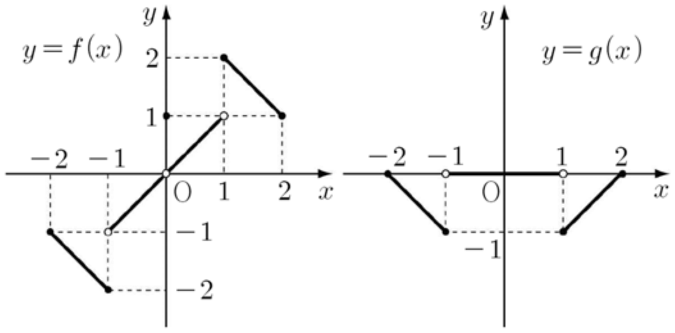
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

100. 2010 평가원 (4점)

x가 양수일 때, x보다 작은 자연수 중에서 소수의 개수를 $f(x)$라 하고, 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases}f(x) & (x>2f(x))\\ \frac{1}{f(x)} & (x\le2f(x))\end{cases}$ 라고 하자. 예를 들어, $f\left(\frac{7}{2}\right)=2$이고, $\frac{7}{2}<2f\left(\frac{7}{2}\right)$이므로 $g\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{1}{2}$이다. $\lim\limits_{x\to8+0}g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to8-0}g(x)=\beta$라고 할 때, $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하시오.

101. 2010 교육청 (4점)

$-2 \le x \le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x)) = -1$

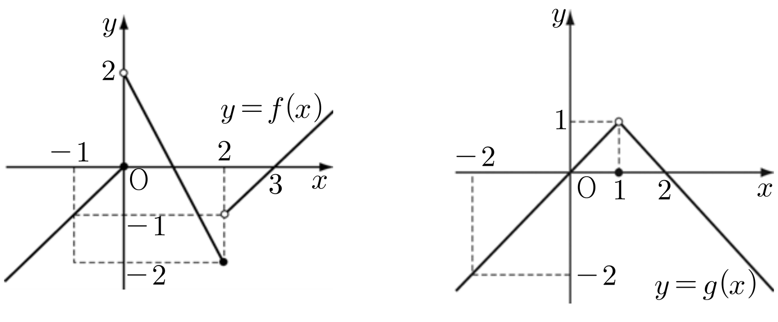
ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

102. 2008 교육청 (4점)

함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $g(f(0))=0$

ㄴ. $y=g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $-1 \le x \le 3$에서 $y=g(f(x))$가 불연속인 x의 값은 2개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

103. 2008 평가원 (4점)

서로 다른 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$y=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x \ge a) \end{cases}$$

가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 상수 a의 개수를 $N(f, g)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=x^2$, $g(x)=x+1$이면 $N(f, g)=2$이다.

ㄴ. $N(f, g)=N(g, f)$

ㄷ. $h(x)=x^3$이면 $N(f, g)=N(h\circ f, h\circ g)$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

104. 2008 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-1 & (x<1) \\ 1 & (x=1) \\ -x^2+2x+1 & (x>1) \end{cases}$에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1}|f(x)|=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 2+0} f(f(x))=-2$

ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$의 불연속점의 개수는 3개이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 2010 교육청 (4점)

두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-a|x|-|x|^n+b}{|x|^n+1}$$

가 모든 실수 x에서 연속일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a-b=1$
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.
ㄷ. $a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

106. 2010 평가원 (4점)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\neq 1) \\ 2 & (x=1) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)$
ㄴ. 함수 $g(x)=f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a가 존재한다.
ㄷ. 함수 $h(x)=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

107. 2009 교육청 (4점)

실수 x보다 작지 않은 최소의 정수를 $\langle x\rangle$로 나타내기로 하자. 예를 들어 $\langle 2\rangle=2$, $\langle 2.2\rangle=3$이다. 세 함수

$$f(x)=\langle x\rangle,\ g(x)=x^2\ ,\ h(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

에 대하여 <보기>의 합성함수 중에서 $x=0$에서 연속인 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $(f\circ g)(x)$ ㄴ. $(f\circ h)(x)$ ㄷ. $(h\circ f)(x)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

108. 2008 교육청 (4점)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[보 기]

ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{h\to 0}|f(2+h)-f(2-h)|=0$이다.
ㄴ. $f(x)=[x]$이면 $\lim_{h\to 0}|f(2+h)-f(2-h)|=1$이다.
ㄷ. $\lim_{h\to 0}|f(2+h)-f(2-h)|=0$이면 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

109. 2008 평가원 (4점)

함수 $f(x)$는 구간 $(-1, 1]$에서

$$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$$

이고, 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(x+2)$

이다. $a>1$에 대하여 함수 $g(x)$가

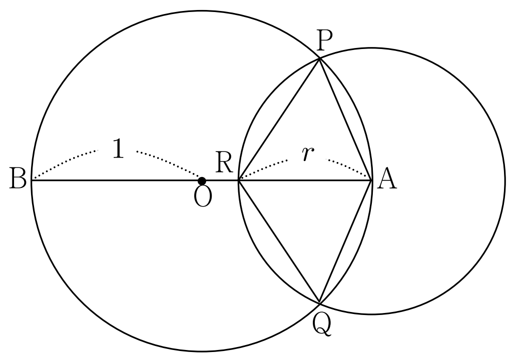
$$g(x)=\begin{cases} x & (x\neq 1) \\ a & (x=1) \end{cases}$$

일 때, 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=1$에서 연속이다. a의 최솟값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

110. 2006 교육청 (4점)

반지름의 길이가 1인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 S(r)라 할 때, $\lim_{r\to 2-0}\frac{S(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은? (단, $0<r<2$)



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

111. 2009 교육청 (4점)

모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & (|x|>1) \\ \dfrac{a}{1-x} & (|x|<1) \\ \dfrac{a}{2} & (|x|=1) \end{cases}$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 a의 값이 존재한다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=a$는 한 개의 실근을 갖는다. (단, $a\neq 0$)

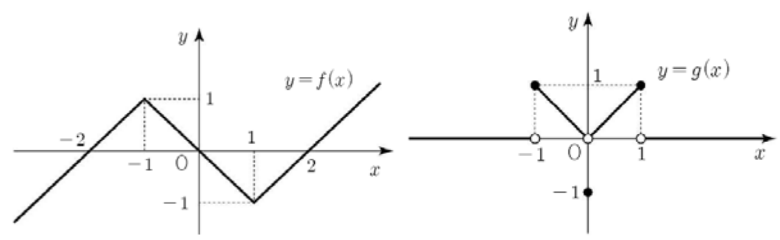
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

112. 2009 교육청 (4점)

그래프는 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x>1) \\ -x & (|x|\leq 1) \\ x+2 & (x<-1) \end{cases},\quad g(x)=\begin{cases} |x| & (0<|x|\leq 1) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$

를 각각 나타낸 것이다.



합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 불연속점의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

113. 2009 교육청 (4점)

함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.
(나) 모든 정수 n에 대하여 $f(2n)=1$이고 $f(2n+1)=-1$이다.

함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)$는 역함수가 존재하지 않는다.
ㄴ. 폐구간 $[1,\ 2]$에서 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
ㄷ. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=0$은 개구간 $(0,\ 2m)$에서 적어도 $2m$개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

114. 2009 교육청 (4점)

연속함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a$를 만족할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a\neq-1$인 상수이다.)

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^3-1}=\frac{a}{3}$
ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{x-f(x)}{x+f(x)}=\frac{1-a}{1+a}$
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$은 개구간 $(0,\ 1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

115. 2004 평가원 (4점)

실수 전체 집합에서 정의된 두 함수 f, g가

$$f(x)=\begin{cases}2 & (x>0)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \text{ 이고 } g(x)=\sin\pi x$$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $f(f(x))$는 상수함수이다.
ㄴ. $\lim_{x\to0}f(g(x))$의 값이 존재한다.
ㄷ. $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

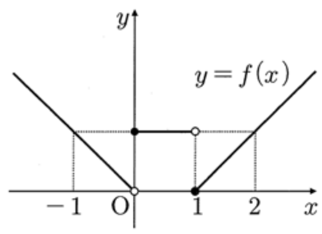
① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

116. 2005 교육청 (4점)

함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}-x & (x<0)\\ 1 & (0\leq x<1)\\ x-1 & (x\geq1)\end{cases}$$

이고, 그 그래프는 그림과 같다.



이 때, 다음의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=0$
ㄴ. $\lim_{x\to1+0}f(f(x))=1$
ㄷ. $\lim_{x\to1-0}f(f(x))=0$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

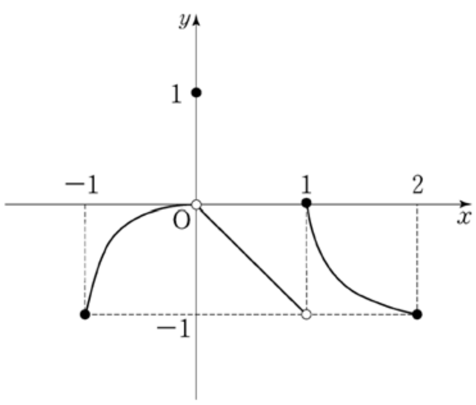
117. 2005 평가원 (4점)

두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=-x(x^2-a^2)$ 에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 이 단 하나의 실근을 갖는 a 의 최댓값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

118. 2009 평가원 (4점)

폐구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



폐구간 $[-1,\ 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)+|f(x)|}{2}\qquad h(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1}h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

119. 2009 평가원 (4점)

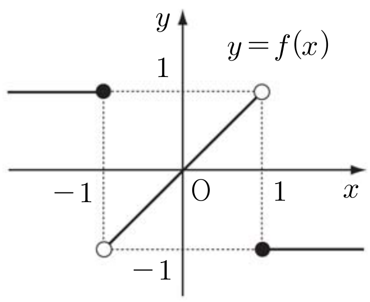
최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

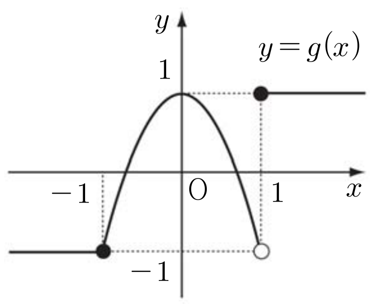
$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

120. 2007 교육청 (4점)

다음은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프이다.





<보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=-1$

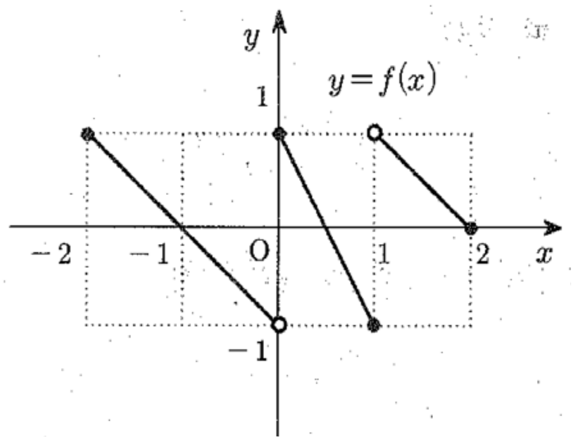
ㄴ. 함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

121. 2009 교육청 (4점)

폐구간 $[-2,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다.



함수 $g(x)=2\cos \pi x$ 일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$ 가 존재한다.

ㄴ. 함수 $f(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(g(x))$ 는 개구간 $(-2,\ 0)$ 에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

122. 2007 교육청 (4점)

개구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)=\left[-\log_5 x\right]$가 불연속이 되는 모든 점들의 x좌표의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{3}{4}$

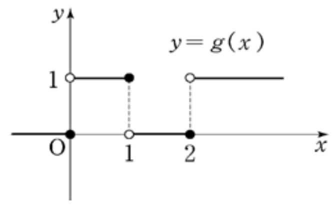
123. 2006 평가원 (4점)

함수 $f(x)$에 대하여 불연속점의 개수를 $N(f)$로 나타내자.

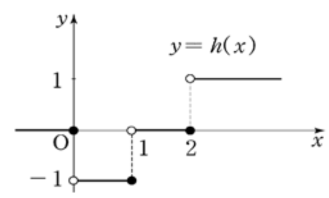
예를 들면 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x\leq 0) \end{cases}$ 이면 $N(f)=1$이다.

다음 두 함수 $g(x)$, $h(x)$에 대하여
$a_1=\mathrm{N}(g+h), a_2=\mathrm{N}(gh),\ a_3=\mathrm{N}(|h|)$라 할 때, a_1, a_2, a_3의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
(단, $(g+h)(x)=g(x)+h(x), (gh)(x)=g(x)h(x)$,
$|h|(x)=|h(x)|$이다.)

$g(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ 1 & (0<x\leq 1) \\ 0 & (1<x\leq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$



$h(x)=\begin{cases} 0 & (x\leq 0) \\ -1 & (0<x\leq 1) \\ 0 & (1<x\leq 2) \\ 1 & (x>2) \end{cases}$



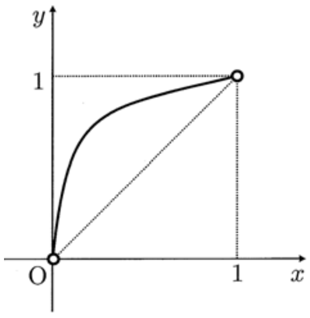
① $a_1=a_2=a_3$ ② $a_1<a_2=a_3$
③ $a_1=a_3<a_2$ ④ $a_2<a_1=a_3$
⑤ $a_3<a_1=a_2$

124. 2005 평가원 (4점)

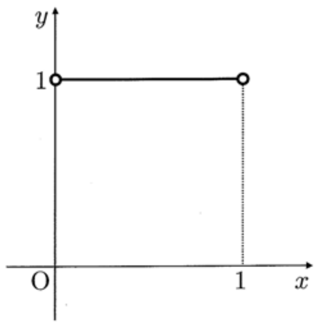
함수 $f(x)=x-[x]$ 와 $\{x\,|\,1\leq x\leq 4\}$에서 정의된 세 함수 $g_1(x)=x$, $g_2(x)=x^2$, $g_3(x)=\log(1+x^2)$ 이 있다. 합성함수 $y=f(g_i(x))$ $(i=1, 2, 3)$ 의 불연속점의 개수를 a_i 라 할 때, a_1, a_2, a_3 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

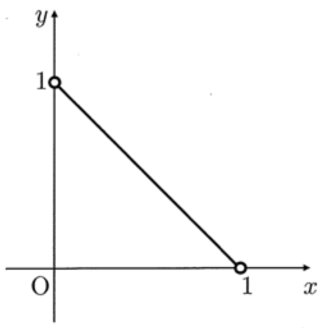
① $a_1<a_2<a_3$ ② $a_1<a_3<a_2$
③ $a_2<a_1<a_3$ ④ $a_3<a_2<a_1$
⑤ $a_3<a_1<a_2$

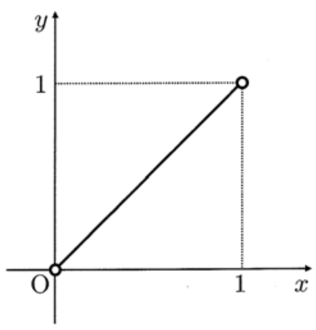
125. 2005 교육청 (4점)

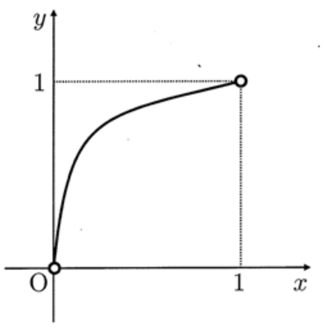


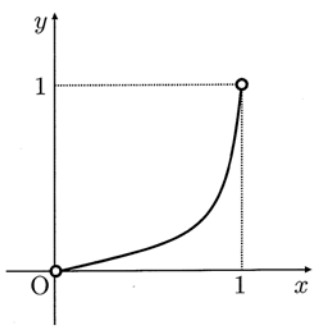
$0 < x < 1$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $f^n(x)$ 을 $f^1(x) = f(x)$, $f^{n+1}(x) = (f \circ f^n)(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 와 같이 정의하기로 한다. 이 때, $y = \lim_{n \to \infty} f^n(x)$ 의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


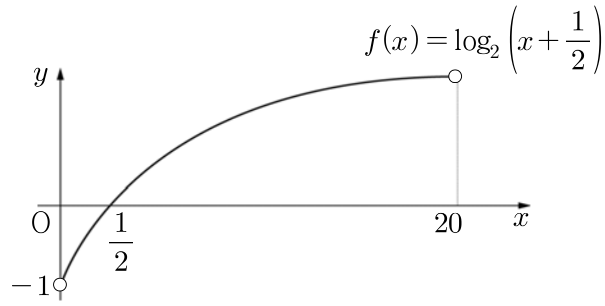
③


④


⑤


126. 2007 교육청 (4점)

$0 < x < 20$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$가 다음과 같다.



함수 $g(x) = [x]^2 - [x]$에 대하여 합성함수 $y = g(f(x))$의 불연속점의 개수는? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

127. 2004 교육청 (3점)

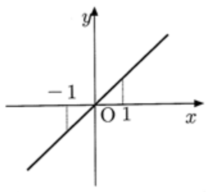
다음 두 조건을 만족하는 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(7)$의 값을 구하시오.

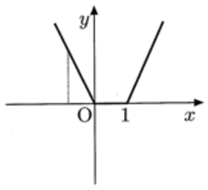
Ⅰ. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1$

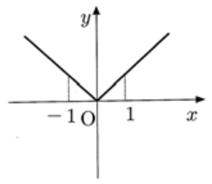
Ⅱ. $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}$

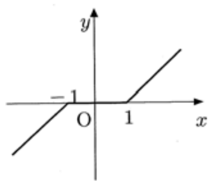
128. 2006 교육청 (4점)

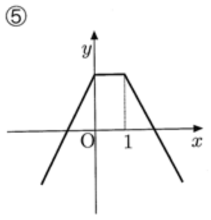
함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}$와 함수 $y=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=g(f(x))$가 모든 실수에 대하여 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?

①


②


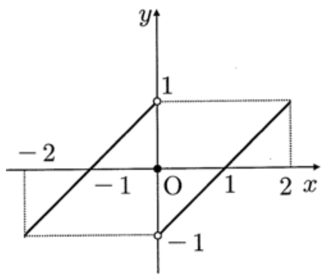
③


④


⑤


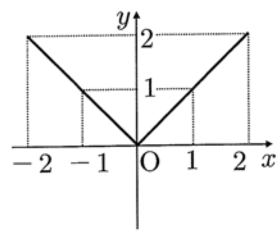
129. 2004 교육청 (4점)

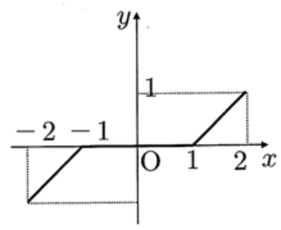
$f(0)=0$인 함수 $y=f(x)$ $(-2\leq x\leq 2)$의 그래프는 다음과 같다.

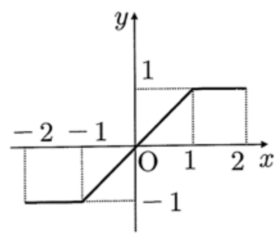


함수 $y=g(x)$ $(-2\leq x\leq 2)$의 그래프가 〈보기〉와 같이 주어질 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$가 구간 $[-2, 2]$에서 연속이 되는 경우를 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ.


ㄴ.


ㄷ.


① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

130. 2009 평가원(4점)

함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=0$이다.

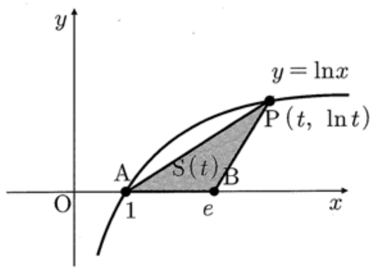
ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{f(x)}=1$이면 $\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\ln3$이다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}$ 이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

131. 2005 교육청(4점)

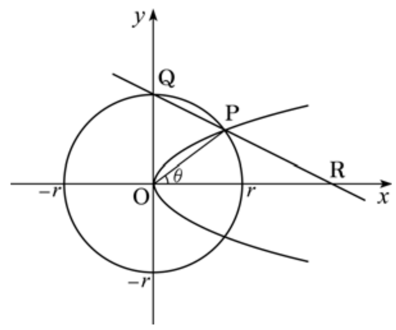
곡선 $y=\ln x$위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ \ln t)$와 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(e,\ 0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이를 $\mathrm{S}(t)$라 할 때, $\lim_{t\to1+0}\frac{\mathrm{S}(t)}{t-1}$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑)



① $e-1$ ② $2(e-1)$ ③ $\frac{e-1}{2}$
④ $\frac{e-1}{2e}$ ⑤ $\frac{e(e-1)}{2}$

132. 2007 교육청(4점)

좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2\ (r>0)$과 포물선 $y^2=x$의 교점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P 라 하고, 두 점 P, $\mathrm{Q}(0,\ r)$를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R 라 하자. 다음은 r의 값이 0에 한없이 가까워질 때, 점 R 가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하는 과정이다.



선분 OP 와 x축이 이루는 각의 크기를 θ라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점이므로 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$로 놓을 수 있다. 이때, 점 P는 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$r=\boxed{\text{(가)}}$ 이다. ⋯ ㉠

두 점 $\mathrm{P}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, $\mathrm{Q}(0,\ r)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+r$

이므로 점 R 의 좌표를 $\mathrm{R}(a,\ 0)$으로 놓으면

$a=\frac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}$ 이다. ⋯ ㉡

$r\to0$일 때, $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$\lim_{r\to0}a=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=\boxed{\text{(나)}}$ 이다.

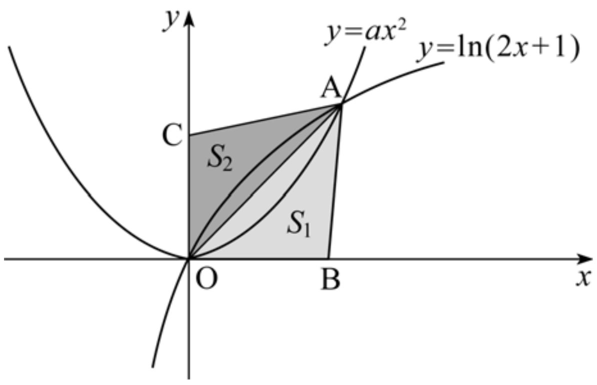
따라서 r의 값이 0에 한없이 가까워질 때, 점 R는 점 $(\boxed{\text{(나)}},\ 0)$에 한없이 가까워진다.

위 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)
①	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	1
②	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	2
③	$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	1
④	$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	2
⑤	$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	4

133. 2008 교육청(3점)

그림과 같이 두 곡선 $y=ax^2$ $(a>0)$, $y=\ln(2x+1)$이 제1 사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 두 점 B(1, 0), C(0, 1)에 대하여 삼각형 OAB의 넓이를 S_1, 삼각형 OAC의 넓이를 S_2라 하자. a의 값이 한없이 커질 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은 α에 한없이 가까워진다. α의 값은?



① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ e

134. 2006 평가원(3점)

함수 $f(x)$가 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+x)}=1$
을 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{f(x)}=0$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)+x}{\ln(1+x)}=2$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{\ln(1+x)}=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

135. 2008 평가원(4점)

$a>0,\ b>0,\ a\neq1,\ b\neq1$일 때, 함수

$$f(x)=\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $1<a<b$이면 $x>1$인 모든 x에 대하여 $f(x)>1$이다.

ㄴ. $b<a<1$이면 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이다.

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\log_a b$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

136. 2007 평가원(4점)

두 실수 $a=\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t}$, $b=\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}$에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a & (x\geq0) \\ b & (x<0)\end{cases}$$

일 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(1)=\dfrac{1}{2}$ ㄴ. $f(f(1))=2$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(f(x))=\lim_{x\to1+0}f(f(x))$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

137. 2007 평가원(4점)

다항함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)=e^{-x}\sin x+g(x)$가

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=1$

을 만족시킬 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

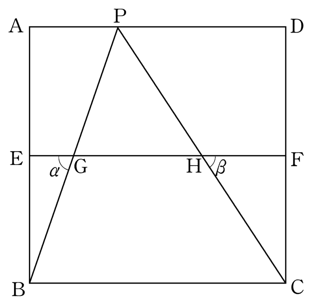
ㄱ. $g(0)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2}=1$

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

138. 2005 평가원(4점)



오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $ABCD$에서 변 AB의 중점을 E, 변 CD의 중점을 F라 하자. 선분 AD위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 P에 대하여 선분 BP와 선분 EF의 교점을 G, 선분 CP와 선분 EF의 교점을 H라 하자. $\angle BGE=\alpha$, $\angle CHF=\beta$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

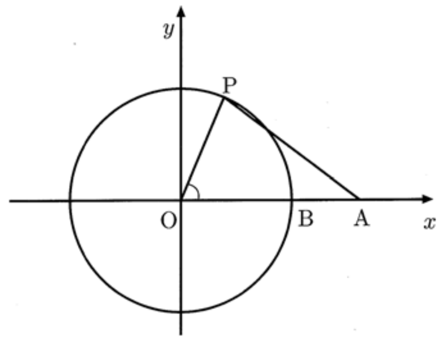
ㄱ. $\overline{GH}$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

ㄴ. $\alpha+\beta$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

ㄷ. $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

139. 2005 평가원(4점)

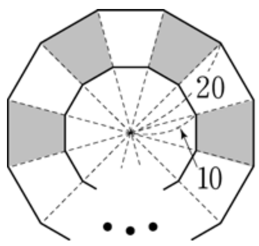


그림과 같이 제 1 사분면에서 중심이 원점이고 반지름이 1 인 원 위를 움직이는 점 P에 대하여 $2\angle PAO=\angle POA$가 되도록 x축 위에 점 A를 잡는다. 이 때, $\lim_{P\to B}\overline{OA}$의 값은? (단, $B(1,0)$)

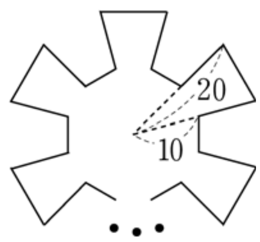
① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

140. 2005 평가원(4점)

[그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정 $2n$각형에서 큰 정 $2n$각형의 꼭지점, 작은 정 $2n$각형의 꼭지점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정 $2n$각형의 꼭지점까지의 거리는 각각 10, 20 이다. [그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림2]와 같은 도형의 넓이를 S_n이라 하자. $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n$의 값을 구하시오.



[그림1]



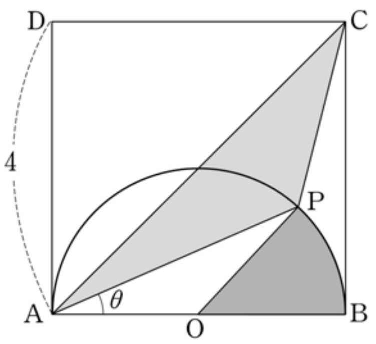
[그림2]

141. 2005 평가원(4점)

그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $ABCD$에서 변 AB의 중점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 반원 위에 점 P가있다. $\angle BAP=\theta$일 때 삼각형 APC의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 OBP의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{8-f(\theta)}{g(\theta)}=\alpha$라 할 때, 10α의 값을

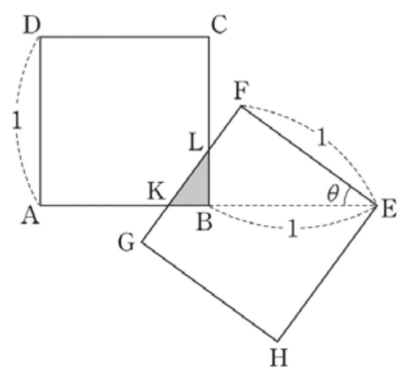
구하시오. $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



142. 2008 평가원(4점)

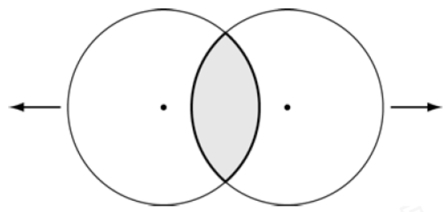
그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{BE}=1$인 점E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle BEF=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}=\dfrac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)



143. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 두 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 있다. 이 두 원 내부의 공통부분의 길이를 l, 두 원의 교점을 잇는 선분의 길이를 m이라 하자. 두 원의 중심사이의 거리가 2에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{l}{m}$의 극한값은?



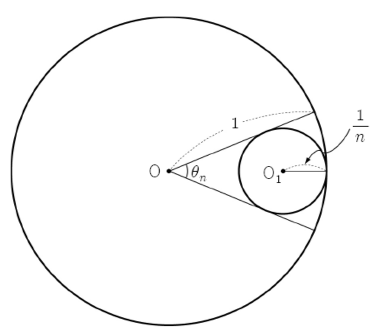
① 1　　② $\dfrac{3}{2}$　　③2

④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤3

144. 2009 교육청(4점)

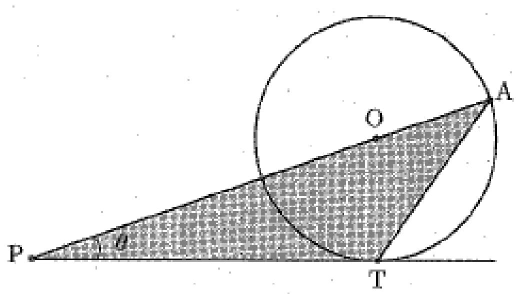
그림과 같이 중심이 O이고, 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 이 원에 내접하는 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{n}$인 원 O_1을 그리고, 중심 O에서 원 O_1에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{14n^2+1}{2n+1}\right)\theta_n$의 값을 구하시오.

(단, $n>3$)



145. 2009 교육청(4점)

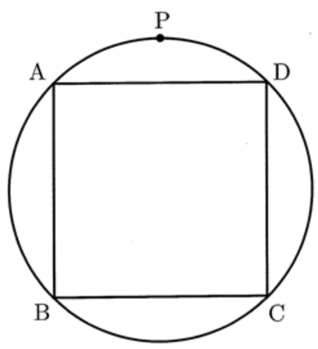
그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 점 O인 원이 있다. 원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 한 접선의 접점을 T라 하자. 선분 PO의 연장선이 원과 만나는 점을 A라 하고, $\angle \mathrm{APT}=\theta$ 라 하자. $\triangle \mathrm{APT}$의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{S(\theta)}{\theta-\frac{1}{2}}$ 의 값은?



① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

146. 2006 교육청(4점)

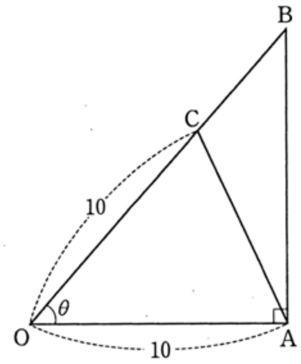
그림과 같이 원에 내접하는 정사각형 ABCD와 점 B를 포함하지 않는 호 AD 위에 동점 P가 있다. 동점 P가 점 D에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{(\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AP}})}{\overline{\mathrm{DP}}}$ 의 극한값을 α라고 한다. 이 때, $100\alpha^2$의 값을 구하시오.



147. 2009 평가원(4점)

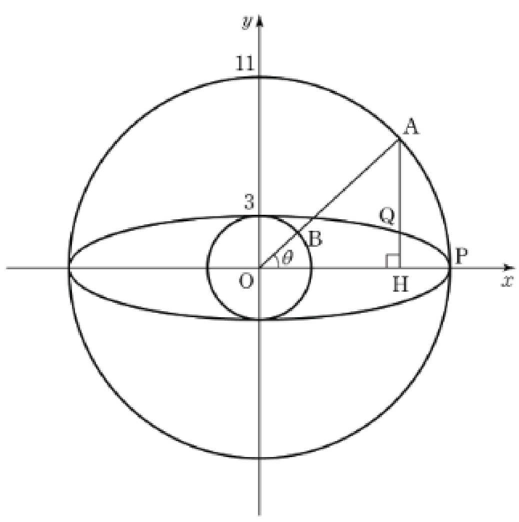
그림과 같이 양수 θ에 대하여

$\angle AOB=\theta$, $\angle OAB=\frac{\pi}{2}$, $\overline{OA}=10$ 인 직각삼각형 OAB가 있다. 변 OB 위에 있는 $\overline{OC}=10$인 점 C에 대하여 삼각형 ABC의 둘레의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{\theta}$ 의 값을 구하시오.



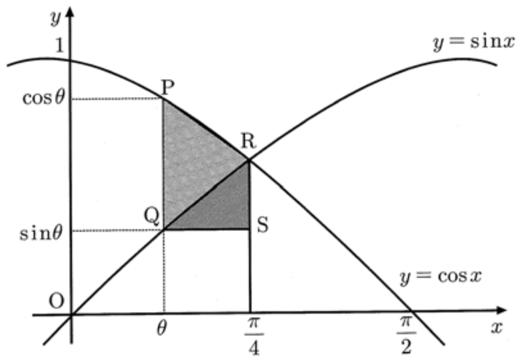
148. 2009 평가원(4점)

좌표평면 위에 타원 $\dfrac{x^2}{11^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$과 점 $\mathrm{P}(11, 0)$이 있고, 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 11인 원 C_1과 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 C_2가 있다. 제1사분면에 있는 원 C_1 위의 점 A에 대하여 선분 OA와 원 C_2의 교점을 B, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 타원의 교점을 Q, 선분 OA가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 삼각형 ABQ의 넓이를 S_1이라 하고, 삼각형 APQ의 넓이를 S_2라 하자. $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{S_2}{\theta^2\cdot S_1}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



149. 2006 평가원(4점)

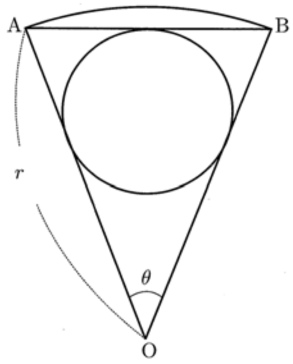
$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$일 때, 곡선 $y = \cos x$ 위의 점 $\mathrm{P}(\theta, \cos\theta)$를 지나고 x축에 수직인 직선과 곡선 $y = \sin x$ 의 교점을 Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 $\mathrm{R}\left(\dfrac{\pi}{4}, \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$를 지나고 x축에 수직인 직선의 교점을 S라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QSR의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$의 값은?



① $2\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{3}$
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

150. 2006 평가원(4점)

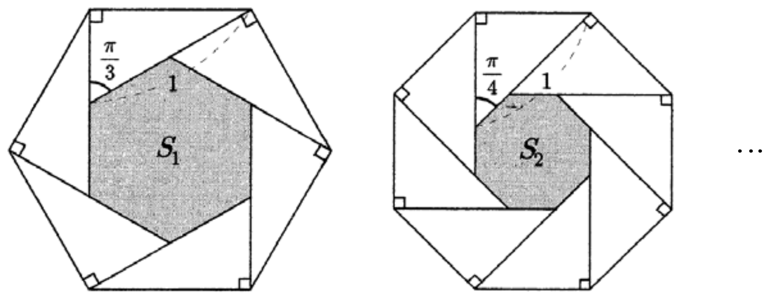
그림과 같이 중심각의 크기가 θ이고 반지름의 길이가 r인 부채꼴 OAB가 있다. 부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1, 삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{l_2}{l_1}$의 값은?



① $\dfrac{\pi}{4}$
② $\dfrac{\pi}{2}$
③ π
④ $\dfrac{3}{2}\pi$
⑤ 2π

151. 2010 교육청(4점)

[그림 1]과 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\dfrac{\pi}{3}$인 6개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\dfrac{\pi}{4}$인 8개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S_2라 하자.



[그림 1] [그림 2]

이와 같이 빗변의 길이가 1이고, 한 내각이 $\dfrac{\pi}{n}$인 $2n$개의 합동인 직각삼각형들로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n^2 S_n$의 값은?

① $\dfrac{1}{10}\pi^3$ ② $\dfrac{1}{8}\pi^3$ ③ $\dfrac{1}{6}\pi^3$
④ $\dfrac{1}{4}\pi^3$ ⑤ $\dfrac{1}{2}\pi^3$

152. 2005 수능 (2점)

두 상수 a, b가 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$을 만족시킬 때, $a+b$의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2
④ 0 ⑤ 2

153. 2006 수능 (2점)

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}-2}$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

154. 2009 수능 (2점)

두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-3}=\frac{1}{4}$일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

155. 2007 수능 (2점)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-12}{x-3} & (x\neq 3)\\ a & (x=3)\end{cases}$$

가 모든 실수 x에서 연속일 때, a의 값은?

① 10 ② 9 ③ 8
④ 7 ⑤ 6

156. 2004 수능 (3점)

두 실수 a, b가 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}=\frac{2}{5}$를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

157. 2008 수능 (3점)

함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

158. 2009 수능 (3점)

실수 a에 대하여 집합

$\{ x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x \text{는 실수} \}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

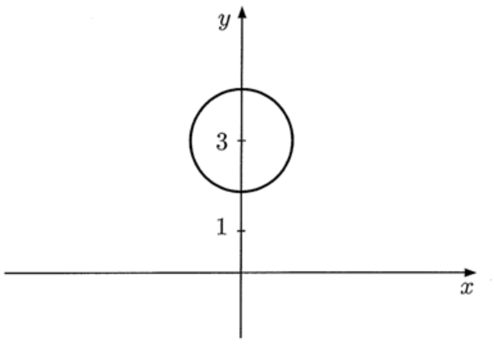
ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a) \neq \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

159. 2006 수능 (4점)

좌표평면에서 중심이 $(0, 3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to 1+0} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

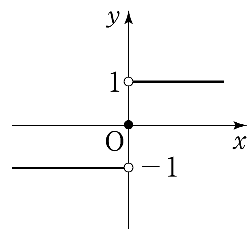
160. 2005 수능 (3점)

모든 실수에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $y=x^k f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 가장 작은 자연수 k를 $N(f)$로 나타내자.

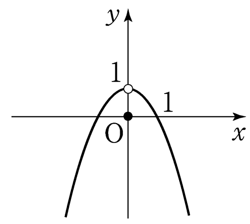
예를 들면 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$이면 $\mathrm{N}(f)=2$이다.

다음 함수 $g_i(i=1,\ 2,\ 3)$에 대하여 $N(g_i)=a_i$라 할 때, a_i의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

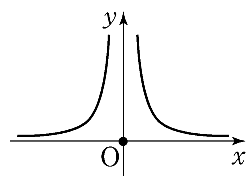
$g_1(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$



$g_2(x)=\begin{cases} -x^2+1 & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$



$g_3(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$

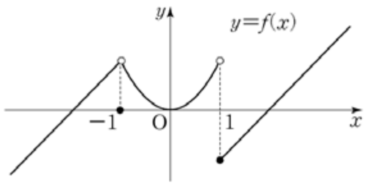


① $a_1=a_2<a_3$ ② $a_1<a_2=a_3$
③ $a_1=a_2=a_3$ ④ $a_2=a_3<a_1$
⑤ $a_3<a_1=a_2$

161. 2011 수능 (3점)

함수

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x\geq 1) \end{cases}$$



에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

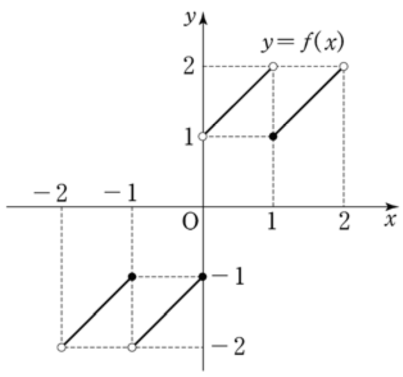
ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$가 불연속인 점은 1개다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a는 없다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

162. 2007 수능 (4점)

개구간 $(-2, 2)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



개구간 $(-2,\ 2)$에서 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+f(-x)$$

로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)$가 존재한다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0}g(x)$가 존재한다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

163. 2008 수능 (4점)

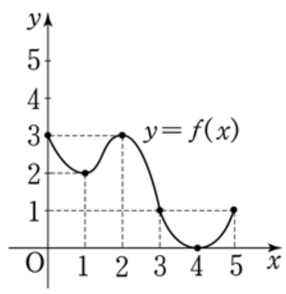
폐구간 $[0, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \{f(x)\}^2 & (0\leq x\leq 3) \\ (f\circ f)(x) & (3<x\leq 5) \end{cases}$$

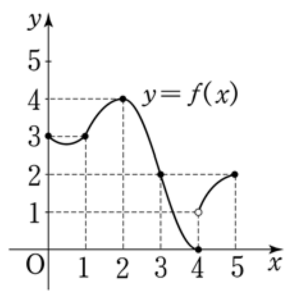
라 하자. 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0, 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

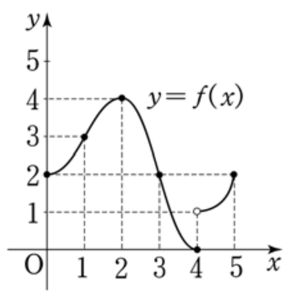
ㄱ.



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

164. 2006 수능 (3점)

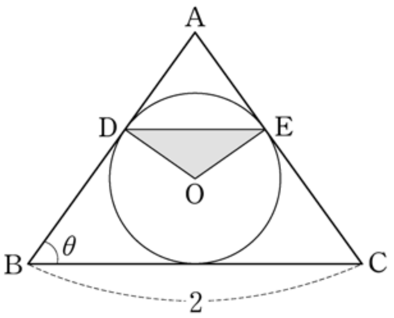
$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sec 2\theta - 1}{\sec\theta - 1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

165. 2007 수능 (3점)

그림과 같이 양수 θ에 대하여 $\angle ABC = \angle ACB = \theta$이고 $\overline{BC} = 2$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원의 중심을 O, 선분 AB와 내접원이 만나는 점을 D, 선분 AC와 내접원이 만나는 점을 E라 하자.

삼각형 OED의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$의 값은?



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

166. 2005 수능 (3점)

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\tan x}$의 값은?

① 4 ② 2 ③ 1
④ -1 ⑤ -2

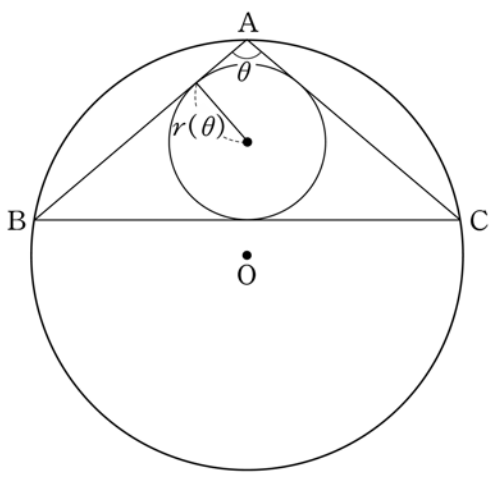
167. 2007 수능 (3점)

$\lim_{x \to a} \frac{2^x - 1}{3\sin(x-a)} = b\ln 2$를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

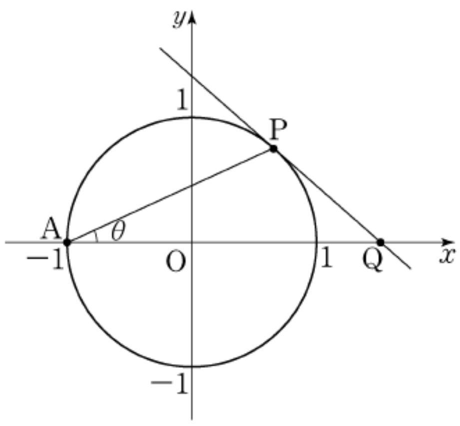
168. 2008 수능 (4점)

반지름의 길이가 1인 원 O 위에 점 A가 있다. 그림과 같이 양수 θ에 대하여 원 O 위의 두 점 B, C를 $\angle BAC = \theta$이고 $\overline{AB} = \overline{AC}$가 되도록 잡는다. 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to \pi - 0} \frac{r(\theta)}{(\pi - \theta)^2} = \frac{q}{p}$이다. $p^2 + q^2$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



169. 2009 수능 (3점)

그림과 같이 원 $x^2+y^{2=1}$위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 A$(-1,\ 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값은? (단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)



① 2 ② $\sqrt{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

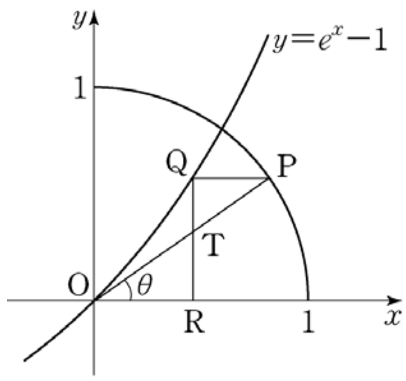
④ 1 ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

170. 2011 수능 (3점)

좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$라 하자.

점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 OTR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오.



1. 2007 교육청 (2점)

함수 $f(x)=3x^2-2x$에 대하여 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율과 $x=1$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

2. 2004 평가원 (2점)

함수 $f(x)=x^3+x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-10}{h}$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

3. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=x^3-x+1 \quad (-1\leq x\leq a)$에 대하여 집합 $A=\left\{a \,\middle|\, \frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(a)\right\}$일 때, 집합 A의 원소의 개수는?

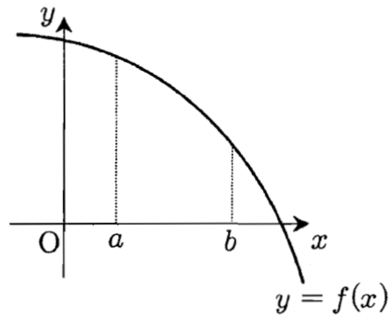
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

4. 2004 교육청 (3점)

자연수 n에 대하여 구간 $[n, n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $n+1$이다. 이때, 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1, 100]$에서의 평균변화율을 구하시오.

5. 2008 교육청 (3점)

다음 그림은 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $0<a<b$)

< 보 기 >

ㄱ. $\frac{f'(a)}{b}>\frac{f'(b)}{a}$

ㄴ. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$

ㄷ. $f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 2004 평가원(3점)

삼차함수 $f(x)$가 다음 두 식을 만족시킨다.

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)^2}=3, \quad f(3)=5$$

이 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

7. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=2x^2+5x+1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$ 값을 구하시오.

8. 2007 평가원 (3점)

함수 $f(x)$가 $f(x+2)-f(2)=x^3+6x^2+14x$를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값을 구하시오.

9. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=x^2-5x+6$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}=-36$을 만족하는 실수 k의 값을 구하시오.

10. 2010 평가원 (3점)

함수 $f(x)=2x^4-3x+1$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

11. 2007 평가원 (3점)

함수 $f(x)=x^3+5x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값을 구하시오.

12. 2006 교육청 (3점)

두 함수 $f(x)=x+x^3+x^5$, $g(x)=x^2+x^4+x^6$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

13. 2006 교육청 (3점)

함수 $f(x)=x^4+x^2+1$에 대하여 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

14. 2009 교육청 (3점)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때, $\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 4
④ 8 ⑤ 12

15. 2006 교육청 (3점)

미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to2}\frac{f(f(x))}{x-2}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

16. 2008 평가원 (3점)

자연수 a, b에 대하여

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+b}+2x-1}{x^n+1}\,(x>0)$이 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+10b$의 값을 구하시오.

17. 2006 평가원(3점)

세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이면 $g'(0)=0$이다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $|h(2x)-h(x)|\leqq x^2$이면 $h'(0)=0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

18. 2004 평가원 (3점)

함수 $f(x)=x(4x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 9 ② 11 ③ 13
④ 15 ⑤ 17

19. 2008 교육청 (3점)

함수 $f(x)=(2x^2-3x)(x^2-x+2)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

20. 2005 평가원 (3점)

함수 $f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값을 구하시오.

21. 2009 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\begin{cases} 2x+x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0)\end{cases}$에 대하여 $f'(0)$ 의 값은?

]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

22. 2007 교육청 (3점)

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$일 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.

23. 2004 평가원 (3점)

다항함수 $f(x)=(x^3+3x+1)(x^2-2x+3)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수를 구하시오.

24. 2004 평가원 (3점)

함수 $f(x)=x(4x^2+5)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

① 9
② 11
③ 13
④ 15
⑤ 17

25. 2010 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{10}\frac{x^n}{n}$ 에 대하여 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{q}{p}$ 일 때, $q-p$ 의 값은? (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

① 508
② 509
③ 510
④ 511
⑤ 512

26. 2009 평가원 (3점)

함수 $f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$ 에 대하여 $f'(-1)$ 값을 구하시오.

27. 2004 교육청 (3점)

다음은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수를 구하는 과정이다.

> Δx를 x의 증분, Δy를 y의 증분이라 하면
>
> $\Delta y=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)$
>
> $\quad=f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)$
>
> $\qquad+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)$
>
> $=\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x+\Delta x)$
>
> $+f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}$
>
> 따라서, $y=f(x)g(x)$의 도함수
>
> $y'=\lim_{\Delta x\to 0}$ $\boxed{(가)}$
>
> $=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)$
>
> $\quad+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$
>
> $=$ $\boxed{(나)}$ $g(x)+f(x)$ $\boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$f'(x)$	$g'(x)$
②	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$g'(x)$	$f'(x)$
③	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{f(x)}{g'(x)}$	$\frac{g(x)}{f'(x)}$
④	$\frac{g(x)}{f(x)}$	$g'(x)$	$f'(x)$
⑤	$\frac{g(x)}{f(x)}$	$f'(x)$	$g'(x)$

28. 2010 교육청 (3점)

이차함수 $f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)가 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}=5$ 를 만족시킬 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오.

29. 2007 교육청 (3점)

함수 $f(x)=x^{\ln x}(x>0)$에 대하여 $f'(e)$의 값은?

① 0　② $\frac{e}{2}$　③ 2
④ e　⑤ 4

30. 2008 교육청 (3점)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=2,\ f'(1)=3$
(나) $\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}=3$

$f''(2)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

31. 2008 평가원 (3점)

좌표평면에서 곡선

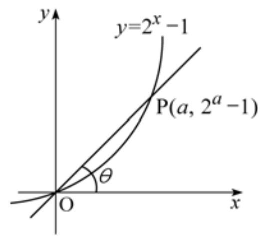
$$y=\cos^n x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2},\ n=2, 3, 4, \ldots\right)$$

의 변곡점의 y좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$　② $\frac{1}{e}$　③ $\frac{1}{\sqrt{e}}$
④ $\frac{1}{2e}$　⑤ $\frac{1}{\sqrt{2e}}$

32. 2006 교육청 (3점)

곡선 $y=2^x-1$위의 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a-1)$과 원점 O에 대하여 직선 OP와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 이때, $\lim_{a\to0}\tan\theta$의 값은?



① ln2　② ln2+1　③ 2ln2
④ 2ln2+1　⑤ ln2+2

33. 2009 평가원 (3점)

함수 $f(x)=\ln(e^x-1)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 양수 a에 대하여 $\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}$의 값은?

① 2　② 4　③ 6
④ 8　⑤ 10

34. 2008 교육청 (3점)

두 다항함수 $f(x), g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$를 만족하고 $h(x)=f(x)+xg(x)$로 정의할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $h(0)=0$
ㄴ. $h'(-x)=h'(x)$
ㄷ. $h(x)$의 이계도함수 $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가질 때, 방정식 $h''(x)-x=0$의 실근은 적어도 3개이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

35. 2004 교육청 (3점)

다음은 함수의 증가, 감소를 이용하여 두 수 2004^{2005}와 2005^{2004}의 대소관계를 알아보는 과정이다. (단, e는 자연로그의 밑이다.)

> 함수 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}\ (x > 0)$에 대하여
> $x > e$일 때 $f'(x)$ [(가)] 0 이므로
> $f(2004)$ [(나)] $f(2005)$
> 따라서 2004^{2005} [(다)] 2005^{2004}

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 부등호를 순서대로 적은 것은?

① >, >, > ② >, <, < ③ >, <, >
④ <, >, > ⑤ <, >, <

36. 2009 교육청 (3점)

함수 $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 최솟값은 $-1-\sqrt{2}$이다.

ㄴ. $x = \dfrac{\pi}{4}$에서 최댓값을 갖는다.

ㄷ. $x = \dfrac{5}{4}\pi$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

37. 2007 교육청 (3점)

두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = a\sin x + bx + 1$$

이 극값을 가질 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $a > b$ ② $a < b$ ③ $a^2 > b^2$
④ $a^2 < b^2$ ⑤ $a^2 = b^2$

38. 2006 평가원 (3점)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 $f(-1) = -1,\ f(0) = 1,\ f(1) = 0$을 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(a) = \dfrac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,\ 1)$에 두 개 이상 존재한다.

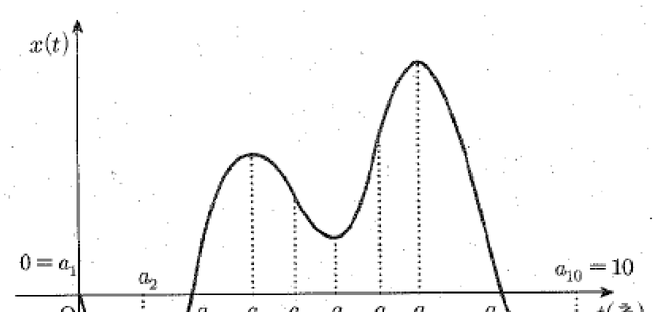
ㄴ. $f'(b) = -1$인 실수 b가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $f''(c) = 0$인 실수 c가 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

39. 2009 교육청 (3점)

그림은 원점을 출발하여 10초 동안 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 나타낸 것이다. $x(t)$가 이계도함수를 가질 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 함수 $x(t)$는 $t = a_3,\ a_5,\ a_7,\ a_9$에서만 변곡점을 갖는다.)



[보 기]

ㄱ. 점 P는 출발 후 원점을 2번 지난다.

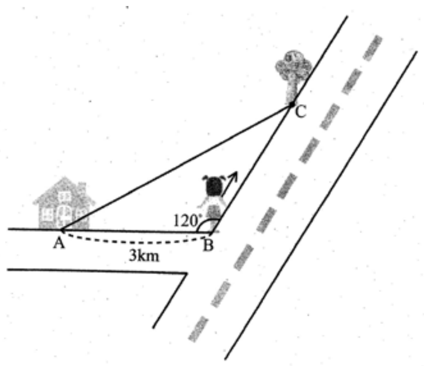
ㄴ. 점 P는 출발하고 나서 10초 동안 운동 방향이 4번 바뀐다.

ㄷ. 9개의 개구간 $I_n = (a_n,\ a_{n+1})\ (n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$중 점 P의 속도가 증가하는 구간의 개수는 5개다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ, ㄷ

40. 2008 교육청 (3점)

아래 [그림]과 같이 갑은 A 지점에 있는 집으로부터 $3\,km$ 떨어진 보행자 도로의 교차 지점 B를 출발하여 사잇각이 120°가 되는 다른 쪽 도로를 따라 $\frac{28}{13}\,km/h$의 속도로 걸어가고 있다. 도로 위의 한 지점 C를 통과하는 순간의 $\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{15}{4}\sqrt{3}\,km^2$이다.



[그림]

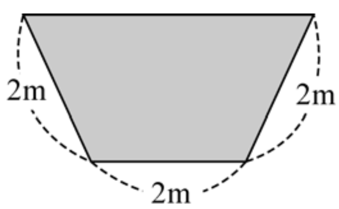
이 때, $\overline{AC}$의 순간변화율(km/h)은?

① 2 ② $\frac{15}{7}$ ③ $\frac{16}{7}$

④ $\frac{17}{7}$ ⑤ 3

41. 2006 교육청 (3점)

그림과 같이 단면이 등변사다리꼴 모양인 물이 흐르는 통로를 만들려고 한다. 통로의 단면에서 밑변과 등변의 길이가 모두 2m이고 단면의 넓이가 최대가 되도록 설계할 때, 단면의 최대 넓이는 몇 m^2인가?



① 6 ② $3\sqrt{3}$

③ $4\sqrt{2}$ ④ $4+\sqrt{3}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

42. 2004 평가원 (3점)

$0<x<\frac{\pi}{4}$인 모든 x에 대하여 부등식 $\tan 2x > ax$를 만족하는 a의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

43. 2005 평가원(3점)

등차수열 $\{x_n\}$과 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 수열 $\{f'(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 등차수열이다.

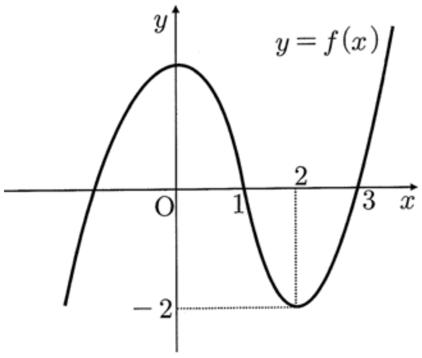
ㄷ. $f(0)=3$, $f(2)=5$, $f(4)=9$이면 $f(6)=15$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 2005 교육청 (3점)

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다. $g(x)=xf(x)$ 라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $f'(2)=0$)



[보 기]

ㄱ. $f(1)+g'(1)>0$

ㄴ. $g(2)g'(2)>0$

ㄷ. $f(3)+g'(3)>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

45. 2005 평가원 (3점)

다항함수 $y=f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 로부터 얻을 수 있는 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$ 에 대하여, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, 모든 자연수 n 에 대하여 $f'(n)\neq 0$ 이다.)

[보 기]

ㄱ. $f(x)=2x^3+3x^2+1$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}=\frac{1}{6}$ 이다.

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$ 은 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$ 이 수렴하면 $x\to\infty$ 일 때 $f'(x)$ 는 발산한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

46. 2005 평가원 (3점)

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $y=f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 7 까지 변할 때의 평균변화율은 0 이다.

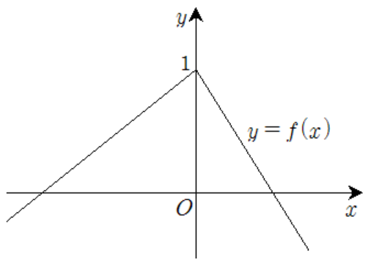
ㄴ. 두 실수 a, b 에 대하여 $a+b=6$ 이면 $f'(a)+f'(b)=0$ 이다.

ㄷ. $\sum_{k=1}^{15}f'(k-3)=0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

47. 2007 교육청 (3점)

함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, <보기> 에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



[보 기]

ㄱ. $x<0$일 때, $f'(x)$는 항상 양수이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 연속함수이다.

ㄷ. 함수 $y=\frac{1}{1+xf(x)}$는 $x=0$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

48. 2005 평가원 (3점)

함수 $f(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

49. 2010 평가원 (3점)

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 개구간 $(0, 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오.

50. 2004 평가원(3점)

함수 $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+bx & (x \geqq 1) \\ 2x^2+1 & (x<1) \end{cases}$

가 모든 실수 x에서 미분 가능하도록 상수 a, b를 정할 때, ab의 값은?

① -5 ② -3 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

51. 2004 교육청(3점)

다음 <보기>의 함수 중 $x=0$에서 미분가능한 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$

ㄴ. $g(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & (x \geqq 0) \\ 2x+1 & (x<0) \end{cases}$

ㄷ. $h(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & (x \geqq 0) \\ -x^2+x-1 & (x<0) \end{cases}$

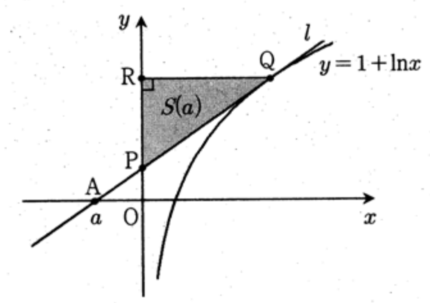
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

52. 2010 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \leqq 3) \\ -\frac{1}{2}(x-a)^2+b & (x>3) \end{cases}$ 이 모든 실수에서 미분가능할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

53. 2010 교육청 (3점)

그림과 같이 점 $A(a, 0)$에서 곡선 $y=1+\ln x$에 그은 접선이 y축과 만나는 점을 P, 접점을 Q라 하자. 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 R, $\triangle PQR$의 넓이를 $S(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<0$)



[보 기]

ㄱ. $\overline{PR}=1$

ㄴ. $\lim_{a \to -0} S(a)=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\lim_{a \to -\infty} \frac{S(a)}{a}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

54. 2007 교육청(3점)

다음은 함수 $f(x)=|x(x-k)|$의 $x=0$에서 연속성과 미분가능성을 조사하는 과정이다.

(i) $x=0$에서 $f(x)$의 연속성

$f(0)=0$이고

$\lim_{h \to 0}\{f(0+h)-f(0)\}=\lim_{h \to 0}|h(h-k)|=$ (가)

따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 k의 값에 관계없이 연속이다.

(ii) $x=0$에서 $f(x)$의 미분가능성

$$\lim_{h \to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \to +0}\frac{|h(h-k)|}{h}=|k|$$

$$\lim_{h \to -0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h \to -0}\frac{|h(h-k)|}{h}= \text{(나)}$$

따라서 $f(x)$는 $k=0$인 경우에만 $x=0$에서 (다)

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	0	$\lvert k\rvert$	미분가능하다.
②	0	$-\lvert k\rvert$	미분가능하지 않다.
③	0	$-\lvert k\rvert$	미분가능하다.
④	$-k$	$\lvert k\rvert$	미분가능하다.
⑤	$-k$	$-\lvert k\rvert$	미분가능하지 않다.

55. 2006 교육청(3점)

다항식 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$ 이고, $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지를 $bx+3$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

56. 2005 교육청(3점)

곡선 $y=(x^2-1)(2x+1)$ 위의 점 $(1, 0)$에서 접하는 직선의 기울기는?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

57. 2005 교육청(3점)

미분 가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 P(2, 1)에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{f\left(2+\frac{1}{3n}\right)-f(2)\right\}$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

58. 2006 교육청(3점)

미분가능한 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-3$을 만족하고 $g(x)=(x-1)^2$ 이다. 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 x 좌표가 2인 점에서의 접선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

59. 2010 교육청 (3점)

$F'(x)=f(x)$인 이차함수 $y=f(x)$와 임의의 두 실수 a, c에 대하여 서로 다른 두 점 A$(a, F(a))$, B$(a+c, F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기와 같은 값을 갖는 것은?

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{c}{n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$
③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+c+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(c+\frac{ak}{n}\right)\frac{1}{2n}$
⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+\frac{k}{n}\right)\frac{2}{n}$

60. 2007 평가원(3점)

양수 a에 대하여 점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선과 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=3x^3$에 그은 접선이 서로 평행할 때, $90a$의 값을 구하시오.

61. 2006 평가원(3점)

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha$일 때, 30α의 값을 구하시오.

62. 2008 평가원(3점)

삼차함수 $f(x)=x(x-1)(ax+1)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 접점으로 하는 접선을 l이라 하자. 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는?

① $-1<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $0<a<1$

② $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

③ $-1<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$

④ $-1<a<0$ 또는 $\frac{1}{3}<a<1$

⑤ $-2<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}<a<2$

63. 2008 교육청(3점)

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=(x-1)^3$이다.
함수 $f(x)$의 극값을 M, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ f(0))$, $\mathrm{B}(2,\ f(2))$에서 접하는 두 접선의 교점의 y좌표를 N이라 할 때, $16(M-N)$의 값을 구하시오.

64. 2009 평가원(3점)

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접할 때, 상수 a의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5
④ -3 ⑤ -1

65. 2009 평가원(3점)

곡선 $y=x^3+2$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ -6)$에서의 접선의방정식을 $y=mx+n$이라 할 때, 세 수 $a,\ m,\ n$의 합을 구하시오.

66. 2006 평가원(3점)

함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+2$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

67. 2006 평가원(3점)

두 상수 $a,\ b$에 대하여 함수 $f(x)=x^3+ax^2+9x+b$가 $x=1$에서 극댓값 0을 가질 때, ab의 값을 구하시오.

68. 2005 평가원(3점)

실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 x, y 에 대하여
$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
(나) $f'(0)=8$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖고 $x=b$ 에서 극솟값을 가질 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

69. 2008 평가원(3점)

모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다.
(나) $f(1)=5$
(다) $1<f'(1)<7$

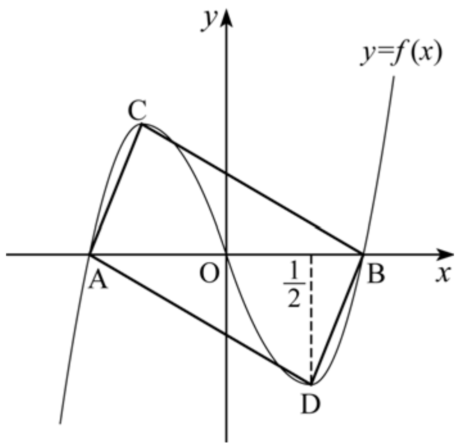
함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오.

70. 2008 교육청(3점)

함수 $f(x)=x^3-3x^2+20$ 의 극솟값을 구하시오.

71. 2008 교육청(3점)

그림은 원점 O에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $f(x)$의 극대, 극소인 점을 각각 C, D라 하자.



점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 사각형 ADBC의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

72. 2008 교육청(3점)

구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+10$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

73. 2009 교육청(3점)

삼차함수 $f(x)=-x^3+3x+1$ 이 $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극값을 가질 때, 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ 를 지나는 직선의 기울기는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

74. 2004 평가원(3점)

삼차함수 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1$ 이 극값을 갖지 않도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1\leq a\leq 2$ ② $0\leq a\leq 3$ ③ $1\leq a\leq 4$
④ $2\leq a\leq 5$ ⑤ $3\leq a\leq 6$

75. 2009 교육청(3점)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3-(b-1)x^2-(a-2)x-1$ 이 극값을 갖지 않을 때, 좌표평면에서 점 (a, b)가 나타내는 영역의 넓이는?

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

76. 2005 교육청(3점)

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 와 이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c$ 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면 $y=g(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. $f(x)$가 $x=-1$ 과 $x=1$ 에서 극값을 가지면 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖는다.
ㄷ. $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 $y=g(x)$ 의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

77. 2009 평가원(3점)

$x=0$에서 극댓값을 갖는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $|f(x)|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $f(|x|)$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $f(x)-x^2|x|$은 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

78. 2008 교육청(3점)

폐구간 $[-1, 3]$에서 정의된 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

79. 2010 교육청 (3점)

함수 $f(x)=\ln\frac{x}{k}$ (k는 자연수)의 역함수를 $y=g(x)$라 할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 사이의 최단 거리를 l_k라 하자. $l_k \geq 3\sqrt{2}$ 를 만족시키는 k의 최솟값은? (단, $e=2.7$ 로 계산한다.)

① 11　② 10　③ 9
④ 8　⑤ 7

80. 2010 평가원 (3점)

곡선 $y=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2$의 변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있을 때, 양수 a의 값은?

① e　② $\frac{5}{4}e$　③ $\frac{3}{2}e$
④ $\frac{7}{4}e$　⑤ $2e$

81. 2009 평가원(3점)

좌표평면 위에 점 $A(0,\ 2)$가 있다. $0<t<2$일 때, 원점 O와 직선 $y=2$ 위의 점 $P(t,\ 2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

82. 2009 교육청(3점)

모든 실수 x에 대하여 부등식
$3x^4-8x^3-6x^2+24x \geq k-2\sin\frac{\pi}{2}x$가 성립할 때, 상수 k의 최댓값은?

① -23　② -22　③ -21
④ -20　⑤ -19

83. 2004 평가원(3점)

미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 $x=a$와 $x=b$에서 만나고, $a<c<b$ 인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대가 된다. 다음 중 항상 옳은 것은?

① $f'(c)=-g'(c)$　② $f'(c)=g'(c)$
③ $f'(a)=g'(b)$　④ $f'(b)=g'(b)$
⑤ $f'(a)=g'(a)$

84. 2008 평가원(3점)

구간 $[-2,\ 0]$에서 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x+8$의 최댓값을 구하시오.

85. 2007 교육청(3점)

다음은 세 변의 길이가 모두 다른 예각삼각형에서 각 변을 같은 길이만큼 짧게 했을 때, 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재함을 증명한 것이다.

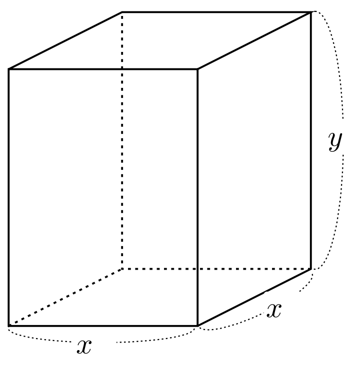
> 예각삼각형의 세 변의 길이를 a, b, $c\,(a<b<c)$로 놓으면 $a^2+b^2>c^2$ 이다.
> 그런데 x 만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는 $a-x$, $b-x$, $c-x$ 이므로 $0<x<$ (가) 이다.
> 따라서 등식 $(a-x)^2+(b-x)^2=(c-x)^2$ 을 만족시키는 실수 x 가 $0<x<$ (가) 에서 존재함을 보이면 된다.
> $f(x)=(a-x)^2+(b-x)^2-(c-x)^2$ 으로 놓으면
> $f(x)$ 는 연속함수이고, $f(0)$ (나) 0,
> f(가)(다) 0 이므로
> 중간값의 정리에 의해 $0<x<$ (가) 에서 $f(x)=0$ 인 x 가 존재한다.
> 그러므로 짧아진 세 선분을 각 변으로 하는 직각삼각형이 존재한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?]

① $a+b-c$, $<$, $>$
② $a+b-c$, $>$, $<$
③ $a+b+c$, $<$, $>$
④ a, $<$, $>$
⑤ a, $>$, $<$

86. 2004 교육청(3점)

그림과 같은 직육면체에서 모든 모서리의 길이의 합이36일 때, 부피의 최댓값을 구하시오.



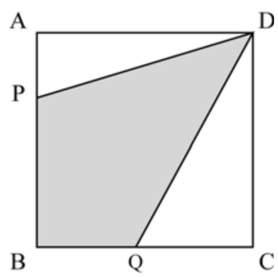
87. 2008 평가원(3점)

수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $P(t)=\frac{1}{3}t^3+4t-\frac{2}{3}$, $Q(t)=2t^2-10$이다.

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 구하시오.

88. 2008 교육청(3점)

그림과 같이 한 변의 길이가 20인 정사각형 ABCD에서 점 P는 A에서 출발하여 변 AB위를 매초 2씩 움직여 B까지, 점 Q는 B에서 P와 동시에 출발하여 변 BC위를 매초 3씩 움직여 C까지 간다. 이 때, 사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$ 이 되는 순간의 삼각형 PBQ의 넓이의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.

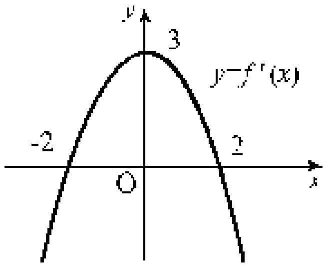


89. 2004 평가원(3점)

함수 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-10$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 되었다. 방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근만을 갖도록 하는 모든 a 의 값의 합을 구하시오.

90. 2004 교육청(3점)

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(0)=0$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=kx$가 서로 다른 세 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는?

① $k>2$ ② $k>3$ ③ $k<3$
④ $-4<k<4$ ⑤ $k<-2$ 또는 $k>2$

91. 2004 교육청(3점)

다음은 구간 $(0,1)$에서 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-4$와 $g(x)=x^2-2x-3$의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

<증명>
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$은 모든 실수 x에 대하여 연속이다.
$h(0)\cdot h(1)$ (가) 0이므로, 중간값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
모든 실수 x에 대하여 $h'(x)$ (나) 0이므로
$h(x)$는 (다) 이다.
따라서 $h(x)=0$은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다. 즉, 구간 $(0,1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

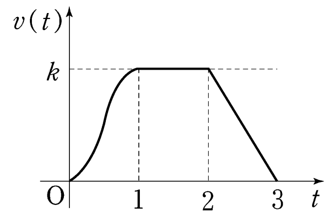
	(가)	(나)	(다)
①	$<$	$>$	증가함수
②	$<$	$>$	감소함수
③	$<$	$<$	감소함수
④	$>$	$<$	감소함수
⑤	$>$	$>$	증가함수

92. 2006 평가원(3점)

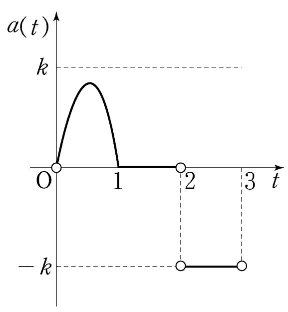
두 함수 $f(x)=x^4-4x+a$, $g(x)=-x^2+2x-a$의 그래프가 오직 한 점에서 만날 때, a의 값은?

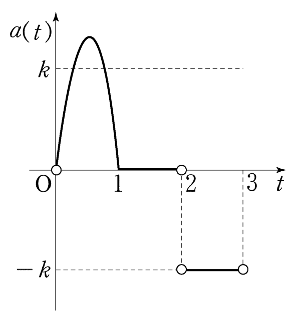
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

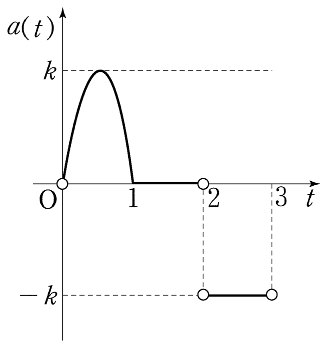
93. 2005 평가원(3점)

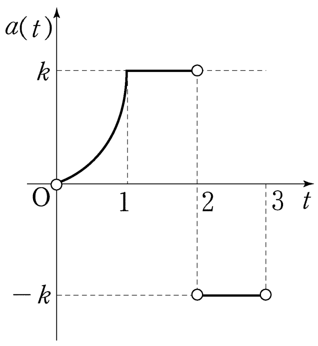


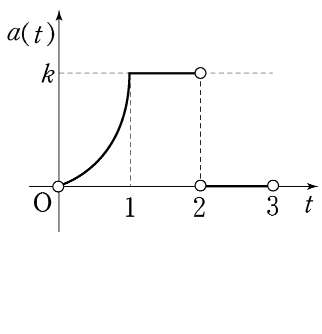
오른쪽 그림은 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$를 나타내는 그래프이다. $v(t)$는 $t=2$를 제외한 개구간 $(0,3)$에서 미분가능한 함수이고, $v(t)$의 그래프는 개구간 $(0,1)$에서 원점과 점 $(1,k)$를 잇는 직선과 한 점에서 만난다. 점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$를 나타내는 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


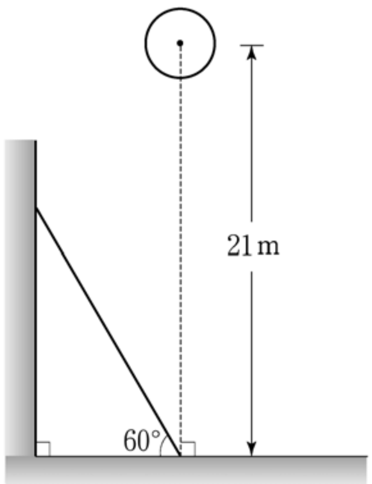
94. 2006 교육청(3점)

가로와 세로의 길이가 각각 9cm, 4cm인 직사각형이 있다. 이 직사각형의 가로와 세로의 길이가 각각 매초 0.2cm, 0.3cm 씩 늘어난다고 할 때, 이 직사각형이 정사각형이 되는 순간의 넓이의 변화율은 몇 cm^2/초인가?

① 9.5 ② 10 ③ 10.5
④ 11 ⑤ 11.5

95. 2006 교육청(3점)

그림과 같이 편평한 바닥에 60°로 기울어진 경사면과 반지름의 길이가 0.5m인 공이 있다. 이 공의 중심은 경사면과 바닥이 만나는 점에서 바닥에 수직으로 높이가 21m인 위치에 있다.

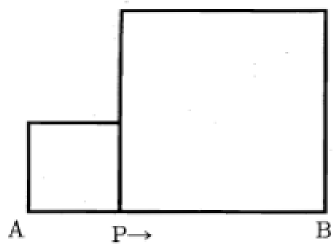


이 공을 자유낙하 시킬 때, t초 후 공의 중심의 높이 $h(t)$는 $h(t)=21-5t^2$(m) 라고 한다. 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간, 공의 속도는?
(단, 경사면의 두께와 공기의 저항은 무시한다.)

① -20m/초 ② -17m/초 ③ -15m/초
④ -12m/초 ⑤ -10m/초

96. 2008 교육청(4점)

그림과 같이 선분 AB 위의 점 P가 매초 $2cm$의 일정한 속도로 점 A에서 출발하여 점 B로 움직이고 있다. 선분 AP, 선분 PB를 각각 한 변으로 하는 두 정사각형의 넓이의 합을 S라 하자. 점 P가 점 A를 출방한 후 8초가 되는 순간의 넓이 S의 변화율을 x (cm^2/sec)라 할 때, x를 구하시오. (단, 선분 AB의 길이는 $20cm$이다.)



97. 2009 교육청(4점)

직선 $x=a$가 곡선 $f(x)=x^3-ax^2-100x+10$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지날 때, 정수 a의 개수를 구하시오.

98. 2010 평가원 (4점)

서로 다른 두 실수 α, β가 사차방정식 $f(x)=0$의 근일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이면 다항식 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

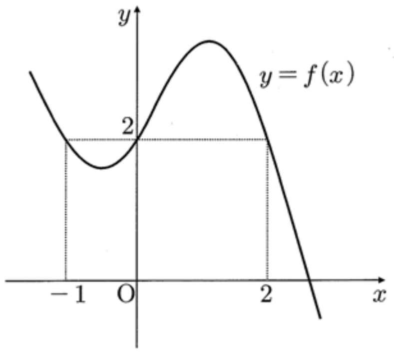
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

99. 2004 교육청 (4점)

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$는

$$f(-1)=f(0)=f(2)=2$$

를 만족한다. 다음 중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르면?



[보 기]

ㄱ. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{f(x)-2}$

ㄴ. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)-2}{f(x-2)}$

ㄷ. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x-2)}{x-2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

100. 2010 평가원 (4점)

최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = 4$

101. 2010 평가원 (4점)

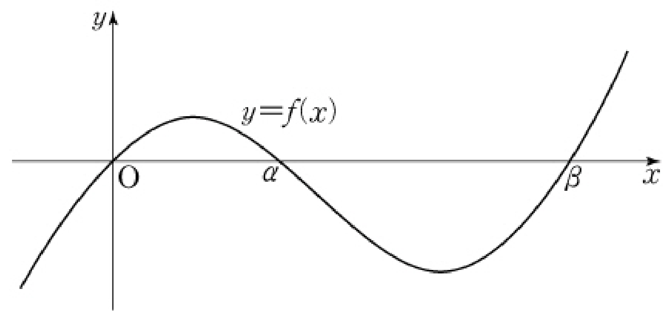
삼차함수 $f(x)=x(x-\alpha)(x-\beta)$ $(0<\alpha<\beta)$와 두 실수 a, b에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(a)+(b-a)f'(x)$$

라고 하자. $a<0$, $\alpha<b<\beta$일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. x에 대한 방정식 $g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.
ㄴ. $g(b)>f(a)$
ㄷ. $g(a)>f(b)$



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

102. 2010 평가원 (4점)

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ $(a>0)$과 실수 t에 대하여, $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

103. 2010 평가원 (4점)

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge 0) \\ g(x) & (x < 0) \end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(0)=g(0)$

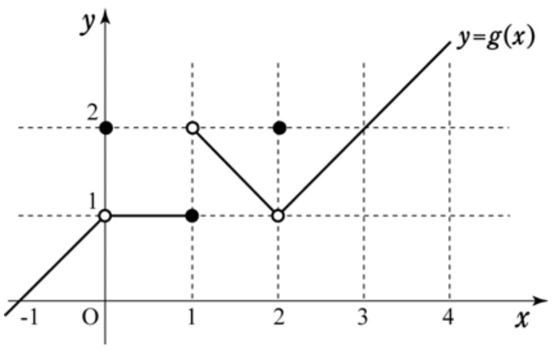
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

104. 2010 교육청 (4점)

실수 전체의 집합에서 연속이고 $f(0)=0$인 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=|x|$
이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} g(f(x))=1$

ㄷ. 합성함수 $y=g(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 2005 교육청 (4점)

미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=0$,

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}=10$ 을 만족시킬 때, $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 의 값을 구하시오.

106. 2004 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<2) \\ a(x-4)^2+b & (x \geqq 2) \end{cases}$가 $x=2$에서 미분가능할 때, $f(3)$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

107. 2007 평가원 (4점)

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=1$, $f'(0)=-6$, $g(0)=4$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=0$

108. 2005 교육청(4점)

삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\le x<b) \\ n+f(x) & (x\ge b) \end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분 가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오.

109. 2005 교육청(4점)

함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} -3x+a & (x<-1) \\ x^3+bx^2+cx & (-1\le x<1) \\ -3x+d & (x\ge 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 미분가능하도록 네 실수 a, b, c, d 의 값을 정할 때, $a+b+c+d$ 의 값은?

① -10　② -8　③ -6
④ -4　⑤ -2

110. 2004 교육청(4점)

점 $(1,-1)$ 에서 곡선 $y=x^2-x$ 에 그은 두 접선의 기울기의 합을 구하시오.

111. 2009 교육청(4점)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 일 때, $f(x)$ 가 미분가능하면 $f'(-x)=f'(x)$ 이다.

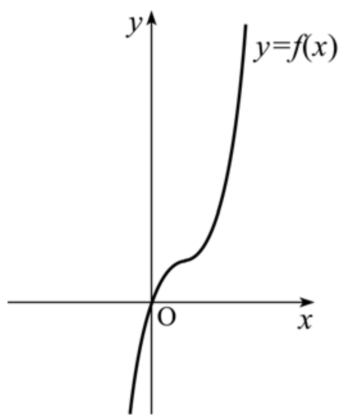
ㄴ. 임의의 실수 x 에 대하여 $|f(x)|\le Mx^2$ 이면 $f'(0)=0$ 이다. (단, M은 양의 상수이다.)

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h}=0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ,ㄴ
④ ㄱ,ㄷ　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

112. 2007 교육청(4점)

그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$ 의 그래프이다.



원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개이다. 두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x 좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하시오.

113. 2004 평가원(4점)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $h(x_1)=h(x_2)$를 만족시키는 서로 다른 두 실수 x_1, x_2가 존재한다.
ㄴ. $h(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
ㄷ. 부등식 $|h(x)|<\frac{1}{100}$의 해는 항상 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

114. 2006 평가원(4점)

두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

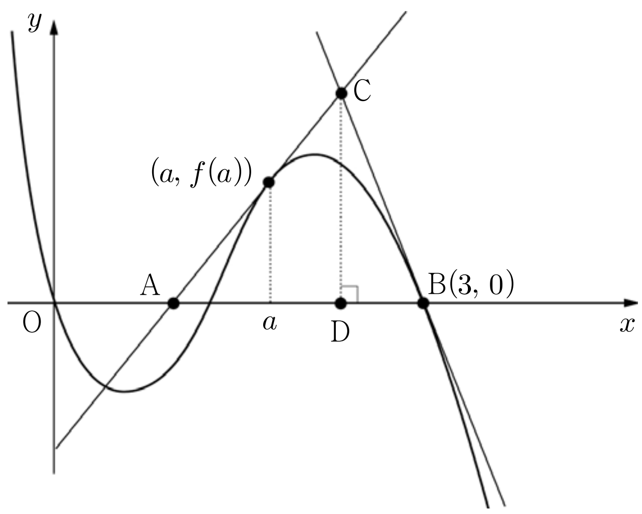
[보 기]

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$
(나) $f_i{}'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1, 2)$
(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

115. 2007 교육청(4점)

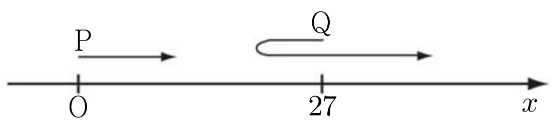
그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 B(3, 0)에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

116. 2007 교육청(4점)

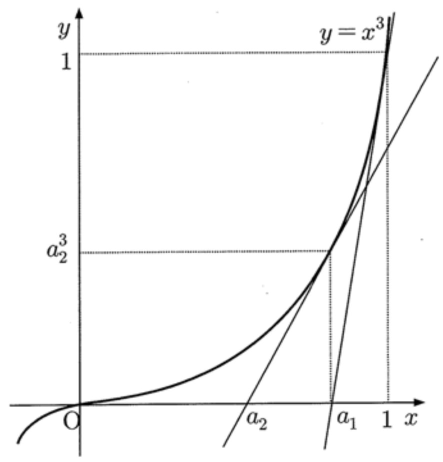
수직선 위에서 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 출발한 지 t초 후 두 점 P, Q의 위치가 각각 $x_1(t)=kt$, $x_2(t)=t^3-3t^2+27$일 때, 점 P, Q가 적어도 한 번 만나게 되는 상수 k의 최솟값을 구하시오.



117. 2006 교육청(4점)

곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(1,1)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_1, 0)$이라 하자.

점 $(a_1, a_1{}^3)$에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 $(a_2, 0)$, $(a_2, a_2{}^3)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_3, 0)$, … 점 $(a_n, a_n{}^3)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 $(a_{n+1}, 0)$이라 할 때, a_5의 값은?



① $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ② $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ③ $\left(\frac{2}{3}\right)^6$
④ $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ ⑤ $\left(\frac{3}{4}\right)^6$

118. 2008 평가원(4점)

다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(0)=0$
(나) $0<x<y<1$인 모든 x, y에 대하여 $0<xf(y)<yf(x)$

세 수 $A=f'(0)$, $B=f(1)$, $C=2\int_0^1 f(x)dx$ 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$
③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$
⑤ $C<A<B$

119. 2007 교육청 (4점)

미분가능한 함수 $y=f(x)$에 대하여 $f'(1)=a$일 때,

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\sum_{k=1}^{5} f(1+kh)-5f(1)\right\}=420$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오.

120. 2008 교육청(4점)

$0\leq x\leq 1$에서 정의된 다항함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

Ⅰ. $1<f(x)<2$
Ⅱ. $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$

이 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $0<x<1$인 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)-2x=0$의 해가 개구간 $(0, 1)$에 적어도 한 개 존재한다.

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} < \int_0^1 f(x)dx < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

121. 2007 평가원(4점)

사차함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) 함수 $f(x)$는 극솟값 -10을 갖는다.

122. 2007 교육청(4점)

사차함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}(a+1)x^3-ax$가 $x=\alpha,\ \gamma$ 에서 극소, $x=\beta$에서 극대일 때, 실수 a의 값의 범위는?
(단, $\alpha<0<\beta<\gamma<3$)

① $-\frac{9}{2}<a<-4$ ② $-4<a<-\frac{7}{2}$
③ $-\frac{7}{2}<a<-3$ ④ $-3<a<-\frac{5}{2}$
⑤ $-\frac{5}{2}<a<-2$

123. 2005 교육청(4점)

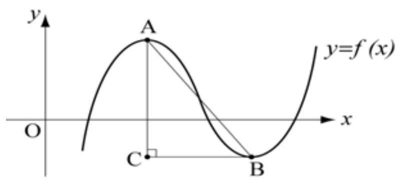
삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $\frac{1}{2}$, 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$ 이 때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. α의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

124. 2008 교육청(4점)

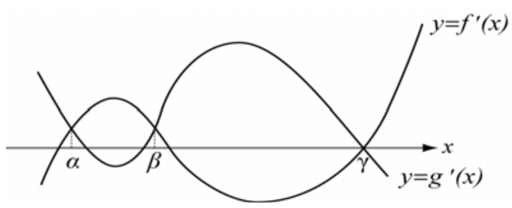
삼차함수 $y=f(x)$는 점 A에서 극대이고 점 B에서 극소이며 극대값과 극소값의 차는 8이다. $y=f(x)$의 그래프 밖의 한 점 C에 대하여 $\triangle$ABC의 외심의 좌표가 $(6, 1)$, $\angle C=90°$, $\overline{AB}=10$ 일 때, $f'(x)=0$의 두 근의 곱은? (단, $\overline{AC}$는 y축과 평행이다.)



① 27 ② 30 ③ 33
④ 36 ⑤ 39

125. 2006 교육청(4점)

그림과 같이 두 곡선 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$는 x좌표가 α, β, γ인 점에서 만나고 $h(x)=f(x)-g(x)$의 최솟값이 음수일 때, $y=h(x)$에 대하여 항상 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?



[보 기]
ㄱ. $h(\alpha)=h(\gamma)<h(\beta)$
ㄴ. $(\beta-\alpha)\{h(\gamma)-h(\beta)\}<(\gamma-\beta)\{h(\beta)-h(\alpha)\}$
ㄷ. $h(x)=0$은 적어도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

126. 2007 교육청(4점)

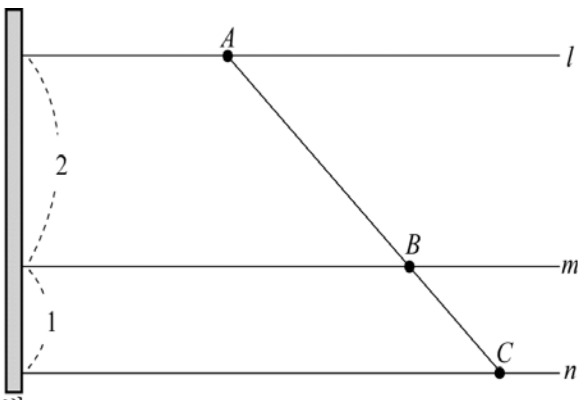
원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) $x=1$에서 극소값을 갖는다.

이 때, $f(x)$의 극대값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오.

127. 2010 교육청 (4점)

그림과 같이 케이블 l, m, n은 모두 벽면과 수직이고, 케이블 사이의 거리가 각각 2, 1이다. l위의 광원 A에서 m위의 물체 B에 빛을 비추면 n위에 그림자 C가 나타난다.



광원 A와 물체 B의 시각 $t\,(t \leq 8)$에서 벽으로부터의 거리를 각각 $x=4-\frac{1}{2}t$, $y=t^2-\frac{11}{2}t+10$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, 광원, 물체, 그림자의 크기는 무시한다.)

[보 기]

ㄱ. $t=\frac{5}{2}$에서 광원과 물체의 속도가 같아진다.
ㄴ. A와 C 사이의 거리가 3인 순간은 두 번이다.
ㄷ. $2<t<3$에서 그림자 C의 가속도는 1이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

128. 2008 평가원(4점)

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$는 $x=a$에서 극솟값 b를 가진다.

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서 접하는 직선을 l이라 할 때, 점 $(a,\ b)$에서 직선 l까지의 거리가 d이다. $90d^2$의 값을 구하시오.

129. 2004 교육청(4점)

다항함수 $f(x)$가 임의의 실수 x에 대하여 $f(-ax)=-a\,f(x)$가 성립할 때, $f'(x)$와 같은 것은? (단, $a\neq 0$, $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수)

① $af'(ax)$ ② $\frac{1}{a}f'(x)$ ③ $af'(x)$
④ $f'(-ax)$ ⑤ $\frac{1}{a}f'(-ax)$

130. 2009 평가원(4점)

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\ (a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

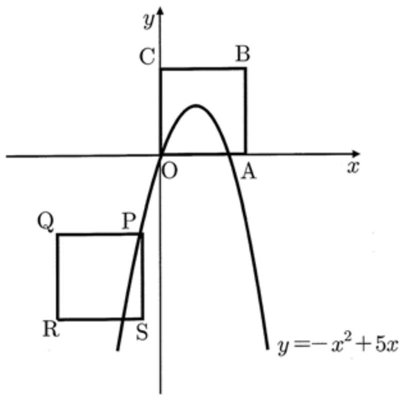
131. 2005 교육청(4점)

등식 $x^2+3y^2=9$ 를 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 x^2+xy^2 의 최솟값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 2

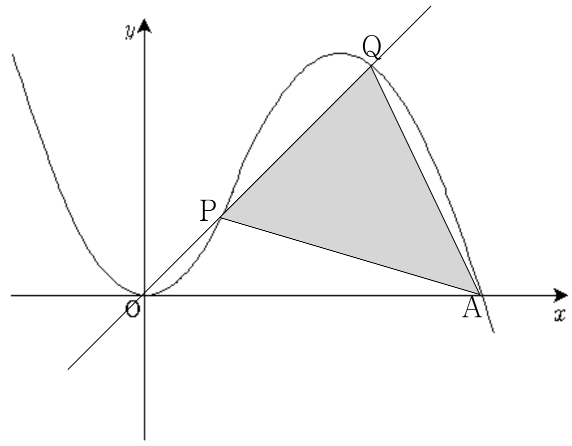
132. 2007 평가원(4점)

그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(8,0)$, $\mathrm{B}(8,8)$, $\mathrm{C}(0,8)$을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 $(-1,-6)$에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



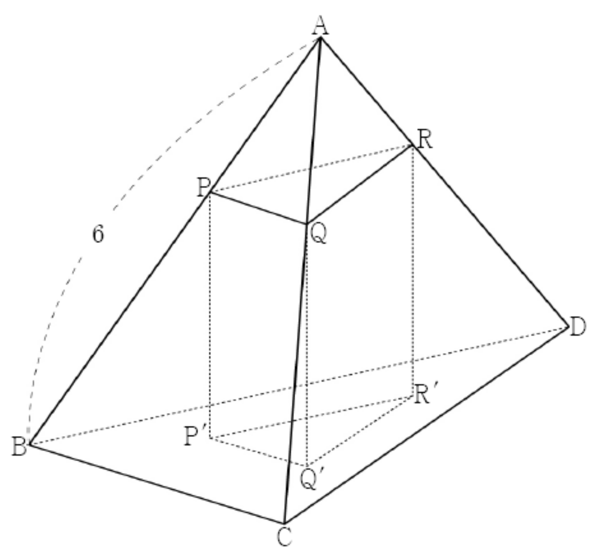
133. 2007 교육청(4점)

아래 그림과 같이 삼차함수 $y=x^2(3-x)$의 그래프와 직선 $y=mx$가 제 1사분면 위의 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 이 때, 세 점 $\mathrm{A}(3,0)$, P, Q를 꼭지점으로 하는 $\triangle\mathrm{APQ}$의 넓이가 최대가 되게 하는 양수 m에 대하여 $10m$의 값을 구하시오.



134. 2009 교육청(4점)

한 변의 길이가 6인 정사면체 $A-BCD$의 변 AB, AC, AD 위에 꼭짓점 A로부터 같은 거리에 있는 점 P, Q, R을 잡아 면 BCD에 내린 수선의 발을 각각 P', Q', R'이라 하자. 삼각기둥 $PQR-P'Q'R'$의 부피의 최댓값을 V라고 할 때, V^2의 값을 구하시오.



135. 2004 평가원(4점)

세 실수 a, b, c 에 대하여 사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $a=b=c$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 실근을 갖는다.

ㄴ. $a=b\neq c$ 이고 $f(a)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a<b<c$ 이고 $f(b)<0$ 이면, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

136. 2008 평가원(4점)

함수 $f(x)=\begin{cases}-1 & (x<1)\\ -x+2 & (x\geq 1)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{-1}^{x}(t-1)f(t)\,dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1, 2)$에서 증가한다.

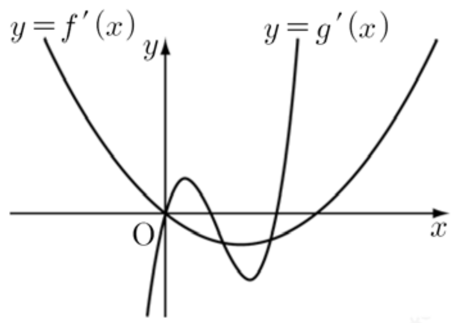
ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

137. 2008 교육청(4점)

그림은 삼차함수 $y=f(x)$ 와 사차함수 $y=g(x)$ 의 도함수 $y=f'(x)$ 와 $y=g'(x)$ 의 그래프이다. 옳은 것을 <보기>에서 모두 고르면? (단, $f'(0)=0$, $g'(0)=0$)



[보 기]

ㄱ. $x<0$ 에서 $y=f(x)-g(x)$ 는 증가함수이다.

ㄴ. $y=f(x)-g(x)$ 는 한 개의 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $h(x)=f'(x)-g'(x)$ 라 할 때, $h'(x)=0$ 은 서로 다른 2 개의 양의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

138. 2008 교육청 (4점)

계수가 실수인 삼차함수 $y=f(x)$ 가 있다. 방정식 $f(x)=0$ 과 $f'(x)=0$ 의 근에 관한 <보기>의 설명 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(x)=0$ 이 서로 같은 실근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 서로 같은 실근을 가진다.

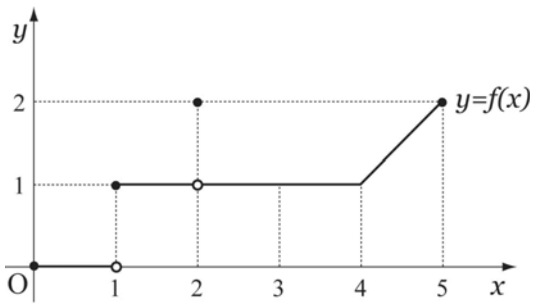
ㄴ. $f'(x)=0$ 이 허근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 허근을 가진다.

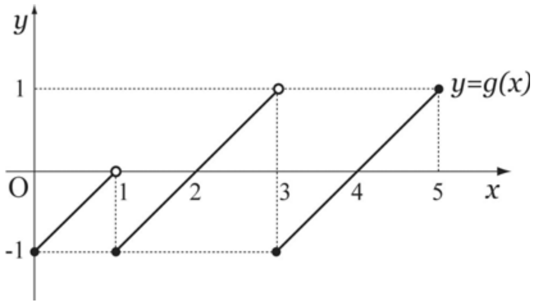
ㄷ. $f'(x)=0$ 이 서로 다른 실근을 가지면, $f(x)=0$ 도 반드시 서로 다른 두 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

139. 2009 교육청(4점)

그림과 같이 구간 $[0,\ 5]$를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?





[보 기]

ㄱ. 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

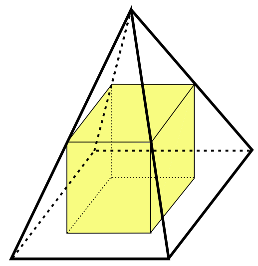
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

140. 2009 평가원(4점)

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2,\ f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.
(다) $f'(0)=0$

141. 2005 교육청(4점)



모든 모서리의 길이가 3인 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 부피의 최댓값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$
③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$
⑤ $6\sqrt{2}$

142. 2005 평가원(4점)

두 함수 $f(x)=5x^3-10x^2+k$, $g(x)=5x^2+2$가 있다. $\{x\,|\,0<x<3\}$에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립하도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오.

143. 2006 교육청(4점)

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 구간 $[0,\ a_1]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_2, 구간 $[0,\ a_2]$에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x좌표를 a_3이라고 하자. 이와 같이 계속하여 $a_4,\ a_5,\ \cdots$를 정할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은? (단, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$은 양수이다.)

[보 기]

ㄱ. 모든 자연수 n에 대하여 $f(a_n)>f(a_{n+1})$이다.

ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $f'(a_n)>f'(a_{n+1})$이다.

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}f'(a_n)=-3$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

144. 2007 교육청(4점)

삼차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 가 있다. 세 실수 $a, b, c\ (a<b<c)$에 대하여 $f(a)=f(b)=f(c)$ 가 성립할 때, 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f'(a)>0$

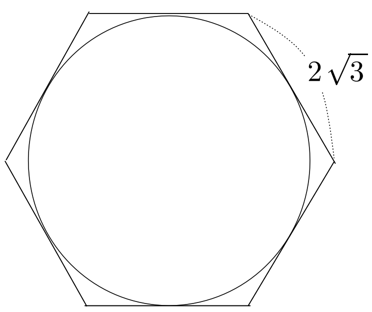
ㄴ. $f'(a)+f'(b)>0$

ㄷ. $f'(a)=f'(c)$ 이면 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

145. 2006 교육청(4점)

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정육각형에 대접하는 원이 있다. 원의 반지름의 길이가 매초 2 의 속력으로 증가할때, 4 초후의 원의 넓이의 증가율은?



① 38π ② 40π ③ 42π
④ 44π ⑤ 46π

146. 2005 교육청(4점)

원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t분 후의 좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 $x_1=2t^3-9t^2$, $x_2=t^2+8t$ 이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4 분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 a, b, c라고 하자. 이때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

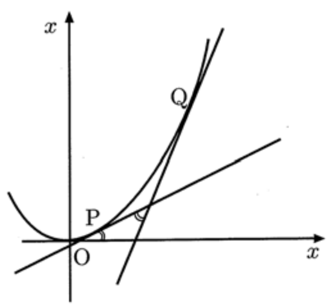
147. 2006 평가원 (4점)

y가 x의 함수일 때, 곡선 $e^x\ln y=1$ 위의 점 $(0,\ e)$에서의 접선의 기울기는?

① $-e$ ② $-\dfrac{1}{e}$ ③ $\dfrac{1}{e}$
④ e ⑤ $2e$

148. 2004 교육청 (4점)

곡선 $y=\dfrac{1}{4}x^2$위의 두 점 $\mathrm{P}\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$에서의 두 접선과 x축으로 둘러싸인 삼각형이 이등변삼각형일 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $a>\sqrt{2}$)



149. 2006 교육청 (4점)

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=ax^2+2\cos x$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 범위는?

① $0<a<1$ ② $a>\frac{1}{2}$ ③ $a>1$

④ $1<a<2$ ⑤ $a\geq 2$

150. 2007 교육청 (4점)

함수 $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$ 에 대하여 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

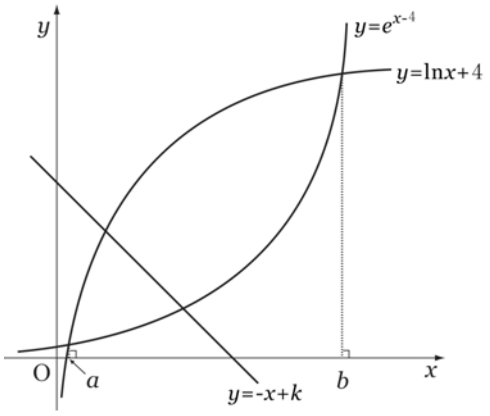
ㄷ. $x>0$ 에서 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

151. 2009 교육청 (4점)

그림과 같이 함수 $y=\ln x+4$, $y=e^{x-4}$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 각각 a, b라 하자. 일차함수 $y=-x+k$의 그래프가 $a\leq x\leq b$에서 두 함수의 그래프와 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 될 때, 상수 k의 값은?

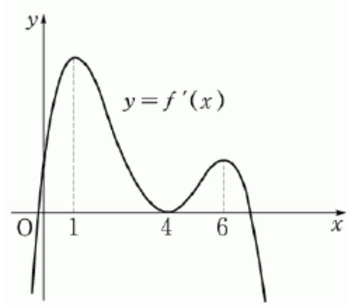


① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$

④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

152. 2005 평가원 (4점)

오른쪽 그림은 5차 다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 그래프이다. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $f'(4)=0$ 이고 $f''(1)=f''(4)=f''(6)=0$ 이다.)



[보 기]

ㄱ. $f(x)$ 는 서로 다른 세 점에서 극값을 갖는다.

ㄴ. $4<x_1<x_2<6$ 인 x_1, x_2 에 대하여 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 이다.

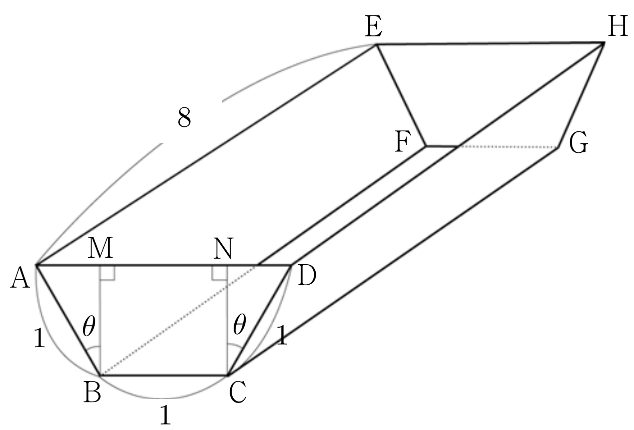
ㄷ. $f(0)=0$ 일 때, 양의 실수 a 에 대하여 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=a$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$ 의 극댓값은 a 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

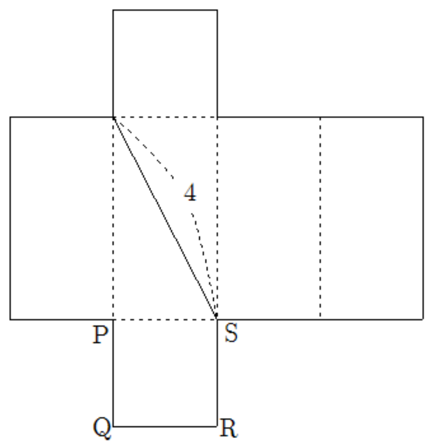
153. 2007 교육청 (4점)

그림과 같은 사각기둥의 물통에서 등변 사다리꼴 ABCD 에 대하여, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$, $\overline{AE}=8$이고, 꼭지점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\angle ABM=\angle DCN=\theta$이다. 물통의 부피의 최댓값이 V일 때, V^2의 값을 구하시오.



154. 2007 교육청 (4점)

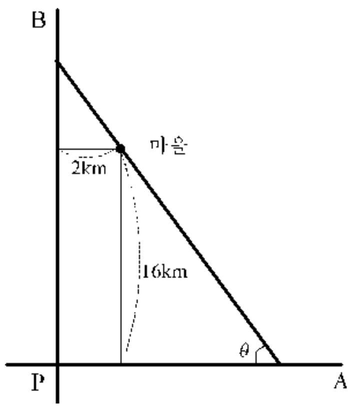
아래 그림은 밑면 PQRS가 정사각형인 사각기둥에 대한 전개도이다. 옆면의 대각선의 길이가 4일 때, 사각기둥의 부피가 최대가 되게 하는 밑면의 한 변의 길이는?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1
④ $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{6}}{3}$

155. 2004 교육청 (4점)

그림과 같이 지점 P에서 서로 수직으로 만나는 두 직선 도로가 있다. 두 직선 도로PA, PB에서 각각 16km, 2km 떨어진 마을을 지나고 두 직선 도로를 연결하는 새 직선 도로를 건설하려고 한다.

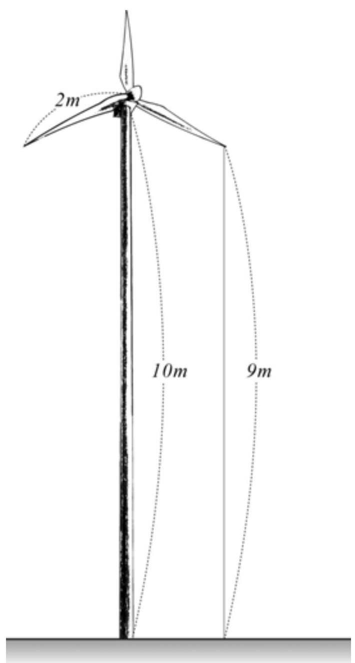


새 직선 도로와 도로PA 가 이루는 예각의 크기를 θ 라고 할 때, 새 직선 도로의 길이가 최소이기 위한 $\tan\theta$ 의 값은 ?

① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

156. 2009 교육청 (4점)

지면에서 회전 중심축까지의 높이가 $10m$이고, 길이가 $2m$인 풍력 발전기의 날개가 축을 중심으로 일정한 속력으로 시계반대방향으로 돌고 있다. 지면에서 날개 끝까지의 높이가 $9m$가 될 때, 시간(초)에 따른 높이의 변화율이 $4\pi(m/s)$이고, 풍력 발전기의 날개가 한 바퀴 도는데 걸리는 시간을 k초라 하자. $k^2=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소)일 때, $10(p+q)$의 값을 구하시오. (단, 축은 지면과 평행하고 축과 날개의 두께는 고려하지 않는다.)



157. 2010 교육청 (4점)

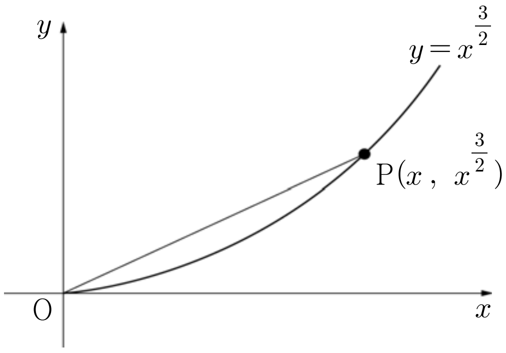
좌표평면 위를 움직이는 점 $P(x,y)$의 시각 t에서의 위치가

$$x=2\sin t-2\cos t,\qquad y=3\sin t\cos t$$

이다. 점P의 속력의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단,p,q는 서로소인 자연수이다)

158. 2007 교육청 (4점)

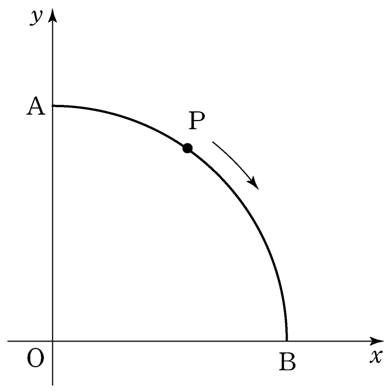
곡선 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 위의 점 P가 시간이 지남에 따라 원점으로부터 멀어지고 있다. $x=3$이 되는 순간 선분 OP의 시각에 대한 길이의 순간변화율이 11일 때, 점 P의 x좌표의 시각에 대한 순간변화율은?



① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

159. 2007 평가원 (4점)

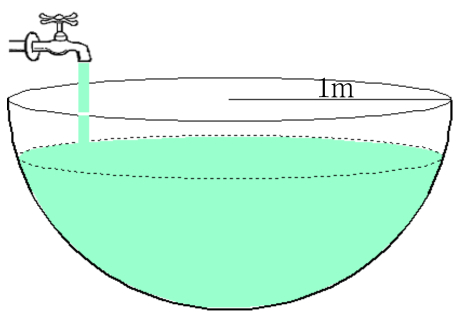
좌표평면 위에 그림과 같이 중심각의 크기가 90°이고 반지름의 길이가 10인 부채꼴 OAB가 있다. 점 P가 점A에서 출발하여 호 AB를 따라 매초 2의 일정한 속력으로 움직일 때, $\angle\mathrm{AOP}=30°$가 되는 순간 점P의 y좌표의 시간(초)에 대한 변화율은?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ -1 ⑤ -2

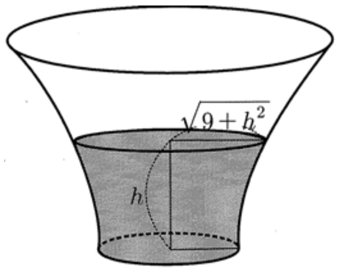
160. 2007 교육청 (4점)

아래 그림과 같이 반지름의 길이가 1m인 구를 반으로 자른 모양의 그릇에 $0.2\pi\mathrm{m}^3$/초의 속도로 물을 채우려고 한다. 수면의 높이가 $\frac{3}{4}$m가 되는 순간에 수면의 상승속도를 v라고 할 때, $75v$의 값을 구하시오.



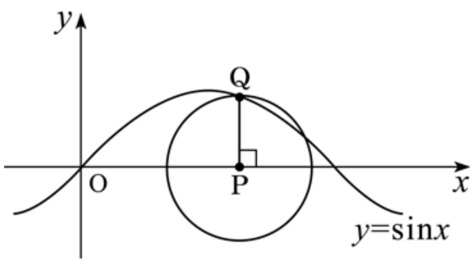
161. 2006 교육청 (4점)

어떤 그릇에 깊이가 $h$cm가 되도록 물을 넣을 때 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{9+h^2}$ cm인 원이 된다. 이 그릇에 매초 $260\pi\,\text{cm}^3$의 비율로 물을 넣을 때, 수면의 높이가 2cm인 순간의 수면이 상승하는 속도는 몇 cm/초인지 구하시오. (단, 그릇의 높이는 2cm보다 크다.)



162. 2007 교육청 (4점)

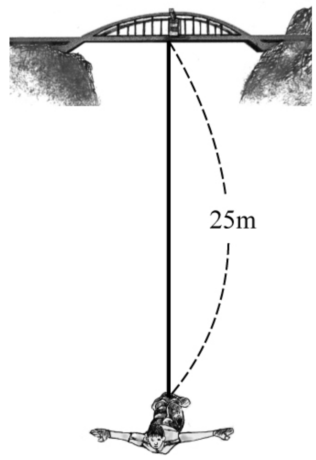
좌표평면에서 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0<t<\pi)$에서의 좌표는 $\left(\frac{t^2}{\pi},\ 0\right)$이다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sin x$와 만나는 점을 Q라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 선분 PQ를 반지름으로 하는 원의 넓이를 S라 하자. $t=\frac{\pi}{2}$인 순간, 넓이 S의 t에 대한 변화율은?



① $-\pi$ ② $-\frac{\pi}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\pi}{2}$ ⑤ π

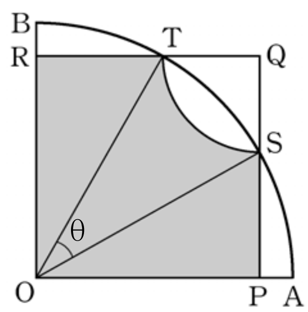
163. 2005 교육청 (4점)

높이가 45m인 번지점프대에 길이가 20m인 원기둥 모양의 탄력줄이 연결되어 있다. 이 탄력줄은 힘을 주어 길이가 늘어나도 원기둥 모양이 유지되며 그 부피는 변하지 않는다고 한다.
어떤 사람이 탄력줄을 매고 점프대를 출발한 후 20m였던 탄력줄의 길이가 25m로 되는 순간에 탄력줄의 길이가 늘어나는 속도는 10m/초이고, 탄력줄의 반지름의 길이는 $\frac{3}{100}$m이다. 이 순간에 탄력줄의 반지름의 길이의 변화율을 $-\frac{b}{a}$m/초라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



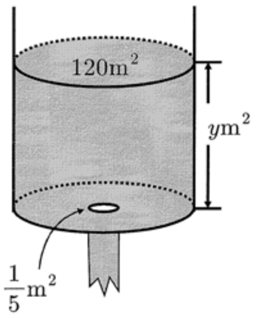
164. 2008 평가원 (4점)

그림과 같이 중심각의 크기가 90°이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB와 선분 OA 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 OP를 한 변으로 하는 정사각형 OPQR가 호 AB와 서로 다른 두 점 S, T에서 만날 때, 정사각형 OPQR에서 점 Q를 중심으로 하고 반지름이 QS인 부채꼴 SQT를 제외한 어두운 부분의 넓이를 D라 하자. $\angle\text{SOT}=\theta$라 할 때, D가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $10\pi\tan\theta$의 값을 구하시오.



165. 2004 평가원 (4점)

단면의 넓이가 $120(\mathrm{m}^2)$로 일정한 원통형의 물탱크에 물이 $5(\mathrm{m})$까지 차있다. 이 물탱크의 바닥 중앙에 있는 넓이 $\frac{1}{5}(\mathrm{m}^2)$인 구멍으로 물이 빠지고 있다. 물탱크의 바닥으로부터 수면까지의 높이가 $y(\mathrm{m})$일 때, 빠져나가는 물의 속력 $v(\mathrm{m}/초)$는 $v=\sqrt{20y}$ 로 주어진다고 하자. 다음은 이 식을 이용해서 물의 높이가 $5(\mathrm{m})$에서 $\frac{5}{4}(\mathrm{m})$로 줄어들 때까지 걸리는 시간을 계산한 것이다.



<풀이>
v와 y가 시간에 따라 변하므로 v와 y의 관계식
$v=\sqrt{20y}$ 를
t에 관하여 미분하여 v와 y의 시간에 따른 변화율 사이의 관계식을 구하면

$$\frac{dv}{dt}=\frac{10}{\sqrt{20y}}\frac{dy}{dt}=\frac{10}{v}\frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간변화율은 그 순간 빠져나가는 물의 양과 부호만 다르므로
[(가)] ……… (2)
(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를 (1) 식에 대입하여 정리하면

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{60}$$

따라서 구하는 시간은 [(나)] (초)이다.

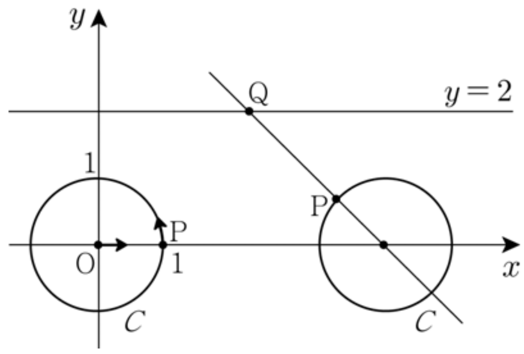
위의 풀이에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

	(가)	(나)
①	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	240
②	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{5}$	300
③	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	180
④	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	240
⑤	$120\frac{dy}{dt}=-\frac{v}{10}$	300

166. 2009 교육청 (4점)

좌표평면 위의 반지름의 길이가 1인 원 C와 이 원 위를 움직이는 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 P는 원 C위를 시계 반대 방향으로 매초 1의 속력으로 움직인다.
(나) 원 C는 x축의 양의 방향으로 매초 10의 속력으로
움직인다.



원 C는 중심이 원점에서, 점 P는 점 $(1, 0)$에서 동시에 출발할 때, 원 C의 중심과 점 P를 지나는 직선이 직선 $y=2$와 만나는 점을 Q라 하자. 출발한 후 $\frac{3}{4}\pi$초가 되는 순간, 점 Q는 직선 $y=2$ 위를 매초 a의 속력으로 움직인다. a의 값을 구하시오.

167. 2010 평가원 (4점)

다항함수 $f(x)$에 대하여 다음 표는 x의 값에 따른 $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$의 변화 중 일부를 나타낸 것이다.

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

함수 $g(x)=\sin(f(x))$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $g'(3)=-1$

ㄴ. $1<a<b<3$이면 $-1<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$이다.

ㄷ. 점 $P(1,1)$은 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

168. 2010 교육청 (4점)

함수 $f(x)=\dfrac{x-\frac{1}{2}}{(x^2-2x+2)^2}$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선과 원점 사이의 거리는 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$이다.

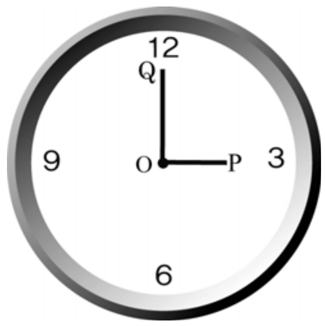
ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{1}{8}$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)-f(10)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

169. 2010 교육청 (4점)

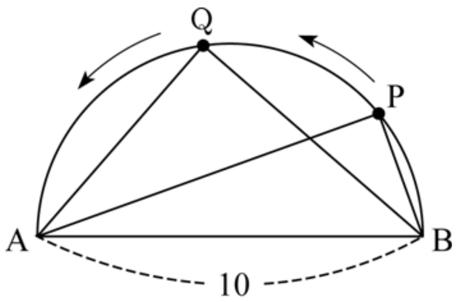
그림과 같은 원모양의 시계가 있다. 시계의 중심을 O, 길이가 2인 시침의 끝점을 P, 길이가 3인 분침의 끝점을 Q라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 S라 하자. 4시 정각이 되는 순간, 넓이 S의 시간(분)에 대한 순간변화율은 $\dfrac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있는 경우는 $S=0$으로 한다.)



170. 2008 교육청 (4점)

길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 그림과 같이 두 점 P, Q가 점 B에서 동시에 출발하여 다음 조건을 만족시키면서 반원 위를 움직인다.

(가) $\angle QAB = 2\angle PAB$
(나) 선분 BP의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{1}{2}$이다.

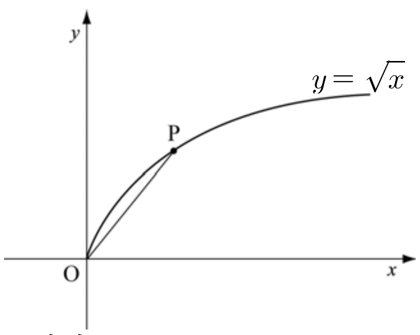


점 P가 점 B에서 출발하여 5초가 되는 순간 선분 AQ의 길이의 시간(초)에 대한 변화율은 p이다. $100p^2$의 값을 구하시오.

(단, $0 \leq \angle PAB < \frac{\pi}{4}$이다.)

171. 2008 교육청 (4점)

점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.



172. 2006 수능 (3점)

함수 $f(x)=x^4+4x^2+1$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$의 값을 구하시오.

173. 2008 수능 (3점)

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$일 때, $f(3)+f'(3)$의 값을 구하시오.

174. 2009 수능 (3점)

함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오.

175. 2004 수능 (2점)

미분 가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

176. 2007 수능 (3점)

함수 $f(x)$가 $f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<0) \\ x^2-1 & (0\leq x<1) \\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x\geq 1)\end{cases}$

일 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.
ㄴ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능 하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

177. 2007 수능(3점)

사차함수 $f(x)=x^4-4x^3+6x^2+4$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 4일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

178. 2008 수능 (3점)

함수 $f(x)=x^3-12x$가 $x=a$에서 극댓값b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오.

179. 2004 수능(3점)

삼차함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖고, 그 그래프가 원점에 대하여 대칭일 때, 이 그래프와 x축과의 교점의 x좌표 중에서 양수인 것은 ?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

180. 2008 수능(3점)

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근 α, β, $\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$를 갖고, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$이다.

<보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(\alpha)>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 β보다 작은 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

181. 2006 수능 (3점)

함수 $y=f(x)$가 모든 실수에서 연속이고, $|x|\neq 1$인 모든 x의 값에 대하여 미분계수 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases} x^2 & (|x|<1) \\ -1 & (|x|>1) \end{cases}$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 $x=-1$에서 극값을 갖는다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이다.
ㄷ. $f(0)=0$이면 $f(1)>0$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

182. 2005 수능(4점)

x 에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

183. 2011 수능(3점)

함수 $f(x)=(x-1)^2(x-4)+a$ 의 극솟값이 10 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

184. 2005 수능(4점)

$a>1$일 때, 함수 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$ 에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 b라 하자.
다음은 두 수 $a,\ b$의 크기를 비교하는 과정이다.

$f'(x)=$ (가) 이고 $a>1$이므로
$f(x)$는 $x=1$에서 (나) 을 가진다.
그런데 $f(1)<0$이고 $f(b)=0$이므로 a (다) b 이다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	$6(x+a)(x+1)$	극소값	$>$
②	$6(x+a)(x+1)$	극소값	$<$
③	$6(x-a)(x-1)$	극소값	$>$
④	$6(x-a)(x-1)$	극대값	$<$
⑤	$6(x-a)(x-1)$	극대값	$>$

185. 2009 수능 (4점)

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

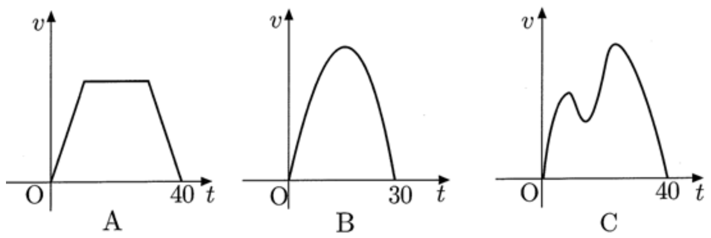
[보 기]

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty,\ -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

186. 2005 수능 (3점)

다음은 ‘가’지점에서 출발하여 나’지점에 도착할 때까지 직선 경로를 따라 이동한 세 자동차 A, B, C의 시간 t에 따른 속도 v를 각각 나타낸 그래프이다.



가’지점에서 출발하여 ‘나’지점에 도착할 때까지의 상황에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. A와 C의 평균속도는 같다.

ㄴ. B와 C 모두 가속도가 0인 순간이 적어도 한 번 존재한다.

ㄷ. A, B, C각각의 속도 그래프와 t축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 모두 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

187. 2010 수능 (3점)

곡선 $y=e^x$위의 점 $(1,e)$에서의 접선이 곡선 $y=2\sqrt{x-k}$에 접할 때, 실수 k의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e^4}$
④ $\frac{1}{1+e}$ ⑤ $\frac{1}{1+e^2}$

188. 2011 수능 (3점)

좌표평면에서 곡선 $y^3=\ln(5-x^2)+xy+4$ 위의 점(2,2)에서의 접선의 기울기는?

① $-\frac{3}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $-\frac{3}{10}$ ⑤ $-\frac{1}{5}$

189. 2004 수능 (2점)

미분가능 한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

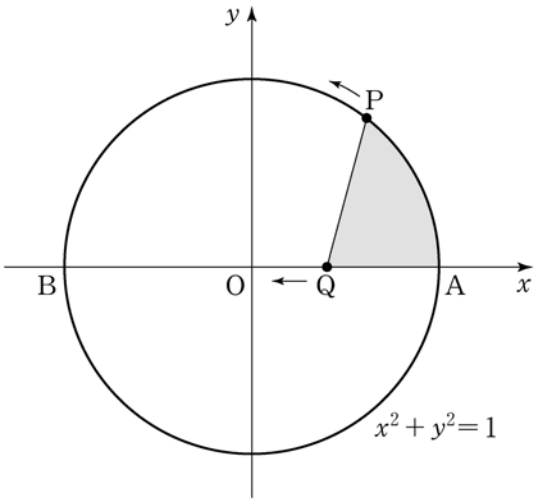
$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x-1}=3$$

을 만족시킬 때, 미분계수 $f'(2)$의 값은?

① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

190. 2007 수능 (4점)

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P는 점A(1, 0)에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B$(-1, 0)$을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은?

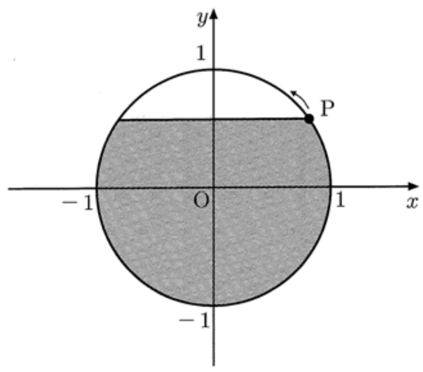


① $\frac{\pi}{4}-1$ 　 ② $\frac{\pi}{4}$ 　 ③ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

④ $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 　 ⑤ $\frac{\pi}{4}+1$

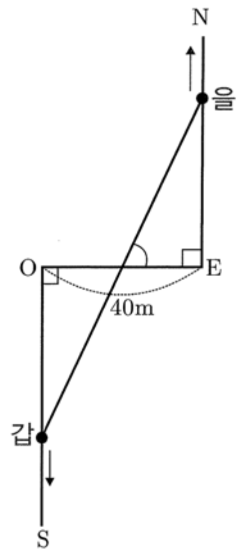
191. 2006 수능 (4점)

그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점P가 점 (1, 0)에서 출발하여 원점을 중심으로 매초 $\frac{1}{40}$(라디안)의 일정한 속력으로 원 위를 시계 반대 방향으로 움직이고 있다. 점P에서 x축에 평행한 직선을 그을 때, 원과 직선으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 점P가 점 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지나는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은 $\frac{b}{a}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 서로소인 자연수이다.)



192. 2005 수능 (4점)

지점 O와 지점 E사이의 거리는 40m이다. 오른쪽 그림과 같이 갑은 지점 O에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 OS를 따라 초속 3m의 일정한 속력으로 달리고, 을은 갑이 출발한 지 10초가 되는 순간 지점 E에서 출발하여 선분 OE에 수직인 반직선 EN을 따라 초속 4m의 일정한 속력으로 달리고 있다. 갑과 을의 지점을 연결하여 만든 선분과 선분 OE가 만나서 이루는 각을 θ(라디안)라 할 때, 갑이 출발한 지 20초가 되는 순간 θ의 변화율은?



① $\frac{1}{290}$라디안/초 　 ② $\frac{3}{290}$라디안/초

③ $\frac{7}{290}$라디안/초 　 ④ $\frac{13}{290}$라디안/초

⑤ $\frac{21}{290}$라디안/초

193. 2008 수능 (3점)

함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4,\ 8)$에서 위로 볼록하다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

194. 2007 수능 (3점)

함수 $f(x)=x+\sin x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(f\circ f)(x)$$

로 정의할 때, [보기]에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 함수$f(x)$의 그래프는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 위로 볼록하다.
ㄴ. 함수 $g(x)$는 개구간 $(0,\ \pi)$에서 증가한다.
ㄷ. $g'(x)=1$인 실수 x가 개구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

195. 2005 수능 (4점)

양수 a에 대하여 폐구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{x-5}{(x-5)^2+36}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\mathrm{M}+m=0$이 되도록 하는 a의 최솟값을 구하시오.

196. 2005 수능 (3점)

이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시킬 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $f'(-x)=f'(x)$
ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$
ㄷ. $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x=a$ $(a\neq 0)$에서 극댓값을 가지면 $f'(x)$는 $x=-a$에서 극솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

197. 2006 수능 (4점)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 점 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 직선 $y=g(x)$가 함수 $f(x)$의 그래프와 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 접할 때, 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $a\neq b$이다.)

[보 기]

ㄱ. $h'(b)=0$
ㄴ. 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다.
ㄷ. 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

198. 2011 수능 (4점)

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3,\ f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여
집합 S를 $S=\{a\,|\,$함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$
라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

정답및 해설

1. 정답 ①

양변에 $x(x+1)$을 곱하여 정리하면

$2x^2-x-1=0$에서 $x=1$ 또는 $-\frac{1}{2}$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{1}{2}$

2. 정답 ②

양변에 분모의 최소공배수 $(x-1)(x-2)$를 곱하여 정리하면

$(x-1)(x^2+x+1)-(x+2)(x-2)=3-2(x-1)(x-2)$

$\therefore\ x^3-1-x^2+4=3-2x^2+6x-4$

$x^3+x^2-6x+4=0$

$(x-1)(x^2+2x-4)=0$

$x=1$ 또는 $x^2+2x-4=0$

여기서 $x=1$은 무연근이므로

모든 실근의 합은 -2이다.

3. 정답 ②

분모의 최소공배수를 양변에 곱하면,

$2(x+2)+4(x-1)=3(x-1)(x+2)$

$6x=3(x^2+x-2)$, $3(x-2)(x+1)=0$

$x=-1$, 2 무연근은 없으므로 모든 근의 합은 1

4. 정답: 11

$\frac{\sqrt{x-2}}{3}=\frac{9}{x-2}$ 에서 $\sqrt{x-2}=t\ (t>0)$이라 하면

$\frac{t}{3}=\frac{9}{t^2}$

$t^3=27$

t는 양수이므로 $t=3$, $\sqrt{x-2}=3 \Leftrightarrow x-2=9$

$\therefore\ x=11$

5. 정답: ④

분수방정식의 치환형 계산

$\frac{x+1}{x^2}=t$라 하면 주어진 식은 $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$

양변에 $2t$를 곱하여 정리하면

$2t^2-5t+2=0$, $(2t-1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{2}$또는 $t=2$

(i) $t=\frac{1}{2}$일 때, $x^2-2x-2=0$ … ㉠

(ii) $t=2$일 때, $2x^2-x-1=0$ … ㉡

이 때, ㉠, ㉡의 근 중에는 분모를 0으로 하는 것이 없으므로 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에서

$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

6. 정답 ①

양변에 $(x-1)(x+2)$를 곱하면

$x+2+x(x-1)=2x+6$

$x^2-2x-3=0$

$\therefore\ x=-1, 3$

두 값이 모두 무연근이 아니다.

따라서, x 값들의 곱은 -3

7. 정답 ④

[출제의도] 분수방정식에서 무연근의 의미를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

주어진 분수방정식에서 양변에 x^2-1을 곱하여 정리하면 이차방정식 $x^2+kx-k-3=0$을 얻는다. 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지므로 그 중 한 근은 무연근이어야 한다.

(i) $x=1$일 때 : $x=1$을 이차방정식에 대입하면

$1+k-k-3=0$, $-2\neq 0$이므로 성립하지 않는다.

(ii) $x=-1$일 때 : $x=-1$을 이차방정식에 대입하면

$1-k-k-3=0$이다. 따라서 $k=-1$이다.

$k=-1$을 이차방정식 $x^2+kx-k-3=0$에 대입하면 방정식 $x^2-x-2=0$을 얻고 $x=-1$ 또는 $x=2$의 해를 갖는다.

$\therefore\ \alpha=2$

(i), (ii)에 의해 $k+\alpha=(-1)+2=1$이다.

8. 정답 ④

$\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{ax+5}{x^2-1}$을 통분하면

$\frac{x(x+1)+(x-1)(x-2)}{x^2-1}=\frac{ax+5}{x^2-1}$

$2x^2-2x+2=ax+5$

$2x^2-(a+2)x-3=0$

오직 하나의 실근을 가지려면 중근을 가져야 하므로

$D=(a+2)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=0$에서

$a^2+4a+28=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하면

합은 28인데 보기에 없네요.

그러면 무연근을 이용하여

$x=1$을 대입하면 $a=-3$

$x=-1$을 대입하면 $a=-1$
그러므로 $(-1)\times(-3)=3$

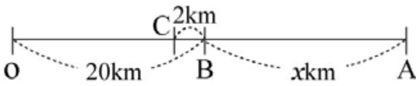
9. 정답: 4
분수방정식의 무연근을 가질 때 계산
$\dfrac{b}{x^2-a^2}-\dfrac{1}{x+a}=\dfrac{2}{x-a}$
양변에 분모의 최소공배수를 곱하면
$b-(x-a)=2(x+a)$에서 $x=\dfrac{b-a}{3}$는
무연근이므로
$\left(\dfrac{b-a}{3}+a\right)\left(\dfrac{b-a}{3}-a\right)=0$이다.
$b=-2a,\ b=4a$
$ab>0$이므로 $b=4a$
$\therefore\ \dfrac{b}{a}=4$

10. 정답: ②
분수방정식의 그래프 이해
분수방정식의 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하여 정리하면
$\{2g(x)-f(x)\}\{g(x)+f(x)\}=0$
$\therefore g(x)=\dfrac{1}{2}f(x),\ g(x)=-f(x)$
따라서 구하는 실근의 개수는 두 곡선
$y=g(x),\ y=\dfrac{1}{2}f(x)$의 교점
또는 $y=g(x),\ y=-f(x)$의 교점 중
$f(x)g(x)\neq 0$인 것의 개수와 같다.
$\therefore$ 2개

11. 정답 ③
(i) $f(x)\geq 0$일 때, 주어진 방정식은
$f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}\ \cdots$ ㉠
양변을 제곱하면
$\{f(x)\}^2-4f(x)+4=4-f(x)$
$\{f(x)\}^2-3f(x)=0$
$f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$
$f(x)=0$이면 ㉠에서
$-2=2$가 되어 모순
$\therefore\ f(x)=3$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3$은 서로 다른 두 점에서 만나고
교점의 x좌표를 $\alpha.\beta$라 하면 방정식 $f(x)=3$의 실근은
$x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이다.
(ii) $f(x)<0$일 때, 주어진 방정식은
$-f(x)-2=\sqrt{4-f(x)}\ \cdots$ ㉠
양변을 제곱하면
$\{f(x)\}^2+4f(x)+4=4-f(x)$
$\{f(x)\}^2+5f(x)=0$
$f(x)<0$이므로 $f(x)=-5$이고, 이는 방정식 ㉠을 만족한다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-5$는 점 $(0,-5)$에서 접하므로
방정식 $f(x)=-5$의 실근은 $x=0$이다.
(i)(ii)에서 주어진 방정식의 실근은
$x=\alpha,\beta,0$의 3개이다.

12. 정답 10
i) A공장의 일률 $=\dfrac{50}{x}$ [대/시간]
ii) B공장의 일률 $=\dfrac{50}{x+5}$ [대/시간]
iii) $A,\ B$ 두 공장을 동시에 가동할 때의 일률 $=\dfrac{50}{6}$
[대/시간]
$\therefore\ \dfrac{50}{x}+\dfrac{50}{x+5}=\dfrac{50}{6}$
분모의 최소공배수를 곱하여 정리하면 $x^2-7x-30=0$
$\therefore\ x=10$

13. 정답:10
분수방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기
갈 때의 속력은 시속 $a$km였고, 돌아올 때는 갈 때보다
속력을 시속 2km줄였더니 15분이 더 걸렸으므로
$\dfrac{10}{a}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{10}{a-2}\ (a>2)$
양변에 $4a(a-2)$를 곱하면
$40(a-2)+a(a-2)=40a$
$a^2-2a-80=0$
$(a+8)(a-10)=0$
$\therefore a=10\ (\because\ a>2)$

14. 정답 36


C : A가 선회하여 B와 만나는 지점
v : 배 B의 최대 속력
$\dfrac{20}{v-2}=\dfrac{x+20}{2v-2}\cdots$ ①
$\dfrac{x+2}{2v+2}=1\cdots$ ②
①, ②를 연립하면 $v=12km/h$
따라서, 최대 속력의 합은 $36km/h$

15. 정답 30
[출제의도] 분수방정식을 이용하여 실생활과 관련된 문제를 해결할 수 있는가를 묻는

문제이다.

$$\frac{24}{2a}+\frac{6}{a}-\left(\frac{24}{2a+20}+\frac{6}{a+10}\right)=\frac{9}{60}$$

$\therefore\ a=30$(km/시)

16. 정답: ④

분수방정식의 실생활 응용문제

수조의 용량을 L

단위시간당 급수하는 물의 양을 a

단위시간당 빼내는 물의 양을 b라 하자.

주어진 조건에 의해

$$\frac{\mathrm{L}}{a}=\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\ ㉠\qquad \frac{\frac{\mathrm{L}}{2}}{b}+\frac{\frac{\mathrm{L}}{2}}{a-b}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉡의 분모, 분자에 $\frac{1}{\mathrm{L}}$을 곱하면

$$\frac{1}{\frac{b}{\mathrm{L}}}+\frac{1}{\frac{a}{\mathrm{L}}-\frac{b}{\mathrm{L}}}=3\qquad \frac{a}{\mathrm{L}}=\mathrm{A},\ \frac{b}{\mathrm{L}}=\mathrm{B}\text{라 두면}$$

㉠에서 $\mathrm{A}=\frac{4}{3}$　　㉡에서 $\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{A}-\mathrm{B}}=3$

$\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{B}=3\mathrm{B}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$

$\frac{4}{3}=3\mathrm{B}\left(\frac{4}{3}-\mathrm{B}\right)$

$3\mathrm{B}^2-4\mathrm{B}+\frac{4}{3}=0$

$9\mathrm{B}^2-12\mathrm{B}+4=0$

$(3\mathrm{B}-2)^2=0\quad \therefore \mathrm{B}=\frac{2}{3}$

따라서 가득찬 물을 빼내는 데 걸린 시간은

$\frac{\mathrm{L}}{b}=\frac{1}{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}$　　∴ 1시간 30분

[별해] 수조의 총량을1이라 하고,

시간당 물이 채워지는 양을a라 하면

$1=a\times\frac{3}{4}\quad \therefore a=\frac{4}{3}$

시간당 물이 빠지는 양을 b라 하면

$\frac{1}{2}=b\times t\quad \therefore b=\frac{1}{2t}$

나머지$\frac{1}{2}$을 채우는 양은$a-b$이므로

$\frac{1}{2}=(a-b)\times(\frac{5}{2}-1-t)$

$\frac{1}{2}=(\frac{4}{3}-\frac{1}{2t})\times(\frac{3}{2}-t)$에서$t=\frac{3}{4}$

즉, 45분이 된다. $\therefore b=\frac{1}{2t}=\frac{3}{2}$

그러므로1시간30분이다.

17. 정답: ②

사무실 C의 하루 평균 식수 소비량을 x라고 하면 사무실 A의 하루 평균 식수 소비량은 $x+5$, 사무실 B의 하루 평균 식수 소비량은 $x-4$, 세 사무실에 공급된 식수의 양을 M이라 하면 $a=\frac{M}{x+5}$, $b=\frac{M}{x-4}$, $c=\frac{M}{x}$

따라서, $a+c=b$이므로

$$\frac{M}{x+5}+\frac{M}{x}=\frac{M}{x-4}\Leftrightarrow\frac{2x+5}{x(x+5)}=\frac{1}{x-4}$$

위의 식을 정리하면 $x^2-8x-20=0\Leftrightarrow(x-10)(x+2)=0$

$\therefore\ x=10(\because x>4)$

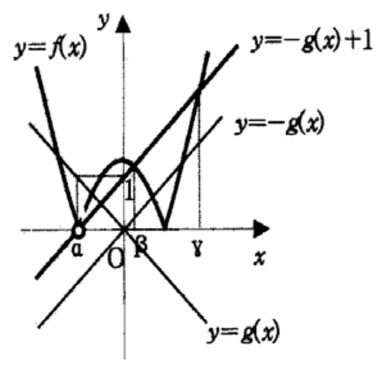
18. 정답: ②

$\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{f(x)g(x)}$ 의 양변에 $f(x)g(x)$를 곱하면

$f(x)+g(x)=1$　　(단, $f(x)g(x)\neq 0$)

즉, $f(x)=1-g(x)$

$y=f(x)$와 $y=1-g(x)$의 그래프의 교점을 구하면 그림과 같다.



교점의 x좌표는 α, β, γ, 이 중에서 α는 $f(\alpha)=0$이므로 무연근이다. 따라서 실근은 β, γ로 2개다.

19. 정답 55

[출제의도] 분수방정식의 해 구하기

주어진 분수방정식의 양변에 분모의 최소공배수를 곱하여 정리하면

$\{f(x)\}^2-3f(x)+2=0$이다.

$\therefore\ f(x)=1$(무연근), $f(x)=2$

조건에서 $f(x)=(x-7)(x-8)+1$이므로 이차방정식

$x^2-15x+55=0$의 두 근의 곱은 55이다.

20. 정답:36

[출제의도] 분수방정식의 그래프 이해

$$\frac{f(x)^2-g(x)^2}{x^2-1}=0$$

$\Leftrightarrow f(x)^2-g(x)^2=0,\ x\neq\pm1$

$\Leftrightarrow \{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}=0,\ x\neq\pm1$

$\therefore\ f(x)=g(x)$또는 $f(x)=-g(x),\ x\neq\pm1$

(i) $f(x)=g(x)$의 해는

$y=f(x)$와 $y=g(x)$와의 교점의 x좌표이므로
$\therefore x=-2$또는 $x=3$ $(x\neq 1$이므로$)$
(ii) $f(x)=-g(x)$의 해는
$y=f(x)$와 $y=-g(x)$
(위의 그래프 $y=g(x)$와 x축에 대하여 대칭 이동한 그래프)와의 교점의 x좌표이므로
$\therefore x=-3$또는 $x=2$ $(x\neq -1$이므로$)$
그러므로 모든 근의 곱은 $(-2)\times 3\times(-3)\times 2=36$

21. 정답 ③
ㄱ. $a=0$일 때, $\frac{1}{x(x+2)}=1$이다.
$x^2+2x-1=0$ 이므로 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 이다.
두 실근의 합은 -2이다. (참)
ㄴ. $a=2$일 때, $\frac{1}{x(x+2)}+\frac{2}{x+2}=1$이므로
$x=1,-1$인 두 실근을 가진다. (거짓)
ㄷ. $\frac{x^3+2x^2-x-a}{x(x+2)(x+a)}=0$이다.
삼차방정식 $x^3+2x^2-x-a=0$은 적어도 한 개의 실근을 갖는다.
한 실근이 무연근일 수 있으므로 한 실근을 $x=-a$라고 가정하면 $-a^3+2a^2+a-a=0$이므로
$a=0,\ 2$이다.
ㄱ, ㄴ에 의하여 두 개의 실근을 갖는다.
따라서, 주어진 방정식은 적어도 한 개의 실근을 갖는다. (참)

22. 정답 21
$\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x-6}=\frac{1}{10}$ 을 풀면
$x^2-17x-84=0$
$\therefore\ x=-4,\ 21$
$\therefore\ x=21$

23. 정답: 60
[출제의도] 분수방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기
처음의 일정한 속도를 x라 하면
$\frac{80}{x}+\frac{40}{x-20}-\frac{120}{x}=\frac{20}{60}$
$\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=\frac{1}{3}$ 양변에 $3(x-20)x$을 곱하면
$120x-(120x-2400)=x(x-20)$
$x^2-20x-2400=0$
$(x-60)(x+40)=0$
$\therefore\ x=60\ (\because\ x>0)$

24. 정답 ④
A의 속력을 v, 순례단이 나아가는 방향과 반대로 움직인 시간을 t_1, 같은 방향으로 움직인 시간을 t_2라 하면
$vt_1+4t_1=2$, $vt_2-4t_2=2$
전달자가 움직인 시간 (t_1+t_2)는 순례단이 움직인 시간과 같으므로 $\frac{2}{v+4}+\frac{2}{v-4}=\frac{2}{4}$이다.
$\therefore\ \ v=4+4\sqrt{2}$

25. 정답: 20
A 항구와B 항구를 왕복하는 여객선이 정상적으로 운행할 때의 속력은 $a(km/$시$)$ 이므로
10 시에 A 항구를 출발한 여객선이 기관 이상이 생기기 전까지 운행한 시간은 $\frac{40}{a}$ (시간),
기관 고장 후 운행한 시간은 $\frac{20}{a-10}$ (시간),
11 시에 A 항구를 출발한 여객선이 B 항구에 도착할 때까지 걸린 시간은 $\frac{60}{a}$ (시간)이다.
두 여객선이 동시에 B 항구에 도착하였으므로
$\frac{40}{a}+\frac{20}{a-10}=\frac{60}{a}+1 \Leftrightarrow \frac{20}{a-10}-\frac{20}{a}=1$
위의 식의 양변에 $a(a-10)$ 을 곱하여 정리하면
$20a-20(a-10)=a(a-10)$
$\Leftrightarrow a^2-10a-200=0$
$\Leftrightarrow (a+10)(a-20)=0$
$\therefore\ a=20\ (\because\ a>0\ )$

26. 정답:④
[출제의도] 분수방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기
수영의 평균속력을 $x$km/분
$\frac{1.5}{x}+\frac{40}{10x}+\frac{10}{x+0.2}=120$
$x=\frac{1}{15}$
싸이클의 평균속력은
$\frac{1}{15}\times 10=\frac{2}{3}$km/분

27. 정답: 3
[출제의도] 분수방정식을 세우고 그 방정식을 해결하기
직선궤도에서의 속도를 v(m/초)라 하면
$\frac{1200}{v}+\frac{10}{v-2}=410$
양변에 $v(v-2)$를 곱하여 정리하면
$(v-3)(41v-80)=0\ \ \therefore\ \ v=3\ \ (\because\ \ v>2\ )$

28. 정답:②
[출제의도]분수방정식을 이용하여 실생활에서의 문제 해결하기
중선의 정리에 의하여 $4+6=2(1+a^2)$
$\therefore a=2(\because a>0)$
$(\text{시간})=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$에 의하여 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-2}$
양변에 $3x(x-2)$를 곱하여 정리하면
$2x^2-13x+6=0$
$(2x-1)(x-6)=0$
$\therefore x=6\ (\because x>2)$

29. 정답 ②
A가 1시간 동안 생산하는 제품의 수를 x라 하면
$\dfrac{240}{x}=\dfrac{240}{x-4}-16$
$240(x-4)=240x-16x(x-4)$
$x^2-4x-60=0,\ x=10(\because x>0)$
1시간에 생산하는 제품의 개수는 A는 10개,
$B=10-4=6$개이다.
따라서 $\dfrac{240}{16}=15(\text{시간})$

30. 정답:200
[출제의도] 분수방정식을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하기
최고속력$=2x$km/시
역 C를 만들어 5분간 정차할 때 추가되는 시간은
$\dfrac{20}{x}-\dfrac{20}{2x}+\dfrac{5}{60}=\dfrac{11}{60},\ \dfrac{10}{x}=\dfrac{6}{60}$
$\therefore x=100$
$\therefore$ 최고속력은 $2x=200(\text{km/시})$

31. 정답 ③
주어진 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$(x-1)(x-2)(x-6)=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=6$ ($\because\ x=1$은 무연근)
따라서 모든 실근의 합은 8이다.

32. 정답 5
$3\sqrt{x-1}=11-x$
양변을 제곱하여 정리하면
$x^2-31x+130=0$
$(x-5)(x-26)=0$
$\therefore x=5$ ($\because x=26$ 은 무연근)

33. 정답 ④
양변을 제곱하면 $2x-3=x^2-6x+9$
$(x-2)(x-6)=0$
$\alpha=6,\ \beta=2$이므로 $\alpha-\beta=4$이다.

34. 정답 ②
$\sqrt{x^2-x-2}=t$라 하면 $t^2+t-2=0$
$\therefore t=1,\ t=-2$(무연근)
$\therefore x^2-x-3=0$에서 두 근의 곱은 -3이다.

35. 정답 ①
$\sqrt{x^4-x^2+2}=t,\ t\geq 0$이므로
$(\text{준식})=t^2-2-t=(t-2)(t+1)=0,$
$t=2(\because t\geq 0)$
$x^4-x^2+2=4$이고 $x^2=2,\ -1$이므로
실근 $x=\pm\sqrt{2}$
따라서 모든 실근의 곱은 -2

36. 정답:2
[출제의도] 무리방정식의 치환형 풀기
$\sqrt{x^2-2x+4}=t$라 하면
$t^2-t-2=0$에서
$t=-1$또는 2
$\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$
$\sqrt{x^2-2x+4}=2$에서 $x^2-2x=0$이므로
모든 실근의 합은 $0+2=2$

37. 정답: ①
양변을 제곱하여 정리하면
$2x^2+7x+3=0 \Leftrightarrow (x+3)(2x+1)=0$
$\therefore\ x=-3$ 또는 $-\dfrac{1}{2}$
이 값은 주어진 방정식을 모두 만족시키므로 근이다.
따라서, 모든 근의 곱은 $\dfrac{3}{2}$이다.

38. 정답: ④
[출제의도] 무리방정식의 해 구하기
$\sqrt{x}=x-3$과 $-\sqrt{x}=x-3$의 양변을 제곱하면
$x=x^2-6x+9$
$x^2-7x+9=0$ 모든 근의 합은
$\therefore\ \alpha+\beta=7$

39. 정답 11
$\sqrt{x-1}=t$로 치환하면 $t\geq 0$이다.

무리방정식은 $t^3-6t=t^2$

정리하면 $t^3-t^2-6t=0$

인수분해를 하면 $t(t-3)(t+2)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=0$ 또는 $t=3$

$\therefore\ \sqrt{x-1}=0$ 또는 $\sqrt{x-1}=3$

양변 제곱하여 x를 구하면

$x=1$ 또는 $x=10$

실근의 합 $=1+10=11$

40. 정답 20

[출제의도] 무리방정식 이해하기

$\sqrt{x^2-1}=x-\frac{1}{2}$, $x^2-1=x^2-x+\frac{1}{4}$

$x=\frac{5}{4}$는 무연근이 아니므로 $\alpha=\frac{5}{4}$

$\therefore\ 16\alpha=20$

41. 정답: 12

[출제의도] 무리방정식의 치환하여 정리하기

$x^2-12x+\sqrt{x^2-12x+3}=3$에서

$\sqrt{x^2-12x+3}=t$라 하면

$t^2-3+t=3$ …… ㉠

$t^2+t-6=0$

$(t-2)(t+3)=0$

$t=2$또는 -3

$\therefore t=2(\because t>0)$

$\sqrt{x^2-12x+3}=2$

$\therefore x^2-12x-1=0$에서 모든 실근의 합은 12

42. 정답 ④

$\sqrt{x^2+5x}=t\ \ (t\geq 0)$로 놓으면

$t^2+5t-6=0, (t-1)(t+6)=0$

$\therefore t=1$

$\therefore\ \sqrt{x^2+5x}=1,\ \ x^2+5x-1=0$

따라서, 두 실근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-5$

43.정답: 7

$x-3=\sqrt{x-3}$ 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-3)(x-4)=0$

$\therefore\ x=3, 4$

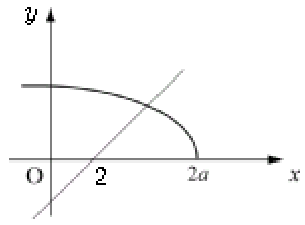
따라서, 모든 근의 합은 7 이다.

44. 정답 ①

$\sqrt{2a-x}+2-x=0$의 해는

곡선 $y=\sqrt{2a-x}$와 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표

$y=\sqrt{2a-x}=\sqrt{-(x-2a)}$



따라서 $2a\geqq 2$

$\therefore a\geqq 1$

45. 정답:④

방정식 $a+\sqrt{a-x}=2x-4$ 의 실근은 곡선

$y=a+\sqrt{a-x}$ 와 직선 $y=2x-4$ 의 교점의

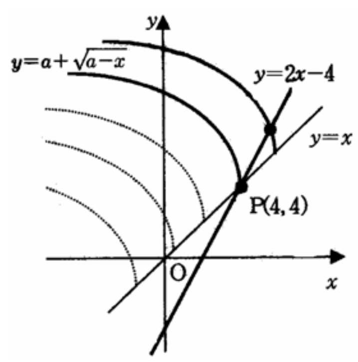
x 좌표와 같다. 한편, $y=a+\sqrt{a-x}$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 위의 점 (a, a) 에서 시작되는

곡선이므로 $x=2x-4$ 에서 $x=4$ (그림참조)

따라서, 주어진 방정식의 실근을 갖기 위한 상수 a 값의

범위는 $a\geqq 4$ 이므로, 구하는 최솟값은 4 이다.



46. 정답:④

$\sqrt{2x-1}=2x+k$ 의 양변을 제곱하면

$2x-1=4x^2+4kx+k^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+2(2k-1)x+k^2+1=0$ …㉠

㉠이 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=(2k-1)^2-4(k^2+1)\geqq 0 \Leftrightarrow -4k-3\geqq 0$

$\therefore\ k\leqq -\frac{3}{4}$

따라서, k 의 최댓값은 $-\frac{3}{4}$ 이다.

47. 정답 27

[출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\sqrt{x^2-5x+3}=X$로 놓으면

$X^2+X-6=0$, $(X-2)(X+3)=0\quad \therefore X=2,\ -3$

그런데 $X\geq 0$ 이므로 $X=\sqrt{x^2-5x+3}=2$

양변을 제곱하여 정리하면

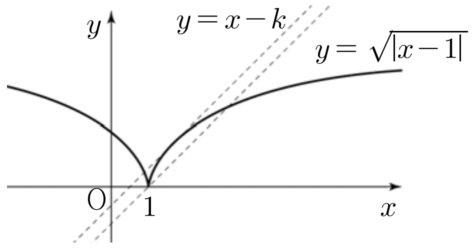
$x^2-5x-1=0$, $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-1$이므로 $\alpha^2+\beta^2=27$

48. 정답 ③
[출제의도] 그래프를 활용하여 무리방정식의 근의 개수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
무리방정식 $\sqrt{a-x^2}=x+1$은 함수 $y=\sqrt{a-x^2}$와 $y=x+1$의 교점의 x좌표이다. 함수 $y=\sqrt{a-x^2}$의 그래프는 원점이 중심이고 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$인 원의 상반부이다.
직선과 반원은 $a<\frac{1}{2}$일 때, 만나지 않고, $a=\frac{1}{2}$일 때, 접하게 되고, $\frac{1}{2}<a\leq 1$일 때, 서로 다른 두 점에서 만나고, $a>1$일 때, 반드시 한 점에서 만나게 된다.
∴ 옳은 설명은 ㄱ,ㄷ이 된다.

49. 정답:②
방정식 $a\sqrt{x}=x+b$의 실근의 개수는 두 함수 $y=a\sqrt{x}$와 $y=x+b$의 그래프의 교점의 개수와 같다.
ㄱ. $a<0$, $b>0$이면 곡선 $y=a\sqrt{x}$와 직선 $y=x+b$는 만나지 않으므로 주어진 방정식은 실근을 갖지 않는다. (참)
ㄴ. $a>0$, $b<0$이면 곡선 $y=a\sqrt{x}$와 직선 $y=x+b$는 한 점에서 만나므로 주어진 방정식은 한 개의 실근을 갖는다. (참)
ㄷ. (반례) $a=1$, $b=1$이면 두 그래프는 만나지 않는다.

50. 정답:3
[출제의도] 무리방정식의 해 구하기
곡선 $y=3-\sqrt{2-x}$ … ㉠과
직선 $y=-x-1$ … ㉡이 만나는 점이 $(a,\ b)$이므로 방정식
$3-\sqrt{2-x}=-x-1$ … ㉢의
근이 $x=a$
방정식 ㉢을 풀면
$x+4=\sqrt{2-x}$ … ㉣ 양변을 제곱하면
$x^2+9x+14=0$
$(x+2)(x+7)=0$
∴ $x=-2$또는 -7
그런데 ㉣에서 $-4\leq x\leq 2$
∴ $x=-2$, $y=1$
∴ $b-a=1-(-2)=3$

51. 정답 76

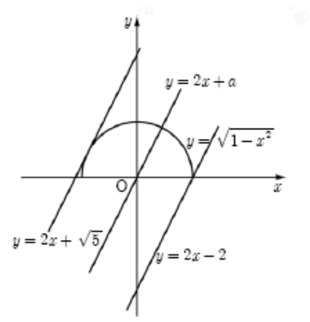


직선 $y=x-k$가 $(1,0)$을 지나면 $k=1$이다.
$y=\sqrt{x-1}$과 $y=x-k$가 접하는 경우
$x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$에서
$D=4k-3=0$이므로 $k=\frac{3}{4}$이다.
따라서 구하는 k의 범위는 $\frac{3}{4}<k<1$이다.
∴ $100a+b=76$

52. 정답 ①
$x-b=-\sqrt{ax}$의 실근이 α,
$x-b=\sqrt{ax}$의 실근이 β
따라서 $(x-b)^2=ax$의 두 실근이 α,β
$x^2-(2b+a)x+b^2=0$에서 근과 계수와의 관계에 의해
두 근의 합 $a+2b=10$

53. 정답 8개
$f(x)-x=t$로 치환하면 주어진 식은
$t=(2t-1)^2$ $(t\geq\frac{1}{2})$ …… ㉠
위 식을 정리하면 $(4t-1)(t-1)=0$
∴ $t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=1$이다.
위의 ㉠조건을 만족하는 값은 $t=1$이다.
즉 $f(x)=x+1$의 교점이 주어진 방정식의 근을 만족한다.
따라서 교점의 개수는 8개이다.

54. 정답 ③
두 그래프 $y=\sqrt{1-x^2}$과 $y=2x+a$의 교점이 존재해야 하므로 $-2\leq a\leq\sqrt{5}$



55. 정답 ①

$\sqrt{4-x^2}=kx+3$ 를 양변을 제곱하면

$(k^2+1)x^2+6kx+5=0$ 에서 판별식 $D\geqq 0$ 이어야 하므로

$k\leqq -\frac{\sqrt{5}}{2},\ k\geqq \frac{\sqrt{5}}{2}$

56. 정답: 40

정문에서 P지점까지의 거리를 $x\,m$라 하면

$\frac{x}{1}+\frac{\sqrt{(100-x)^2+80^2}}{2}=90$

$2x+\sqrt{(100-x)^2+80^2}=180$

$\sqrt{(100-x)^2+80^2}=180-2x$ …㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$3x^2-520x+16000=0 \Leftrightarrow (x-40)(3x-400)=0$

그런데 ㉠에서 $180-2x\geqq 0$ 이므로 $x\leqq 90$

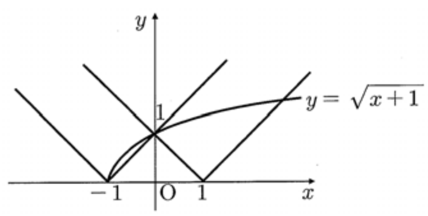
$\therefore\ x=40\ (m)$

57. 정답: ⑤

[출제의도] 그래프를 이용하여 무리방정식의 실근의 개수

$y=|x-k|$의 그래프가 $(-1,\ 0)$을 지날 때,

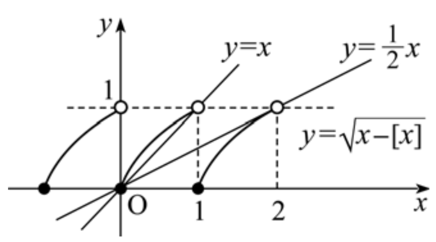
$k=-1$ $(1,\ 0)$을 지날 때, $k=1$이다.



$\therefore -1<k<1$

58. 정답 ②

방정식의 실근의 개수는 두 함수 $y=\sqrt{x-[x]}$, $y=ax$ 의 그래프의 교점의 개수와 같다.



$y=ax$가 점$(1,\ 1)$을 지날 때 $a=1$ … ㉠

$y=ax$가 $y=\sqrt{x-1}$ 과 접할 때는

$ax=\sqrt{x-1}$ $(a>0)$에서 $a^2x^2-x+1=0$이 중근을

가지므로 $D=1-4a^2=0$ 에서 $a=\frac{1}{2}$ … ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$

59. 정답: 9

[출제의도] 그래프를 이용하여 무리방정식의 실근의 개수

주어진 방정식의 양변을 제곱하여 정리하면

$\{f(x)\}^2-9f(x)+18=0$

$f(x)=3$또는 $f(x)=6$를 주어진 방정식에 대입하면

$f(x)=6$인 경우만 성립한다.

이차함수 $y=f(x)$가 $x=\frac{9}{2}$에서 대칭인 함수이므로 $f(x)=6$을 만족하는 x의 값은 $\frac{9}{2}-\alpha,\ \frac{9}{2}+\alpha$ 이므로 실근의 합은 9이다.

60. 정답:①

[출제의도] 무리방정식을 이용하여 실생활문제 해결하기

[코스1]을 따라 산책하는 데 걸리는 시간은

$\frac{3+6}{3}=3$(시간) $\overline{\mathrm{BC}}=x\,(\mathrm{km})$

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos 120^\circ$

$=9+x^2+3x$

따라서 [코스2]를 따라 산책하는 데 걸리는 시간은

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CD}}}{3}=\frac{\sqrt{x^2+3x+9}+6-x}{3}=3-\frac{1}{6}$

$\therefore 2\sqrt{x^2+3x+9}=2x+5$

$x=\frac{11}{8}$

61. 정답 9

$-4n\leqq x\leqq 4n$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$\sqrt{(4n+x)(4n-x)}=2n^2-4n$ ……①

$16n^2-x^2=(2n^2-4n)^2$ 에서

$x^2=2n^3(8-2n)$ ……②

① 과 ②에서

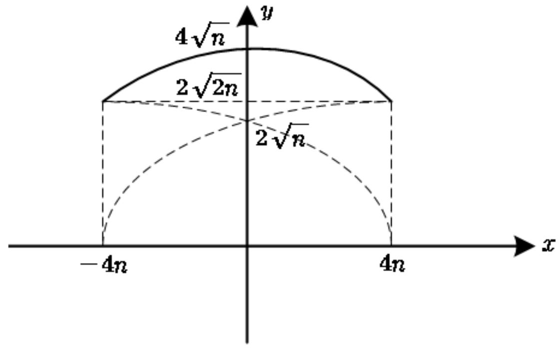
$2n^2-4n\geqq 0,\ 8-2n\geqq 0$ ⇨ $2\leqq n\leqq 4$

$\therefore\ n=2,3,4$

$\therefore$ 모든 n의 값은 9

[별해]

$y=\sqrt{(4n+x)}+\sqrt{(4n-x)}$ 의 그래프를 그려보면



실근을 갖기 위한 n 값의 범위를 구해보면

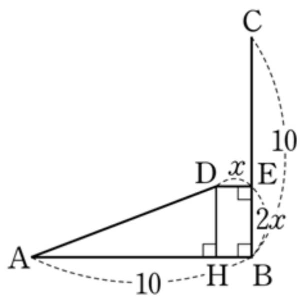
$2\sqrt{2n} \leqq 2n \leqq 4\sqrt{n}$

이것을 정리하면 $2 \leqq n \leqq 4$ $\quad\therefore\ n=2, 3, 4$

$\therefore$ 모든 n의 값은 9

62. 정답 ④

D에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AH}^2+\overline{DH}^2}$

$=\sqrt{(10-x)^2+(2x)^2}$

$=\sqrt{5x^2-20x+100}$

따라서, 영희의 소요시간은

$\dfrac{\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EC}}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+x+(10-2x)}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}$

철수의 소요시간은

$\dfrac{\overline{AB}}{3}+\dfrac{\overline{BC}}{6}=\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{6}=5$

이므로

$\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}=3$

$\sqrt{5x^2-20x+100}=x+8$

$5x^2-20x+100=x^2+16x+64$

$4x^2-36x+36=0$

$x^2-9x+9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-36}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{45}}{2}=\dfrac{9\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $\overline{BE}=2x$에서 $0<2x<10$ $\quad\therefore\ 0<x<5$

$\therefore\ x=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$

63. 정답 11

$(x-1)(x-3)(x-15)<0$ 을 만족하는 부등식의 해는

$x<1$ 또는 $3<x<15$

따라서 양의 정수해의 개수는 11 (개)

64. 정답: 25

[출제의도] 실생활과 연결된 무리방정식의 해 구하기

$\overline{PA}+\overline{AC}+\overline{CQ}=160$이므로 $\dfrac{x}{10}=t$라 하면

$6+t+\sqrt{(7-t)^2+6^2}=16 \quad \therefore t=\dfrac{5}{2}$

따라서 x의 값은 25이다.

65. 정답 ②

$x^3-6x^2+3x+10\leqq 0,\ (x+1)(x-2)(x-5)\leqq 0$

$x\leqq -1$ 또는 $2\leqq x\leqq 5$이므로

자연수 x의 개수는 4개

66. 정답 ④

ⅰ) $a<0$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$a<x<0$

따라서, 자연수가 존재하지 않는다.

ⅱ) $0\leq a<1$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$0<x<a$

따라서, 자연수가 존재하지 않는다.

ⅲ) $a\geq 1$일 때,

$x(x-a)(x-1)^2<0$의 해는

$0<x<1,\ 1<x<a$

따라서, 해집합 안에 자연수가 4개 존재하려면 그 자연수는 2, 3, 4, 5이어야 한다.

따라서, $5<a\leq 6$

최댓값은 6이다.

67. 정답:③

[출제의도] 고차부등식의 계산

$(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)\leqq 0$에서

$-1\leqq x\leqq 1,\ 2\leqq x\leqq 3$이므로 정수 x는

$x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$에서 5개다.

68. 정답 ④

$(x-1)(x+2)(x^2-mx+m)>0$에서

이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 근을 분류하면

ⅰ) 허근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족한다.

$D=m^2-4m<0 \quad \therefore 0<m<4$

ⅱ) 중근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족하기 위해서는

중근이 $x<-2$ 또는 $x>1$에 포함되지 않아야 한다.

$D=0$일 때, $m=0$이면 중근이 0이고

$m=4$이면 중근이 2이다. $\therefore m=0$

ⅲ) 서로 다른 두 실근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족하지 않는다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $0\leq m<4$이다.

따라서 모든 정수 m의 개수는 4개다.

69. 정답: ④

[출제의도] 고차부등식의 해 이해하기

$x^3+(a+1)x^2+2ax+a<0$

$(x+1)(x^2+ax+a)<0$에서

$x^2+ax+a=0$의 근이 허근 및 중근일 때 $x<-1$인 해를 가지므로

$x^2+ax+a\geqq 0$이어야 한다.

$\therefore x^2+ax+a=0$의 판별식 $D=a^2-4a\leqq 0$

$\therefore 0\leqq a\leqq 4$

따라서, a의 최솟값은 0이다.

70. 정답:②

[출제의도] 고차부등식과 이차함수의 활용

$x^4-x^3-x^2-2x<0$

$x(x-2)(x^2+x+1)<0 \quad \therefore\ 0<x<2$

따라서 $0<x<2$인 모든 실수 x가

$f(x)=-x^2+x+k=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{1}{4}>0$을 만족시키려면

$f(2)\geqq 0$이어야 한다.

$\therefore\ k\geqq 2$

71. 정답 ①

해는 $\begin{cases}0<x\leqq a\\-2a\leqq x<-a\end{cases}$

해의 정수해가 총 4개인데,

i) $a=$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\leqq a$에서 a개

$-2a\leqq x<-a$에서 $(-a)-(-2a)=a$개

$\therefore\ 2a=4,\ a=2$

이때 정수해는 1, 2, -3, -4

ii) $a\neq$(정수), $2a\neq$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\leqq a$에서 $[a]$개

$-2a\leqq x<-a$에서 $[-a]-([-2a]+1)+1$개

$[a]+[-a]-([-2a]+1)+1=[a]+[-a]-[-2a]$

$=-1-[-2a]=4$

$[-2a]=-5$

$-5<-2a<-4 \quad (\because\ 2a\neq(\text{정수}))$

$\frac{5}{2}>a>2$

이때 정수해는 1, 2, -3, -4

$\therefore\ 2\leqq a<\frac{5}{2}$일 때 정수해는 1, 2, -3, -4이고 그 합은 -4

72. 정답 20

[출제의도] 연립부등식의 정수해 구하기

부등식 $x^4-50x^2+49\leq 0$을 풀면,

$(x+7)(x+1)(x-1)(x-7)\leq 0$이므로

$-7\leq x\leq -1$ 또는 $1\leq x\leq 7$이다.

부등식 $\frac{(x-5)(x+1)}{x-3}\geq 0$을 풀면,

$-1\leq x<3$ 또는 $x\geq 5$이다.

그러므로 두 부등식을 모두 만족하는 범위는

$x=-1$ 또는 $1\leq x<3$ 또는 $5\leq x\leq 7$이므로

정수 $x=-1$, 1, 2, 5, 6, 7이다.

따라서, 모든 정수 x의 합은 20이다.

73. 정답 10

(i) $(x+1)(x^2+x+1)\geqq 0$에서 $x\geqq -1$

(ii) $\frac{28}{x+2}\leqq 9-x$에서 $\frac{28}{x+2}+x-9\leqq 0$

$\frac{x^2-7x+10}{x+2}\leqq 0 \quad \frac{(x-2)(x-5)}{x+2}\leqq 0$

$(x+2)(x-2)(x-5)\leqq 0\ (x\neq -2)$

$x<-2,\ 2\leqq x\leqq 5$이므로

(i) (ii)에서 공통범위는 $2\leqq x\leqq 5$

$\therefore Mm=5\times 2=10$

74. 정답: ④

[출제의도] 분수부등식의 계산

준식의 양변에 분모의 최소 공배수 x^2-6x+5를 곱하여 정리하면

$(x+2)(x-1)^2(x-5)\leqq 0$

$-2\leqq x<1,\ 1<x<5$이므로

정수 x는 -2, -1, 0, 2, 3, 4에서 6개이다

75. 정답 14

1을 제외한 자연수 x에 대하여 $x-1>0$ 이므로

양변에 $x-1$을 곱하여 정리하면

$x^2-4x-5\leqq 0$

$(x+1)(x-5)\leqq 0$

만족하는 자연수 x는 2, 3, 4, 5 ($\because x$는 1보다 큰 자연수)

$\therefore$ 자연수의 합은 14

76. 정답 37

(준식)$\Leftrightarrow x\neq 5,\ (x-2)(x-10)<0$

$\Leftrightarrow x\neq 5,\ 2<x<10$

부등식을 만족하는 정수는 3, 4, 6, 7, 8, 9이다.

77. 정답 5

$x-4\leqq\frac{20}{x-3}$

$\Leftrightarrow\ x-4-\frac{20}{x-3}\leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-4)(x-3)-20}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x-8}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-8)}{x-3} \leqq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x-8) \leqq 0,\ x \neq 3$

따라서, 주어진 부등식의 해는

$x \leqq -1$ 또는 $3 < x \leqq 8$이므로

자연수 x는 $4, 5, 6, 7, 8$의 5개다.

78. 정답 ①

[출제의도] 분수부등식 이해하기

주어진 식의 양변에 $(x-1)^2(x-2)^2$ 을 곱하면

$(x-1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \leqq 0$

$-\sqrt{2} \leqq x < 1$ 또는 $\sqrt{2} \leqq x < 2$

이를 만족하는 정수 x 는 $-1, 0$ 이다.

$\therefore$ 2 개

79. 정답 ③

[출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-1} > 1$의 양변에 $(x+2)^2(x-1)^2$을 곱하여 정리하면

$(x+2)(x-1)(x^2+2x+3) < 0$

$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$이므로

$(x+2)(x-1) < 0$이 된다.

$\therefore -2 < x < 1$

80. 정답 ①

준식을 정리하면

$(x+4)(x-2)(x^2+2) \leq 0,\ x \neq 2,\ -4$

$-4 < x < 2$

이때 정수 $x = -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$

81. 정답: 14

[출제의도] 분수부등식의 계산

$\dfrac{x^2-x-56}{|x(x-2)|} \leqq 0$에서 $|x(x-2)| > 0$이므로

$x \neq 0,\ x \neq 2$

$x^2-x-56 \leqq 0$

즉, $(x-8)(x+7) \leqq 0$

$\therefore\ -7 \leqq x \leqq 8$

따라서 -7에서 8까지의 정수의 개수는

$8-(-7)+1 = 16$이다.

이 때, 0, 2가 제외되므로 구하는 정수 x의 개수는

14개다.

82. 정답: 72

$2x - 1 - \dfrac{5}{x-2} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x-1)(x-2)-5}{x-2} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2-5x-3}{x-2} \leqq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x+1)(x-3)}{x-2} \leqq 0$

$\Leftrightarrow x \leqq -\dfrac{1}{2}$ 또는 $2 < x \leqq 3$ ($\because\ x = 2$ 는 무연근)

따라서, 구하는 정수는 $-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3$ 이고 모든 정수의 곱은 72 이다.

83. 정답 ①

(i) $\dfrac{x^2-a^2}{x^2-x+1} < 0$에서 $x^2-x+1 > 0$이므로

$x^2-a^2 < 0$

$\therefore\ -a < x < a$ ...... ㉠

(ii) $\dfrac{1}{x-2b} < \dfrac{1}{x+2}$의 양변에 $(x-2b)^2(x+2)^2$을 곱하면

$(x+2)^2(x-2b) < (x+2)(x-2b)^2$

$(x+2)(x-2b)(x+2-x+2b) < 0$

$(2+2b)(x+2)(x-2b) < 0$ ...... ㉡

㉡이 ㉠과 같은 해를 갖기 위해서는

$2+2b > 0,\ a = 2,\ b = 1$이어야 한다.

$\therefore ab = 2$

84. 정답 ①

[출제의도] 분수부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{1}{x-3} > 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{3a-1}{a+1}\right)(x+1)(x-3) > 0$

이때, $A \subset B$이기 위해서는 $\dfrac{3a-1}{a+1} \geqq 2$ 이어야 하므로

$3a-1 \geqq 2a+2 \quad \therefore\ a \geqq 3$

85. 정답 ②

[출제의도] 분수부등식과 고차부등식의 연립부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} \geqq 0$ 에서 좌변을 통분하여 정리하면

$(x-1)(x-2)(x-3) \geqq 0, x \neq 1, x \neq 3$

$\therefore 1 < x \leqq 2$ 또는 $x > 3$···· ㉠

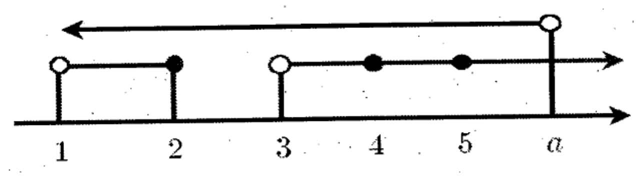
$(x-a)(x^2-x+1) < 0$ 에서

항상 $x^2-x+1 > 0$ 이므로

$(x-a)(x^2-x+1) < 0 \Leftrightarrow (x-a) < 0$ ··· ㉡

㉠과 ㉡의 공통범위에서 조건을 만족하는 a의 범위를 구하면

$5 < a \leq 6$이므로 최댓값은 6이다.



86. 정답:③

ㄱ. (참) $\dfrac{x-a}{x-a} \leq 0$ 이면 $1 \leq 0$ 이므로 부등식의 해가 존재하지 않는다.

$\therefore n(a, a) = 0$

ㄴ. (참) $\dfrac{x-a}{x-b} \leq 0$ 에서 $(x-a)(x-b) \leq 0$, $x \neq b$

$\therefore a \leq x < b$

$\therefore n(a, b) = b - a$

$\dfrac{x-b}{x-a} \leq 0$ 에서 $(x-a)(x-b) \leq 0$, $x \neq a$

$\therefore a < x \leq b$

$\therefore n(b, a) = b - a$

$\therefore n(a, b) = n(b, a)$

ㄷ. (거짓) $\dfrac{x-b}{x-c} \leq 0$ 에서 $b \leq x < c$

$\therefore n(b, c) = c - b$

$\dfrac{x-a}{x-c} \leq 0$ 에서 $a \leq x < c$

$\therefore n(a, c) = c - a$

$n(a, b)n(b, c) = (b-a)(c-b)$ 이므로

$n(a, b)n(b, c) \neq n(a, c)$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

87. 정답 ①

양수 a 에 대하여 $f(x)=a(x-1)(x-3)$ 꼴이므로

$\dfrac{f(x-2)}{f(x+2)}=\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$

양변에 분모 $(x+1)(x-1)$ 의 제곱을 곱하여 정리하면

$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5) \leq 0$ (단, $x \neq \pm 1$)

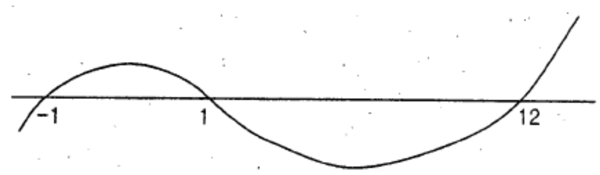
부등식의 해는 $-1<x<1$, $3 \leq x \leq 5$ 가 되어 정수 x 는 0, 3, 4, 5 이므로 모두 4 개다.

88. 정답 ④

분수부등식 $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(x-a)} \leq 0$ 을 정리하면

$(x-a)(x-b)(x-c) \leq 0$ $(x \neq a) \cdots$ ①

이 된다. $abc=-12$ 을 만족하는 정수 a, b, c 에 대하여 ①을 만족하는 자연수해 x 의 개수가 최대가 되기 위해서는 $b=-1$ 일 때, a 와 c 가 각각 1 또는 12 가 되는 경우이다. 따라서 자연수의 개수는 12 개이지만 a 가 무연근이므로 구하고자 하는 해의 최대 개수는 11 개다.



89. 정답 ④

$f(x-2)=ax(x-4)(x+4)$ $(a>0)$이므로

$\dfrac{f(x-2)}{x}=a(x-4)(x+4) \leq 0$ $(x \neq 0)$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 8이다.

90. 정답 ②

$f(x)g(x) \geq 0$ (단, $g(x) \neq 0$)이므로

$f(x) \geq 0$이고 $g(x)>0$의 해는 $1<x \leq 3$,

$f(x) \leq 0$이고 $g(x)<0$의 해는 $4<x \leq 5$

따라서 모든 정수 x의 값은 2, 3, 5이고

그 합은 10이다.

91. 정답 ③

그래프에서 $f(x)=a(x-2)(x+2)$라고 할 수 있으므로

$\dfrac{f(x+1)}{f(x-1)}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)} \leq 1$라고 할 수 있다.

부등식 $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)} \leq 1$을 풀면

$\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+1)}-1 \leq 0$

$\dfrac{x^2+2x-3-(x^2-2x-3)}{(x-3)(x+1)} \leq 0$

$\dfrac{4x}{(x-3)(x+1)} \leq 0$

$4x(x-3)(x+1) \leq 0$

$A=\{x \mid x<-1, 0 \leq x<3\}$ 이다.

집합 $B=\{x \mid -5<x<5\}$ 이므로 교집합에 속하는 정수의 개수는 $-4, -3, -2, 0, 1, 2$ 로 6 개다.

92. 정답 10

$\{f(x)\}^4-\{g(x)\}^3 f(x) \geq 0$ (단, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$)

$f(x)\{f(x)-g(x)\} \geq 0$이므로

1) $f(x)>0$이면 $f(x) \geq g(x)$ $\therefore$ 해는 5

2) $f(x)<0$이면 $f(x) \leq g(x)$ $\therefore$ 해는 1, 2, 3

3은 무연근이므로 모든 근들의 곱은 10

93. 정답:8

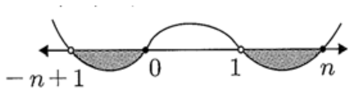
주어진 식의 양변에 $(x-a)^2(x-13)^2$ 을 곱하면

$(x-21)(x-a)(x-13) \leq 0$, $x \neq a$, $x \neq 13$

(i) $a \leq 13$ 인 경우 $x<a$, $13<x \leq 21$ 이므로 $a \leq 1$ 일

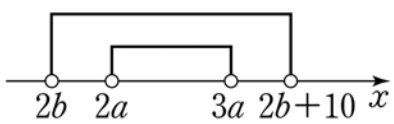
때 $f(a)$ 는 최소가 되며 그 값은 $21-13=8$ 이다.
(ii) $13<a\leqq 21$ 인 경우 $x<13$, $a<x\leqq 21$ 이므로
$a=21$ 일 때 $f(a)$ 는 최소가 되며 그 값은 12 이다.
(iii) $a>21$ 인 경우 $x<13$, $21\leqq x<a$ 이므로
$21<a\leqq 22$ 일 때 $f(a)$ 는 최소가 되며 그 값은
$12+1=13$ 이다.
(i)~(iii)에서 $f(a)$ 의 최솟값은 8 이다.

94. 정답: 51
[출제의도] 분수부등식의 해 이해하기
$f(x)=x(x-n)(x-1)(x+n-1)\leqq 0$
(단, $x\neq 1$, $x\neq -n+1$)
$x=0,\ 1,\ n,\ 1-n$ 에서 해을 그리면

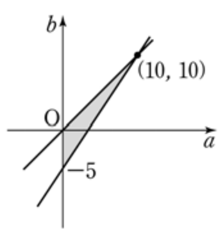


$-n+1<x\leqq 0$,에서 정수는
$0-(-n+1)=(n-1)$개,
$1<x\leqq n$에서 정수는 $(n-1)$개
따라서 $(n-1)+(n-1)=100$
$2n=102$ ∴ $n=51$

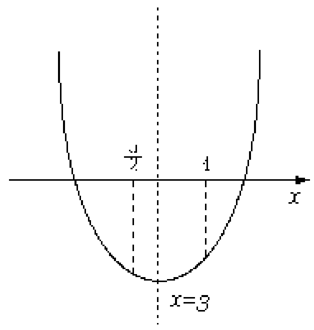
95. 정답 25
$\dfrac{a}{x-2a}>1,\quad \dfrac{a}{x-2a}-1>0$
$\dfrac{-x+3a}{x-2a}>0$
$(x-2a)(x-3a)<0$
∴ $2a<x<3a$ ㉠
$\dfrac{10}{x-2b}>1$에서 $\dfrac{10-x+2b}{x-2b}>0$
$(x-2b)(x-10-2b)<0$
∴ $2b<x<2b+10$ ㉡
조건에서 ㉠은 ㉡에 포함되어야 한다.



∴ $2b\leqq 2a,\ 3a\leqq 2b+10$
$b\leqq a,\ 2b\geqq 3a-10$
그림으로 표현하면, 교점은 (10, 10)
따라서, 영역의 넓이 S는
$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 10=25$



96. 정답: ⑤
$\dfrac{x-1}{4-x}>1$ 을 풀면 $\dfrac{5}{2}<x<4$ 이므로
$x^2-6x+k<0$ 을 항상 만족시키는 k 의 값의 범위를 구한다.
$f(x)=x^2-6x+k$ 로 놓을 때, $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같은 위치에 있어야 한다.
$f(4)=k-8\leqq 0$ 이어야 하므로 최댓값은 8이다.



97. 정답 18
전체 거리를 $3l$, 달리기 구간의 속력을 시속 $a$km라고 하면
$\dfrac{l}{30}+\dfrac{l}{9}+\dfrac{l}{a}\leqq\dfrac{3l}{15},\ \dfrac{1}{a}\leqq\dfrac{1}{18}$ ∴ $a\geqq 18$

98. 정답:12
$\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x-3}\leqq 1$
$\dfrac{x^2-13x+12}{x(x-3)}\geqq 0$
$x(x-1)(x-3)(x-12)\geqq 0$
$x<0$, $1\leqq x<3$, $x\geqq 12$
∴ $x\geqq 12$

99. 정답: 12
[출제의도] 분수부등식을 활용하여 실생활 문제 해결
평균속력을 x 이므로 소요되는 총 시간은
$\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x-3}\leqq 1$ (단 , $x>3$)이므로
$\dfrac{x^2-13x+12}{x(x-3)}\geqq 0$
$x(x-1)(x-3)(x-12)\geqq 0$
$x<0,\ 1\leqq x<3,\ x\geqq 12$
∴ $x\geqq 12$ 이므로 최솟값은 12이다

100. 정답 ③
[출제의도] 분수부등식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.
(i) $x-3+\dfrac{4}{x+2}\leqq 0$ ∴ $x<-2,\ -1\leqq x\leqq 2$
(ii) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-k}>0$ 에서 자연수인 해를 가지려면
$1<k<2$이다.
∴ $\alpha+\beta=1+2=3$

101. 정답 ⑤

$2\sqrt{x^2-x-2}+2=x^2-x$에서 $\sqrt{x^2-x-2}=t$라 하면

$2t=t^2,\quad t(t-2)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

(i) $t=0$일 때

$x^2-x-2=0,\ (x-2)(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(ii) $t=2$일 때

$x^2-x-2=4,\ (x-3)(x+2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\dfrac{x-5}{x-1}\leqq 0$에서

양변에 $(x-1)^2$을 곱하면

$(x-1)(x-5)\leqq 0,\ x\neq 1, \therefore 1<x\leqq 5$

따라서, (i), (ii)를 동시에 만족하는 x의 값은 $2, 3$으로 x의 값의 합은 5이다.

102. 정답 ③

[출제의도] 주어진 분수부등식의 해를 그래프를 이용하여 구할 수 있는가를 묻는 문항이다.

$\dfrac{f(x)}{x^2-x-2}\leqq 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{(x-1)(x+2)}\leqq 0$

(i) $f(x)\geqq 0,\ (x+1)(x-2)<0$

$f(x)\geqq 0 \Rightarrow x\leqq -\dfrac{9}{2},\ -\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2},\ x\geqq \dfrac{9}{2}\ \cdots$ ①

$(x+1)(x-2)<0 \Rightarrow -1<x<2\ \cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족시키는 x의 범위는 $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 정수해는 0 이다. $\therefore$ 1 개

(ii) $f(x)\leqq 0,\ (x+1)(x-2)>0$

$f(x)\leqq 0 \Rightarrow -\dfrac{9}{2}\leqq x\leqq -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{9}{2}\ \cdots$ ③

$(x+1)(x-2)>0 \Rightarrow x<-1,\ x>2\ \cdots$ ④

③, ④의 공통부분의 범위는

$-\dfrac{9}{2}\leqq x<-1,\ 2<x\leqq \dfrac{9}{2}$

$\therefore$ 정수의 해는 $-4, -3, -2, 3, 4$ 이다. $\therefore$ 5 개

(i), (ii)에 의해 정수해의 개수는 6 개다.

103. 정답 ③

조건 (가)에 의해 모든 실수 x에 대해

『$f(x)>0$이고 $g(x)>0$』이거나……㉠

『$f(x)<0$이고 $g(x)<0$』……㉡

또, (나) $\dfrac{g(x)}{f(x)}\times\dfrac{1}{h(x)}\geqq 0$

그런데 (가)에 의해 모든 실수 x에 대해 $\dfrac{g(x)}{f(x)}>0$

이므로 (나)는

$\dfrac{1}{h(x)}\geqq 0\quad \therefore\ h(x)>0$……㉢

ㄱ. $f(x)=0$이 실근을 가지면 (가)에 모순이므로 방정식 $f(x)=0$은

실근을 갖지 않는다. $\therefore$ 참

ㄴ. 위 ㉠의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 실수 전체의 집합

위 ㉡의 경우이면 $g(x)>0$의 해집합은 공집합 $\therefore$ 참

ㄷ. $|g(x)|>0,\ h(x)>0$이므로

항상, $|g(x)|+h(x)>0$이다.

즉, 방정식 $|g(x)|+h(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. $\therefore$ 거짓

104. 정답 ④

$A=\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\geqq 0$, $\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\geqq 0$

$\Leftrightarrow\ g(x)\{f(x)-g(x)\}\geqq 0$이고 $g(x)\neq 0$

(i) $g(x)>0,\ f(x)\geqq g(x)$일 때 그래프에서 $-3\leqq x<0$

(ii) $g(x)<0,\ f(x)\leqq g(x)$일 때 그래프에서 $3\leqq x\leqq 5$

(i)과 (ii)에서 만족하는 정수는

$B=\{x\mid -3\leqq x<0, 3\leqq x\leqq 5\}$

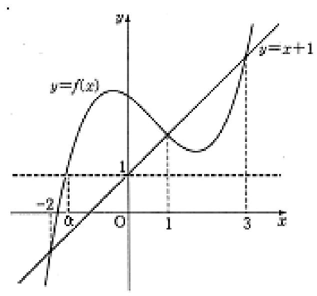
그러므로 $A\cap B=\{-3, -2, -1, 3, 4, 5\}$로 6개이다.

105. 정답 ③

$2x=t$로 치환하면

부등식 $\dfrac{x}{f(2x)-1}\geqq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{f(t-1)-1}\geqq 1$



(i) $f_{(t)}>1$이면

$f(t)\leqq t+1$ 이어야 하므로

주어진 그래프에서 두 조건을 만족하는 t의 범위는 $1\leqq t\leqq 3$이다.

(ii) $f_{(t)}<1$이면 $f_{(t)}\geqq t+1$이어야 하므로

같은 방법으로 t의 범위를 구하면 $-2\leqq t<\alpha$이다.

$\therefore\ -2\leqq 2x<\alpha,\ 1\leqq 2x\leqq 3$

$-1\leqq x\leqq \dfrac{\alpha}{2},\ \dfrac{1}{2}\leqq x\leqq \dfrac{3}{2}$

$\mathrm{M}=\dfrac{3}{2},\ m=-1\quad \therefore \mathrm{M}+m=\dfrac{1}{2}$

106. 정답: ④

[출제의도] 고차부등식과 분수부등식의 연립

$(x-2)(x-4)^2(x-6)\geqq 0$ 의 해는

$x=4$ 또는 $x\leqq 2$ 또는 $x\geqq 6\cdots$ ㉠

$\dfrac{2x-7}{x+1}\leqq 1$

$\frac{x-8}{x+1} \leq 0$ 의 해는 $-1 < x \leq 8$… ㉡

㉠ ㉡ 공통부분은 $-1 < x \leq 2$, $x=4$, $6 \leq x \leq 8$

따라서, 정수는 0. 1, 2, 4, 6, 7, 8이므로 7개이다.

107. 정답: 10

$(x+1)(x^2+x+1) \geq 0$ 에서 $x \geq -1$ 이고

$\frac{28}{x+2} \leq 9-x$ 에서 $x < -2$, $2 \leq x \leq 5$ 이므로

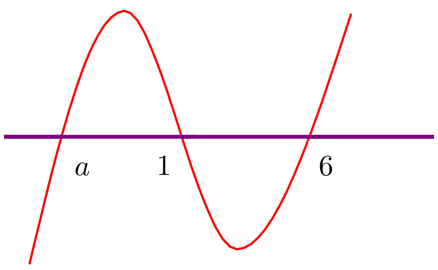
공통범위는 $2 \leq x \leq 5$

$\therefore\ Mm = 5 \times 2 = 10$

108. 정답 ⑤

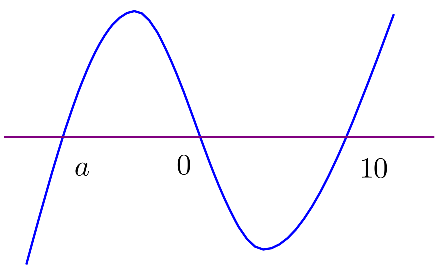
주어진 연립부등식의 각각의 해를 구하면 다음과 같다. (단, $a<0$)

$\frac{(x-6)(x-a)}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-1)(x-6) \geq 0, x \neq 1$



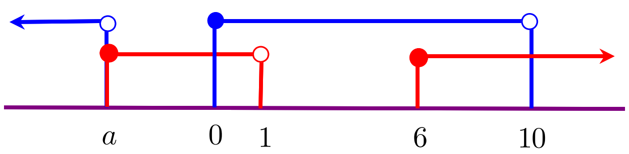
$\therefore a \leq x < 1, x \geq 6$ …… ①

$\frac{x}{(x-a)(x-10)} \leq 0 \Leftrightarrow (x-a)x(x-10) \leq 0, x \neq a, x \neq 10$



$\therefore x < a, 0 \leq x < 10$ …… ②

①,②로부터



주어진 연립부등식의 해는 $0 \leq x < 1, 6 \leq x < 10$이므로 정수의 개수는 5개(0, 6, 7, 8, 9)이다.

109. 정답:24

[출제의도] 연립부등식의 해 구하기

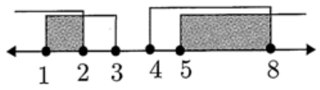
$\frac{(x-1)(x-3)}{x-5} \geq 0$을 풀면,

$1 \leq x \leq 3$, $x > 5$

$(x-2)(x-4)(x-8) \leq 0$을 풀면

$x \leq 2$, $4 \leq x \leq 8$

공통해는 $1 \leq x \leq 2$ 또는 $5 < x \leq 8$



따라서 부등식을 만족하는 정수는 1, 2, 6, 7, 8이므로 정수의 합은 24이다.

110. 정답 ④

$x^3-6x^2+5x = x(x^2-6x+5) = x(x-1)(x-5) \geq 0$

$\therefore 0 \leq x \leq 1,\quad x \geq 5$................①

$x(x-7) \leq 0 \qquad \therefore 0 < x \leq 7$......②

①, ②에서 $x=1$, 5 6, 7

111. 정답:③

[출제의도] 분수부등식의 계산

$\frac{x-a+x}{x} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{a}{2}$

$A \subset B$이므로 $\frac{a}{2} \leq 3$, $a \leq 6$

따라서 $a \leq 6$에서 최댓값은 6

112. 정답 14

$A=\{x|2<x<4\}$ 이고

i) $a \leq -1$ 이면 $B=\{x|x<a, x>-1\}$

$\therefore A \subset B$

ii) $a > -1$ 이면 $B=\{x|x<-1,\ x>a\}$

$A \subset B$가 되려면 $-1 < a \leq 2$

$\therefore a \leq 2$이므로 $7M = 14$

113. 정답 420

[출제의도] 분수부등식을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

A 구간의 평균 속력을 x $(x>20)$ 라 하자.

전체 구간에서의 평균 속력이 100 이상이므로 전체 구간을 주행하는데 걸리는 시간은 $\frac{6}{100}$ 시간 이하여야 한다. 따라서

$\frac{2}{x} + \frac{1}{100} + \frac{3}{x-20} \leq \frac{6}{100}$

$x > 20$ 이므로 $x^2 - 120x + 800 \geq 0$

$\therefore\ x \geq 60 + 20\sqrt{7}$

A 구간의 평균 속력의 최솟값은 $60+20\sqrt{7}$

$\therefore\ ab = 420$

114. 정답 ②

$\dfrac{1}{f(x)+1}-\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{2}{x^2}$

의 좌변을 통분하여 정리하면

$\dfrac{-2}{\{f(x)\}^2-1}=\dfrac{2}{x^2}$

$\therefore\ \{f(x)\}^2=1-x^2$

$\therefore\ f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$

따라서 구하는 방정식의 실근은

두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$가 만나는 점의 x좌표 중에서 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$인 x좌표와 같다.

그런데 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+y^2=1$과 같으므로 주어진 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

그런데, $x\neq0$, $f(x)\neq-1$이므로 점 $(0,\ -1)$은 제외해야 한다.

따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

115. 정답 ④

$\sqrt{x^2-2x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{t^2+1}$이므로 주어진 방정식은

$\sqrt{t^2+1}=t+\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4(t^2+1)=4t^2+4t+1 \quad \therefore\ t=\dfrac{3}{4}$

이때 $\sqrt{x^2-2x}=\dfrac{3}{4}$이므로 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x-\dfrac{9}{16}=0$

위의 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 두 실근의 합은 2이다.

116. 정답 11

$\sqrt{x^2+7x+12}=t$로 놓으면 $t\geq0$이고 $t^2-2+t=0$

$(t+2)(t-1)=0$, 따라서 $t\geq0$이므로 $t=1$

즉, $\sqrt{x^2+7x+12}=1$양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+7x+11=0$ ⋯ ㉠

이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 α, β는 모두 무연근이 아니므로

$\alpha\beta=11$

117. 정답 6

$x^2-7x=t$라 하면 $\sqrt{t+15}=t+9$

양변을 제곱하면 $t+15=t^2+18t+81$

$t^2+17t+66=0$, $(t+11)(t+6)=0$

$\therefore\ t=-6$ 또는 $t=-11$

이때, $t=-11$은 무리방정식의 무연근이므로

$x^2-7x=-6$

즉, $x^2-7x+6=0$, $(x-1)(x-6)=0$ 에서

$x=1$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

다른 풀이

$\sqrt{x^2-7x+15}=t\ (t\geq0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t=t^2-6$, $t^2-t-6=(t-3)(t+2)=0$

$\therefore\ t=3$

이때, $\sqrt{x^2-7x+15}=3$이므로

$x^2-7x+15=9$, $x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

118.정답] ①

[해설]

$\sqrt{4x^2-5x+7}=t(t\geq0)$ 라고 하면 $4x^2-5x=t^2-7$

$\therefore$(준식) $=$ $t^2-t-6=0$ 에서 $t=3$ $(\because t\geq0)$

$\therefore 4x^2-5x-2=0$

따라서 모든 실근의 곱은 $-\dfrac{1}{2}$

119. 정답 ④

$f(x)=a(x+3)$, $g(x)=b(x+3)$,

(a, b는 서로소인 두 일차식)으로 놓으면

$L=ab(x+3)=x(x+3)(x-4)$에서

$a=x$, $b=x-4$ 또는 $a=x-4$, $b=x$

$\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}\leq0 \iff \dfrac{a+b}{L}\leq0$

$\iff \dfrac{x+x-4}{x(x+3)(x-4)}\leq0$

$\iff 2(x-2)x(x+3)(x-4)\leq0$, $x\neq-3, x\neq0$, $x\neq4$

$\iff -3<x<0$, $2\leq x<4$

따라서, 정수 x는 -2, -1, 2, 3의 4개이다.

120. 정답 ②

$x\leq\dfrac{10}{x-3}$, $x-\dfrac{10}{x-3}\leq0$, $\dfrac{x^2-3x-10}{x-3}\leq0$

$\dfrac{(x-5)(x+2)}{x-3}\leq0$

양변에 $(x-3)^2$을 곱하면

$(x-3)(x-5)(x+2)\leq0$, $x\neq3$

$\therefore\ x\leq-2$또는 $3<x\leq5$

따라서 만족하는 자연수는 4, 5로 2개다.

121. 정답 ①

[출제의도] 연립부등식을 정리하면

(i) $\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}=\dfrac{x+2}{(x-3)(x-1)}\geq 0$에서

$(x+2)(x-3)(x-1)\geq 0,\ x\neq 3,\ x\neq 1$이므로

$-2\leq x<1,\ x>3$

(ii) $\dfrac{9}{x-8}\leq -1$에서 $\dfrac{x+1}{x-8}\leq 0$이므로

$(x+1)(x-8)\leq 0,\ x\neq 8$

$\therefore -1\leq x<8$

(i), (ii)공통범위 $-1\leq x<1,\ 3<x<8$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 $-1,\ 0,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$의 6개다.

122. 정답 ③

분수부등식 $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}\leq 0$의 좌변을 통분하면

$\dfrac{x(x-b)+x(x-a)}{(x-a)(x-b)}\leq 0$ $\dfrac{x(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\leq 0$ ⋯ ㉠

㉠의 양변에 $(x-a)^2(x-b)^2$을 곱하면

$x(2x-a-b)(x-a)(x-b)\leq 0$ (단, $x\neq a,\ x\neq b$)

이 때, $a<\dfrac{a+b}{2}<b$이므로 주어진 분수부등식의 해는

$0\leq x<a$또는 $\dfrac{a+b}{2}\leq x<b$

$a=1,\ b=2$일 때, 정수인 해가 존재하지 않는다.

$a=1,\ b=3$일 때, $\dfrac{a+b}{2}=2$이므로

정수인 해는 $x=0,\ x=2$의 2개이다.

$a=1,\ b=4$일 때, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로

정수인 해는 $x=0,\ x=3$의 2개이다.

$a=1,\ b\geq 5$일 때, 정수인 해는 세 개 이상이다.

$a=2,\ b=3$일 때, $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{5}{2}$이므로

정수인 해는 $x=0,\ x=1$의 2개이다.

$a=2,\ b\geq 4$일 때, 정수인 해는 3개 이상이다.

$a\geq 3$이면 정수인 해는 3개 이상이다.

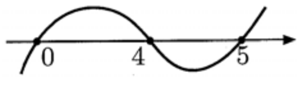
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$의

3개이다.

123. 정답 ②

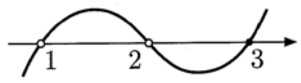
$x(x-4)(x-5)\geq 0$에서



$0\leq x\leq 4$ 또는 $x\geq 5$ ⋯ ㉠

$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2}=\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}\leq 0$에서

$(x-1)(x-2)(x-3)\leq 0$ (단, $x\neq 1,\ x\neq 2$)



$\therefore\ x<1$ 또는 $2<x\leq 3$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는

$0\leq x<1$ 또는 $2<x\leq 3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 0, 3이므로 2개다.

124.[정답] 5

[해설]

$1+\dfrac{k}{x-k}-\dfrac{1}{x-1}\leq 0$

$\dfrac{(x-k)(x-1)+k(x-1)-(x-k)}{(x-k)(x-1)}\leq 0$

$\dfrac{x^2-2x+k}{(x-k)(x-1)}\leq 0$

$\dfrac{(x-1)^2+k-1}{(x-k)(x-1)}\leq 0$

$k-1\geq 0$이므로

$\therefore 1<x<k$

$\therefore k=5$

125. 정답 ④

$f(x)+g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}$에서

$f(x)+g(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$

$\{f(x)+g(x)\}\left\{1-\dfrac{1}{f(x)g(x)}\right\}=0$

따라서 $f(x)=-g(x)$ 또는 $f(x)g(x)=1$

(단, $f(x)\neq 0,\ g(x)\neq 0$)

(i) $f(x)=-g(x)$인 경우

$y=-g(x)$의 그래프는 [그림1]과 같고 $y=f(x)$의 그래프와 세 점에서 만난다. 이 때, $f(2)=g(2)=0$이므로 $x=2$는 주어진 방정식의 무연근이다. 따라서 이 경우의 실근의 개수는 2(개)이다.

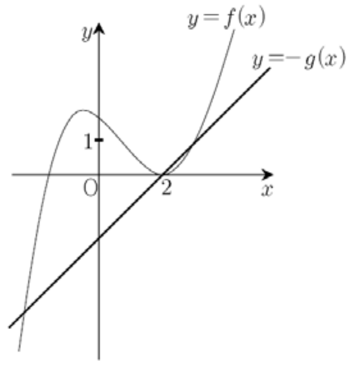
(ii) $f(x)g(x)=1$인 경우 (즉, $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$인 경우)

함수 $g(x)$의 기울기를 $m(m<0)$이라 하면

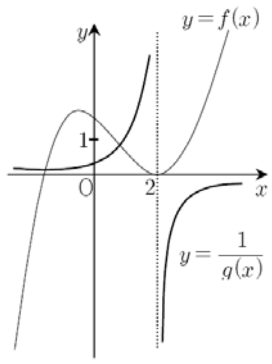
$g(x)=m(x-2)$이고 y절편은 $-2m$이며 주어진 그래프에서

$-2m>1$이다.

따라서 $y=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{m(x-2)}$이고 y절편은 $-\dfrac{1}{2m}$이며



[그림1]



[그림2]

$0<-\frac{1}{2m}<1$이다.

그러므로 $y=\frac{1}{g(x)}$의 그래프는 [그림2]와 같다. 따라서 이 경우의 실근의 개수는 2(개)이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 주어진 방정식의 실근의 개수는 4이다.

1. 정답 ③

$\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\pm\frac{4}{5}$

$\sin B=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{4}{5}$

$\sin C=\sin\{\pi-(A+B)\}=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{12}{25}\pm\frac{12}{25}$

$\sin C>0$이므로 $\sin C=\frac{24}{25}$

따라서 $\sin A:\sin B:\sin C=\frac{3}{5}:\frac{3}{5}:\frac{24}{25}=5:5:8$

2. 정답: ④

[출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 계산

$\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}$

$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=\frac{1}{2}$

3. 정답: ⑤

$\cos 310°+\cos 190°=2\cos\frac{310°+190°}{2}\cos\frac{310°-190°}{2}$

$=2\cos 250°\cos 60°=\cos 250°=-\cos 70°$

4. 정답:④

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\pm\theta\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\pm\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\pm\frac{1}{2}\sin\theta$ (복부호동순)이므로

준식$=\sin^2\theta+2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cos^2\theta+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\theta$

$=\frac{3}{2}\sin^2\theta+\frac{3}{2}\cos^2\theta=\frac{3}{2}$

5. 정답: 3

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{p}{2}}{1-\frac{1}{2}}=p=3$

6. 정답: ①

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{3}$

$\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=-\frac{7}{9}$

7. 정답: ③

[출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하기

주어진 식의 양변을 제곱하면

$1+2\sin\theta\cos\theta=5(1-2\sin\theta\cos\theta)$

$1+\sin 2\theta=5(1-\sin 2\theta)$

$\therefore\ \sin 2\theta=\frac{2}{3}$

8. 정답:⑤

$\tan\theta=-\sqrt{8}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{2}{3}$

9. 정답:2

$l^2=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\left\{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\theta\right\}^2$

$=\frac{\pi^2}{4}+(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{\pi^2}{4}+1+\sin 2\theta$

최댓값은 $\sin 2\theta=1$일 때, $\frac{\pi^2}{4}+2$

최솟값은 $\sin 2\theta=-1$일 때, $\frac{\pi^2}{4}$

10. 정답 50

$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ S=\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$

$\therefore\ 20S=50$

11.정답⑤

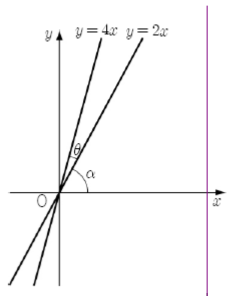
함수 $y=2x$의 그래프와 x축이 만나 이루는 예각을 그림과 같이 α라고 하자.

$\tan(\alpha+\theta)=4$, $\tan\alpha=2$

$\tan(\alpha+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\theta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\theta}$

$=\frac{2+\tan\theta}{1-2\tan\theta}=4$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{2}{9}$



따라서 $\cos\theta=\dfrac{9}{\sqrt{85}}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{85}}$이다.

$\therefore \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\dfrac{9}{\sqrt{85}}\times\dfrac{2}{\sqrt{85}}=\dfrac{36}{85}$

12. 정답 ④

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{15}{9}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\ 2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta=\dfrac{2}{3}$

$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos2\theta>0$이고

$\therefore\ \cos2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt5}{3}$

13. 정답:②

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$이므로

$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{4}{5}}{1+\dfrac{4}{5}}=\dfrac{1}{9}$ ($\because$ $\dfrac{\alpha}{2}$는 제2사분면 또는 제4분면의 각)

$\therefore\ \tan\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{3}$

14.정답⑤

[출제의도] 삼각함수의 배각공식 이해하기

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$이고,

$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin2\alpha$

$=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$이다.

15. 정답:②

[출제의도] 배각공식을 알고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\dfrac{\theta_n}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\tan\theta_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\tan\dfrac{\theta_n}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta_n}{2}}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{2}}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{3}$

16. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 계산하기

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sqrt2}{3}$,

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$ 이므로

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{4-\sqrt{14}}{12}$

17. 정답 ①

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt5}{3}$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{5}{9}}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \sin\theta\cos2\theta=\sin\theta(2\cos^2\theta-1)$

$=\dfrac{2}{3}\left(2\times\dfrac{5}{9}-1\right)=\dfrac{2}{27}$

18. 정답: ②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 활용

$(\tan\alpha-\sqrt3)(\tan\beta+\sqrt3)=-4$

$=\tan\alpha\tan\beta+\sqrt3\tan\alpha-\sqrt3\tan\beta-3=-4$

$\sqrt3(\tan\alpha-\tan\beta)=-(1+\tan\alpha\tan\beta)$

$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\tan(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{\sqrt3}$

$\therefore \alpha-\beta=-\dfrac{\pi}{6}$ ($\because \alpha, \beta$ 예각)

19. 정답 ④

$\sin x+\sin y=1$에서

$\sin^2x+\sin^2y+2\sin x\sin y=1$ …… ㉠

$\cos x+\cos y=\dfrac{1}{2}$에서

$\cos^2x+\cos^2y+2\cos x\cos y=\dfrac{1}{4}$ …… ㉡

㉠+㉡에서

$2+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=\dfrac{5}{4}$

$2+2\cos(x-y)=\dfrac{5}{4}$

$\therefore \cos(x-y)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{4}-2\right)=-\dfrac{3}{8}$

20. 정답 ④

$P\left(\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $Q\left(\dfrac{\sqrt7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\beta=\frac{\sqrt{14}}{4}$

$\alpha=\frac{\pi}{6}-\beta$

$\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos2\beta=2\cos^2\beta-1=\frac{3}{4}$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\frac{\pi}{6}-\beta-\beta)=\sin(\frac{\pi}{6}-2\beta)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3-\sqrt{21}}{8}$

21. 정답 ②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ , 점 $(6, 2)$ 와 원점을 지나는 직선이 x축과 이루는 예각의 크기를 γ 라 하자.

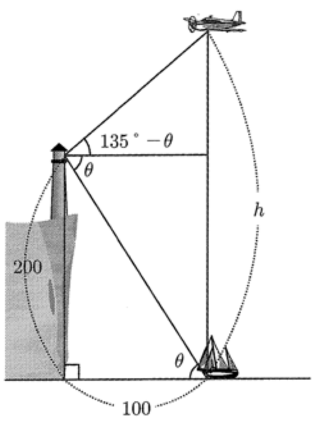
$\alpha<\beta$ 일 때, $\frac{\theta}{2}+\alpha=\gamma$, $\frac{\theta}{2}+\gamma=\beta$ 이므로

$\alpha+\beta=2\gamma$ 이고 $\tan\gamma=\frac{1}{3}$ 이다.

$\tan(\alpha+\beta)=\tan2\gamma=\frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma}=\frac{3}{4}$

22. 정답: ③

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 높이 구하기



$\tan\theta=\frac{200}{100}=2$

$\tan(135^\circ-\theta)=\frac{h-200}{100}$

$\tan(135^\circ-\theta)=\frac{\tan135^\circ-\tan\theta}{1+\tan135^\circ\tan\theta}$

$=\frac{-1-\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$

$\therefore h=3\times100+200=500$

23. 정답 ④

$\cos(\alpha+\beta)=(-\frac{\sqrt{8}}{3})\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

24. 정답 ②

[출제의도] 합의 공식 이용하여 식 정리하기

$\sin\alpha+\cos\beta=-\sin\gamma$과

$\cos\alpha+\sin\beta=-\cos\gamma$의 양변을 제곱하여 더하면

$2+2\sin(\alpha+\beta)=1$ $\therefore\sin(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$

25. 정답 11

[해설] $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$

이므로 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$이다.

따라서, $\theta+\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$이다.

그런데, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $n=1$이고$\theta=\frac{2\pi}{3}$이다.

$\therefore 2\cos\theta\cos2\theta=2\cos\frac{2\pi}{3}cos\frac{4\pi}{3}=2\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

26. 정답 ②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 방정식을 풀 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{AE}=\frac{a}{\cos(45^\circ+\theta)}=\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta-\sin\theta}$

$\overline{AD}=\frac{a}{\cos(45^\circ-\theta)}=\frac{\sqrt{2}a}{\cos\theta+\sin\theta}$

$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{2}$

27. 정답: ⑤

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2+\sqrt{15}}{6}$, $\sin(\alpha-\beta)=\frac{2-\sqrt{15}}{6}$

$x^2+\frac{a}{3}x+\frac{b}{36}=0$

두 근의 합 $-\frac{a}{3}=\frac{2}{3}$ $\therefore a=-2$

두 근의 곱 $\frac{b}{36}=\frac{-11}{36}$ $\therefore b=-11$

따라서, $ab=22$

28.정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값 구하기

정육각형의 한 변의 길이를 $4a$라 하면

$\overline{CE}=4\sqrt{3}a$, $\overline{EM}=2a$, $\overline{EN}=a$이고,

$\angle MCE=\alpha$, $\angle NCE=\beta$라 하면

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ 이다.

$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{2\sqrt{3}}{25}$

29. 정답 ②

[출제의도]삼각함수 덧셈정리를 이용하여 함숫값 구하기

$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

$\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{5}$

30. 정답 9

$\tan\theta_1 = 1$, $\tan\theta_2 = \dfrac{1}{2}$, $\tan\theta_p = \dfrac{1}{p}$, $\tan\theta_q = \dfrac{1}{q}$

$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \tan(\theta_p - \theta_q)$

$\dfrac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \dfrac{\tan\theta_p - \tan\theta_q}{1+\tan\theta_p\tan\theta_q}$

$\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+1\times\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}}{1+\dfrac{1}{p}\times\dfrac{1}{q}}$

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{q-p}{pq+1}$, $(p-3)(q+3) = -10$

p, q는 자연수이고 $1<p<q$이므로

$(p-3,\ q+3) = (-1,\ 10)$

$p-3=-1$, $q+3=10$ $p=2$, $q=7$

따라서 $p+q=9$

31. 정답 32

P, Q, R이 선분 AB의 4등분점이므로

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$, $\mathrm{Q}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$이고, $\angle\mathrm{POB} = \alpha$,

$\angle\mathrm{ROB} = \beta$라 하면, $\tan\alpha = \dfrac{3}{2}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{6}$이다.

$\therefore \tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{16}{15}$

$\therefore 30\times\dfrac{16}{15} = 32$

32. 정답: ①

$\tan\theta = t$ 라하면(준식)$= \dfrac{2t}{1-t^2} = \dfrac{4}{3}$

$t=-2$, $t=\dfrac{1}{2}$

33. 정답:⑤

[출제의도] 반각 공식의 활용

$\tan\theta = \dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}} = \dfrac{2\times\dfrac{2}{3}}{1-\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{5}{9}} = \dfrac{12}{5}$ 이므로

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \dfrac{5}{13}$

34. 정답: ①

[출제의도] 반각 공식을 이용한 각 구하기

$\angle\mathrm{POQ} = \theta$에서 부채꼴의 반지름을 r이라 하면

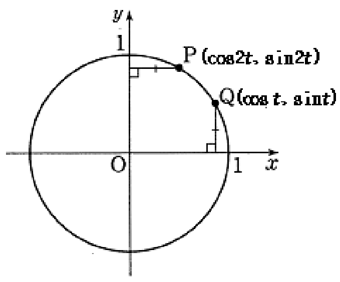
호$\widehat{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{4}\times 2\pi r$ $4\widehat{\mathrm{PQ}} = 4\times r\theta$ 에서

호$\widehat{\mathrm{AB}} = 4\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\theta = \dfrac{\pi}{8}$ 이다

따라서

$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

35. 정답 5



두 점을 $P(\cos 2t, \sin 2t)$, $Q(\cos t, \sin t)$ 라 하면

$|\cos 2t| = \sin t$ ⇨ $\cos 2t = \pm\sin t$

i) $\cos 2t = \sin t$ 에서 $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$\therefore$ $\sin t = \dfrac{1}{2}$ $(0 \le t \le \pi)$ $\therefore$ $t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$

ii) $\cos 2t = -\sin t$ 에서 $2\sin^2 t - \sin t - 1 = 0$

$\therefore$ $\sin t = 1$ $(0 \le t \le \pi)$ $\therefore$ $t = \dfrac{\pi}{2}$

따라서 t 의 값의 합은 $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{5}{6}\pi + \pi = \dfrac{3}{2}\pi$

36. 정답 11

[출제의도] 반각의 공식 이용하여 값 구하기

삼각형EAB가 이등변삼각형이므로 $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$

$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

$\sin^2\beta = \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1}{10}$ $\therefore a+b=11$

37. 정답 ①

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1}{3}$ 에서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$,

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\because$ $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\sqrt{2}$

$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

38. 정답 ⑤

$\frac{\sin50^\circ+\sin10^\circ}{\cos50^\circ+\cos10^\circ}=\frac{2\sin30^\circ\cos20^\circ}{2\cos30^\circ\cos20^\circ}=\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

39. 정답:①

삼각함수를 합성하면 (준식)$=2\sqrt{3}\,sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

주기$a=2\pi$, 최댓값 $b=2\sqrt{3}$, 최솟값 $c=-2\sqrt{3}$

$\therefore abc=-24\pi$

40.정답②

[출제의도] 삼각함수의 합성 이해하기

$y=\sqrt{2}\sin x+3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

$=\sqrt{5}\cos(x+\alpha)$ (이 때, $\tan\alpha=\frac{1}{3}$)

주어진 함수는 $x=2n\pi-\alpha$(n은 정수)일 때 최댓값을 가지므로 $\tan\theta=\tan(2n\pi-\alpha)=-\frac{1}{3}$이다.

41. 정답 ②

$y=\cos x+2(\sin x\ \cos\frac{\pi}{6}+\cos x\ \sin\frac{\pi}{6})$

$=\cos x+2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)$

$=\sqrt{3}\sin x+2\cos x$

$=\sqrt{7}\sin(x+\theta)\left(\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

따라서, $M-m=\sqrt{7}-(-\sqrt{7})=2\sqrt{7}$

42. 정답: ②

$f(x)=5\sin(x+\alpha)$ (단, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$)이므로

$0\leq x<2\pi$ 인 범위에서 $x+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 일 때 최대이다.

한편, $\tan\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ 이고 $\cot\alpha=\frac{4}{3}$ 이므로

$3\tan\theta=3\cdot\frac{4}{3}=4$

43. 정답:④

$\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ 1\end{pmatrix}$ 에서 $3\sin\theta+a\cos\theta=k$,

$3+2a=1$

$a=-1$ 이므로 $k=3\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{10}\sin(\theta-\alpha)$

$\left(\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$

따라서, k 의 최댓값은 $\sqrt{10}$ 이다.

44. 정답: ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 그래프 이해하기

$f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$에서

주기는 4π, 최댓값 2, 최솟값 -2

$y=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{1}{2}x$이므로 원점에 대하여 대칭

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ. ㄷ

45. 정답 ⑤

$y=\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos x-\left(\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

y는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$, $\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(별해)

$y=\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

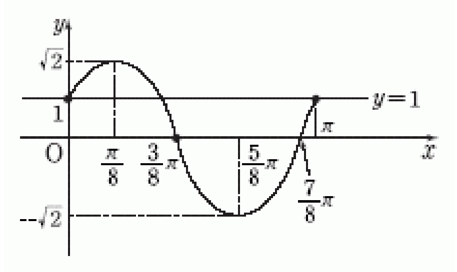
$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

46. 정답:④

$f(x)=\cos2x+2\sin x\cos x=\cos2x+\sin2x$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left\{2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}$

$f(x)$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2}\,sin2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음과 그림과 같다.



$f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=a$ 와 세 점에서 만나려면 위의 그림에서와 같이 직선 $y=a$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지날 때이다.
$\therefore\ a=1$

47. 정답: 35
[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용한 최대최소
$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x-2$ 에서 합성을 하면
$f(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)-2$이므로
$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-1$일 때, $f(x)$가 최댓값을 갖는다.
즉 최솟값은 $a+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ $\therefore a=\dfrac{4}{3}\pi$
최댓값은 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore b=\dfrac{\pi}{3}$
$\therefore\ \dfrac{21}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{4}{3}\pi\right)=35$

48. 정답: ⑤
[출제의도] 삼각함수의 합성에 대한 이해하기
$y=\sin x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\sin x-\left(\sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\sin x-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
$=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
$=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
$=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
$x=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}$일 때
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$이 최댓값
$x=0$일 때 $\sin\left(0-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이 최솟값
$\mathrm{M}-m=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

49. 정답 ②
$g(x)=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$
$0\leqq x\leqq\pi$일 때 $-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$이므로
$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\leqq 1$
$\therefore\ -1\leqq g(x)\leqq 2$
$(f\circ g)(x)=\dfrac{1}{g(x)+2}$에서
$\dfrac{1}{4}\leqq(f\circ g)(x)\leqq 1$
따라서, 최댓값은 1이다.

50. 정답 : ②
[출제의도] 삼각함수의 최대 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.
$f(x)=-2\sin^2 x+\sin 2x+1$
$=-2\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\sin 2x+1$
$=\sin 2x+\cos 2x$
$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$
이고 $-1\leq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leq 1$ 이므로 $f(x)$ 의 최댓값은
$\sqrt{2}$ 이다.

51. 정답 ①
[출제의도]삼각함수의 합성 및 평행이동 적용하기
$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\left\{\cos x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$
$=2\cos(x-\dfrac{2}{3}\pi)$를 x축 방향으로 $-\dfrac{2}{3}\pi$만큼 평행이동하면
$y=2\cos x$와 일치한다.

52. 정답: ①
$\cos 2x-\sin x=a(\sin x+1)$ 에서 $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ 이므로
주어진 방정식은
$1-2\sin^2 x-\sin x=a(\sin x+1)$
$2\sin^2 x+\sin x-1=-a(\sin x+1)$
$(2\sin x-1)(\sin x+1)=-a(\sin x+1)$
$0<x<\pi$ 이면 $0<\sin x\leqq 1$ 이므로
$2\sin x-1=-a$
그런데 $-1<2\sin x-1\leqq 1$ 이므로
$-1<-a\leqq 1$
$\therefore\ -1\leqq a<1$

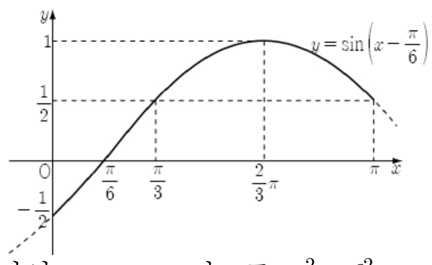
53.정답 ①

$\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ $(0\leq x\leq\pi)$의 그래프에서

$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{a}{2}$가 서로 다른 두 실근을 갖는 a값의 범위는

$\frac{1}{2}\leq\frac{a}{2}<1$이다.



따라서 $1\leq a<2$이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$이다.

54.정답: ⑤

$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad\therefore\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

$\frac{\pi}{6}<\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{7}{6}\pi$ 이므로,

$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\theta+\frac{\pi}{6})}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

55. 정답 ④

$1-2\sin^2x+3\sin x+1=0$

$2\sin^2x-3\sin x-2=0$

$(2\sin x+1)(\sin x-2)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$0\leq x<2\pi$이므로 $x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은 3π

56. 정답 ④

$\sin2x-\cos x=\cos x(2\sin x-1)=0$이므로

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\cos x=0$일 때, $x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin x=\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$이므로

모든 근의 합은 3π이다.

57. 정답:④

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이해

$y=5\sin x+1-2\sin^2x$

$\quad=-2\sin^2x+5\sin x+1$

$\sin x=t$ $(-1\leq t\leq1)$

$y=-2t^2+5t+1$

$\quad=-2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}$ $(-1\leq t\leq1)$에서

최댓값은 $f(1)=-2\left(\frac{1}{16}\right)+\frac{33}{8}=4$이다.

58. 정답: ⑤

역행렬의 성질을 이용하여 삼각방정식의 해의 개수 구하기

행렬 $\begin{pmatrix}\cos x & \sin2x\\ \sin2x & \cos x\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$\cos^2x-\sin^22x=0,$ $(-\pi\leq x\leq\pi)$

$\cos x=\pm\sin2x=\pm2\sin x\cos x$

따라서 $\cos x=0$, $\sin x=\pm\frac{1}{2}$

그러므로 만족하는 실수 x의 개수는 6개

59. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각방정식의 해 구하기

$4\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$또는 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ 에서

$x+\frac{\pi}{6}=\pi,\ 2\pi$ 또는 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$이므로

$x=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ 2\pi$이다.

따라서, 모든 해의 합은 $\frac{16}{3}\pi$이다.

60. 정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 변형하여 삼각방정식의 해 구하기

$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{3}{2}x$ 이므로

$\cos\frac{3}{2}x=0$ 또는 $\cos\frac{x}{2}=1$이다.

$\frac{3}{2}x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{x}{2}=0$이므로

$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$이다.

따라서 모든 해의 합은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

61. 정답 ⑤

$\cos2x=1-2\sin^2x$, $\cos^2x=1-\sin^2x$ 을 대입하면

$2\sin x-4\sin x(1-\sin^2x)-(1-2\sin^2x)+1=0$

정리하면 $\sin x(2\sin x-1)(\sin x+1)=0$

$\sin x=0,\frac{1}{2},-1$ 에서

$x=0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

모든 근의 합은 $\frac{7\pi}{2}$

62. 정답 ③

[출제의도] 삼각방정식의 특수해를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$2(1-\sin^2 2x)-1=2\cos^2 2x-1=2\sin x\cos x=\sin 2x$ 에서

$\sin 2x=-1$ 또는 $\frac{1}{2}$,

$\sin 2x=-1$ 에서 $x=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\sin 2x=\frac{1}{2}$ 에서 $x=\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

이므로 모든 x 의 값의 합은 $\frac{5}{4}\pi$ 이다.

63. 정답 ④

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$이므로

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$의 근은

$\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{17}{6}\pi,\ \frac{7}{2}\pi$이고 근의 개수는 4이다.

64. 정답 ①

[출제의도] 삼각함수의 합성을 이용한 최댓값 구하기

$\angle DBC=\theta$, 사각형ABCD의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=15\sin\theta+12\cos\theta=3\sqrt{41}\sin(\theta+\alpha)$

(단, $\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{41}}$)

따라서, 최댓값은 $3\sqrt{41}$이다.

65. 정답 ①

$\cos 2x-3\sin x+1=(1-2\sin^2 x)-3\sin x+1$

$2\sin^2 x+3\sin x-2\geqq0$, $(2\sin x-1)(\sin x+2)\geqq0$

$\sin x+2>0$이므로 $\sin x\geqq\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$

66. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합을 곱으로 고쳐 계산하기

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$이다.

$\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}=2\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}=4\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}$

$=4\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16\sqrt{5}}{25}$

67. 정답 : 32

[출제의도] 도형을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

원 위의 점과 직선사이의 점 사이의 최소거리 l 은 원의 중심 O $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ 에서 직선 $x+y=\sqrt{2}$ 까지의 거리

$\frac{|5\sqrt{2}+5\sqrt{2}-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}}=9$

이다. 거리가 최소인 직선위의 점 P 에서 원에 그은 한 접선의 접점을 Q 라 하고, $\angle OPQ$ 를 $\frac{\theta}{2}$ 라 하면

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{4}{9}$ 가 된다.

$\cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-2\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{49}{81}$

이 되어 $a-b=32$ 이다.

68. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 배각의 공식 활용하기

호 AD 에 대한 원주각이 α이므로 $\angle AOD=2\alpha$이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}$이므로 $\tan 2\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}=2$이다.

$\tan\alpha=t\ (t>0)$라 하면 $\tan 2\alpha=\frac{2t}{1-t^2}=2$이다.

$\therefore\ t^2+t+1=0$에서 $\tan\alpha=t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

69. 정답:14

$\angle EAD=\alpha$ 라 하면 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$ 이고,

$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\cdot\tan\alpha}=\frac{4}{3}$ 이므로

$\tan\theta+\frac{3}{4}=\frac{4}{3}-\tan\theta$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{7}{24}$

$\therefore\ 48\tan\theta=14$

70. 정답:③

문제의 그림에서 $\tan\alpha=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$, $\tan\gamma=\frac{1}{y}$ 이므로

$\tan\gamma = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \dfrac{6}{7}$

$\tan\gamma = \dfrac{1}{y} = \dfrac{6}{7}$ 에서 $y = \dfrac{7}{6}$

71. 정답: ④

$\sin(A+B)\sin(A-B)$

$= -\dfrac{1}{2}(\cos 2A - \cos 2B)$

$= -\dfrac{1}{2}(1-2\sin^2 A - 1 + 2\sin^2 B)$

$= \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C$

삼각형 ABC 의 대변의 길이를 각각 a, b, c, 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면

$\sin A = \dfrac{a}{2R}, \sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}$이므로

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{2R}\right)^2$

$a^2 = b^2 + c^2$이므로 삼각형ABC 는 ∠A가 직각인 직각삼각형이다.

72. 정답: 12

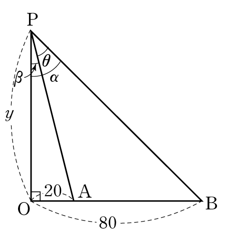
∠CDA $=\alpha$, ∠CAB $=\beta$라 놓으면

$\tan(\angle DCA) = \tan(\beta-\alpha) = \dfrac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$= \dfrac{\frac{a}{2}-\frac{a}{6}}{1+\frac{a}{2}\times\frac{a}{6}} = \dfrac{4}{7}$

위 식을 정리하면 $a^2 - 7a + 12 = 0$이므로 구하는 a의 값의 곱은 12이다.

73. 정답: 40



위의 그림에서 ∠BPO $=\alpha$, ∠APO $=\beta$라 하면

$\theta = \alpha - \beta$이므로

$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta)$

$= \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\frac{80}{y}-\frac{20}{y}}{1+\frac{80}{y}\times\frac{20}{y}}$

$= \dfrac{60y}{y^2+1600}$

$= \dfrac{60}{y+\frac{1600}{y}}$ ㉠

따라서, $\tan\theta$의 값이 최대가 되려면 $y+\dfrac{1600}{y}$이 최솟값을 가져야 한다. 이 때, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에서

$y+\dfrac{1600}{y} \geqq 2\sqrt{y\dfrac{1600}{y}} = 80$ ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 $y = \dfrac{1600}{y}$, 즉 $y=40$일 때 최솟값을 가지므로 $\tan\theta$는 $y=40$일 때, 최댓값을 갖는다.

따라서, 점 P의 y좌표는 40이다.

74. 정답 15

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{4}{3}$

$\overline{AC} = x$, $\overline{CD} = \dfrac{4}{3}x$, $\overline{BC} = \dfrac{8}{3}x$

$x^2 + \left(\dfrac{8}{3}x\right)^2 = (5\sqrt{73})^2 \quad \therefore x = 15$

(별해) $\overline{AC} = x$라 하면 $\overline{BC} = \sqrt{25\times73-x^2}$

$\overline{CD} = \overline{AC}\cdot\tan 2\alpha = \overline{BC}\cdot\tan\alpha$

$x\tan 2\alpha = \sqrt{25\times73-x^2}\,\tan\alpha$

$x\cdot\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \sqrt{25\times73-x^2}\,\tan\alpha$

$\dfrac{8}{3}x = \sqrt{25\times73-x^2}$

$x^2 = 25\times9$, $\therefore x = 15$

75. 정답: 23

$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{3}{4}$

에서 $\sin 2\theta = \dfrac{3}{4}$ 이므로

$\cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

$\therefore a + b = 23$

76. 정답 ④

$y = \dfrac{24}{7}x$와 x축의 양의 방향과 이루는 각을 2θ라 하면

$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{24}{7}$

$\frac{24}{7}(1-\tan^2\theta)=2\tan\theta$

$12\tan^2\theta+7\tan\theta-12=0$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$ ($\because$ $\tan\theta>0$)이다.

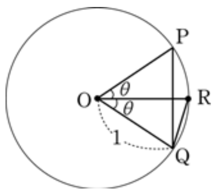
그림에서 $\tan\theta=\frac{3}{4}=\frac{r}{\sqrt{225-r^2}}$ $\quad 4r=3\sqrt{225-r^2}$

$\therefore\quad r=9$

77. 정답 12

$\triangle\mathrm{POQ}=\frac{1}{2}\sin2\theta,\quad \triangle\mathrm{ROQ}=\frac{1}{2}\sin\theta$

$\frac{1}{2}\sin2\theta:\frac{1}{2}\sin\theta=3:2$



$2\sin2\theta=3\sin\theta$

$4\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta$

$\sin\theta(4\cos\theta-3)=0$

$\sin\theta\neq0$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{4}$

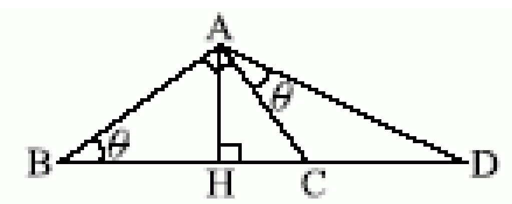
$\therefore 16\cos\theta=16\times\frac{3}{4}=12$

78. 정답:②

$\overline{AC}=\overline{BC}\sin\theta=4\sin\theta$ 이고 점 A 에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\angle CAH=\theta$ 이므로

$\overline{AD}\cos2\theta=\overline{AH}$, $\overline{AH}=\overline{AC}\cos\theta=4\sin\theta\cos\theta=2\sin2\theta$

$\therefore\ \overline{AD}=\frac{2\sin2\theta}{\cos2\theta}=2\tan2\theta$



79.정답 ④

$\overline{BC}=2\sqrt{7}$ 이므로 $\sin2\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이다.

또한, $\overline{AD}=8\cos\theta$이므로

(사각형 $ACBD$의 넓이)

$=\triangle ACB+\triangle ADB$

$=\left(\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{7}\right)+\left(\frac{1}{2}\times8\times8\cos\theta\times\sin\theta\right)$

$=6\sqrt{7}+16\sin2\theta=10\sqrt{7}$ 이다.

80. 정답 ②

(가) $\overline{\mathrm{DE}}$, (나) $\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{CF}}$, (다) $\cos\theta$

81. 정답:③

$5\cos\theta+10\sin\theta=5\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

82. 정답:③

$\sqrt{2}\sin\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$=\sqrt{2}\,sin\alpha+2\left\{\cos\frac{\pi}{4}cos\alpha+\sin\frac{\pi}{4}sin\alpha\right\}$

$=2\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{2}\,cos\alpha=\sqrt{10}\,sin(\alpha+\theta)$

$\left(\text{단, }\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore$ 최댓값은 $\sqrt{10}$

83. 정답: ①

[출제의도]삼각함수의 합성 이해하기

$\overline{\mathrm{AP}}=60\cos\theta,\ \overline{\mathrm{PB}}=60\sin\theta$

$360\cos\theta+480\sin\theta$

$=600\left(\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{4}{5}\sin\theta\right)$

$=600\sin(\theta+\alpha)$가 최대가 되는

$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2},\ \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{4}{5}$

$\therefore \tan\theta=\frac{4}{3}$

84. 정답 ①

(가) $\frac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}$을 정리하여보자.

$\sin\alpha_n=2\sin\frac{\alpha_n}{2}\cos\frac{\alpha_n}{2}\ \cos\alpha_n=\cos^2\frac{\alpha_n}{2}-\sin^2\frac{\alpha_n}{2}$

분자는 $\left(\sin\frac{\alpha_n}{2}+\cos\frac{\alpha_n}{2}\right)^2$ 이고

분모는 $\left(\cos\frac{\alpha_n}{2}-\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha_n}{2}+\sin\frac{\alpha_n}{2}\right)$ 이므로

$\frac{1+\sin\alpha_n}{\cos\alpha_n}=\frac{\cos\frac{\alpha_n}{2}+\sin\frac{\alpha_n}{2}}{\cos\frac{\alpha_n}{2}-\sin\frac{\alpha_n}{2}}$ 이다.

분모, 분자를 $\cos\frac{\alpha_n}{2}$로 나누면

$$\frac{1+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan\frac{\alpha_n}{2}}=\frac{\tan 45°+\tan\frac{\alpha_n}{2}}{1-\tan 45°\tan\frac{\alpha_n}{2}}=\tan\left(45°+\frac{\alpha_n}{2}\right)$$

(나) $\frac{\tan\beta_n}{1+\sec\beta_n}=\frac{\sin\beta_n}{1+\cos\beta_n}$ 에서

$\sin\beta_n=2\sin\frac{\beta_n}{2}\cos\frac{\beta_n}{2}, \cos\beta_n=2\cos^2\frac{\beta_n}{2}-1$에 의하여

$\tan\frac{\beta_n}{2}$이 된다.

(다) $\gamma_n=\frac{30°}{2^{n-1}}$에서 n은 자연수이므로 $0<\gamma_n\leq 30°$을 얻을 수 있다. 따라서 $0<\tan\gamma_n\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$이 된다.

85. 정답: ②

[출제의도]삼각함수의 합성 이해하기

$a=r\cos\theta,\ b=r\sin\theta$

$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

ㄱ. 주기함수이고 주기는 2π이다. [참]

ㄴ. 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다. [참]

ㄷ. $y=\sin\theta$의 그래프를 평행 이동시켜 $y=f(\theta)$의 그래프와 일치 시킬 수 있다. [거짓]

$y=\sqrt{2}\sin\theta$의 그래프를 평행시킨 그래프이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

86. 정답 ①

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$-1\leq t\leq\sqrt{2}$이다.

$t^2=1+2\sin x\cos x$ 이므로 $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

따라서 $\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$

$=t-(t^2-1)=-t^2+t+1$ ($-1\leq t\leq\sqrt{2}$)이므로

$t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$이고

$t=-1$일 때, 최솟값 -1이다.

따라서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 $-\frac{5}{4}$이다.

87. 정답 ②

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{x}}$$

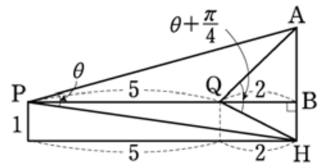
$$=\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{x+\frac{3}{x}}$$

$x=\frac{3}{x}$일 때, $\tan\theta$ 값이 최대가 되므로

$\therefore\ x=\sqrt{3}\,(x>0)$

88. 정답 ①

주어진 그림을 단순화하면 그림과 같다.



그림에서 $\overline{AH}=x$라 둔다.

$\angle BQH-\angle BPH=\alpha$

$\angle BQA-\angle BPA=\beta$라고 하면

$$\tan\alpha=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\beta=\frac{\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{7}}{1+\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-1}{7}}=\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}$$

또한, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

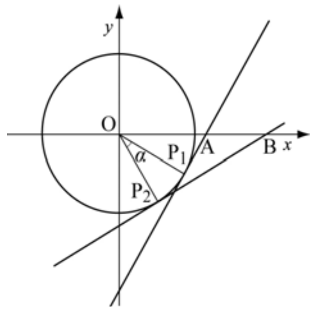
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{5(x-1)}{14+(x-1)^2}}=1$$

이 식을 정리하면 $x^2-12x+25=0$

따라서, 근과 계수의 관계에서 $a+b=12$

89. 정답:②

[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 수학내적문제 해결하기



두 직선 $y=x+a,\ y=\frac{1}{3}x+b$와 x축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고 $\angle OAP_1=\theta_1$라 하면

$\tan\theta_1=1$이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $\angle AOP_1=\frac{\pi}{4}$이다

같은 방법으로 $\angle OBP_2=\theta_2$, $\tan\theta_2=\frac{1}{3}$이고

$\overline{BP_2}=3r$이다. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$에 의해서

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$

90. 정답 ③

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$, $\overline{BP}=\overline{AB}\sin\theta=2\sin\theta$

$\overline{AP}+\overline{BP}=2(\sin\theta+\cos\theta)$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ a^2b=(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=2\pi$

91. 정답 ④

[출제의도]삼각방정식의 해구하기

$\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x=3(\sin^2x+\cos^2x)$

$2\sin^2x-2\sin x\cos x=0$

$2\sin x(\sin x-\cos x)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=\cos x$에서

$x=0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ ∴모든 해의 합은 $\frac{9}{2}\pi$

92. 정답 : ③

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=-\cos2x=-(\cos^2x-1)=1-2\cos^2x$

이므로 $1-2\cos^2x=2\cos^2x$ 에서 $\cos^2x=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore \cos x=\pm\frac{1}{2}$

$\cos x=\frac{1}{2}$ 이면 $x=\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 이면 $x=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

따라서 모든 해의 합은 4π이다.

93. 정답: ③

$4\sin x-\cos2x=4\sin x-(1-2\sin^2x)=k$,

$\sin x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$라 하고 식을 정리하면

$2t^2+4t-1=k$ 이고 $-1\leqq t\leqq 1$에서

$-3\leqq 2t^2+4t-1\leqq 5$ 이므로 $-3\leqq k\leqq 5$ 이다.

∴ 정수의 개수는 9 개

94. 정답: ⑤

[출제의도]삼각방정식의 해 구하기

$\cos3x+\cos5x-\cos4x=2\cos4x\cos x-\cos4x$

$=\cos4x(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos4x=0$, or $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos4x=0$에서

$x=\frac{\pi}{8}, \frac{3}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{7}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$ 에서 $x=\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 해의 개수는 10개이다

95. 정답:⑤

$=(\cos x+\sin2x)(\cos x-\sin2x)$

$=(\cos x+2\sin x\cos x)(\cos x-2\sin x\cos x)$

$=\cos^2x(1+2\sin x)(1-2\sin x)=0$

그러므로 실근은 6개.

96.정답53

[출제의도] 삼각방정식 해의 존재조건 구하기

$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$을 이용하면

주어진 방정식은 $3\cos^2x-2\cos x=4k-7$이다.

이 방정식의 해는 두 함수 $y=3\cos^2x-2\cos x$와

$y=4k-7$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

$\cos x=t$로 치환하면

$y=3t^2-2t(-1\leq t\leq 1)$이고,

$-\frac{1}{3}\leq y\leq 5$이므로 $-\frac{1}{3}\leq 4k-7\leq 5$이다.

97. 정답:⑤

$\pi\cos x=n\pi$ (단, n은 정수)

$\cos x=n$

$0\leqq x<2\pi$이므로 $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$

98.정답④

[출제의도] 삼각함수의 합 또는 차를 곱으로 변형하기

$\sin(x+y)-\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(x-y)\right\}\geq 0$

$2\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$

i) $\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geq 0$인 경우

$\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$이고 $0\leq y\leq\frac{\pi}{4}$이다.

ii) $\cos\left(y+\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$, $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq 0$인 경우

$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$이고 $\frac{\pi}{4}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $x+2y$의 최댓값은 $\frac{5}{4}\pi$이다.

99. 정답 ④

[출제의도] 삼각방정식의 해 구하기

$(\sin x-\cos x)(4\sin^2 x+4\sin x\cos x+4\cos^2 x-3)=0$

$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(2\sin 2x+1)=0$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 또는 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

$x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{7}{12}\pi$

따라서 $0\leq x\leq\pi$ 이므로, 해는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{12}\pi$, $\frac{11}{12}\pi$

100. 정답 11

[출제의도] 반각의 공식을 이용하여 계산하기

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 이고 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{9}{5}}=\frac{1}{9}$ 이므로

$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$ ⋯⋯㉠

$\cos\beta=\frac{12}{13}$ 이고 $\tan^2\frac{\beta}{2}=\frac{\frac{1}{13}}{\frac{25}{13}}=\frac{1}{25}$ 이므로

$\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{5}$ ⋯⋯㉡

따라서, ㉠, ㉡에 의하여

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{15}}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$ 이므로 $p+q=11$ 이다.

101. 정답 ⑤

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$

102. 정답 ③

직각삼각형 OQ_1P_1 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OP_1}\times\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{2}\times 1\times\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{4}$ $\therefore$ $\overline{P_1Q_1}=\frac{1}{2}$

따라서 $\angle Q_1OP_1=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{OP_1}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \tan(\angle Q_1OP_2)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\theta}$

$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-1\cdot\frac{1}{2}}=3$

따라서 직각삼각형 P_2OQ_2에서

$\overline{P_2Q_2}=\overline{OP_2}\times\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1\times 3=3$

$\therefore\ \triangle P_2OQ_2=\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{3}{2}$

[별해] P_1과 x축과 이루는 각을 θ라 하면 단위원 위의 점 $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$에서 접선은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이 된다.

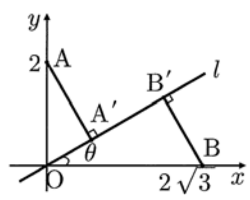
$Q_1\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$이고 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{1}{4}$

이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \triangle OP_2Q_2=\frac{1}{2}\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}$

103. 정답 ②



$\overline{OA'}+\overline{OB'}$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+2\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$일 때, 최대이다.

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}$이다.

104. 정답 ③

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$=1-2\left(\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{1}{8}$

105. 정답 ③

$\tan\theta=-\sqrt{2}$ 이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

또한,

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{-2\sqrt{2}}{1-2} = 2\sqrt{2}$$

이므로

$$\sin\theta\tan 2\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

106. 정답 ⑤

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$이므로 주어진 방정식은

$2\sin x\cos x = 2\cos x - 2\cos^2 x$

$\cos x(\sin x + \cos x - 1) = 0$

$\therefore$ $\cos x = 0$ 또는 $\sin x + \cos x = 1$

(i) $\cos x = 0$에서

$x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

(ii) $\sin x + \cos x = 1$에서

$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore$ $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$

따라서 구하는 서로 다른 모든 x의 값의 합은

$0 + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$

107. [정답] ①

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \quad \therefore \sec\theta = 3$$

1. 정답 ①

[출제의도] 함수의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식) $=\lim_{x\to4}(\sqrt{x}+2)(x+4)=32$

2. 정답 ①

[출제의도]함수의 극한값 구하기

$$\lim_{x\to2}\frac{-(x-2)}{3(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to2}\frac{-1}{3(x+1)}=-\frac{1}{9}$$

3. 정답 ④

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x+1)}=6$$

4. 정답 ④

$$\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{6}$$

5. 정답 ⑤

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{a\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)\{\sqrt{x+8}+39\}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x^2+1)\{\sqrt{x+8}+39\}=2\times6=12$$

6. 정답 ②

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$-x=t$ 로 치환하면

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2-1}}{t-1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}}{1-\frac{1}{t}}=2$$

7. 정답 ⑤

주어진 함수의 극한은 수렴하고, $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$이므로

$\lim_{x\to-3}(\sqrt{x^2+x+3}+ax)=0$이 성립한다. 따라서

$$\sqrt{(-3)^2-(-3)-3}+a(-3)=0\ ,\ \therefore a=1$$

위 결과를 주어진 식에 대입하여 극한값을 구하면 다음과 같다.

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-x-3}+x}{x+3}\times\frac{\sqrt{x^2-x-3}-x}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{-(x+3)}{(x+3)(\sqrt{x^2-x-3}-x)}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{-1}{\sqrt{x^2-x-3}-x}=\frac{-1}{\sqrt{9}+3}=-\frac{1}{6}=b$$

$$\therefore a+b=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

8. 정답 ⑤

[출제의도] 함수의 연속에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=f(1)=b$$

이어야 한다. 분모의 극한값이 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$ 이므로 분자의 극한값 $\lim_{x\to1}(x^2-ax-2)=0$ 이어야 한다. 따라서 $a=-1$ 이고,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-ax-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=3=b$$

$\therefore\ a+b=2$

9. 정답 ④

$x\to1$일 때 분모$\to0$이므로 분자$\to0$이어야 한다.

$\sqrt{2+a}-\sqrt{4}=0\quad\therefore a=2$

(주어진식)$=\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{2x+2}+\sqrt{x+3})}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore b=\frac{1}{8}$$

$$\therefore ab=2\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

10. 정답 ①

분모$\to0$이고 극한값이 수렴하고 있으므로

분자$\to0$이어야 한다.

따라서 $9+3a+b=0$

$\lim_{x\to3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x\to3}\dfrac{(x+a+3)(x-3)}{x-3}$이므로

$6+a=14$

$a=8,\ b=-33\ \therefore\ a+b=-25$

11. 정답 ④

$\lim_{x\to1}(x^2+ax-b)=0$ 에서 $1+a-b=0$

대입해서 정리하면

(준식)$=\lim_{x\to1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}=\frac{a+2}{3}=3$

따라서 $a=7, b=8$

12. 정답 ③

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2+ax}=b$ 에서 $x\to2$ 일 때 (분자)$\to0$ 이고

$b(b\neq0)$ 로 수렴하므로 (분모)$\to0$ 이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to2}(x^2+ax)=0$ 이므로 $4+2a=0$

$\therefore\ a=-2$

$\therefore\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{x}=\frac{2+2}{2}=2=b$

$\therefore\ a+b=-2+2=0$

13. 정답 ①

$x\to1$ 일 때 (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

따라서 $\sqrt{1+a}-b=0, b=\sqrt{1+a}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}=\frac{2}{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+a}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+a}}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 1+a=4,\ a=3,\ b=2$

$\therefore\ ab=6$

14. 정답 ③

$x\to2$이면 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다. 따라서

$1+a=0$에서 $a=-1$

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\frac{1}{2}=b$

$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}$

15. 정답 ③

$x\to1$때 (분모)$\to0$이고 수렴하므로 (분자)$\to0$

$\therefore a+b=0 \qquad \therefore b=-a\cdots\cdots$ ㉠

$2\sqrt{2}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$

$=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}a(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})=2\sqrt{2}a$

$\therefore a=1$

㉠에서 $b=-1 \quad \therefore ab=-1$

16. 정답 ④

$\sqrt{3a+3}-3=0$에서 $a=2,\ b=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{7}{3}$

17. 정답 ⑤

$\lim_{x\to3}(x-3)=0$이고, $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{ax^2+b}=\frac{1}{6}$이므로

$\lim_{x\to3}(ax^2+b)=0$이다. 즉, $9a+b=0$이므로

$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{a(x^2-9)}=\lim_{x\to3}\frac{1}{a(x+3)}=\frac{1}{6a}$이다. $a=1,\ b=-9$이므로

$a-b=10$이다.

18. 정답 ②

$f(x)=\cos x-x+1$ 로 놓으면 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에

대하여 연속이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ 이므로 중간값정리에

의해 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

19. 정답 35

[해설] $\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{x^2-bx+9}=3\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to1}(x^2-bx+9)=0$이므로 $b=10$

b의 값을 ㉠에 대입하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-1)(x-9)}=\lim_{x\to1}\frac{x-a}{x-9}=3$

$a=25\ \therefore\ a+b=35$

20. 정답 ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2-x}=1$이려면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인

이차식이어야 한다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하자.

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$으로 수렴하려면

$x\to2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to2}f(x)=4+2a+b=0$

$b=-2a-4$

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}$

$=4+a=3$

$a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ f(x)=x^2-x-2$이므로 $f(1)=-2$

21. 정답 48

[출제의도] 무리함수의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{x\to3}(x-3)=0$이므로

$\lim_{x\to3}(a\sqrt{x+6}-b)=0$이고 $b=3a$이다.

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3}=\frac{a}{6}=2$

$\therefore a=12,\ b=36$

22. 정답 40

$\lim_{x\to0}\frac{20x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{20x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$

$=\lim_{x\to0}\frac{20x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{2x}$

$=\lim_{x\to0}10(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})$

$=10(2+2)$

$=40$

23. 정답 27

$\lim_{x\to3}\frac{x^3-3x^2}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$의 분자, 분모에

$\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3}$을 곱하여 정리하면

$\lim_{x\to3}\frac{x^2}{2}(\sqrt{4x-3}+\sqrt{2x+3})=27$

24. 정답 ②

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 $n\leq2$이다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=5$이고, $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이므로

(분모)$\to0$이어야 한다.

따라서, $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^2+bx$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax^2+bx}{x}$

$=\lim_{x\to0}(ax+b)=b$

이므로 $b=5$

방정식 $ax^2+5x=x$의 한 근이 $x=-2$이므로

$4a-10=-2$에서 $4a=8$

$\therefore\ a=2$

따라서, $f(x)=2x^2+5x$이므로

$f(1)=7$

25. 정답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$

$\therefore\ g(1)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)\cdot g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(g(x)-1)\cdot g(x)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(g(x)-1)\cdot g(x)}{x+1}$

$=\frac{(g(1)-1)\cdot g(1)}{2}=1$

26. 정답 ④

[출제의도] 극한의 성질을 이용하여 극한값 구하기

[해설] $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=2$에서

$f(x)=x^2+2x+k$ (k는 상수)꼴이고

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=a$에서 $f(2)=0$이므로 $k=-8$

$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}=6\quad\therefore\ a=6$

27. 정답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)-2x\}=0$

$\therefore\ g(1)=2$

$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)\cdot g(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(g(x)-1)\cdot g(x)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(g(x)-1)\cdot g(x)}{x+1}$

$=\frac{(g(1)-1)\cdot g(1)}{2}=1$

28. 정답 ⑤

ㄱ. $f(x)=\cos\pi x-x$ 라 하면

$f(0)f(1)=-1<0$

ㄴ. $g(x)=2^x+x-2$ 라 하면

$g(0)g(1)=-1<0$

ㄷ. $h(x)=\cos\pi x-x$ 라 하면

$h(0)h(1)=-1<0$ 이므로

중간값의 정리에 의하여

$f(x)=0,\ g(x)=0,\ h(x)=0$은 개구간 $(0,1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

29. 정답 ⑤

[출제의도] 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용하기

$x=0$ 에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

30. 정답 2

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1}$$

$$=2$$

31. 정답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+0}f(x)=0,\ \lim_{x\to1-0}f(x)=-2$

따라서, $\lim_{x\to1+0}f(x)\neq\lim_{x\to1-0}f(x)$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to2+0}f(x)=1,\ \lim_{x\to2-0}f(x)=1$

따라서, $\lim_{x\to2+0}f(x)=\lim_{x\to2-0}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)$가 존재한다.

ㄷ. $-1\leq x<1$에서 함수 $y=f(x)$가 연속이므로

$-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재한다.

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

32. 정답 ③

$\frac{t-1}{t+1}=x$라 치환하면

$\lim_{t\to\infty}\frac{t-1}{t+1}=\lim_{t\to\infty}\left\{1+\frac{-2}{t+1}\right\}=1^{-0}$이므로

$\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{x\to1^{-0}}f(x)=2$ …㉠

$\frac{4t-1}{t+1}=y$라 치환하면

$\lim_{t\to-\infty}\frac{4t-1}{t+1}=\lim_{t\to-\infty}\left\{4+\frac{15}{t+1}\right\}=4^{+0}$이므로

$\lim_{t\to-\infty}f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)=\lim_{y\to4^{+0}}f(x)=3$ …㉡

㉠, ㉡에 의하여 답은 5이다.

33. 정답 ③

$f(x)=x(x^2+ax+b)$이므로

$f(-1)=a-b-1=2$

$\therefore a-b=3$ …… ㉠

$f(1)=a+b+1=-2$

$\therefore a+b=-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0,\ b=-3$

$\therefore f(x)=x(x^2-3)$

$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}(x^2-3)=-3$

34. 정답 16

$\log_2 f(x)+\log_2\{f(x)-1\}=1$에서

$f(x)\{f(x)-1\}=2$

$\{f(x)-2\}\{f(x)+1\}=0$

$f(x)=2$ 또는 -1

진수조건에 의해 $f(x)>1$이므로 $f(x)=2$

$a(x-4)^2-4=2$

$ax^2-8ax+16a-6=0$

두 근의 곱 $\alpha\beta=16-\frac{6}{a}$

$\therefore\lim_{a\to\infty}\alpha\beta=\lim_{a\to\infty}\left(16-\frac{6}{a}\right)=16$

35. 정답 ④

$a>1$ 이므로 $x\to1$ 일 때, $|x-a|=-(x-a)$

$$\lim_{x\to1}\frac{-(x-a)-(a-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x+1}{x-1}=-1$$

36. 정답 ②

$\lim_{x\to1+0}(a[x]^3+b[x]^2)=a+b$

$\lim_{x\to1-0}(a[x]^3+b[x]^2)=0$이므로

$\therefore a+b=0$

37. 정답 12

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{ax+1}=2$에서 $f(x)=x^2+2ax+b$

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\frac{1}{4}$에서 $f(1)=0$이므로 $1+2a+b=0$

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax+b}$

$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2+2ax-2a-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2a+1)}$

$=\frac{1}{2a+2}=\frac{1}{4}$

따라서 $a=1,\ b=-3$

$\therefore f(3)=12$

38. 정답 ①

ㄱ. $\lim_{x\to-0}g(x)=-1,\quad \lim_{x\to+0}g(x)=0$ ∴ 좌극한 $\neq$ 우극한(거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to-0}g(f(x))=-1,\ \lim_{x\to+0}f(g(x))=-1$ ∴(참)

ㄷ. $\lim_{x\to-0}f(g(x))=0,\ \lim_{x\to+0}f(g(x))=-1$

∴ 좌극한 $\neq$ 우극한(거짓)

39. 정답 26

[출제의도] 함수가 연속일 조건을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(1)=\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}f(x)$이어야 하므로

$\frac{a+5}{1+b}=a=\frac{5}{b}$에서 $ab=5$

$a=1,\ b=5$ 또는 $a=5,\ b=1$이므로 $a^2+b^2=26$

40. 정답 12

함수 $(g\circ f)(x)$가 모든 실수에서 연속이 되기 위하여 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x\to1+0}(g\circ f)(x)=\lim_{x\to1-0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(1)$

따라서 $|15-a|=|9-a|$를 만족하는 a의 값을 구하면 $a=12$이다.

41. 정답 ②

[출제의도] 연속함수와 주기함수를 활용하여 함수값 계산하기

i) $f(0)=f(4)$

$0=16+4a+b$

ii) $\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

$3=1+a+b$

$a=-6,\ b=8$

$\therefore f(10)=f(2)=0$

42. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to0}\frac{16|x|^2}{4|x^2|}=\lim_{x\to0}\frac{16x^2}{4x^2}=4$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{(2x^2+2x)^2}{2x^4+2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(2x+2)^2}{2x^2+2}=2$ ∴ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{4}{x}\right)^2}{x^2+\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2+4)^2}{x^4+4}=4$ ∴ 참

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

43. 정답 ④

각각의 그래프에 대해 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$의 $x=-1$에서의 극한값과 함숫값을 구해보면 다음과 같다.

ㄱ. $\lim_{x\to-1+0}f(x-1)f(x+1)=f(-2-0)f(-0)=1\times1=1$

$\lim_{x\to-1-0}f(x-1)f(x+1)=f(-2+0)f(+0)=1\times(-1)=-1$

좌극한과 우극한값이 일치하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1+0}f(x-1)f(x+1)=f(-2-0)f(-0)=0\times1=0$

$\lim_{x\to-1-0}f(x-1)f(x+1)=f(-2+0)f(+0)=0\times1=0$

$f(-2)f(0)=0\times(-1)=0$

극한값과 함수값이 일치하므로 연속이다.

ㄷ. 주어진 함수는 $x=-2$와 $x=0$에서 모두 연속이므로, 함수 $y=f(x-1)f(x+1)$는 $x=-1$에서 연속이다.

44. 정답 ⑤

$x\to0$ 일 때, $f(x)\to+0$ 이므로 $f(x)=t$ 로 놓으면

$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to+0}g(t)=2$

45. 정답 ①

[출제의도] 함수의 극한과 연속성을 조사할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $h(1)=f(1)g(1)=0\times1=0$ ∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to1}h(x)=\lim_{x\to1}f(x)g(x)$

$=(\lim_{x\to1}f(x))(\lim_{x\to1}g(x))=0\times0=0$

∴ 거짓

ㄷ. 거짓($\because x=1$에서 연속이다.)

따라서 옳은 것은 ㄱ

46. 정답 ③

$0<x<1$일 때, $f(x)=\frac{x-1}{x}$

$1<x<2$일 때, $f(x)=\frac{2-x}{x-1}$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{(x-1)^3}{x} = 0,$

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1+0} (2-x)(x-1) = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)g(x) = 0$

이 때, $f(1)g(1) = 0\times0 = 0$이므로

$y = f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x-1}{x}\{(x-1)^3+1\} = 0$

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)g(x)$

$= \lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{2-x}{x-1}\{(x-1)^3+1\} = \infty$

따라서 $\lim\limits_{x\to1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로

$y = f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x-1}{x}(x^2+1) = 0$

$\lim\limits_{x\to1+0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{2-x}{x-1}(x-1)^3$

$= \lim\limits_{x\to1+0} (2-x)(x-1)^2 = 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to1} f(x)g(x) = 0$

이 때, $f(1)g(1) = 0\times2 = 0$이므로

$y = f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<참고>

$y = \dfrac{1}{x} - 1$의 그래프는 $y = \dfrac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고,

$y = \dfrac{1}{x-1} - 1$의 그래프는 $y = \dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이를 이용하여 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프를 그려서 생각하면 좀 더 쉽게 연속성을 파악할 수 있다.

47. 정답 ①

$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & (x > 1 \text{ 또는 } x < 1) \\ -x^2 + ax + b & \\ (-1 \leqq x \leqq 1) & \end{cases}$ 이므로

$x = \pm1$ 에서 연속이면 모든 실수 x 에서 연속이다.

$f(1) = 0 = -1 + a + b$, $f(-1) = 2 = -1 - a + b$

연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 2$

$\therefore\ a - b = -1 - 2 = -3$

48. 정답 ⑤

ㄱ. $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 이므로 $x=0$ 에서 불연속

ㄴ. $g(x) = \begin{cases} x^2+5 & (x \neq 0) \\ 5 & (x = 0) \end{cases}$ 이므로 $x=0$ 에서 연속

ㄷ. $g(x) = \begin{cases} \sum\limits_{r=2}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_r\, x^{r-1} + 1 & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$ 에서

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = g(0) = 1$ 이므로 $x=0$ 에서 연속

49. 정답 ⑤

$f(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ a & (x = 0) \\ \dfrac{1}{3}x & (x < 0) \end{cases}$

ㄱ. $f(-3) = -1$ $\quad\therefore$ 거짓

ㄴ. $x > 0$, $f(x) = x$ $\quad\therefore$ 참

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$, $f(0) = a$ 이므로 $a = 0$일 때 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

$\therefore$ 참

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

50. 정답 1

[출제의도] 함수의 극한에 관한 성질을 알고 극한값 구하기

직선 $l : y - \sqrt{t} = -\sqrt{t}\,(x-t)$

$f(t) = t+1,\ g(t) = t\sqrt{t} + \sqrt{t}$ 이므로

$\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{g(t)-f(t)}{g(t)+f(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t}\,(t+1)-(t+1)}{\sqrt{t}\,(t+1)+(t+1)} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} = 1$

51. 정답 ③

[출제의도] 함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러가지 함수의 극한값을 구하기

$f(x) - 2 = kx(x+1)(x-2)$, $\ k$ 는 상수

ㄱ. $\dfrac{1}{6k}$ ㄴ. 0 ㄷ. ∞

52. 정답 ①

ㄱ. (거짓) 【반례】 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ 이면

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$ 이지만

$\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to0} 0 = 0$ 이다.

ㄴ. (참) $y = f(x)$ 가 $x = 0$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$

(i) $f(0) = 0$ 인 경우

$\lim\limits_{x\to+0} |f(x)|$ □ $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = f(0) = 0$

$\lim_{x\to -0}|f(x)| = \lim_{x\to -0}\{-f(x)\} = -f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}|f(x)| = |f(0)|$

(ii) $f(0)=a\ (a>0)$ 인 경우

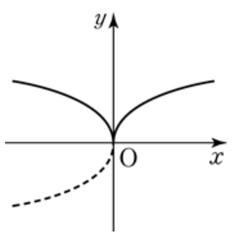
$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}f(x) = f(0)=a=|f(0)|$

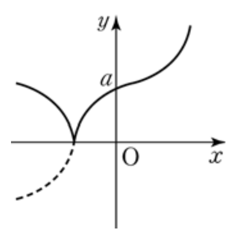
(iii) $f(0)=b\ (b<0)$ 인 경우

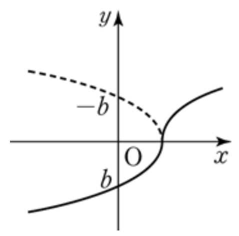
$\lim_{x\to 0}|f(x)| = \lim_{x\to 0}\{-f(x)\} = -f(0) = -b = |f(0)|$

($\because\ b<0$)

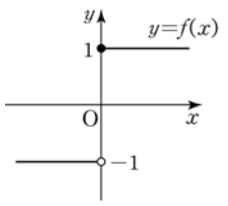
(i), (ii), (iii)에서 $y=|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

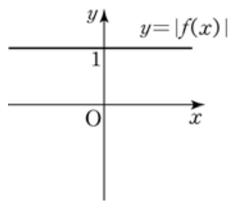






ㄷ. (거짓) 【반례】 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\geq 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$





위의 그림에서 $y=|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만

$y=f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

53. 정답 ①

ㄱ. $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(1)=1$

$\lim_{x\to +0}(g\circ f)(x)=g(1)=1$

$\lim_{x\to -0}(g\circ f)(x)=g(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to 0}(g\circ f)(x)=(g\circ f)(0)$

따라서, $x=0$에서 연속 $\therefore$ 참

ㄴ. (반례)

문제의 <보기> ㄱ에서

$(g\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. (반례)

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$\lim_{x\to 0}(f\circ f)(x)=(f\circ f)(0)=0$이므로

$(f\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이지만

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. $\therefore$ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

54. 정답 ⑤

삼각형 OAB에서 내접원의 반지름의 길이를 r이라 할 때,

삼각형의 넓이 : $\dfrac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2}r=\dfrac{1}{2}x$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{r}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{2}$

55. 정답 ⑤

$\lim_{t\to 1}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\lim_{t\to 1}\dfrac{2-\dfrac{2}{t}}{t-1}=2$

56. 정답 ②

[출제의도] 극한의 성질 이해하기

ㄱ. (반례) $f(x)=x$, $g(x)=[x]$ 에 대하여

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim_{x\to 0}f(x)g(x)=0$ 이지만 $\lim_{x\to 0}g(x)$ 는 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

ㄴ. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\beta$, $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ 라 하면

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x\to a}g(x)\cdot\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$ $\therefore$ 참

ㄷ. (반례) $f(x)=[x]$, $g(x)=x$ 라 하면

$\lim_{x\to 0}f(g(x))=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}[x]$ 가 되어 극한값이 존재하지 않는다. $\therefore$ 거짓

57. 정답 ④

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}f(x)=1$이지만 $x=0$에서 불연속일 경우

$f(0)\neq 1$이거나 존재하지 않을 수 있다. (거짓)

ㄴ. $\dfrac{1}{x}=t$라 하면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이다.

(준식)$=\lim_{t\to 0}f(1+t)=\lim_{x\to 1}f(x)=1$이다. (참)

ㄷ. $f(x)<g(x)<h(x)$이면

$\lim_{x\to 0}f(x)\leq\lim_{x\to 0}g(x)\leq\lim_{x\to 0}h(x)$이다.

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}h(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=0$. (참)

58. [정답] ③

해설

ㄱ. $\lim_{x\to -0}[f(x)]=0$, $\lim_{x\to +0}[f(x)]=0$, $[f(0)]=0$ (연속)

ㄴ. $\lim_{x\to -0}[f(x)]=1$, $\lim_{x\to +0}[f(x)]=0$ (불연속)

ㄷ. $\lim_{x\to -0}[f(x)]=-1$, $\lim_{x\to +0}[f(x)]=0=-1$, $[f(0)]=-1$

(연속)

59. 정답 15

$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=2$ 이므로

다항함수 $f(x)=x^2+2x+a$ 꼴이다.

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+a}{x-1}=k$ 이어야 한다.

$x\to 1$ 일 때, (분모)$\to 0$ 이고 극한값은 일정한 값이므로

(분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$2\times 1+a=0$ $\quad\therefore a=-2$

$f(x)=x^2+2x-2$ 이고 $\lim_{x\to 1}g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}=2$

$\therefore k=2$

$\therefore k+f(3)=2+13=15$

60. 정답 ③

ㄴ. 극한값이 존재하지 않는 점의 개수는 2 개이다.

$\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to -1+0}f(x)=2$ 이므로 $\lim_{x\to -1}f(x)=2$

61. 정답 ①

점 $(t, \sqrt{t})$에서 두 점$(1, 0)$, $(2, 0)$까지의 거리 d_1, d_2는

$d_1=\sqrt{(t-1^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-t+1}$,

$d_2=\sqrt{(t-2^2)+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2-3t+4}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}(d_1-d_2)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-\sqrt{t^2-3t+4})$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t-3}{\sqrt{t^2-t+1}+\sqrt{t^2-3t+4}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{2-\frac{3}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}}=\frac{2}{1+1}=1$

62. 정답: ④

삼각함수의 극한값 구하기

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x\sin x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}$

63. 정답:④

$f(g(x))=2\sin x$, $g(f(x))=\sin 2x$ 이므로

(준식)$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=1\times 1=1$

64. 정답 ②

$\lim_{x\to 1}\left\{\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}\cdot\frac{-1}{1+\sqrt{x}}\right\}=-\frac{1}{2}$

65. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1-\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1-0}{1+1}=\frac{1}{2}$

66. 정답 ②

$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{1-\cos\theta}\right)$

$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{2}{1-\cos^2\theta}-\frac{1+\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)$

$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=\frac{1}{2}$

67.정답 ②

$\lim_{x\to 0}\sin 2x=0$이므로 $\lim_{x\to 0}(\sqrt{px+q}-1)=0$이다. $\therefore q=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{px+q}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{px+1}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{px+1}+1)\sin 2x}{px}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2x(\sqrt{px+1}+1)}{px}$

$=1\times\frac{4}{p}=2$

$\therefore p=2$

따라서 $p+q=3$이다.

68. 정답:②

삼각함수의 극한값 계산하기

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos kx)}{2x^2\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\times\frac{(1-\cos kx)}{2x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{2x^2(1+\cos kx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{2x^2(1+\cos kx)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 kx}{4x^2}$

$=\frac{k^2}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2=\frac{k^2}{4}=1$

$\therefore k=2(\because k>0)$

69. 정답: 2

(준식) $=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan x}=2$

70. 정답:①

$\lim_{x\to0}\frac{ax\sin 2x(\cos x+1)}{(\cos x-1)(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{2ax\sin x\cos x(\cos x+1)}{-\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\{-2a\cos x(\cos x+1)\}=-4a=8$

$\therefore a=-2$

71. 정답 12

[출제의도]삼각함수의 극한값 구하기

[해설] $\lim_{x\to0}\frac{3x\sin(\sin 2x)(1+\cos x)}{(1-\cos^2 x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3x\sin(\sin 2x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}=12$

72. 정답:③

점 P의 좌표를 $P(x, \ln(1+10x))$라 하면

$\tan\theta=\frac{\ln(1+10x)}{x}$

이때, $P\to O$ 이면 $x\to0$ 이므로

$\lim_{P\to O}\tan\theta=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+10x)}{10x}\times10=10$

73. 정답 ③

$\overline{CD}=1$, $\angle CDB=2\theta$, $\angle CBD=\pi-3\theta$이므로

사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{DB}}{\sin\theta}$이므로

$\overline{DB}=\frac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\lim_{\theta\to0}\overline{DB}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}=\frac{1}{3}$

따라서 $\lim_{\theta\to0}\overline{AB}=\lim_{\theta\to0}(1+\overline{DB})=\frac{4}{3}$

74. 정답 ④

$\angle B=\theta$, $\overline{AB}=4$ 이므로 $\overline{AC}=4\tan\theta$이다.

$\angle CAH=\theta$이므로 $\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=4\tan\theta\sin\theta$이다.

$\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{CH}}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}=\lim_{\theta\to0}\frac{4\tan\theta\sin\theta}{\theta\cdot\ln(1+2\theta)}$

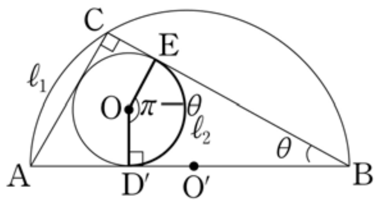
$=\lim_{\theta\to0}\frac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\frac{1}{2}$

$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$, $\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}=1$이므로

$\lim_{\theta\to0}\frac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\frac{1}{2}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{4\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta}{\ln(1+2\theta)}\cdot\frac{1}{2}=2$가 된다.

75. 정답 ④



$\overline{AB}$의 중점을 O′이라 하면 $\angle AO'C=2\theta$이므로

$l_1=1\times2\theta=2\theta$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=2\sin\theta$, $\overline{BC}=2\cos\theta$

$\triangle ABC$의 넓이를 S, 원 O의 반지름을 r라 하면

$S=\frac{1}{2}(2+2\sin\theta+2\cos\theta)r$

$=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\cos\theta$

$\therefore r=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$

$\angle DOE=\pi-\theta$ 이므로

$l_2=\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}(\pi-\theta)$

$\therefore \lim_{\theta\to0}\frac{l_1}{l_2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\theta(1+\sin\theta+\cos\theta)}{2\sin\theta\cos\theta(\pi-\theta)}=\frac{2}{\pi}$

76. 정답 10

$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots+\sin nx}{x}$

$=1+2+3+\cdots+n$

$= \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5}{f(k)} = 10\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 10$

77. 정답:①

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{x}} = 4$ 에서

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\ln(1-x)}{-x}$

$= -\lim\limits_{x\to0} ln(1-x)^{\frac{1}{-x}} = -1$ 이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = -4$

78. 정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+12)^x - a^x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a+12)^x - 1 - a^x + 1}{x}$

$= \ln(a+12) - \ln a$

$= \ln\dfrac{a+12}{a} = \ln 3$

$\therefore \quad \dfrac{a+12}{a} = 3$

$a+12 = 3a$

$\therefore \quad a = 6$

79. 정답: ④

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\frac{x(x-1)}{2x}} = -2$

80. 정답 ③

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{\tan x\sin 2x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{2x^2}\cdot\dfrac{x}{\tan x}\cdot\dfrac{2x}{\sin 2x}$ 이므로

극한값은 $1\cdot1\cdot1 = 1$

81. 정답 ③

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin x} + e^{x\sin 2x} - 2}{x\ln(1+x)}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin x}-1}{x\sin x}\times\dfrac{\sin x}{x}\times\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$+ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\sin 2x}-1}{x\sin 2x}\times\dfrac{\sin 2x}{2x}\times2\times\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$= 1+2 = 3$

82. 정답: ④

[출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$x\to0$일 때, $a^x + b\to0$이므로 $b=-1$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x+b}{\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(x+1)}\times\dfrac{a^x-1}{x}$

$= \ln a = \ln 3$

$\therefore \ a = 3$이므로 $a-b = 4$

83. 정답 : ③

[출제의도] 지수 로그 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)(1+3x)(1+5x)(1+7x)}{e^{4x}-1}$

$= \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)+\ln(1+3x)+\ln(1+5x)+\ln(1+7x)}{4x}}{\frac{e^{4x}-1}{4x}}$

$= \dfrac{1+3+5+7}{4} = 4$

84.정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\cdot\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{f(x)}{e^{2x}-1}\right)$

$= 2\cdot1004 = 2008$

85. 정답:②

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$

86. 정답 ④

준식은

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{1-\sin x}-e^{1-\tan x}}{\tan x-\sin x} = \lim\limits_{x\to0} e^{1-\tan x}\times\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to0} e^{1-\tan x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$

(여기서 $\tan x - \sin x = t$ 라 하면)

$= \lim\limits_{x\to0} e^{1-\tan x}\times\lim\limits_{t\to0}\dfrac{e^t-1}{t} = e$

87. 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\{1+\cos(x^2)\}}{\{1-\cos(x^2)\}\{1+\cos(x^2)\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot f(x)}{\sin^2(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)^2}{\sin^2(x^2)}\cdot\frac{2\cdot f(x)}{(x^2)^2}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=2$$

따라서, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^4}=1$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^p}=q$를 반드시 만족하는 상수 p, q는 $p=4$, $q=1$일 때이다.

88. 정답:14

초월함수의 극한값 이해하기

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-a}=\frac{b}{2\ln 2}\neq 0$에서

$x\to 0$일 때 분자 → 0이므로 분모 → 0

$\therefore \lim_{x\to 0}(2^{x+1}-a)=2-a=0$

$\therefore a=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2^{x+1}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2(2^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{2\frac{2^x-1}{x}}=\frac{7}{2\times\ln 2}$$

$\therefore b=7,\ ab=14$

89. 정답: ③

$\lim_{x\to 0}xf(x)=1$에서 $xf(x)=h(x)$라 하면

$\lim_{x\to 0}h(x)=1,\ f(x)=\frac{1}{x}h(x)(x\neq 0)$ ㉠

ㄱ. $\lim_{x\to 0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\sin x$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot h(x)$

$=1\times 1=1$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\cos x$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}\cdot h(x)$ ㉡

그런데, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$의 값이 존재하지 않으므로 ㉡의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot h(x)\cdot\ln(x+1)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}\cdot h(x)$

$=1\times 1$

$=1$

따라서, $\lim_{x\to 0}f(x)\cdot g(x)$가 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

90. 정답:③

연속과 초월함수의 극한값 계산하기

$x=1$에서 연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$이 성립하므로 함수값 $f(1)=a$ 극한값은 $\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}=2$이므로 $a=2$이다.

91. 정답:①

[출제의도] 연속함수의 정의를 이해하기

$x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-a}{x-\frac{\pi}{2}}=b$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x-a)=0$이므로 $a=1$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=b$에서 $x-\frac{\pi}{2}=t$라 하면

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=0\ \therefore b=0$

따라서 $a+b=1$

92. 정답: ③

초월함수의 극한값을 계산하기

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}$[참]

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}$ [참]

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1-\cos x}$ [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

93. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right\}^{\frac{x}{x-1}}$

그런데, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}=e$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\right\}^{\frac{x}{x-1}}=e^1=e \qquad \therefore \text{ 참}$$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=e$ 이므로

$x+1=t$라 하면 $\lim_{x\to\infty}f(x+1)=\lim_{t\to\infty}f(t)=e$

수렴하는 함수의 곱은 수렴하므로

$\lim_{x\to\infty}f(x)\cdot f(x+1)=\lim_{x\to\infty}f(x)\times\lim_{x\to\infty}f(x+1)$

$=e\times e=e^2 \qquad \therefore$ 참

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}f(kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{kx}{kx-1}\right)^{kx}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}\right\}^{\frac{kx}{kx-1}}$$

그런데, $x\to\infty$이면 $kx\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}=e$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{kx}{kx-1}=1$ 이므로

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{kx-1}\right)^{kx-1}\right\}^{\frac{kx}{kx-1}}=e^1=e$$

∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

94. 정답 ⑤

ㄱ. $x\to1-0$ 일 때, $0<x<1$ 이므로 $[x]=0$

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{(-1)^0}{x}=1$$

ㄴ. $x\to-1+0$ 일 때, $-1<x<0$ 이므로 $[x]=-1$

$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{(-1)^{(-1)}}{x}=\lim_{x\to-1+0}\frac{-1}{x}=1$$

ㄷ. $x\to2-0$ 일 때, $1<x<2$ 이므로 $[x]=1$

$$\lim_{x\to2-0}f(x)=\lim_{x\to2-0}\frac{-1}{x}=-\frac{1}{2}$$

95. 정답 ①

$\frac{1}{x}=t$ 라 하자

준식$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(b+ct^2)}{t^a}=2$

$\lim_{t\to0}t^a=0$ 이므로 $\lim_{t\to0}\ln(b+ct^2)=\ln b=0$, $\therefore b=1$

준식$=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+ct^2)}{t^a}=2$에서 $a=2$, $c=2$

따라서 $a+b+c=5$

96. 정답 50

$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$라 하면 접선은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이므로

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$

직선 AP의 식은 $y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$이고, 점 R의 좌표는

$R\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ 0\right)$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}\right)$

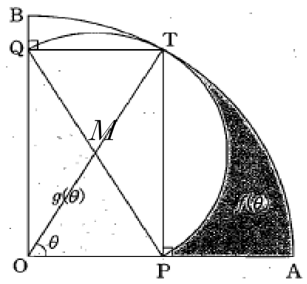
$=\frac{1}{2}\sin\theta\times\frac{\cos^2\theta-1+\sin\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}=\frac{1}{2}\sin\theta\times\frac{\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin^2\theta}{2\theta^2\cos\theta}=\frac{1}{2}$$

$\therefore 100\alpha=100\times\frac{1}{2}=50$

97. 정답 50



점 T의 좌표를 $T(2\cos\theta,2\sin\theta)$라 하고,직사각형 $OPTQ$에서 두 대각선 OT, PQ의 교점을 M 이라 하자.

$f(\theta)=$(부채꼴OAT의 넓이)

$-$(삼각형OPM의 넓이)

$-$(부채꼴MPT의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times2^2\times\theta-\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times1\times\sin\theta$

$-\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta$

$=\theta-\cos\theta\sin\theta$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times2\cos\theta\times2\sin\theta$

$=2\cos\theta\sin\theta$

$\therefore a=\lim_{\theta\to+0}\frac{\theta+f(\theta)}{g(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to+0}\frac{2\theta-\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta}$

$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\theta}{\cos\theta\sin\theta}-\frac{1}{2}\right)$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 100a=50$

98. 정답 ④

ㄱ. $\lim\limits_{x\to+0} g(f(x))=-2,\quad \lim\limits_{x\to-0} g(f(x))=0$ 이므로

(거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2+0} g(f(x))=g(-1)=1,$

$\lim\limits_{x\to2-0} g(f(x))=g(1)=1$ 이므로

(참)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty} g(f(2+\frac{1}{x}))=\lim\limits_{x\to\infty} g(f(6+\frac{1}{x}))=1$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(f(4+\frac{1}{x}))=\lim\limits_{x\to\infty} g(f(8+\frac{1}{x}))$

$=\lim\limits_{x\to\infty} g(f(\frac{1}{x}))=-2$이므로

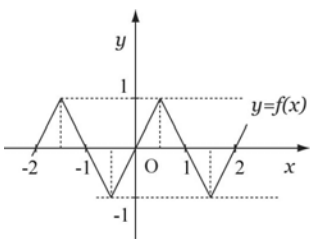
준식$=1+(-2)+1+(-2)=-2$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

99. 정답 ⑤

$y=f(x)$의 그래프는



함수 $y=g(x)$는

1) x가 정수이면 $f(x)=0$이므로 $g(x)=0$

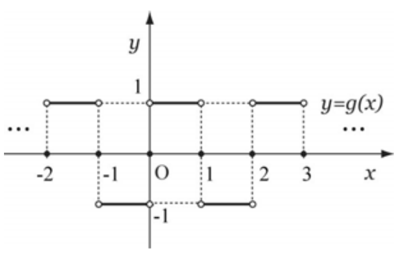
2) $2k-1<x<2k$ (k는 정수)이면

$0\leq 1+f(x)<1$이므로 $g(x)=-1$

3) $2k<x<2k+1$ (k는 정수)이면

$1<1+f(x)\leq 2$이므로 $g(x)=1$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는



$g(10\sqrt{2})-g(\sqrt{3})=1-(-1)=2$

100. 정답 16

$\lim\limits_{x\to8+0} g(x)$이면 $x=8.1$을 생각하자

$f(8.1)=4$ 그러면 $x>2f(x)$이다.

따라서, $\alpha=4$

$\lim\limits_{x\to8-0} g(x)$이면 $x=7.9$를 생각하자.

$f(7.9)=4$ 그러면 $x<2f(x)$이다.

따라서, $\beta=\frac{1}{4}$

$\therefore \dfrac{4}{\frac{1}{4}}=16$

101. 정답 ④

[출제 의도] 함수의 극한과 연속성 이해하기

$$g(f(x))=\begin{cases} x+1 & (-2\leq x\leq -1) \\ 0 & (-1<x<0) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (0<x<1) \\ -x+1 & (1\leq x\leq 2)\end{cases}$$ 이므로

ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1} g(f(x))=0$ (거짓)

ㄴ. $g(f(x))=g(1)=-1$이고,

$\lim\limits_{x\to+0} g(f(x))=\lim\limits_{x\to-0} g(f(x))=0$이므로

$g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (참)

ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 1과 2 사이에서 연속이고

$g(f(1))=0,\ g(f(2))=-1$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식

$g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

(참)

102. 정답 ⑤

[출제의도] 합성함수의 연속성 이해하기

[해설] ㄱ. $g(f(0))=g(0)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0} g(f(x))=0$, $g(f(0))=0$이므로 $x=0$에서 연속 (참)

ㄷ. $y=g(x)$가 $x=1$에서 불연속이므로 주어진 구간에서

$y=g(f(x))$는 $f(x)=1$인 $x=\frac{1}{2}$에서 불연속,

$\lim\limits_{x\to2+0} g(f(x))=-1$, $\lim\limits_{x\to2-0} g(f(x))=-2$

이므로 $x=2$에서 불연속,

구간내의 이외의 점에서는 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두

연속이므로 $y=g(f(x))$는 연속 (참)

103. 정답 ⑤

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ g(x) & (x\geq a)\end{cases}$라 하자.

$f(x)$, $g(x)$가 다항함수이므로 $h(x)$는 모든 실수에서 연속 ⇔

$h(x)$가 $x=a$에서 연속

$h(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=g(a)$ …… ㉠

그런데 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$이므로

㉠ $f(a)=g(a)$

즉, $x=a$에서 $h(x)$가 연속이려면 a가 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근이면 된다.

ㄱ. 방정식 $x^2=x+1$의 실근이 2개이므로 $\therefore$ 참

ㄴ. $N(f,\ g)=n$ (n : 음이 아닌 정수)라 하면 n은 방정식 $f(a)=g(a)$의 실근의 개수이다.

$N(g,\ f)=m$(m : 음이 아닌 정수)라 하면

m은 방정식 $g(a)=f(a)$의 실근의 개수이다.

$\therefore\ m=n$

$\therefore$ 참

ㄷ. $f(a)=g(a)$의 실근의 개수를 n개라 하면 $N(f,\ g)=n$

한편, $(h\circ f)(a)=(h\circ g)(a)$

$\Leftrightarrow\ \{f(a)\}^3=\{g(a)\}^3$

$\Leftrightarrow\ f(a)=g(a)$이므로 $N(h\circ f,\ h\circ g)=n$

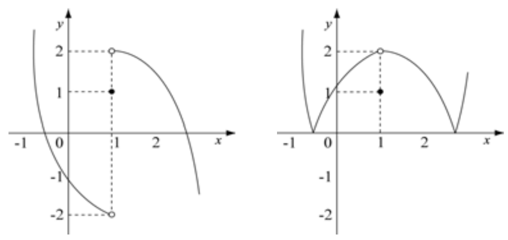
$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

104. 정답 ⑤

[출제의도] 함수의 연속성 이해하기

$y=f(x)$ $y=|f(x)|$



ㄱ. 그래프에 의하여 $\lim\limits_{x\to1}|f(x)|=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2+0}f(f(x))=\lim\limits_{t\to1-0}f(t)=-2$ (참)

ㄷ. 함수 $y=f(f(x))$는 $f(x)=1$일 때 불연속점을 가지므로 $x=2,\ 1,\ 1-\sqrt{3}$ 에서 불연속이다. 따라서 3개 존재한다. (참)

105. 정답 ④

[출제 의도] 함수의 극한과 연속성 이해하기

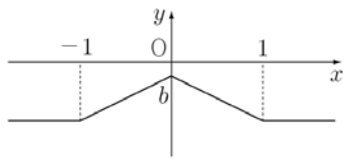
$$f(x)=\begin{cases}-a|x|+b & (|x|<1)\\ \dfrac{-a-1+b}{2} & (|x|=1)\\ -1 & (|x|>1)\end{cases}$$

ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$이다.

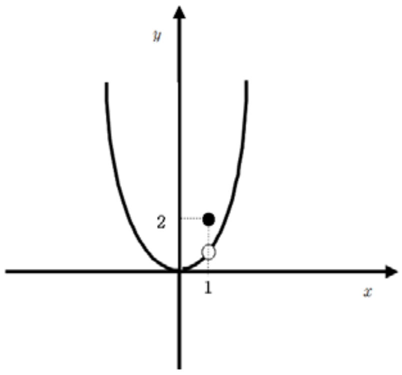
$\therefore\ a-b=1$ (참)

ㄴ. (반례) $a=-1,\ b=-2$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다. (거짓)

ㄷ. $a<1$일 때, $b<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)



106. 정답 ③



ㄱ. 좌우 극한값이 1이므로 (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$를 a만큼 평행이동 시켜도 불연속 점이 존재하기 때문에 (거짓)

ㄷ. $h(x)=(x-1)f(x)$는 $x\neq1$에서도 $x=1$에서도 $y=0$이 되기 때문에 연속 (참)

107. 정답 ⑤

[출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}(f\circ g)(x)=1$, $(f\circ g)(0)=0$ $\therefore$ 불연속

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}(f\circ h)(x)=(f\circ h)(0)=1$ $\therefore$ 연속

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)=\dfrac{1}{4}$ $\therefore$ 연속

108. 정답 ②

[출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{h\to0}|(2+h)^2-(2-h)^2|=\lim\limits_{h\to0}|8h|=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{h\to0}|[2+h]-[2-h]|=|2-1|=1$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases}x\ (x\neq2)\\ 0\ (x=2)\end{cases}$이면

$\lim\limits_{h\to0}|f(2+h)-f(2-h)|=\lim\limits_{h\to0}|(2+h)-(2-h)|=0$이지만

$x=2$에서 불연속이다. (거짓)

109. 정답 ②

$y=f(g(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(g(1))=f(a)$ ㉠

$\lim\limits_{x\to1-0}f(g(x))=\lim\limits_{x\to1+0}f(g(x))=0$ ㉡

㉠, ㉡에서

$f(a)=\lim\limits_{x\to1}f(g(x))=0$

$f(x)=(x-1)(2x-1)(x+1)$에서

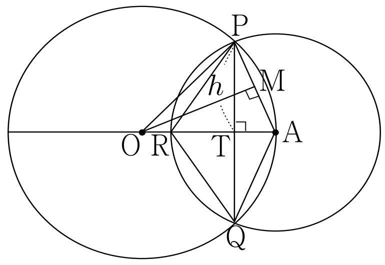
$f(a)=(a-1)(2a-1)(a+1)=0$

$a>1,\ f(a)=f(a+2)$이므로 $a=\dfrac{5}{2},\ 3,\ \cdots$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

110. 정답 ④

[해설] $\overline{\mathrm{OA}}$와 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 T, $\overline{\mathrm{PT}}=h$, $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점을 M이라고 하면, $\mathrm{S}(r)=hr$



$\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PT}}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{OM}}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times1\times h=\dfrac{1}{2}\times r\times\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{2}\right)^2},\ h=r\sqrt{1-\left(\dfrac{r}{2}\right)^2}$

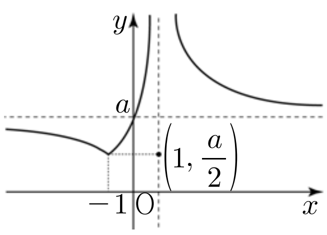
$$\therefore \lim_{r\to2-0}\frac{\mathrm{S}(r)}{\sqrt{2-r}}=\lim_{r\to2-0}\frac{r^2\sqrt{1-\left(\frac{r}{2}\right)^2}}{\sqrt{2-r}}$$

$$=\lim_{r\to2-0}\frac{r^2\sqrt{(2-r)(2+r)}}{2\sqrt{2-r}}=4$$

111. 정답 ⑤

i) $a=0$인 경우, $f(x)=0$

ii) $a>0$인 경우



iii) $a<0$인 경우

ii)의 그래프를 x축으로 대칭이동한 그래프이다.

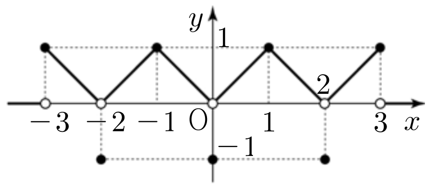
ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=\frac{a}{2}$ (참)

ㄴ. $a=0$일 때, 함수 $f(x)=0$이므로 모든 실수에서 연속이다. (참)

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=a$와 오직 한 점에서 만난다. (참)

112. 정답 ②

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



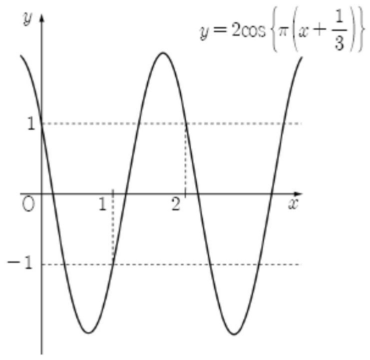
$y=(g\circ f)(x)$는 $x=-3,\ -2,\ 0,\ 2,\ 3$에서 불연속이다.

따라서 불연속점은 5개다.

113. 정답 ③

ㄱ. $y=f(x)$는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. (반례) $y=2\cos\left\{\pi\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\right\}$ (거짓)



ㄷ. $f(x)$는 정수 k에 대하여 폐구간 $[2k,\ 2k+1]$, $[2k+1,\ 2(k+1)]$에서 연속이고 $f(2k)\cdot f(2k+1)<0$, $f(2k+1)\cdot f(2(k+1))<0$이므로

중간값의 정리에 의하여

$f(x)$는 $f(c_1)=0,\ f(c_2)=0$인 점 $c_1\in(2k,\ 2k+1)$, $c_2\in(2k+1,\ 2(k+1))$가 적어도 하나씩 존재한다.

따라서 $f(x)$는 개구간 $(0,\ 2m)$에서 $f(x)=0$인 점이 적어도 $2m$개 존재한다. (참)

114. 정답 ③

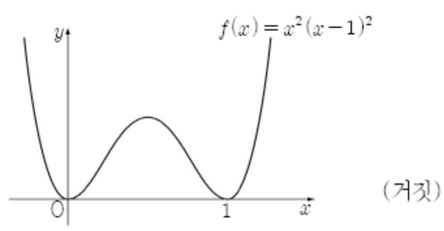
ㄱ. (준식)$=\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}=a\cdot\frac{1}{3}=\frac{a}{3}$ (참)

ㄴ. (준식)$=\lim\dfrac{1-\dfrac{f(x)}{x}}{1+\dfrac{f(x)}{x}}=\dfrac{1-a}{1+a}$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x^2(x-1)^2$에 대하여

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$이다.

그러나 개구간 $(0,\ 1)$에서 실근이 존재하지 않는다. (거짓)



115. 정답 ②

$f(x)=\begin{cases}2 & (x>0)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$, $g(x)=\sin\pi x$

ㄱ. $f(f(x))=\begin{cases}2 & (x\geq 0)\\ 1 & (x<0)\end{cases}$ 이므로 상수함수가 아니다.

∴ 거짓

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin\pi x=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to -0} f(g(x))=0$

$\lim\limits_{x\to +0} f(g(x))=2$

$\lim\limits_{x\to -0} f(g(x))\neq \lim\limits_{x\to +0} f(g(x))$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 의 값은 존재하지 않는다.

∴ 거짓

ㄷ. $g(f(0))=g(1)=\sin\pi=0$ 이고,

$\lim\limits_{x\to -0} g(f(x))=g(0)=\sin 0=0$

$\lim\limits_{x\to +0} g(f(x))=g(2)=\sin 2\pi=0$

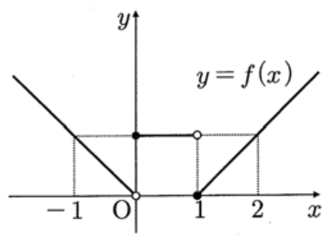
이므로 $g(f(0))=\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$

따라서, $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

∴ 참

116. 정답 ⑤

합성함수의 그래프를 이용하여 극한값 구하기



ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다. [거짓]

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(f(x))=\lim\limits_{h\to +0} f(h)=1$ [참]

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(f(x))=\lim\limits_{x\to 1-0} f(1)=0$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

117. 정답 ②

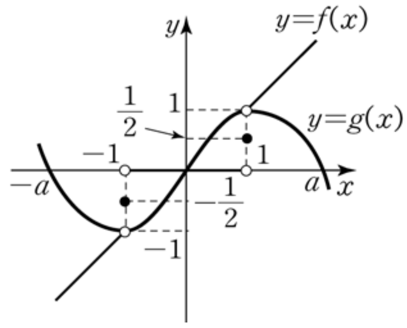
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 에서

(ⅰ) $|x|>1$ 일 때 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1}=x$

(ⅱ) $|x|<1$ 일 때 $f(x)=0$

(ⅲ) $x=1$ 일 때 $f(x)=\dfrac{1}{2}$

(ⅳ) $x=-1$ 일 때 $f(x)=-\dfrac{1}{2}$



방정식 $f(x)-g(x)=0$ 이 단 하나의 실근을 가지려면 $f(x)=g(x)$ 에서 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 오직 한 점에서만 만나야 한다. $y=g(x)$ 의 그래프는 원점 대칭이므로 점 $(1,1)$, $(-1,-1)$ 을 지날 때 a 의 값이 최대이다. $g(1)=1$ 에서 $1=-(1-a^2)\Leftrightarrow a^2=2$

∴ $a=\pm\sqrt{2}$

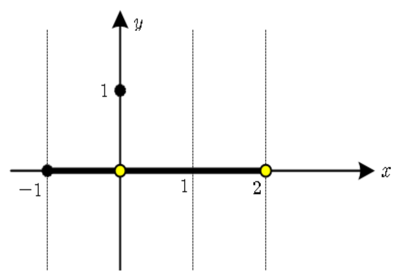
따라서 a 의 최댓값은 $\sqrt{2}$ 이다.

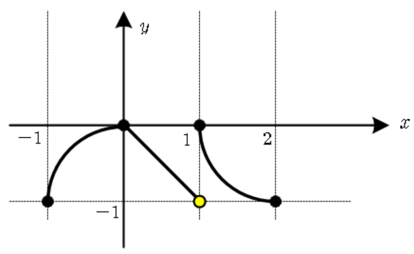
118. 정답 ①

주어진 구간에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 간단히 하면

$x=0$이면 $f(x)=1>0$

$x\neq 0$이면 $f(x)\leq 0$이므로





$g(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases}$, $h(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ f(x) & (x\neq 0)\end{cases}$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1+0} h(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} h(x)=-1$ 이므로

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$를 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 구간내의 임의의 실수 a에 대하여

$\lim\limits_{x\to a}(h\circ g)(x)=0$이다.

($\because \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=0$)

$(h\circ g)(a)=\begin{cases}h(0)=0 & (a\neq 0)\ (\because g(a)=0)\\ h(1)=0 & (a=0)\ (\because g(a)=1)\end{cases}$

$\therefore \lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=(h\circ g)(a)$

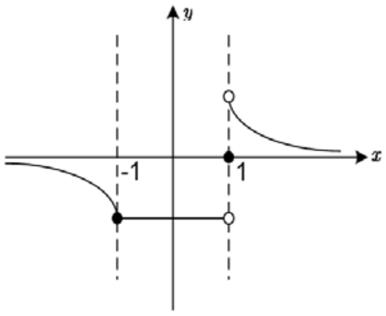
주어진 구간에서 연속이다. (참)

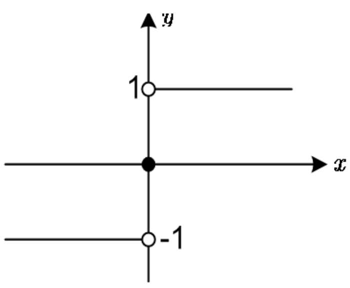
ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=0 \quad (g\circ h)(0)=g(0)=1$

$\therefore$ $x=0$에서 불연속 (거짓)

119. 정답 90

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (-1<x<1)\\ -1 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (x<-1)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$





$y=f(x)\cdot g(x)$ 가 연속이므로

$f(1)\cdot g(1)=0$, $\lim_{x\to 1+0}f(x)g(x)=f(1)=0$

$y=f(x)\cdot h(x)$ 가 연속이므로

$f(0)\cdot h(0)=0$, $\lim_{x\to +0}f(x)h(x)=f(0)=0$

$\therefore f(x)=x\cdot(x-1)$

$\therefore f(10)=90$

120. 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}f(x)g(x)=(-1)\cdot 1=-1$

$\lim_{x\to 1-0}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1+0}f(x)g(x)=(-1)\cdot(-1)=1$

$\lim_{x\to -1-0}f(x)g(x)=1\cdot(-1)=-1$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+g(x)\}=(-1)+1=0$

$\lim_{x\to 1-0}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$

$f(1)+g(1)=(-1)+1=0$ (참)

121. 정답 ①

[출제의도] 함수의 연속에 관한 성질을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. ① $\lim_{x\to 1+0}g(f(x))=\lim_{t\to 1-0}g(t)=-2$

② $\lim_{x\to 1-0}g(f(x))=\lim_{t\to -1+0}g(t)=-2$

$\lim_{x\to 1+0}g(f(x))=\lim_{x\to 1-0}g(f(x))$ 이므로 $x=1$ 에서 극한값이 존재한다.$\therefore$ 참

ㄴ. ① $\lim_{x\to +0}f(f(x))=\lim_{t\to 1-0}f(t)=-1$,

② $\lim_{x\to -0}f(f(x))=\lim_{t\to -1+0}f(t)=0$ 이므로 $x=0$ 에서 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다. $\therefore$ 거짓

ㄷ. (반례)

① $\lim_{x\to -\frac{1}{2}+0}f(g(x))=\lim_{t\to +0}f(t)=1$

② $\lim_{x\to -\frac{1}{2}-0}f(g(x))=\lim_{t\to -0}f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to -\frac{1}{2}+0}f(g(x))\neq\lim_{x\to -\frac{1}{2}+0}f(g(x))$

$x=-\frac{1}{2}$ 에서 불연속이다. $\therefore$ 거짓

122. 정답 ①

$-\log_5 x=\log_{\frac{1}{5}}x$가 정수일 때, $f(x)$는 x에서 불연속이다.

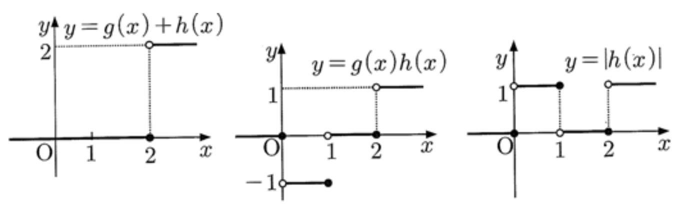
$\log_{\frac{1}{5}}x=1$이면 $x=\frac{1}{5}$, $\log_{\frac{1}{5}}x=2$이면 $x=\left(\frac{1}{5}\right)^2$, $\cdots$

따라서 $\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3+\cdots=\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

123. 정답 ②

$y=g(x)+h(x)$, $y=g(x)h(x)$, $y=|h(x)|$의 그래프를 그려보면

아래와 같다.

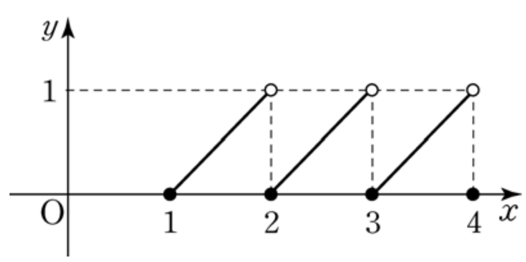


따라서, $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=3$이고

$a_1<a_2=a_3$

124. 정답 ⑤

(i) $y=f(g_1(x))=x-[x]$ $(1\leq x\leq 4)$ 의 그래프는 다음과 같다.



불연속점은 $x=2$, 3, 4 의 3 개이므로 $a_1=3$

(ii) $y = f(g_2(x)) = x^2 - [x^2]$ $(1 \leq x \leq 4)$

$1 \leq x^2 < 2$, 즉 $1 \leq x < \sqrt{2}$ 일 때 $y = x^2 - 1$,

$2 \leq x^2 < 3$, 즉 $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ 일 때 $y = x^2 - 2$

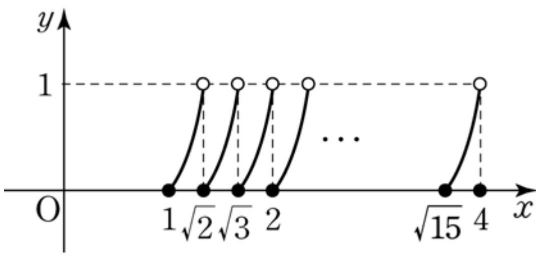
$3 \leq x^2 < 4$, 즉 $\sqrt{3} \leq x < 2$ 일 때 $y = x^2 - 3$

…

$15 \leq x^2 < 16$, 즉 $\sqrt{15} \leq x < 4$ 일 때 $y = x^2 - 15$

$x^2 = 16$, 즉 $x = 4$ 일 때 $y = 16 - 16 = 0$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



불연속점은 $x = \sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, …, $\sqrt{16}$ 의 15 개이므로 $a_2 = 15$

(iii) $y = f(g_3(x))$

$= \log(x^2+1) - [\log(x^2+1)]$ $(1 \leq x \leq 4)$

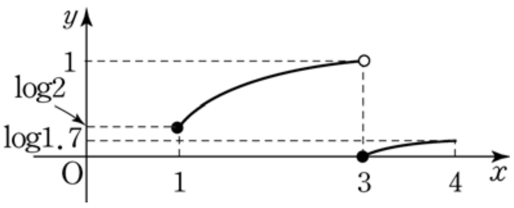
$0 \leq \log(x^2+1) < 1$ 에서 $0 \leq x^2 < 9$ 이므로

$1 \leq x < 3$ 일 때 $y = \log(x^2+1)$

$1 \leq \log(x^2+1) < 2$ 에서 $9 \leq x^2 < 99$ 이므로

$3 \leq x \leq 4$ 일 때 $y = \log(x^2+1) - 1 = \log\dfrac{x^2+1}{10}$

따라서 그래프는 다음 그림과 같다.



불연속점은 $x = 3$ 의 1 개이므로 $a_3 = 1$

(i), (ii), (iii)에서 $a_3 < a_1 < a_2$

125. 정답 ①

주어진 구간 $0 < x < 1$ 에 대하여 $y = \lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = 1$ 이므로 상수함수이다.

126. 정답 ④

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2 & \left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{1}{2} \leq x < \dfrac{7}{2}\right) \\ 2 & \left(\dfrac{7}{2} \leq x < \dfrac{15}{2}\right) \\ 6 & \left(\dfrac{15}{2} \leq x < \dfrac{31}{2}\right) \\ 12 & \left(\dfrac{31}{2} \leq x < 20\right) \end{cases}$$

따라서 불연속점의 개수는 4개이다.

127. 정답 24

[출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)(x+k)$ (k는 상수)이므로

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+k}{2} = \frac{1+k}{2} = 1$$

에서 $k = 1$이므로 $f(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)(x+1)$

$\therefore f(7) = 24$

128. 정답 ④

$f(x) = \lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}$에서

i) $|x| > 1$, $f(x) = x$

ii) $|x| < 1$, $f(x) = 0$

iii) $x = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{2}$

iv) $x = -1$, $f(x) = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore x = \pm 1$에서 불연속

$y = g(f(x))$이 $x = \pm 1$에서 연속이 되려면

$\lim\limits_{x \to 1} g(f(x)) = g(f(1))$, $\lim\limits_{x \to -1} g(f(x)) = g(f(-1))$

위 식을 만족하려면 좌극한값, 우극한값과 함숫값이 같아야 하므로

$\lim\limits_{x \to 1+0} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to 1+0} g(x) = g(1)$

$\lim\limits_{x \to 1-0} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$

$g(f(1)) = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad g(1) = g(0) = g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

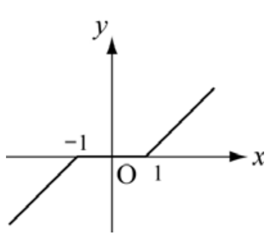
이와 같은 방법으로

$\lim\limits_{x \to -1+0} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$

$\lim\limits_{x \to -1-0} g(f(x)) = \lim\limits_{x \to -1-0} g(x) = g(-1)$

$g(f(-1)) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ $\quad g(0) = g(-1) = g\left(-\dfrac{1}{2}\right)$을 만족시키는

$y = g(x)$의 개형은 ④번



129. 정답 ②

합성함수 가 $x = 0$ 에서 연속이면 구간 $[-2, 2]$ 에서 연속$(g \circ f)(x)$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to 0} g(f(x))=g(f(0))$ 가 성립해야 한다.

이때, $\lim_{x\to +0} g(f(x))=g(-1)$,

$\lim_{x\to -0} g(f(x))=g(1)$, $g(f(0))=g(0)$ 이므로

$g(-1)=g(1)=g(0)$이어야 한다.

이때, $g(-1)=g(1)=g(0)$ 을 만족하는 함수 $g(x)$는 ㄴ뿐이다.

130. 정답 ③

(ㄱ) $f(x^2)=x^2$ 이면 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\times x=0$ (참)

(ㄴ) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{f(x)}=1$ 이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$

$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{f(x)}=\ln 3$ (참)

(ㄷ) 반례) $f(x)=|x|$라 하면

$\lim_{x\to +0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\times\frac{|x|}{x}=1$

$\lim_{x\to -0}\frac{e^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{e^{|x|}-1}{|x|}\times\frac{|x|}{x}=-1$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{|x|}-1}{x}$ 은 존재하지 않는다. (거짓)

131. 정답: ③

초월함수의 극한 구하기

$\triangle$PAB의 넓이 $\mathrm{S}(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{AB}}\cdot\ln t=\frac{1}{2}(e-1)\ln t$

이므로

$\lim_{t\to 1+0}\frac{\mathrm{S}(t)}{t-1}=\lim_{t\to 1+0}\frac{(e-1)\ln t}{2(t-1)}=\frac{e-1}{2}\lim_{t\to 1+0}\frac{\ln t}{t-1}$

$=\frac{e-1}{2}\times 1\ \left(\because \lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}=1\right)$

$\therefore \lim_{t\to 1+0}\frac{\mathrm{S}(t)}{t-1}=\frac{e-1}{2}$

132. 정답 ④

(가) : $r=\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

(나) : $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{r\cos\theta}{1-\sin\theta}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)\sin^2\theta}=2$

133. 정답:④

[출제의도] 로그함수의 극한을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

A$(t,\ \ln(2t+1))$이라 하면 $a\to\infty$일 때 $t\to 0$이다.

$S_1=\frac{1}{2}\ln(2t+1)$, $S_2=\frac{t}{2}$이므로

$\alpha=\lim_{a\to\infty}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(2t+1)}{t}=2$

134. 정답: ④

초월함수의 극한의 이해하기

$g(x)=\frac{f(x)}{\ln(1+x)}$로 놓으면

$\lim_{x\to 0} g(x)=1$, $f(x)=g(x)\ln(1+x)$

ㄱ) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{g(x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}}{g(x)\frac{\ln(1+x)}{x}}$

$=\frac{1}{1\times 1}=1$ [거짓]

ㄴ) $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\ln(1+x)+x}{\ln(1+x)}$

분자 , 분모를 $\ln(1+x)$로 나누면

$\lim_{x\to 0}\left(g(x)+\frac{x}{\ln(1+x)}\right)=1+1=2$ [참]

ㄷ) $\lim_{x\to 0}\frac{\{g(x)\}^2\{\ln(1+x)\}^2}{\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to 0}\{g(x)\}^2\ln(1+x)=0$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

135. 정답 ③

$f(x)=\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$ 에 대하여

(ㄱ) $1<a<b$ 이면 $x>1$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)>1$ 이다. (참)

$1<a<b$ 이면 $x>1$ 인 임의의 t 에 대하여

$b^t>a^t$, $\log_a t>\log_b t$ 이므로 $b^t+\log_a t>a^t+\log_b t$ 이므로

$f(x)>1$ 이다.

(ㄴ) $b<a<1$ 이면 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ 이다. (거짓)

$b<a<1$ 이면

$\lim_{x\to\infty} a^x=0, \lim_{x\to\infty} b^x=0$ $\lim_{x\to\infty}\log_b x=-\infty, \lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$ 이므로

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 되므로 분모 분자를 $\log_b x$ 로 나누면

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b^x}{\log_b x}+\frac{\log_a x}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x}+1}=\log_a b$

(ㄷ) $\lim_{x\to +0} f(x)=\log_a b$ (참)

$\lim_{x\to+0} a^x = 1,\ \lim_{x\to+0} b^x = 1$

$\lim_{x\to+0} \log_a x = \pm\infty,\ \lim_{x\to+0} \log_b x = \pm\infty$

$f(x)$ 의 분모, 분자를 $\log_b x$ 로 나누면

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \frac{\frac{b^x}{\log_b x}+\frac{\log_a x}{\log_b x}}{\frac{a^x}{\log_b x}+1} = \log_a b$$

136. 정답 ③

$a = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{2t} = \lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$b = \lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t} = \lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2 = 2$

ㄱ. $f(1) = a = \frac{1}{2}$ ∴ 참

ㄴ. $f(f(1)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = b = 2$ ∴ 참

ㄷ. $x<1$이면 $f(x) = 2$이므로

$f(f(x)) = f(2) = \frac{1}{2}$

$x \geq 1$이면 $f(x) = \frac{1}{2}$이므로

$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

∴ $\lim_{x\to1-0} f(f(x)) \neq \lim_{x\to1+0} f(f(x))$ ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

137. 정답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x} = 1$에서

$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\sin x}{x} = 1,\ \lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x} = 0$…… ㉠

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x+g(x)}{x^2} = 1$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}\sin x}{x^2} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2} = 1$…… ㉡

$g(x)$는 다항함수이므로 ㉠, ㉡에 의해

$g(x) = x^2$

ㄱ. $g(x) = x^2$이므로 $g(0) = 0$ ∴ 참

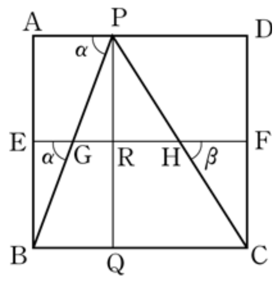
ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$ ∴ 참

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{e^{-x}\sin x+x^2}{x^2} =$(발산) ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

138. 정답: ⑤

아래 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{PQ}$와 $\overline{EF}$가 만나는 점을 R라 하자.



ㄱ. (참) $\overline{EG} = \overline{GR},\ \overline{RH} = \overline{HF}$이므로

$\overline{GH} = \overline{GR}+\overline{RH} = \frac{1}{2}\overline{EF} = 1$ (일정)

ㄴ. (거짓) $\triangle PGH$에서 $\angle GPH+\alpha+\beta = 180^\circ$

∴ $\alpha+\beta = 180^\circ - \angle GPH$

이 때, 점 P의 위치에 따라 $\angle GPH$의 크기가 달라지고, $\angle GPH$의 크기가 달라지면 $\alpha+\beta$의 값이 달라진다.

ㄷ. (참) $\triangle ABP$에서 $\tan\alpha = \frac{2}{\overline{AP}}$ 이므로

$\overline{AP} = \frac{2}{\tan\alpha} = 2\cot\alpha$

∴ $\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{AP}}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cot\alpha}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = \lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\frac{\pi}{2}-\alpha} = 2$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

139. 정답:①

$\angle PAO = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{OA}}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{1}{\sin\theta}$

∴ $\lim_{P\to B}\overline{OA} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to0}\frac{\sin3\theta}{\sin\theta} = 3$

140. 정답 250

[그림 2]의 도형의 넓이는 두 변의 길이가 20 인 이등변삼각형 n개의 넓이와 두 변의 길이가 10 인 이등변삼각형 n개의 넓이의 합이다.

이 때, 같은 두 변 사이의 끼인 각의 크기는 $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ 이므로

$S_n = n\cdot\frac{1}{2}\cdot20^2\cdot\sin\frac{\pi}{n} + n\cdot\frac{1}{2}\cdot10^2\cdot\sin\frac{\pi}{n} = 250n\sin\frac{\pi}{n}$

$$\therefore\ \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right) = 250\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 250$$

141. 정답: 20

$\overline{AC} = 4\sqrt{2}$ 이고, $\triangle APB$ 는 직각삼각형이므로

$\overline{AP} = 4\cos\theta$ 이다.

$$\therefore\ f(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\,\overline{AP}sin(\angle CAP) = 8\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\cos\theta\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$

$$= 8\sqrt{2}\cos\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$

$$= 8\cos^2\theta - 8\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore\ 8 - f(\theta) = 8\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta$$

한편, $\angle BOP = 2\theta$ 이므로 $g(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot 2\theta = 4\theta$ 이다.

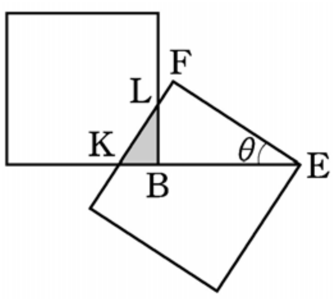
$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{8 - f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{8\sin^2\theta + 8\sin\theta\cos\theta}{4\theta}$$

$$= 2\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta + \cos\theta) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

$$\therefore\ 10\alpha = 20$$

142. 정답 65

<풀이>



$\frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{KE}}} = \cos\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{KE}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{KB}} = \frac{1}{\cos\theta} - 1$$

또, $\angle\mathrm{BKL} = \frac{\pi}{2} - \theta$에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BL}}}{\overline{\mathrm{KB}}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BL}} = \overline{\mathrm{KB}}\cdot\cot\theta$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{KB}}\cdot\overline{\mathrm{BL}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\cot\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^4\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

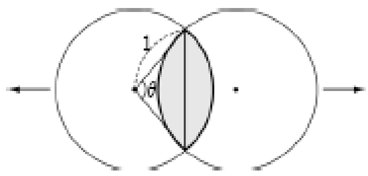
$$= \frac{1}{2\cdot 1\cdot 2^2} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore\ p^2 + q^2 = 65$$

143. 정답 ③

[출제의도] 삼각함수의 극한값 구하기

[해설] $l = 2\times 1\times\theta = 2\theta$



$$m = 2\times 1\times\sin\frac{\theta}{2}$$

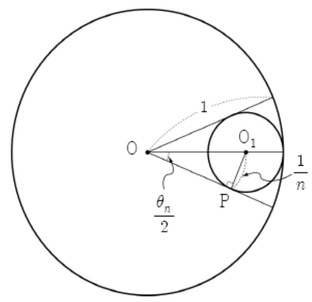
$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times 2 = 2$$

144.정답 14

그림과 같이 한 접선의 접점을 P라고 하자.

$$\overline{OO_1} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$\triangle OPO_1 = \frac{\pi}{2}$이므로 $\triangle OPO_1$은 직각삼각형이다.



$$\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \frac{\overline{PO_1}}{\overline{OO_1}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{14n^2+1}{2n+1}\right)\cdot\theta_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{14n^2+1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\frac{\theta_n}{2}}{\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}\cdot 2\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{14n^2+1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\frac{\theta_n}{2}}{\sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)}\cdot\frac{2}{n-1}\right\} = 14$$

145. 정답 ①

[출제의도] 삼각형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 표현하고 극한값을 구할 수 있는가를

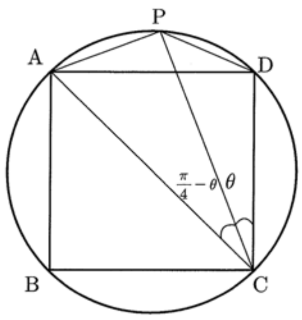
묻는 문제이다.

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cot\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$ 이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\frac{1}{2}(\cot\theta+\cos\theta)}{\theta-\frac{\pi}{2}}=-1$$

146. 정답: 50

삼각함수의 극한값 계산하기



$\angle\mathrm{DCP}=\theta$, 외접원의 반지름을 R 이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2R\sin\frac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{AP}}=2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\overline{\mathrm{DP}}=2R\sin\theta$

점 P가 점 D에 가까이 갈수록 $\theta\to0$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\overline{\mathrm{AD}}-\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{DP}}}\right)=\lim_{\theta\to0}\frac{2R\sin\frac{\pi}{4}-2R\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{2R\sin\theta}$$

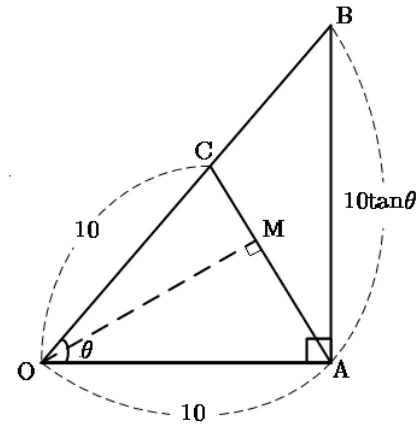
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ 100\alpha^2=50$

147. 정답 20



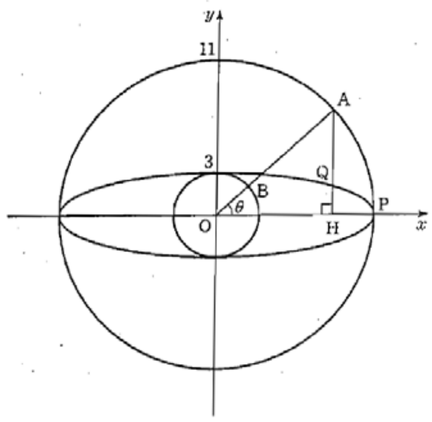
$\overline{AM}=10\sin\frac{\theta}{2}$ $\quad\therefore\ \overline{AC}=20\sin\frac{\theta}{2}$

$\overline{OB}=10\sec\theta$ 이므로 $\overline{BC}=10\sec\theta-10$ 이고 $\overline{AB}=10\tan\theta$

$\therefore\ f(\theta)=10\tan\theta+20\sin\frac{\theta}{2}+10\sec\theta-10$

$$\lim_{x\to+0}\frac{10\tan\theta+20\sin\frac{\theta}{2}+10\sec\theta-10}{\theta}=10+10+0=20$$

148.정답: 27



조건에 의해 $A(11\cos\theta, 11\sin\theta)$, $B(3\cos\theta, 3\sin\theta)$, $P(11, 0)$, $Q(11\cos\theta, 3\sin\theta)$, $H(11\cos\theta, 0)$ 로 놓을 수 있다.

$\overline{AQ}=8\sin\theta$, $\overline{BQ}=8\cos\theta$, $\overline{PH}=11(1-\cos\theta)$

$\triangle ABQ=S_1=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{BQ}=\frac{1}{2}\cdot8\sin\theta\cdot8\cos\theta=16\sin2\theta$

$\triangle APQ=S_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{AQ}\cdot\overline{PH}=\frac{1}{2}\cdot8\sin\theta\cdot11(1-\cos\theta)$

$=44\sin\theta(1-\cos\theta)$

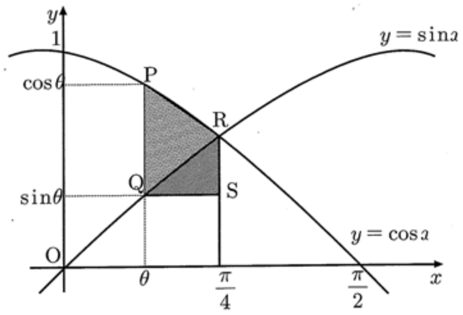
$$\lim_{\theta\to0}\frac{S_2}{\theta^2\cdot S_1}=\frac{44\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^2\cdot16\sin2\theta}$$

$$=\frac{11}{16}\cdot\frac{2(1-\cos\theta)}{\theta^2}\cdot\frac{\frac{\sin\theta}{\theta}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}}=\frac{11}{16}$$

$\therefore\ p+q=16+11=27$

149. 정답: ②

초월함수의 극한값 의 활용하기



$\triangle PQR = \frac{1}{2}(\cos\theta - \sin\theta) \times \left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = f(\theta)$

$\triangle QSR = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta\right) = g(\theta)$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{2}\cdot(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\right)}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\theta - 1}$$

$\theta - \frac{\pi}{4} = t$라 하면

$$\lim_{t\to 0} \frac{2\sin t}{\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 1} = \lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{\sin t + \cos t - 1}$$

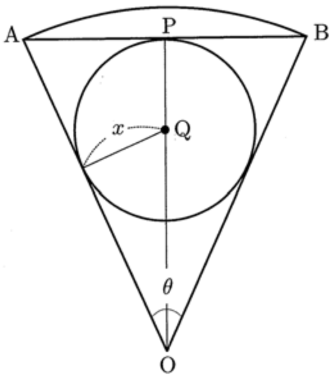
$$= \lim_{t\to 0}\frac{2}{1 + \frac{\cos t - 1}{\sin t}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{2}{1 + \frac{-\sin^2 t}{\sin t(\cos t + 1)}} = 2$$

150. 정답: ③

초월함수의 도형에 활용

내접원의 중심을 Q, 현 $\overline{AB}$와 원의 교점을 P 내접원의 반지름을 x라 하자.



$\overline{OP} = r\cos\frac{\theta}{2}$

$\overline{OQ} = r\cos\frac{\theta}{2} - x$

$x = \left(r\cos\frac{\theta}{2} - x\right)\sin\frac{\theta}{2}$

$$\therefore x = \frac{\frac{1}{2}r\sin\theta}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$$

삼각형 OAB에 내접하는 원의 둘레의 길이를 l_2

$$\therefore l_2 = 2\pi \times x = \frac{\pi r\sin\theta}{1 + \sin\frac{\theta}{2}}$$

부채꼴의 호 AB의 길이를 l_1 $l_1 = r\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\frac{l_2}{l_1} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\pi\sin\theta}{1+\sin\frac{\theta}{2}}}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\pi \times \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{1 + \sin\frac{\theta}{2}} = \pi$$

151. 정답 ④

[출제의도] 도형의 성질을 이용한 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정 $2n$다각형의 한 변의 길이는 $1 - \cos\frac{\pi}{n}$이고, 정 $2n$다각형의 중심에서 한 변까지의 길이를 l이라 하면,

$\tan\frac{\pi}{2n} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)}{l}$ 이므로, $l = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{n}}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$ 이다.

따라서

$$S_n = 2n \times \left\{\frac{1}{2} \times l \times \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

$$= \frac{n\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2}{2\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{2n \times \sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} n^2 S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3 \times \sin^4\frac{\pi}{2n}}{\tan\frac{\pi}{2n}}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^4\pi x}{x^3 \times \tan\pi x} \quad \left(\frac{1}{2n} = x \ \text{치환}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)^3 \times \lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\tan\pi x}$$

$=\frac{1}{4}\times\pi^3\times1=\frac{1}{4}\pi^3$

152. 정답 ①

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=3$에서

$x\to2$일 때 (분자)→0이므로 (분모)→0이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\to2}(x^2-b)=4-b=0$에서 $b=4$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{2+2}=3$

$\therefore a=-10$

$\therefore a+b=-10+4=-6$

153. 정답 ②

준식$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=2\cdot4=8$

154. 정답 ①

$x\to3$일 때 (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다.

$\lim_{x\to3}(\sqrt{x+a}-b)=\sqrt{3+a}-b=0$

즉, $b=\sqrt{3+a}$ 이를 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{3+a}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{3+a}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{3+a}}=\frac{1}{4}$

$\sqrt{3+a}=2,\ 3+a=4$

따라서 $a=1$이므로 $b=2$

$\therefore a+b=3$

155. 정답 ④

$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)$

$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+4)$

$=7$

$\therefore a=7$

156. 정답 26

$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x-2}=\frac{2}{5}$

$x\to2$일 때 (분모)→0이므로 $\frac{2}{5}$에 수렴하려면

(분자)→0이어야 한다. 즉, $\sqrt{4+a}-b=0$ $\quad\therefore b=\sqrt{4+a}$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}$

$=\frac{4}{2\sqrt{4+a}}=\frac{2}{\sqrt{4+a}}=\frac{2}{5}$

$\therefore \sqrt{4+a}=5$

$4+a=25$

$\therefore a=21,\ b=5$ $\quad\therefore a+b=26$

157. 정답 ③

$f(x)=(x-2)^2+a-4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 연속함수이다.

한편, $g(x)$를 간단히 하면 다음과 같다.

(i) $|x-b|>1$일 때 $g(x)=2$

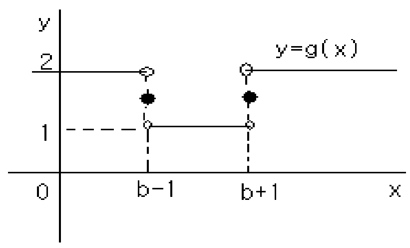
(ii) $|x-b|=1$일 때 $g(x)=\frac{3}{2}$

(iii) $|x-b|<1$일 때 $g(x)=1$

이때 $|x-b|=1$

$\Leftrightarrow x=b-1$ 또는 $x=b+1$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)$는 $x=b-1,\ x=b+1$일 때 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에 연속이 되려면

$f(b-1)=f(b+1)=0$

이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 대칭축의 방정식은

$x=2=b$ ⋯ ㉠

이고,

$f(3)=9-12+a=0$ ⋯ ㉡

이어야 한다.

㉠, ㉡에서

$a=3,\ b=2$

$\therefore a+b=5$

158. 정답 ④

(i) $a\neq0$인 경우

방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우는 판별식 D가 양수이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4$

$=2(a^2-3a+2)=2(a-1)(a-2)>0$

$\therefore\ a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$

또한, 중근(한 개의 실근)을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=2$

또한, 실근을 갖지 않을 조건은

$\frac{D}{4}=2(a-1)(a-2)<0$

$\therefore\ 1<a<2$

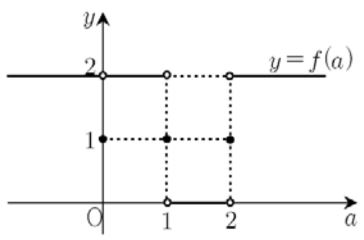
(ii) $a=0$인 경우

$-4x+2=0$이므로 실수 x는 $x=\frac{1}{2}$인 한 개다.

(i), (ii)에 의하여

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0 \text{ 또는 } 0<a<1,\ a>2)\\ 1 & (a=0,\ 1,\ 2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



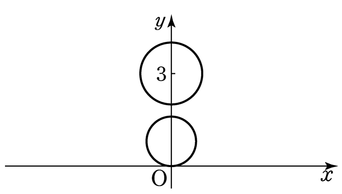
ㄱ. $\lim_{a\to0}f(a)=2$, $f(0)=1$이므로 $\lim_{a\to0}f(a)\neq f(0)$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{a\to c+0}f(a)\neq\lim_{a\to c-0}f(a)$인 c는 $c=1,\ c=2$이다. (참)

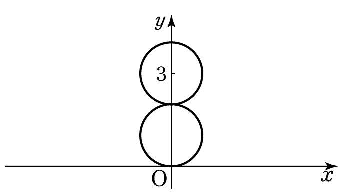
ㄷ. $a=0,\ 1,\ 2$에서 함수 $f(a)$가 불연속이다. (참)

159. 정답 ④

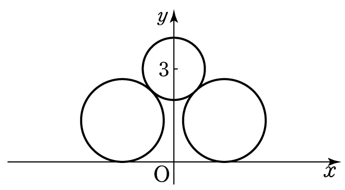
i) $0<r<1\Rightarrow f(r)=0$



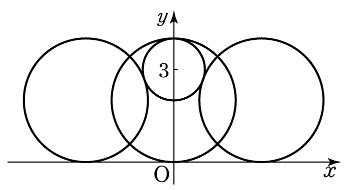
ii) $r=1\Rightarrow f(r)=1$



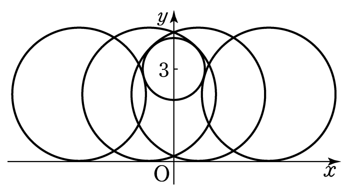
iii) $1<r<2\Rightarrow f(r)=2$



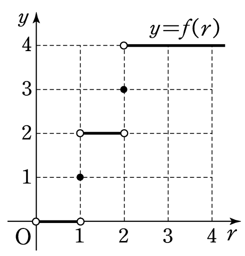
iv) $r=2\Rightarrow f(r)=3$



iv) $r>2\Rightarrow f(r)=4$



$$f(r)=\begin{cases}0 & (0<r<1)\\ 1 & (r=1)\\ 2 & (1<r<2)\\ 3 & (r=2)\\ 4 & (r>2)\end{cases}$$



그래프에서

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to1+0}f(r)=2\neq f(1)=1$

ㄷ. 그래프에서, 구간 $(0,\ 4)$에서 불연속점은 2개($r=1,\ 2$일 때)

160. 정답 ①

i) $\mathrm{F}(x)=xg_1(x)$라 하면 $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}|x| & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0}\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)=0$이므로 $\mathrm{F}(x)=xg_1(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_1=\mathrm{N}(g_1)=1$

ii) $\mathrm{F}(x)=xg_2(x)$라 하면 $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}-x^3+x & (x\neq0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0}\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)=0$이므로 $\mathrm{F}(x)=xg_2(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_2=\mathrm{N}(g_2)=1$

iii) $\mathrm{F}(x)=xg_3(x)$라 하면 $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 에서

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x)=$(발산)이므로 $\mathrm{F}(x)=xg_3(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

또, $\mathrm{F}(x)=x^2g_3(x)$라 하면 $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}1 & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x)=1\neq 0=\mathrm{F}(0)$이므로

$\mathrm{F}(x)=x^2g_3(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

$\mathrm{F}(x)=x^3g_3(x)$라 하면 $\mathrm{F}(x)=\begin{cases}x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(0)=0$이므로 $\mathrm{F}(x)=x^3g_3(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\therefore\ a_3=\mathrm{N}(g_3)=3$

$\therefore\ a_1=a_2<a_3$

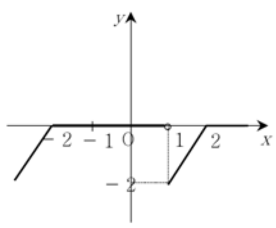
161.[정답] ②

[해설]

ㄱ.

$\lim\limits_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=-1+1=0$

$\therefore$ 참



ㄴ. $g(x)=f(x)-|f(x)|$라고 하면

$$g(x)=\begin{cases}2x+4 & (x\le -2)\\ 0 & (-2<x<1)\\ 2x-4 & (1\le x<2)\\ 0 & (x\ge 2)\end{cases}$$

따라서 $g(x)=f(x)-|f(x)|$는 $x=1$에서만 불연속이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $a=-1$일 때, $f(x)f(x-a)=f(x)f(x+1)$은 실수 전체에서 연속이다. $\therefore$ 거짓

162. 정답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to -0}f(x)=-1$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$는 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to +0}g(x)=\lim\limits_{x\to +0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to -0}g(x)=\lim\limits_{x\to -0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=-1+1=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ $\therefore$ 참

ㄷ. $g(1)=f(1)+f(-1)=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}\{f(x)+f(-x)\}$

$=1+(-1)=0$

$\therefore\ g(1)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$이므로, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다. $\therefore$ 참

163. 정답 ②

ㄱ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이므로

함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$는 모두 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 3-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to 1-0}f(t)=2$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 3-0}g(x)\neq\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq 4$이고 $f(x)\neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim\limits_{x\to 3-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to 2-0}f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 3-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim\limits_{x\to 4-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4-0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to +0}f(t)=3$

$\lim\limits_{x\to 4+0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4+0}(f\circ f)(x)$

$=\lim\limits_{t\to 1+0}f(t)=3$

$g(4)=f(f(4))=f(0)=3$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 4-0}g(x)=\lim\limits_{x\to 4+0}g(x)=g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq4$이고 $f(x)\neq4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$$

$$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)$$

$$=\lim_{t\to2-0}f(t)=4$$

$$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$$

$$\therefore \lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3+0}g(x)=g(3)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$$\lim_{x\to4-0}g(x)=\lim_{x\to4-0}(f\circ f)(x)$$

$$=\lim_{t\to+0}f(t)=2$$

$$\lim_{x\to4+0}g(x)=\lim_{x\to4+0}(f\circ f)(x)$$

$$=\lim_{t\to1+0}f(t)=3$$

$$\therefore \lim_{x\to4-0}g(x)\neq\lim_{x\to4+0}g(x)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다.

164. 정답 ④

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\dfrac{1}{\cos2\theta}-1}{\dfrac{1}{\cos\theta}-1}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1-\cos2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}\right)\text{이므로}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\cos2\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos2\theta}\right)=4$$

165. 정답 ②

내접원 반지름 $\overline{\mathrm{OH}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{DAE}=\pi-2\theta$

$\angle\mathrm{DOE}=2\theta$

$$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin2\theta$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)^2\cdot\sin2\theta}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}\left(\frac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{\theta}\right)^2\cdot\frac{\sin2\theta}{\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot2=\frac{1}{4}$$

166. 정답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{x}{\tan x}\cdot2\right)=2$$

167. 정답 ④

$x\to a$일 때 (분모)$\to3\sin0=0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

따라서 $2^a-1=0$이어야 하므로 $a=0$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{3\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2^x-1}{x}$$

$$=\frac{1}{3}\times1\times\ln2=b\ln2$$

$$\therefore b=\frac{1}{3}\qquad \therefore a+b=\frac{1}{3}$$

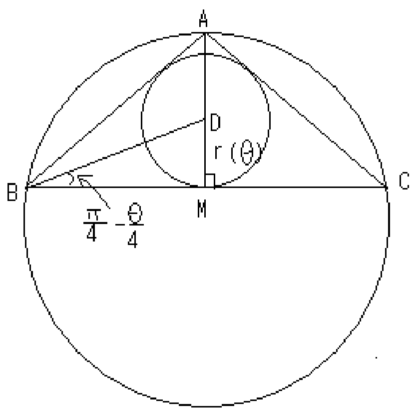
168. 정답 17

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=2\cdot1$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=2\sin\theta$

따라서 선분 BC의 중점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{BM}}=\sin\theta$ 이다.



또, 내접원의 중심을 D라고 하면 위 그림의 직각삼각형 BMD에서

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\frac{r(\theta)}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ r(\theta)=\sin\theta\times\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)$$

이때, $\pi-\theta=t$로 놓으면 $\theta\to\pi-0$일 때 $t\to+0$이고

$\sin\theta=\sin(\pi-t)=\sin t$,

$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{4}\right)=\tan\frac{t}{4}$ 이다.

∴ (주어진 식)

$$=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t\times\tan\frac{t}{4}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\times\lim_{t\to+0}\frac{\tan\frac{t}{4}}{\frac{t}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$$

∴ $p^2+q^2=16+1=17$

169. 정답 ④

$\angle\mathrm{PAO}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{POQ}=2\theta$이다.

△POQ에서

$$\tan2\theta=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1}=\overline{\mathrm{PQ}}$$

$\cos2\theta=\frac{1}{\overline{\mathrm{OQ}}}$ 에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\cos2\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan2\theta-\frac{1}{\cos2\theta}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sin2\theta-1}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos2\theta}$$

$\theta-\frac{\pi}{4}=t$라 하면

$$\sin2\theta=\sin2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=\cos2t$$

$$\cos2\theta=\cos2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=-\sin2t$$

이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to-0}\frac{\cos2t-1}{-t\sin2t}$$

$$=\lim_{t\to-0}\frac{\cos^2 2t-1}{-t\sin2t(\cos2t+1)}$$

$$=\lim_{t\to-0}\frac{-\sin^2 2t}{-t\sin2t(\cos2t+1)}$$

$$=\lim_{t\to-0}\frac{\sin2t}{2t\times\frac{1}{2}\times(\cos2t+1)}=1$$

170.[정답] 30

[해설]

점 P의 좌표를 $P(\cos\theta,\sin\theta)$라고 하면

$Q(\ln(\sin\theta+1),\sin\theta)$ $R(\ln(\sin\theta+1),0)$이고

이 때 직선 OP의 방정식은 $y=\tan\theta x$이므로 점 T의 좌표

$T(\ln(\sin\theta+1),\tan\theta\ln(\sin\theta+1))$이다.

따라서 삼각형 ORT의 넓이

$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}}{\theta}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to+0}\left[\ln(1+\sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}=a$$

$$\therefore 60a=60\times\frac{1}{2}=30$$

정답및 해설

1. 정답 ①

[출제의도] 평균변화율과 미분계수의 정의 이해하기

x의 값이 0부터 a까지 변할 때의 $f(x)$의 평균변화율은

$\dfrac{f(a)-f(0)}{a-0}=\dfrac{3a^2-2a}{a}=3a-2$

$x=1$에서의 미분계수 $f'(1)=4$이므로

$3a-2=4$

$\therefore\ a=2$

2. 정답: ②

[출제의도] 미분계수의 관계

$f(x)=x^3+x$에서 $f(2)=10$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-10}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$

$f'(x)=3x^2+1$에서

$f'(2)=13$

따라서 구하고자 하는 값은 13이다.

3. 정답 ②

$\dfrac{f(a)-f(-1)}{a+1}=\dfrac{a(a^2-1)}{a+1}=a(a-1)$

$f'(a)=3a^2-1$

$2a^2+a-1=0$ 의 한 근은 무연근 이므로 원소는 1개

4. 정답: 51

$\dfrac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}=n+1$에서 $f(n+1)-f(n)=n+1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 구간 $[1,100]$에서의 평균변화율은

$\dfrac{f(100)-f(1)}{100-1}$

$=\dfrac{\{f(100)-f(99)\}+\{f(99)-f(98)\}+\cdots+\{f(2)-f(1)\}}{99}$

$=\dfrac{100+99+\cdots+2}{99}=\dfrac{5049}{99}=51$

5. 정답 ④

ㄱ. $0>f'(a)>f'(b)$이고, $0<a<b$이므로,

$\dfrac{f'(a)}{b}>\dfrac{f'(b)}{b}>\dfrac{f'(b)}{a}$ (참)

ㄴ. $((a,f(a)),\ (b,f(b))$ 두 점을 지나는 직선의 기울기는 $x=b$에서 접선의 기울기보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0<a<b$에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, 개구간 (a,b)에서 접선의 기울기는 점점 감소하므로

$f'(\sqrt{ab})>f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ (참)

6. 정답: 12

[출제의도] 미분계수의 뜻을 알고 문제해결하기

극한값이 존재하기 위해서는 삼차함수 $f(x)$는

$f(x)=(ax+b)(x-2)^2$이어야 한다.

$f(3)=5$로부터 $f(3)=3a+b=5$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(ax+b)(x-2)^2}{(x-2)^2}=2a+b=3$이다.

연립하면 $a=2,\ b=-1$이므로

$f(x)=(2x-1)(x-2)^2$이므로

$f'(x)=2(x-2)^2+2(2x-1)(x-2)$

$f'(3)=12$

7. 정답 36

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수 구하기

$\dfrac{1}{n}=h$라 하면

준식$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+3h)-f(1-h)}{h}=3f'(1)+f'(1)=4f'(1)=36$

8. 정답 14

$f'(2)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h^3+6h^2+14h}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}(h^2+6h+14)=14$

9. 정답 12

[출제의도] 미분계수의 정의를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+kh)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(1+kh)^2-5(1+kh)+6-(1-5+6)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{k^2h^2-3kh}{h}=\lim\limits_{h\to0}(k^2h-3k)=-3k=-36$

$\therefore\ k=12$

10. 정답 25

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)+f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)\right\}}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}+\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{3}{n}\right)-f(1)}{\frac{3}{n}}+2\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)-f\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$$

$=3f'(1)+2f'(1)=5f'(1)=25$

($\because$ $f'(x)=8x^3-3$에서 $f'(1)=5$)

11. 정답 17

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)$$

$f'(x)=3x^2+5$

$\therefore f'(2)=17$

12. 정답 ⑤

$f'(1)=9,\ g'(1)=12$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-g(1-h)}{3h}=\frac{2}{3}f'(1)+\frac{1}{3}g'(1)=10$$

13. 정답 ①

[해설] $f'(x)=4x^3+2x$ 이고 $f'(1)=6$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\quad=f'(1)\cdot\frac{1}{2}=3$$

14. 정답 ①

y축 대칭이므로 $f(x)=f(-x)$이다.

양변을 미분하면 $f'(x)=-f'(-x)$

$\therefore$ $f'(-2)=3,\ f'(-4)=-6$

$$\text{준식)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-(-2)}{f(x)-f(-2)}\times\frac{f(x^2)-f(4)}{x-(-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}\times(x-2)$$

$$=\frac{f(4)}{f'(-2)}\times(-4)=-8$$

15. 정답 ⑤

[해설] $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=3$ 에서 $f(2)=0,\ f'(2)=3$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 에서 $f(0)=0,\ f'(0)=2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(f(x))-f(f(2))}{f(x)-f(2)}\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$=f'(f(2))\cdot f'(2)$

$=f'(0)\cdot f'(2)=2\cdot 3=6$

16. 정답 21

각 구간에서 $f(x)$를 구하면

(ⅰ) $0<x<1$: $f(x)=2x-1$

(ⅱ) $x=1$: $f(1)=\dfrac{a+1}{2}$

(ⅲ) $x>1$: $f(x)=ax^b$

$x=1$에서 미분 가능하므로

a) 연속조건 : $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$

$\therefore$ $a=1$

b) 미분가능조건 : $f'(x)=\begin{cases}2 & (x<1)\\ abx^{b-1} & (x>1)\end{cases}$

$\therefore$ $2=ab$

a)와 b) 에서 $a=1,\ b=2$

$\therefore$ $a+10b=1+20=21$

17. 정답:⑤

[출제의도] 미분계수의 극한값 이해하기

ㄱ. (반례) $f(x)=x^2-x,\ f'(x)=2x-1$

$f(0)=0,\ f'(0)=-1$ [거짓]

ㄴ. $\displaystyle g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to 0}\frac{g(-x-h)-g(-x)}{-h}\times(-1)$

$=-g'(-x)$

이므로$x=0$을 대입하면 $g'(0)=-g'(0)$

$\therefore g'(0)=0$ [참]

ㄷ. $|h(2x)-h(x)|\leq x^2=|x|^2$

$x\neq 0$일 때 $\left|\dfrac{h(2x)-h(x)}{x}\right|\leq|x|$

$\therefore -|x|\leq\dfrac{h(2x)-h(x)}{x}\leq|x|$

$\displaystyle\therefore \lim_{x\to 0}(-|x|)\leq\lim_{x\to 0}\frac{h(2x)-h(x)}{x}\leq\lim_{x\to 0}|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(2x)-h(x)}{x}=h'(0)=0$ [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

18. 정답:⑤

[출제의도] 미분계수의 뜻을 알고 문제해결하기

$f(x)=x(4x^2+5)=4x^3+5x$에서

$f'(x)=12x^2+5$

$\therefore f'(1)=17$

19. 정답 ③

[출제의도] 곱의 미분법으로 미분계수 구하기

$f'(x)=(4x-3)(x^2-x+2)+(2x^2-3x)(2x-1)$ 이므로

$f'(2)=26$

20. 정답:67

$f(x)=(2x^2-1)(x^2+x-2)$ 에서

$f'(x)=4x(x^2+x-2)+(2x^2-1)(2x+1)$

$\therefore\ f'(2)=32+35=67$

21. 정답 ⑤

[출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\left(2+h\sin\frac{1}{h}\right)=2$$

22. 정답 26

$f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)+(x-1)(x-2)$이므로

$f'(5)=26$

23. 정답:19

$f'(x)=(3x^2+3)(x^2-2x+3)+(x^3+3x+1)(2x-2)$

$\therefore f'(1)=19$

24. 정답 ⑤

$f(x)=x(4x^2+5)$에서 $f(x)=4x^3+5x$

$f'(x)=12x^2+5$

$\therefore\ f'(1)=12+5=17$

25. 정답 ④

[출제의도] 등비수열의 합을 이용하여 미분계수 계산하기

$f(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{10}}{10}$ 이므로

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^9$ 이다.

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}=\frac{1-\frac{1}{2^{10}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$$

$\therefore\ q-p=1023-512=511$

26. 정답 28

$f(x)=(2x^3+1)(x-1)^2$

$f'(x)=6x^2(x-1)^2+2(x-1)(2x^3+1)$

$\therefore\ f'(-1)=28$

27. 정답: ①

28. [정답] 25

[해설] [출제의도] 함수의 극한의 정의를 이용하여 주어진 함수의 계수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)}{h}=5$ 에서 $f(0)=0$이고 $2f'(0)=5$이므로

$b=0,\ a=\frac{5}{2}$이다.

29. 정답 ③

$f(x)=x^{\ln x}$에서 $\ln f(x)=(\ln x)^2$

양변을 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x}\ln x$이다.

따라서 $f'(x)=f(x)(\frac{2}{x}\ln x)=x^{\ln x}(\frac{2}{x}\ln x)$

$\therefore\ \ f'(e)=2$이다.

30. 정답:①

[출제의도] 합성함수의 미분을 계산할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(f(1))=1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(f(x))-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$$

$=f''(f(1))f'(1)=f''(2)\cdot3=3$

$\therefore\ f''(2)=1$

31. 정답 ③

$y=\cos^n x$

$y'=n\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$

$y''=n(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)\cdot(-\sin x)-n\cos^{n-1}x\cdot\cos x$

$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2x-\cos^2x\}$

변곡점을 찾기 위해 $y''=0$ 으로 놓으면

$(n-1)\sin^2x-\cos^2x=0$

($\because\ 0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos^{n-2}x\neq 0$)

$\therefore\ \tan^2x=\frac{1}{n-1}$

이를 만족하는 x를 α라 하면

$\tan^2\alpha=\frac{1}{n-1}$, 여기서 $\tan^2\alpha=\sec^2\alpha-1$ 이므로

$\sec^2\alpha=\frac{n}{n-1}$ 즉, $\cos^2\alpha=1-\frac{1}{n}$

변곡점의 y좌표 $a_n=\cos^n\alpha=(\cos^2\alpha)^{\frac{n}{2}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

32. 정답:①

[출제의도] 접선의 기하학적 의미를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{a\to 0}\tan\theta$는 곡선 $f(x)=2^x-1$ 위의 원점에서 그은 접선의 기울기이다.

$f'(x)=2^x\ln 2$ 이므로 $a=f'(0)=2^0\ln 2=\ln 2$

33.정답: ①

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ ……………………………(i)

$y=g(x)$ 에서, $x=f(y)=\ln(e^y-1)$ $\therefore e^y-1=e^x$

$g'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{e^y-1}{e^y}=\frac{e^x}{e^x+1}$ …………………(ii)

(i), (ii) 에 의해

$$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}=2$$

34. 정답:⑤

[출제의도] 원점대칭과 y축 대칭인 함수의 성질 이해하기

$h(x)=f(x)+xg(x)$ 에서

$h(-x)=f(-x)-xg(-x)$

$=-f(x)-xg(x)$

$=-(f(x)+xg(x))$

$=-h(x)$

ㄱ. $h(x)$는 원점 대칭이므로 $h(0)=0$ (참)

ㄴ. $h(-x)=-h(x)$을 미분하면

$-h'(-x)=-h'(x)$

$h'(-x)=h'(x)$ (참)

ㄷ. $h''(-x)=-h''(x)$ 이므로 $h''(x)$는 원점대칭, $h''(x)$가 $x=1$에서 극댓값 1을 가지면 $x=-1$에서 극솟값 -1을 가진다.

따라서 $h''(x)-x=0$는 적어도 3개의 실근을 가진다. (참)

35. 정답:④

[출제의도] 로그미분법을 이용하여 함수의 증가·감소를 알아낼 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ ($x>0$)의 양변에 로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln x$

양변을 미분하면 $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$\therefore\ f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$

따라서 $x>e$ 일 때 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$는 감소한다. ……(가)

$\therefore\ f(2004)>f(2005)$ ……(나)

$\therefore\ 2004^{2005}>2005^{2004}$ ……(다)

36. 정답: ③

[출제의도] 삼각함수의 합성과 미분을 이용하여 그래프의 성질 추론하기

$t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$라 놓으면

$-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$

$g(t)=\frac{t}{t-2}=1+\frac{2}{t-2}$

ㄱ. $t=\sqrt{2}$일 때, 최솟값 $-1-\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. $x=\frac{\pi}{4}$일 때, $t=\sqrt{2}$에서 최솟값 (거짓)

ㄷ. $f(x)=1+\frac{2}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2}$ 이다.

$f'(x)=-\frac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2\right)^2}$ 이므로

$x=2n\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)에서 극솟값을 갖고

$x=2n\pi+\frac{5}{4}\pi$ (n은 정수)에서 극댓값을 갖는다.(참)

37. 정답 ③

$f'(x)=a\cos x+b=0$ 에서 $f'(x)$ 의

최대값과 최소값의 부호가 달라야 하므로

$(a+b)(-a+b)=-a^2+b^2<0$

$\therefore\ a^2>b^2$

38. 정답:②

[해설] ㄱ. $f(x)$는 미분가능하므로 연속함수이다.

$f(-1)=-1,\ f(0)=1$이므로 중간값의 정리에 의하여

$f(c_1)=\dfrac{1}{2}$인 실수 c_1이 구간 $(-1,0)$에 적어도 한 개 존재한다.

또한, $f(0)=1,\ f(1)=0$이므로

$f(c_2)=\dfrac{1}{2}$인 실수 c_2가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다.

따라서, $f(a)=\dfrac{1}{2}$인 실수 a가 구간 $(-1,1)$에 적어도 두 개 존재한다. (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)+x$로 놓으면

$f(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

$g(0)=f(0)+0=1+0=1$

$g(1)=f(1)+1=0+1=1$

이므로 롤의 정리에 의하여

$g'(b)=0$인 실수 b가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다.

$g'(x)=f'(x)+1$이므로

$g'(b)=f'(b)+1=0$에서 $f'(b)=-1$

따라서, $f'(b)=-1$인 실수 b가 구간 $(0,1)$에 적어도 한 개 존재한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$이면

$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=0$이지만

$f'(x)=-3x+\dfrac{1}{2}$

$f''(x)=-3$이므로

$f''(c)=0$인 실수 c는 존재하지 않는다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[별해]

ㄱ. $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$에서

$F(-1)=f(-1)-\dfrac{1}{2}=-1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}<0$

$F(0)=f(0)-\dfrac{1}{2}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$

$F(1)=f(1)-\dfrac{1}{2}=0-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$이므로

중간값 정리에 의해 구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 각각 적어도 하나씩 근이 존재한다. ∴ 참

ㄴ. $f(x)$는 $[0,\ 1]$에서 연속 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능

평균값 정리에 의해

$\therefore\ \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(b)$인 (즉 $f'(b)=-1$인)

b가 구간 $(0,\ 1)$ 사이에 적어도 하나 존재한다.

∴ 참

ㄷ. (반례) $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1$이면

$f(-1)=-1,\ f(0)=1,\ f(1)=0$을 만족한다.

$f'(x)=-3x+\dfrac{1}{2}$

$f(x)=-3$이므로 $f(c)=0$인 c는

$(-1,\ 1)$에서 존재하지 않는다. ∴ 거짓

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

39. 정답 ⑤

[출제의도] 도함수와 운동하는 물체 사이의 관계를 파악할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $t=a_3,\ a_9$에서 원점을 지난다. ∴ 참

ㄴ. $x'(t)$의 부호가 바뀌는 시각은 $t=a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8$로 운동방향은 4번 바뀐다. ∴ 참

ㄷ. 속도 $x'(t)$가 증가하려면 $x''(t)>0$이어야 한다.

따라서 속도가 증가하는 구간은

$(a_1,\ a_2),\ (a_2,\ a_3),\ (a_5,\ a_6),\ (a_6,\ a_7),\ (a_9,\ a_{10})$

이므로 구하는 구간의 개수는 5개다. ∴ 참

40. 정답 : ①

[출제의도] 미분법을 활용하여 시각에 대한 변화율을 해결할 수 있는가를 묻는 문제이다.

선분 BC의 길이를 $x\,(km)$, 선분 AC의 길이를 $y\,(km)$라 하자. 제 2 코사인법칙으로부터

$y^2=x^2+3^2-2x\cdot 3\cdot \sin 120^\circ=x^2+3x+9\cdots$ ①

한편 점 C를 통과하는 순간에

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times 3\times x\times \sin 120^\circ=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$

에서 $x=5$이므로 $y=7$이다.

①의 양변을 t에 관해서 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dt}=2x\dfrac{dx}{dt}+3\dfrac{dx}{dt}\cdots$ ②

이고 조건에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{28}{13}\,(km/h)$, $x=5,\ y=7$을 식 ②에 대입하면

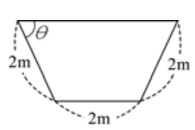
$\dfrac{dy}{dt}=2\,(km/h)$

가 된다.

41. 정답:②

[출제의도] 미분을 활용하여 실생활 문제를 해결 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[해설]



사다리꼴의 윗변과 등변이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면

높이는 $2\sin\theta$, 윗변의 길이는

$2\times2\cos\theta+2$ 이므로 사다리꼴의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\times2\sin\theta=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$S'(\theta)=4(-\sin\theta)\sin\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)=4(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

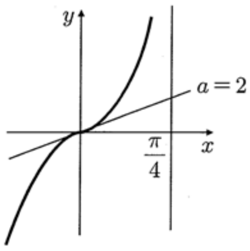
$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, 극대이면서 최대이다. 따라서

단면의 최대 넓이는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $3\sqrt{3}$이다

42. 정답: ④

[출제의도] 부등식의 응용

$y=\tan x$의 원점에서의 접선의 기울기는



$y'=2\sec^2 2x$에서

$y'_{x=0}=2\sec^2 0=2$

$0<x<\frac{\pi}{4}$인 모든 x에 대

하여 부등식 $\tan 2x>ax$가

성립하려면 오른쪽 그림에서

$a\leq2$이어야 한다.

따라서 구하는 a의 최대값은 2이다.

43. 정답:⑤

[출제의도] 미분계수의 의미를 알고 계산하기

$x_n=\alpha+(n-1)d$라 두면 $f'(x)=2ax+b$ 이므로

ㄱ. $f'(x_n)=2ax_n+b=2a(\alpha+(n-1)d)+b$

$=2a(n-1)d+2a\alpha+b$이

n관한 일차식이므로 등차수열이다.[참]

ㄴ. $f(x_{n+1})-f(x_n)=a(x_{n+1})^2$

$+bx_{n+1}+c-a(x_n)^2-bx_n-c$

$=(x_{n+1}-x_n)(ax_{n+1}+ax_n+b)$

$=d(a(\alpha+nd)+a(\alpha+(n-1)d+b))$

$=2d^2n+2ad\alpha-d^2+db$이므로등차수열이다.[참]

ㄷ. $f(0)=3$에서 $c=3$이고 $f(2)=5,\ f(4)=9$

$2a+b=1,\ 8a+2b=3$에서

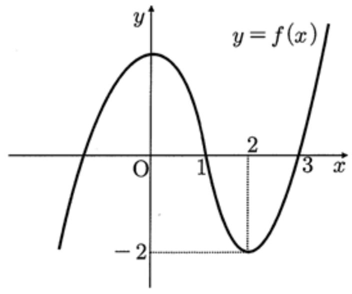
$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{2}$이다.

$f(6)=9+3+3=15$가 된다.[참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

44. 정답:④

[출제의도] 미분계수의 기하학적 의미를 알고 계산



$y=f(x)$의 그래프에서

$f(1)=0,\ f'(1)<0$

$f(2)<0,\ f'(2)=0$

$f(3)=0,\ f'(3)>0$

또한 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+1\cdot f'(1)<0$

$g'(2)=f(2)+2\cdot f'(2)<0$

$g'(3)=f(3)+3\cdot f'(3)>0$

ㄱ. $f(1)+g'(1)=g'(1)<0$ [거짓]

ㄴ. $g(2)g'(2)>0$ [참]

ㄷ. $f(3)+g'(3)>0$이다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄴ. ㄷ이다.

45. 정답: ④

ㄱ. (참) $f'(x)=6x^2+6x$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2+6n}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{6}\cdot1=\frac{1}{6}$

ㄴ. (거짓) 【반례】 $f(x)=x$ 일 때

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$ 이지만

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}1=1+1+1+\ldots=\infty$ 이므로 수렴하지 않는다.

ㄷ. (참) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f'(n)}$ 이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f'(n)}=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}f'(n)=\infty$

즉, $x\to\infty$ 일 때 $f'(x)$는 발산한다.

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

46. 정답:③

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=p(x-3)^2+q$ (단, $p\neq0$)로 놓으면

ㄱ. $f(-1)=f(7)$

$\therefore\ \dfrac{f(7)-f(-1)}{7-(-1)}=0$ (참)

ㄴ. $f'(x)=2p(x-3)$ 이고 $a+b=6$ 에서 $b=6-a$ 이므로

$f'(a)=2p(a-3)\qquad f'(b)=f'(6-a)=-2p(a-3)$

$\therefore\ f'(a)+f'(b)=0$ (참)

ㄷ. ㄴ에 의해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} f'(k-3)$

$=f'(-2)+f'(-1)+f'(0)+\cdots+f'(12)$

$=\{f'(-2)+f'(8)\}+\{f'(-1)+f'(7)\}$

$+\{f'(0)+f'(6)\}+\{f'(1)+f'(5)\}$

$+\{f'(2)+f'(4)\}+f'(3)$

$+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=0+0+0+0+0+0$

$+f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=f'(9)+f'(10)+f'(11)+f'(12)$

$=2p(9-3)+2p(10-3)$

$+2p(11-3)+2p(12-3)=60p\neq 0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

47. 정답 ③

ㄱ. 함수 $f(x)$의 x절편을 $a,b(a<0,\ b>0)$라 하자.

$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{a}x+1, & x\leq 0\\ -\dfrac{1}{b}x+1, & x>0\end{cases}$ 로 정의된다.

$x<0$일 때, $f'(x)=-\dfrac{1}{a}$이다.

$a<0$이므로 $f'(x)=-\dfrac{1}{a}>0$가 된다.

$\therefore\ x<0$일 때, $f'(x)>0$이다. (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{a}>0$이고

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{b}<0$이다.

$f(x)$는 $x=0$에서 극한값이 존재하지 않는다.

$\therefore$함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. $f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+xf(x)}-\dfrac{1}{1}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-xf(x)}{x(1+xf(x))}$

$=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{-f(x)}{1+xf(x)}=-f(0)=-1$이 된다.

$\therefore$ 함수 $y=\dfrac{1}{1+xf(x)}$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

48. 정답 ⑤

ㄱ. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)=0$이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능이고 연속이다.

$\therefore\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)\qquad\therefore$ 참

ㄴ. $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=0$이다.

$\therefore\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-2h}\right)=0\qquad\therefore$ 참

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0\qquad\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

49. 정답 13

$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$ 이므로

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+2)t^2+at\}$

$=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(x-t)$

$x=0$일 때 $y=g(t)$이므로

$g(t)-\{t^3-(a+2)t^2+at\}$

$=\{3t^2-2(a+2)t+a\}(-t)$

$\therefore\ g(t)=-2t^3+(a+2)t^2$

$g'(t)=-6t^2+2(a+2)t$ 이므로

이차함수 $g'(t)$가

$0<t<5$에서 $g'(t)>0$ 이려면

$g'(0)\geqq 0$, $g'(5)\geqq 0$ 이어야 한다.

$g'(0)=0$ 이고,

$g'(5)=-150+10(a+2)\geqq 0$ 이므로

$a\geqq 13$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 13이다.

50. 정답: ②

함수 $f(x)=\begin{cases}x^3+ax^2+bx & (x\geq 1)\\ 2x^2+1 & (x<1)\end{cases}$이 모든 실수 x에서

미분가능하려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

즉, $2+1=1+a+b$

$\therefore\ a+b=2\qquad$ ㉠

$x=1$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+2ax+b & (x>1)\\ 4x & (x<1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1-0} f'(x) = \lim_{x\to1+0} f'(x)$이어야 한다.

즉, $3+2a+b=4$

$\therefore$ $2a+b=1$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=3$

$\therefore$ $ab=-3$

51. 정답:②

ㄱ. $\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=1$,

$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=-1$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=0$에서 연속이고,

$\lim_{h\to+0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=2$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

52. 정답 36]

[출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성의 개념 이해하기

$f(x)$가 $x=3$ 에서 연속이므로,

$-\frac{1}{2}(3-a)^2+b=9$ ⋯ ①

또한 $f'(x)=\begin{cases}2x & (x\leq3)\\ -x+a & (x>3)\end{cases}$

$f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로 $a=9$ ⋯ ②

①, ② 에 의하여

$a=9$, $b=27$

$\therefore$ $a+b=36$

53. 정답 ③

[해설] 접점을 $Q(t, 1+\ln t)$라 하면, 접선 l의 방정식은 다음과 같다.

$l: y=\frac{1}{t}(x-t)+1+\ln t=\frac{1}{t}x+\ln t$

따라서 두 점 P, R의 좌표는 $P(0, \ln t)$, $R(0, 1+\ln t)$이다.

ㄱ. $\overline{PR}=(1+\ln t)-\ln t=1$ (참)

ㄴ. $a=-t\ln t$에서 $a\to-0$이면, $t\to1+0$이므로

$\lim_{a\to-0}S(a)=\lim_{t\to1+0}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$이다. (참)

ㄷ. $a=-t\ln t$에서 $a\to-\infty$이면 $t\to+\infty$이므로

$\lim_{a\to-\infty}\frac{S(a)}{a}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{t}{2}}{-t\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{-1}{2\ln t}=0$이다. (거짓)

54. 정답 ③

(가) $\boxed{0}$

(나) $\boxed{-|k|}$

(다) $\boxed{\text{미분가능하다.}}$

55. 정답 15

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-a}{x-2}=4$에서 (분모)가 0에 가까워지므로

$f(2)-a=0$에서 $f(2)=a$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=4$

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+bx+3$

$x=2$일 때, $f(2)=2b+3=a$

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+b$

여기에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=b$

$\therefore a=11$, $b=4$

56. 정답:⑤

$f(x)=(x^2-1)(2x+1)$ 에서

$f'(x)=2x(2x+1)+2(x^2-1)$ 이므로 $f'(1)=2\times3=6$

57. 정답: ②

미분계수를 이해하고 이를 이용하여 극한값 구하기

$y=f(x)$의 그래프 위의 한 점 P(2, 1)에서의 접선의 방정식이 $y=3x-5$이므로 $f'(2)=3$이다.

$\frac{1}{3n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$이면 $h\to0$이므로

(준식)$=\frac{1}{6}\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{1}{6}f'(2)=\frac{1}{2}$

58. 정답 ①

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-2}{x-2}=-3$에서 (분모)가 0으로 가까워지므로

$f(2)-2=0$에서 $f(2)=2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=-3$

$g(x)=(x-1)^2$에서 $g'(x)=2(x-1)$이므로

$g(2)=1$, $g'(2)=2$

$x=2$일 때 $y=f(x)g(x)$에서의 접선의 기울기는

$y'_{x=2}=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=1$

따라서 기울기가 1이다.

59. 정답 ②

[출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$F'(x)=f(x)$ 이므로

$\int f(x)dx=F(x)+C$ 이다.

따라서 $A(a, F(a))$, $B(a+c, F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기는

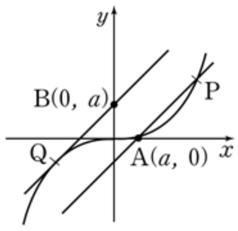
$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a}=\frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$

$=\frac{1}{c}\int_a^{a+c} f(x)dx$

$=\frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$

60. 정답 20



$y=3x^3$은 기함수이므로 같은 기울기를 가지는 접점 P, Q는 원점 대칭이므로

$P(t, 3t^3)$이면 $Q(-t, -3t^3)$이다.

점 P에서의 접선의 방정식은

$y=9t^2(x-t)+3t^3=9t^2x-6t^3$ ······ ㉠

㉠이 점 $A(a, 0)$을 지나므로

$0=9t^2a-6t^3$ ······ ㉡

점 Q에서의 접선의 방정식은

$y=9t^2(x+t)-3t^3=9t^2x+6t^3$ ······ ㉢

㉢이 점 $B(0, a)$를 지나므로 $a=6t^3$ ······ ㉣

㉡, ㉣에서 $9t^2=1$ $\therefore t=\frac{1}{3}$

$a=6\times\frac{1}{27}=\frac{2}{9}$ $\therefore 90a=90\times\frac{1}{9}=20$

61. 정답: 20

[출제의도] 접선과 직선의 거리에 관한 극한 정리

점 $P(t, t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-t^3=3t^2(x-t)$

$3t^2x-y-2t^3=0$

이 직선에서 원점까지의 거리 $f(t)$는

$f(t)=\frac{|-2t^3|}{\sqrt{(3t^2)^2+(-1)^2}}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{\sqrt{9t^4+1}}=\frac{2}{3}$

$\alpha=\frac{2}{3}$이므로 $30\alpha=20$

62. 정답 ③

$P(1, 0)$에서 법선의 방정식을 구하면 $f'(1)=a+1$이므로

$y=-\frac{1}{a+1}(x-1)$ (단, $a\neq-1$)······ ㉠

($\because$ $f'(1)=0$이면 법선이 x축에 수직이 되어 부적합)

㉠과 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나므로

$x(x-1)(ax+1)=-\frac{1}{a+1}(x-1)$

이것이 서로 다른 세 실근을 갖는다.

$(x-1)\left\{x(ax+1)+\frac{1}{a+1}\right\}=0$

$ax^2+x+\frac{1}{a+1}=0$이 $x=1$인 근을 갖지 않으므로,

서로 다른 두 실근을 가지면 된다.

$a(a+1)x^2+(a+1)x+1=0$

$D=(a+1)^2-4a(a+1)>0$

$(a+1)(3a-1)<0$

$\therefore$ $-1<a<\frac{1}{3}$

이때 $a\neq0$ 이므로

$-1<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$

63. 정답 12

[출제의도] 도함수를 활용하여 극값과 접선의 방정식의 성질 이해하기

$f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4+C$ 에서 $M=f(1)=C$

$f'(0)=-1$, $f'(2)=1$

$x=0$에서의 접선은 $y=-x+\frac{1}{4}+C$

$x=2$에서의 접선은 $y=(x-2)+\frac{1}{4}+C$

$-x+\frac{1}{4}+C=x-2+\frac{1}{4}+C$ 에서 $x=1$이므로 $N=C-\frac{3}{4}$

$\therefore 16(M-N)=12$

64. 정답 ②

$y'_{x=2}=2x_{x=-2}=-4$이므로

접선의 방정식은 $y=-4(x+2)+4$

$\therefore$ $y=-4x-4$····· ㉠

직선 ㉠과 삼차함수 $y=x^2+ax-2$의 교점의 x좌표를 t라고 하면

$t^3+at-2=-4t-4$ ····· ㉡

$3t^2+a=-4$ ····· ㉢을 만족해야 한다.

㉡과 ㉢을 연립하면

$t^3+(-3t^2)t+2=0$ ($\because$ $a+4=-3t^2$)

$\therefore$ $t^3=1$ $\therefore$ $t=1$

$\therefore\ a=-3-4=-7$

65. 정답 28

점 $P(a, -6)$는 $y=x^3+2$ 위의 점이므로 $a=-2$

점 $P(-2, -6)$에서의 접선의 기울기 $m=12$

접선의 방정식은 $y=12x+18$

$\therefore a=-2,\ m=12,\ n=18$

$a+m+n=28$

66. 정답: 42

[출제의도] 함수의 극대 극소 구하기

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)=0$

$x=1$에서 극대값 $\mathrm{M}=f(1)=7$

$x=2$에서 극소값 $m=f(2)=6$

따라서, $\mathrm{M}m=7\times6=42$

67. 정답: 24

[출제의도] 극대값 이해하기

$f(x)=x^3+ax^2+9x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

$f(1)=0,\ f'(1)=0$에서

$1+a+9+b=0,\ 3+2a+9=0$

$\therefore a=-6,\ b=-4$

$\therefore ab=24$

68. 정답: 16

$f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면 $f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore\ f(0)=0$ …㉠

$f'(0)=8$ 이므로

$f'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}(\because ㉠)=8$ …㉡

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)-f(-h)+x\cdot(-h)(x+h)-f(x)}{h}$ $(\because(가))$

$=\lim_{h\to0}\left\{\dfrac{f(-h)}{-h}-x^2-xh\right\}=8-x^2(\because ㉡)$

$=(2\sqrt{2}+x)(2\sqrt{2}-x)$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대값을 갖고 $x=b$에서 극소값을 가지므로 $a=2\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=8+8=16$

69. 정답 32

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 정수)에서

기함수 조건($\because$ (가)) 때문에 $b=d=0$

따라서 $f(x)=ax^3+cx$이다.

(나)에서 $f(1)=a+c=5$㉠

또한 (다)에서 $1<3a+c<7$

㉠에서 $c=5-a$로 두면 $1<3a+5-a<7$

$-2<a<1$

$\therefore$ 정수 a는 -1과 0인데 삼차함수이므로 $a=-1$

또한, $c=6$

$\therefore\ f(x)=-x^3+6x$

미분하면 $f'(x)=-3x^2+6=0$

$x=\sqrt{2}$에서 극댓값을 가지므로

$m^2=\{f(\sqrt{2})\}^2=(4\sqrt{2})^2=32$

70. 정답 16

[출제의도] 도함수를 활용하여 극솟값 계산하기

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$ 이므로

$x=2$에서 극솟값 $f(2)=16$을 가진다.

71. 정답 ①

[출제의도] 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)=ax^3+bx$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+b=3a\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\ \therefore b=-\dfrac{3a}{4}$

$f(x)=ax^3-\dfrac{3a}{4}x=ax\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로

$\triangle\mathrm{ACB}=\dfrac{1}{2}\square\mathrm{ADBC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times(극댓값)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

따라서 극댓값은 1이다.

72. 정답 24

[출제의도] 삼차함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)=0$에서 $x=-2,\ 0$

$f(-1)=12,\ f(0)=10,\ f(1)=14$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $14+10=24$이다.

73. 정답 ②

[출제의도] 삼차함수의 극값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -1, $x=1$에서 극댓값 3을 갖는다.

따라서 구하는 직선의 기울기는 2이다.

74. 정답: ③

[출제의도] 극값이 존재하지 않을 조건

$f'(x)=3x^2+2(a-1)x+(a-1)$에서 극값을 갖지 않으므로 허근 및 중근을 가질 조건이다.

$\mathrm{D}/4=(a-1)^2-3(a-1)\le0$

$=a^2-5a+4 \leqq 0$
$\therefore 1 \leqq a \leqq 4$

75. 정답 ①
(ⅰ) $a=0$이면 $f(x)=-(b-1)x^2+2x-1$이고
이때 $b=1$이면 극값을 갖지 않는다. $\therefore (0,\ 1)$
(ⅱ) $a \neq 0$이면
$f'(x)=ax^2-2(b-1)x-(a-2)$이고
$\dfrac{D}{4}=(b-1)^2+a(a-2) \leqq 0$이다.
$(a-1)^2+(b-1)^2 \leqq 1$ (단, $(0,\ 1)$은 제외)
따라서 원의 넓이는 π이다.

76. 정답: ③
[출제의도] [그래프의 이해]

기함수 :	그래프는 원점에 대칭 지수가 홀수차 만으로 이루어짐
우함수 :	그래프는 y축에 대칭 지수가 짝수차 만으로 이루어짐

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면
기함수이므로 $b=0,\ d=0$이므로
$g(x)=ax^2+c$이므로 y축에 대하여 대칭이다.[참]

ㄴ. $f(x)$가 $x=-1$과 $x=1$에서 극값을 가지므로
$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이 $-1,\ 1$이므로 $b=0,\ c=-3a$이다.
따라서 $g(x)=ax^2+bx+c=ax^2-3a$이므로
$g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. [참]

ㄷ. (반례) $f(x)=x^3,\ g(x)=x^2$ x축과 한 점에서 만난다. [거짓]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

77. 정답 ⑤
ㄱ. [반례] $f(x)=-x^2$ (거짓)
$x=0$에서 $y=f(x)$가 극댓값을 충분히 작은 양수 h에 대하여 $f'(-h)>0,\ f'(h)<0$임을 알 수 있다.
ㄴ. $f(|x|)=\begin{cases} f(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x \geqq 0) \end{cases}$
$f'(|x|)=\begin{cases} -f'(-x) & (x<0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$
$x=-h$일 때, $=-f'(-(-h))=-f'(h)>0$
$x=h$ 일 때, $f'(h)<0$
따라서, $x=0$에서 극대 (참)

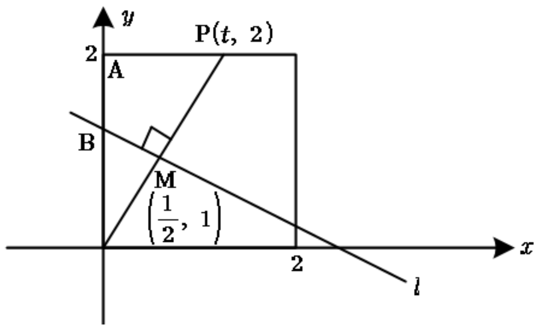
ㄷ. $g(x)=f_{(x)}-x^2|x|$ 라고 하면
$g(x)=\begin{cases} f(x)+x^3 & (x<0) \\ f(x)-x^2 & (x \geqq 0) \end{cases}$, $g'(x)=\begin{cases} f'(x)+3x^2 & (x<0) \\ f'(x)-3x^2 & (x>0) \end{cases}$
$g'(-h)=f'(-h)+3h^2>0$
$g'(h)=f'(h)-3h^2<0$
따라서 $x=0$에서 극대 (참)

78. 정답 12
$f'(x)=3x^2-3=0 \quad \therefore x=\pm 1$
$f(-1)=0,\quad f(1)=-4,\quad f(x)=16$
그러므로 최댓값과 최솟값의 합은 12

79. 정답 ④
[출제의도] 미분을 이용하여 역함수의 성질 이해하기
역함수는 $y=x$ 대하여 대칭이므로
함수 $f(x)=\ln\dfrac{x}{k}$ 의 접선 중 기울기가 1 인 접선에서
$y=x$ 까지 거리의 두 배가 l_k 이다.
$f'(x)=1$ 인 접점의 좌표는 $(1,\ \ln\dfrac{1}{k})$ 이다.
$$d=\frac{\left|1-\ln\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1+\ln k}{\sqrt{2}}=\frac{(1+\ln k)\sqrt{2}}{2}$$
$l_k=2d=(1+\ln k)\sqrt{2} \geqq 3\sqrt{2}$ 에서 $k \geqq e^2$
$\therefore$ k 의 최솟값은 8

80. 정답 ⑤
$f(x)=\left(-\ln\dfrac{1}{ax}\right)^2=(\ln ax)^2$에서
$f'(x)=2\ln ax \times \dfrac{a}{ax}=\dfrac{2\ln ax}{x}$
$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$
$f''(x)=0$ 에서 $x=\dfrac{e}{a}$
$x<\dfrac{e}{a}$ 일 때, $f''(x)>0$이고 $x>\dfrac{e}{a}$ 일 때, $f''(x)<0$이다.
따라서 $x=\dfrac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는
$\left(\dfrac{e}{a},\ 1\right)$
변곡점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로
$\dfrac{2e}{a}=1$,$\therefore$ $a=2e$

81. 정답 11



위의 그림에서 직선 l 의 방정식은 $y=-\frac{t}{2}(x-\frac{t}{2})+1$

y 절편은 $\frac{t^2}{4}+1$ 이고 점 $B(0,\ \frac{t^2}{4}+1)$ 이다.

$f(t)=\frac{1}{2}(1-\frac{t^2}{4})t=\frac{1}{2}(t-\frac{t^3}{4})$

$f'(t)=\frac{1}{2}(1-\frac{t^2}{4})=0$ 에서

$t=\frac{2\sqrt{3}}{9}$에서 최댓값 $f(\frac{2\sqrt{3}}{3})=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 을 갖는다.

$\therefore\ a+b=11$

82. 정답 ③

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$

$g(x)=k-2\sin\frac{\pi}{2}x$

$f'(x)=12(x-2)(x-1)(x+1)$이므로

$f(x)$의 최솟값은 $x=-1$일 때 -19

$k-2\leqq k-2\sin\frac{\pi}{2}x\leqq k+2$이므로

$g(-1)=k+2$는 $g(x)$의 최댓값이다.

따라서 $k+2\leqq-19$이므로 k의 최댓값은 -21

83. 정답:②

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 두면

$h(x)$ 는 미분가능(연속)이고, $h(a)=h(b)=0$ 이고,

$a<c<b$ 인 $x=c$에서 두 함수값의 차가 최대이므로 $h(x)$ 는 $a<c<b$ 인 $x=c$ 에서 최대 또는 최소이므로 $h'(c)=0$ 이다.

$\therefore h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ 에서 $f'(c)=g'(c)$ 이다.

84. 정답 13

$f(x)=x^3-3x^2-9x+8$에서 미분하면,

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=3$ 또는 $x=-1$에서 극값을 가짐을 알 수 있다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	13	↘	

위의 $f(x)$의 증감표에서 $x=-1$에서 극대이자, 최대이다.

따라서, 최댓값은 $f(-1)=13$

85. 정답: ②

x 만큼 짧아진 삼각형의 세 변의 길이는

$a-x$, $b-x$, $c-x$ 이므로

$(a-x)+(b-x)>c-x$

$\therefore\ 0<x<a+b-c$

$f(0)=a^2+b^2-c^2>0$

$f(a+b-c)=(c-b)^2+(c-a)^2-(a+b-2c)^2$

$=-2(c-a)(c-b)<0$

$y=f(x)$ 는 연속함수이므로 중간값의 정리에 의해

$f(x)=0$ 이 되는 x 가 $0<x<a+b-c$ 인 범위에 존재하므로 직각삼각형을 만드는 것이 가능하다.

86. 정답: 27

모서리 길이의 합이 36이므로 직육면체의 가로와 세로의 길이를 x, 높이를 y라 하면 $8x+4y=36$이고

부피 $V=x^2y=x^2(9-2x)$가 최대가 될 때는

$V'=-6x(x-3)$이므로 $x=3$ $\therefore$ 부피는 27

87. 정답 12

P, Q의 속도를 구하면 $\mathrm{P}'(t)=t^2+4,\quad \mathrm{Q}'(t)=4t$

두 점의 속도가 같아지는 시각은

$t^2+4=4t,\ (t-2)^2=0\qquad \therefore\ t=2$

시각 t일 때 두 점 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t+\frac{28}{3}\right|$ 에서

$t=2$일 때에는 $\overline{\mathrm{PQ}}=\left|\frac{8}{3}-8+8+\frac{28}{3}\right|=\frac{36}{3}=12$

88. 정답 18

[출제의도] 도함수를 활용하여 수학내적문제 해결하기

t초일 때

$\square\mathrm{DPBQ}=\square\mathrm{ABCD}-(\triangle\mathrm{APD}+\triangle\mathrm{QCD})=200+10t$

또한 $\square\mathrm{DPBQ}=\frac{11}{20}\times\square\mathrm{ABCD}$이므로

$200+10t=220$에서 $t=2$

$\triangle\mathrm{PBQ}=\frac{1}{2}(20-2\mathrm{t})3\mathrm{t}=30\mathrm{t}-3\mathrm{t}^2$

$\triangle\mathrm{PBQ}$의 넓이의 순간변화율은 $30-6t$

따라서 $\triangle\mathrm{PBQ}$ 넓이의 $t=2$일 때 순간변화율은 18

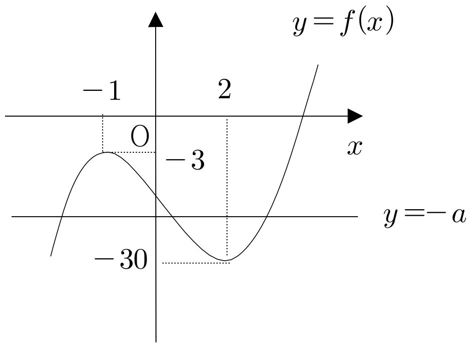
89. 정답: 33

$g(x)=f(x)+a$이므로 방정식 $g(x)=0$의 근은 방정식 $f(x)=-a$의 근과 같다.

$f'(x)=6x^2-6x-12$

$\quad =6(x+1)(x-2)=0$

에서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 아래의 그림과 같다.



이 때, 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가질려면 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$가 극대점 또는 극소점에서 접해야 하므로

$-a=-30$ 또는 $-a=-3$

$\therefore\ a=30$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값은 합은 33

90. 정답:③

$f'(x)=a(x-2)(x+2)$ 에서 $a=-\dfrac{3}{4}$ ($\because f'(0)=3$)

$\therefore f(x)=-\dfrac{3}{4}\displaystyle\int(x^2-4)dx=-\dfrac{1}{4}x^3+3x$ ($\because f(0)=0$)

삼차방정식 $-\dfrac{1}{4}x^3+3x=kx$,$x\{x^2+4(k-3)\}=0$

이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+4(k-3)=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $k\neq 3$이고 $\dfrac{D}{4}=0-4(k-3)>0$이어야 하므로 $k<3$

<다른 풀이>

도함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 y축 대칭이고 $f(0)=0$ 이므로 $f(x)$ 의 그래프는 원점대칭이다.

이때, 원점에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=3$이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 $k<3$ 이어야 한다.

91. 정답:①

$h(0)\cdot h(1)=(-1)\times 3\ <\ 0$

$h'(x)=3x^2-6x+6=0$ 에서

$\dfrac{\mathrm{D}}{4}=9-18=-9<0$ 이므로 $h'(x)>0$

$\therefore\ h(x)$ 는 증가함수 이다.

92. 정답: ②

[출제의도] 미분과 방정식의 이해하기

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$F(x)=x^4-4x+a+x^2-2x+a$

$=x^4+x^2-6x+2a$

$F(x)=0$이 x축과 오직 한점에서 만나야 한다.

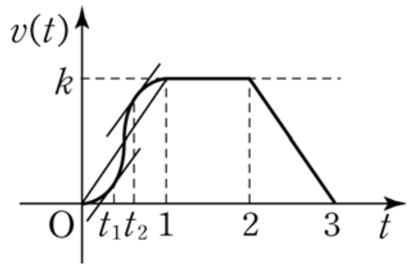
$F'(x)=4x^3+2x-6$

$=(x-1)(4x^2+4x+6)=0$에서

$x=1$에서 $F(x)$는 극소이고 극소값은 0이어야 한다

$\therefore F(1)=1+1-6+2a=0$에서 $a=2$

93. 정답:②



(i) $0<t<1$ 일 때 $y=v(t)$ 의 그래프가 직선 $y=kt$ 와 한 점에서 만나므로 기울기가 k 인 접선은 2 개 존재한다.

접점을 각각 t_1 , t_2 라 하면 $0<t<t_1$ 일 때 $v'(t)<k$, $t_1<t<t_2$ 일 때 $v'(t)>k$, $t_1<t<1$ 일 때 $v'(t)<k$ 이다.

(ii) $1\leq t<2$ 일 때 $v(t)=k$ 이므로 $a(t)=v'(t)=0$

(iii) $2<t<3$ 일 때 $v(t)=-k(t-3)$ 이므로

$a(t)=v'(t)=-k$

(i), (ii), (ii)에서 $y=a(t)$ 의 그래프의 개형으로 가장 알맞은 것은 ②이다.

94. 정답 ①

t초 후의 가로, 세로의 길이를 각각 $9+0.2t$, $4+0.3t$로 두면 정사각형의 조건에서

$9+0.2t=4+0.3t$ 따라서 $t=50$

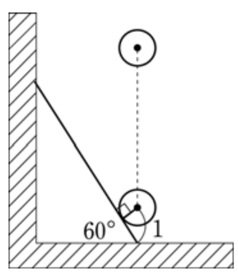
$S(t)=(9+0.2t)(4+0.3t)=0.06t^2+3.5t+36$이므로

$\dfrac{dS(t)}{dt}=0.12t+3.5$이고 $t=50$일 때의 넓이의 변화율은

$0.12\times 50+3.5=9.5(\mathrm{cm}^2/초)$이다.

95. 정답 ①

<풀이>



$h(t)=21-5t^2=1$일 때, 공이 경사면과 처음으로 충돌하므로

$5t^2=20$에서 $t=2$

$h'(t)=-10t$ 에서

$t=2$일 때의 공의 속도는

$h'(2)=-20\mathrm{m}/초$

96. 정답 48

t초 후 선분 AP, 선분 PB의 길이는 $\overline{AP}=2t$, $\overline{PB}=20-2t$

두 정사각형의 넓이의 합

$S=4t^2+(10-2t)^2=8t^2-80t+400=\frac{dS}{dt}=16t-80$

$t=8$일 때 S의 변화율 $16\cdot 8-80=48$

97. 정답 19

$f(x)=x^3-ax^2-100x+10$이면

$f'(x)=3x^2-2ax-100$

$f'(a)=3a^2-2a^2-100<0$

$-10<a<10$이므로 정수의 개수는 19개

98. 정답 ⑤

ㄱ. $f'(\alpha)=0$이 되려면 $f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$의 형태이어야 하므로

$f(x)$가 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다. (참)

ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면

(ⅰ) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)\neq 0$일 때

$f(x)=(x-\alpha)^2(ax^2+bx+c)$

(ⅱ) $f'(\alpha)\neq 0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때

$f(x)=(x-\beta)^2(ax^2+bx+c)$

(ⅲ) $f'(\alpha)=0$ 이고 $f'(\beta)=0$일 때

$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$의 그래프를 그려보면

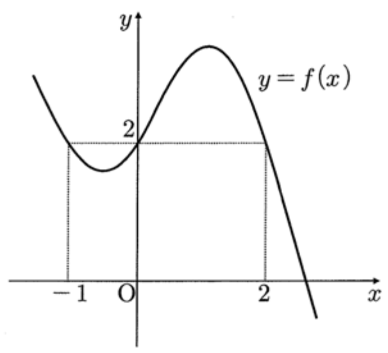
허근이 없다 (참)

ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)>0$이면 $f'(\alpha)$와 $f'(\beta)$의 부호가 같다.

사차식 $f(x)$의 두 해의 기울기의 부호가 같으려면 그래프를 그려보면 서로 다른 네 실근을 갖는다.

99. 정답: ③

[출제의도] 함수의 극한에 관한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구하기



삼차함수 $y=f(x)$는

$f(-1)=f(0)=f(2)=2$에서

$y=f(x)$와 $y=2$와 교점의 x좌표가 -1, 0, 2이므로

$f(x)-2=kx(x+1)(x-2)$, k는 상수

ㄱ. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{f(x)-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{kx(x+1)}=\frac{1}{6k}$ 로 수렴 [참]

ㄴ. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2}{f(x-2)}$ $=0$으로 수렴 [참]

ㄷ. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x-2)}{x-2}=\infty$로 발산 [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

100. 정답 19

다항함수 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$ 라 하면

㈎ $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$이므로 분자와 분모의 차수가 같아야 극한값이 존재하므로

(분모) : $ax^{n+3}+bx^{n+2}+\cdots$

(분자) : $(a^2x^{2n}+\cdots)-(ax^{2n}+\cdots)$ 이다.

따라서, 분모의 최고차수와 분자의 최고차수가 같아야 하므로

$2n=n+3$ 이므로 $n=3$

그리고 최고차수의 계수를 비교하면 $\frac{a^2-a}{a}=4$ 이므로

$\therefore a=5$

그러므로 $f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$ 라고 할 수 있고,

$f'(x)=15x^2+2bx+c$

㈏ $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$에 $f'(x)$를 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx+c}{x}=4$이고

분자의 $x\to 0$ 이므로 $x\to 0$ 일 때 분모의

$15x^2+2bx+c=0$ 이여야 하므로 $c=0$ 이다.

그러므로 $\lim_{x\to 0}\frac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(15x+2b)}{x}=2b=4$

$\therefore b=2$

$f'(x)=15x^2+4x$ 이므로

$f'(1)=15+4=19$

101. 정답 ④

ㄱ. $g(x)=f(a)$

$f(a)+(b-a)f'(x)-f(a)=0$의 방정식이므로

$(b-a)f'(x)=0$

$b-a>0$이고 $f'(x)$는 서로 다른 두 실근을 가지므로

$g(x)=f(a)$는 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(b)>f(a)$

$g(b)-f(a)$는 $f(a)+(b-a)f'(b)-f(a)=(b-a)f'(b)$이므로

$f'(b)$의 부호는 양, 음을 다 가질 수 있으므로

$g(b)>f(a)$임을 확신할 수 없다.

ㄷ. $g(a)>f(b)$

$g(a)-f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)-f(b)$이므로

$(b-a)\left\{f'(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\right\}$의 부호를 판단하자.

a에서의 접선의 기울기와 $a\sim b$사이의 평균변화율을 살펴보면 a에서의 접선의 기울기가 $a\sim b$사이의 평균변화율 보다 크므로 참이다.

102. 정답 ①

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

$=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

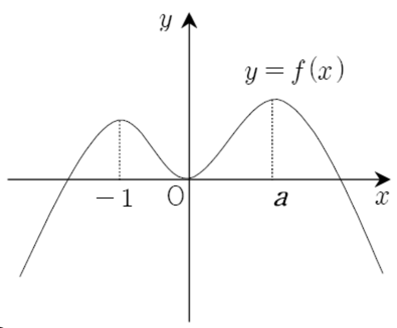
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고,

$f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1$

$=(a+1)^3(a-1)$



이므로

$0<a<1$이면 $f(a)<f(-1)$

$a\geq 1$이면 $f(a)\geq f(-1)$이다.

(i) $0<a<1$인 경우

$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq -1$이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (t>-1)\end{cases}$$

이고, $\lim\limits_{t\to -1-0} g'(t)=\lim\limits_{t\to -1+0} g'(t)=0$

이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a<1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(ii) $a\geq 1$인 경우

$f(-1)=f(\alpha)$ $(0<\alpha\leq a)$이라 하자.

$t<-1$이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$-1\leq t<\alpha$이면

$g(t)=f(-1)=2a+1$

$\alpha\leq t<a$이면

$g(t)=f(t)=-3t^4+4(a-1)t^3+6at^2$

$t\geq a$이면

$g(t)=f(a)=a^4+2a^3$

따라서,

$$g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12(a-1)t^2+12at & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<\alpha)\\ -12t^3+12(a-1)t^2+12at & (\alpha<t<a)\\ 0 & (t>a)\end{cases}$$

$\lim\limits_{t\to -1-0} g'(t)=\lim\limits_{t\to -1+0} g'(t)=0$이므로

$g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

$\lim\limits_{t\to a-0} g'(t)=\lim\limits_{t\to a+0} g'(t)$이어야 하므로

$-12a^3+12(a-1)a^2+12a^3=0$에서

$12(a-1)a^2=0\quad\therefore\ a=1$

$a=1$이면 $f(x)=-3x^4+6x^2$이므로

$f(-1)=f(1)\quad\therefore\ \alpha=a=1$

$$\therefore\ g'(t)=\begin{cases}-12t^3+12t & (t<-1)\\ 0 & (-1<t<1)\\ -12t^3+12t & (t>1)\end{cases}$$

$g'(-1)=0$, $g'(1)=0$이므로

$a=1$일 때, $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i),(ii)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\leq 1$이므로

구하는 a의 최댓값은 1이다.

103. 정답 ⑤

ㄱ.(O) $g(x)$는 다항함수 이므로 실수 전체에서 연속,

$\therefore \lim\limits_{x\to 0_-} g(x)=g(0)$

$\therefore f(0)=g(0)$ $(\because \lim\limits_{x\to 0_-} g(x)=f(0))$

ㄴ.(O) $g(x),f(x)$는 다항함수 이므로 실수 전체에서 미분가능

$\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0_-} f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 0_+} g'(x)=\lim\limits_{x\to 0_-} g'(x)$

그런데, $f'(0)=g'(0)$

따라서 $h(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄷ.(O) $g(x),f(x)$는 다항함수이므로

$\lim\limits_{x\to 0_+} f'(x)=f'(0)$

$\lim\limits_{x\to 0_-} g'(x)=g'(0)$로 $x=0$ 좌우에서 접선의 기울기가 반대이고 연속이므로 극대 혹은 극소가 된다.

104. 정답 ③

[출제의도] 두 함수의 그래프를 이용하여 합성함수의 극한값 추론하기

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 \ (x \geqq 0) \\ -\frac{1}{2}x^2 \ (x<0) \end{cases}$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{2}x=0$

$\lim_{x\to-0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x}=\lim_{x\to-0}\left(-\frac{1}{2}x\right)=0$

∴ 참

ㄴ. $\lim_{x\to\sqrt{2}+0}g(f(x))=\lim_{t\to1+0}g(t)=2$ 이고

$\lim_{x\to\sqrt{2}-0}g(f(x))=\lim_{t\to1-0}g(t)=1$ 이므로

∴ 거짓

ㄷ. $\lim_{x\to1+0}g(g(x))=\lim_{t\to2-0}g(t)=1$

$\lim_{x\to1-0}g(g(x))=1$

$\lim_{x\to1}g(g(x))=1$ 이고 $g(g(1))=1$ 이므로

$x=1$ 에서 연속이다. ∴ 참

105. 정답:5

$\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^2-2f(x)}{1-x}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)\{2-f(x)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\{2-f(x)\}$

$=f'(1)\{2-f(1)\}=10$

∴ $f'(1)=5$

106. 정답: ④

$f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로 $4=4a+b$ 미분가능 하므로 미분계수$f'(2)=4=-4a$ $a=-1,\ b=8$

107. 정답 24

<풀이>

$f(0)=1,\ g(0)=4$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}$

$h(x)=f(x)g(x)$로 놓으면

(주어진 식)$=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$

$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=-24+g'(0)=0$

$\therefore g'(0)=24$

108. 정답: 118

함수의 연속성과 미분가능성 이해하기

함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$에서 연속이고

$f(a)=m-f(a),\ m-f(b)=n+f(b)\ \cdots$ ㉠

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a\leqq x<b) \\ f'(x) & (x\geqq b) \end{cases}$

함수 $g(x)$는 $x=a,\ b$미분 가능하므로

$f'(a)=-f'(a)$에서 $f'(a)+f'(a)=0$

그러므로 $f'(a)=0$

$f'(b)=-f'(b)$에서 $f'(b)+f'(b)=0$

그러므로 $f'(b)=0$이다.

따라서 $f'(x)=0$인 $x=a,\ b$이다.

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

따라서 극대값은 $f(-3)=27$, 극소값은 $f(1)=-5$이므로

$a=-3,\ b=1$

㉠에서 $m=2f(-3)=54$,

$n=m-2f(1)=54+10=64$이므로

$m=54,\ n=64$

$\therefore\ m+n=118$

109. 정답 ③

[출제의도] 연속과 미분가능성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

함수 $f(x)$가 $x=\pm1$에서 미분가능해야 하므로

$f(-1)=3+a=-1+b-c,\ f'(-1)=-3$이고

$f(1)=-3+d=1+b+c,\ f'(1)=-3$이다.

$\therefore\ a+b+c+d=2+0-6-2=-6$

110. 정답: 2

접점의 좌표를 (a,a^2-a) 라고 하면 접선의 방정식은

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$ $(1,-1)$을 지나므로 $a=0,\ a=2$

접선의 기울기는 -1과 3이다.

111.정답 ③

[출제의도] 도함수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}=f'(-x)$ ∴ 참

ㄴ. $|f(0)|\leqq M\cdot0^2=0$ 에서 $f(0)=0$ 이다. 따라서,

$|f'(0)|=\lim_{h\to0}\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|=\lim_{h\to0}\left|\frac{f(h)}{h}\right|$

$\leqq\lim_{h\to0}\frac{Mh^2}{|h|}=\lim_{h\to0}M|h|=0$

$\therefore\ f'(0)=0$ ∴ 참

ㄷ. (반례) $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$ 는

$\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h}\right\}=0$

이지만 $x=0$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

$\therefore$ 거짓

112. 정답 45

(i) $y'=3x^2-6x+3$ 이므로 $f'(0)=3$

따라서 원점에서의 접선의 방정식은 $y=3x$

이때, $x^3-3x^2+3x=3x$ 에서 $x^2(x-3)=0$ 이므로 $x=3$

(ii) 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$y-a^3+3a^2-3a=(3a^2-6a+3)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0, y=0$ 을 대입하여 정리하면

$a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 10S=10\left(\dfrac{3}{2}+3\right)=45$

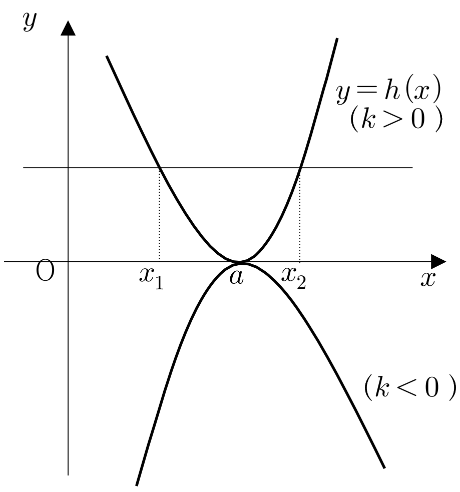
113. 정답:⑤

함수 $y=g(x)$ 가 이차함수 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 접선의 방정식이므로 방정식 $f(x)=g(x)$ 는 $x=a$ 인 중근을 갖는다.

그러므로, $h(x)=f(x)-g(x)=k(x-a)^2\ (k\neq 0)$ 라 두면

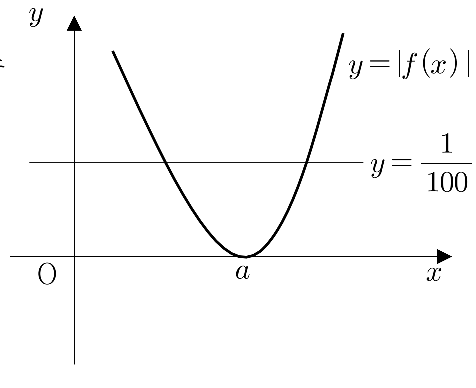
ㄱ. 오른편 그림에서

$h(x_1)=h(x_2)$ 를 만족시키는 서로 다른 두 실수 x_1, x_2 가 존재한다.



ㄴ. $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대인지 극소인지 알 수 없음.

ㄷ. 오른편 그림에서부등식 $|h(x)|<\dfrac{1}{100}$ 의 해는 항상 존재한다.



114. 정답: ①

미분계수의 이해와 접선의 수직조건 활용문제

(가), (다)에서 $f_1(0)=0,\ f_2(0)=0,$

$f_1{}'(0)f_2{}'(0)=-1$이므로

(나)에서 $f_i{}'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{f_i(x)}{x}+2k}{\dfrac{f_i(x)}{x}+k}=\dfrac{f_i{}'(0)+2k}{f_i{}'(0)+k}$

$\{f_i{}'(0)\}^2+kf_i{}'(0)=f_i{}'(0)+2k$

$\{f_i{}'(0)\}^2+(k-1)f_i{}'(0)-2k=0$의

두 근이 $f_1{}'(0),\ f_2{}'(0)\,(i=1,2)$이므로

두 근의 곱에서 $f_1{}'(0)f_2{}'(0)=-2k=-1$

$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

115. 정답 ⑤

점 B에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-6$

$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=k(k>0)$라 하면 $\overline{\mathrm{AD}}=3k$

직선 BC의 기울기는 $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{-k}=-6$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=6k$

또, 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{6k}{3k}=2$

따라서, $f'(a)=-3a^2+8a-3$에서

$-3a^2+8a-3=2,\ 3a^2-8a+5=0$

$\therefore$ 모든 a값들의 곱은 $\dfrac{5}{3}$

116. 정답 9

P, Q가 만나기 위해서는 $x_1(t)$와 $x_2(t)$가 교점을 가져야 한다.

$x_1(t)$의 기울기 k는 원점에서 $x_2(t)$에 그은 접선의 기울기보다 크거나 같아야 한다. (단, $t\geq 0$)

$x_2(t)$ 위의 한 점을 $(a,\ a^3-3a^2+27)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-(a^3-3a^2+27)=(3a^2-6a)(x-a)$이고

이 접선이 원점을 지나므로

$2a^3-3a^2-27=0 \quad (a-3)(2a^2+3a+9)=0$

$a=3$일 때 접선의 기울기는 9이므로

k의 최솟값은 9이다.

117. 정답 ②

$f(x)=x^3$ 에서 $f'(x)=3x^2$ 이므로 점 $(1,1)$ 에서 접선의 방정식은 $y-1=f'(1)(x-1)$

$\therefore a_1=\dfrac{2}{3}$

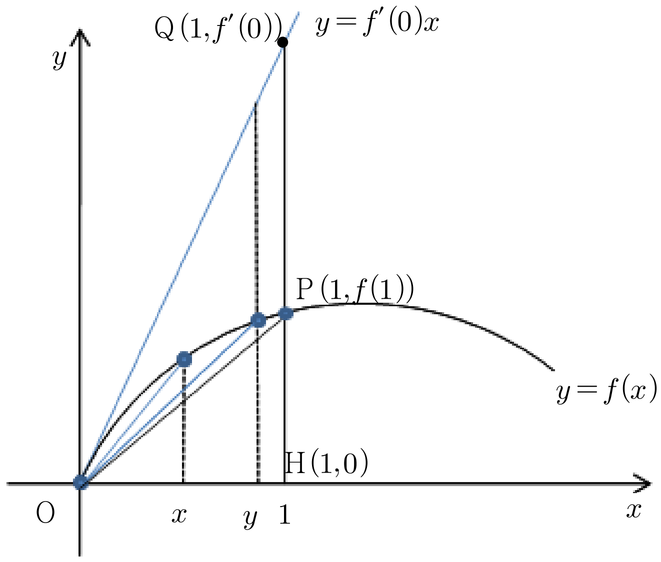
점 $(a_n,\ a_n^3)$ 에서 접선의 방정식은

$y-a_n^3=3a_n^2(x-a_n)$

$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$

$\therefore a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 이므로 $a_5=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

118. 정답 ④



(나)에서 $0<xf(y)<yf(x)$의 각 변을 xy로 나누면

$0<\frac{f(y)}{y}<\frac{f(x)}{x}$이다.

(가)에서 $f(0)=0$이므로, (가), (나)로부터

함수 f는 위 그림과 같이 개구간 $(0,\ 1)$에서 위로 볼록한 함수임을 알 수 있다.

위 그래프를 이용하여 A, B, C를 표현하면

$\mathrm{A}=f'(0)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f'(0)\right)=2(\triangle\mathrm{OHQ}$의넓이)

$\mathrm{B}=f(1)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot f(1)\right)=2(\triangle\mathrm{OHP}$의넓이)

$\mathrm{C}=2\int_0^1 f(x)dx=2\cdot$(곡선OP, x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이) 와 같다.

따라서 $\mathrm{B}<\mathrm{C}<\mathrm{A}$이다.

119. 정답 28

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}=kf'(1)$이므로

(준식)$=f'(1)+2f'(1)+\cdots+5f'(1)$

$=15f'(1)=15a=420$

$\therefore a=28$

120. 정답 ⑤

[출제의도] 증가함수의 성질 이해하기

ㄱ. 증가함수 (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-2x$라 하면 $g(x)$는 연속함수

$g(0)=f(0)>0$

$g(1)=f(1)-2<0$이므로 중간값의 정리에 의해 해가 적어도 한 개 존재한다. (참)

ㄷ. 증가함수 (참)

121. 정답 15

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$

(가) $f(-x)=f(x)$이므로

$x^4-ax^3+bx^2-cx+6=x^4+ax^3+bx^2+cx+6$에서

$a=0,\quad c=0$

(나) $f'(x)=4x^3+2bx=2x(2x^2+b)=0$에서

$x^2=-\frac{b}{2},\ x=\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}$ $(b<0)$일 때, 극소값 -10을 갖는다.

$f\left(\pm\sqrt{-\frac{b}{2}}\right)=\frac{b^2}{4}+b\left(-\frac{b}{2}\right)+6=-10$

$\therefore -\frac{b^2}{4}=-16$에서 $b^2=64$

$b<0$이므로 $b=-8$

따라서 $f(x)=x^4-8x^2+6$에서 $f(3)=81-72+6=15$

122. 정답 ①

$f'(x)=x^3+(a+1)x^2-a=(x+1)(x^2+ax-a)=0$

의 서로 다른 세 실근이 α,β,γ이다.

따라서 $\alpha=-1$이고, $x^2+ax-a=0$의 서로 다른 두 실근이 β,γ

$g(x)=x^2+ax-a$라 하면 $0<\beta<\gamma<3$이므로

$D>0$, $0<$(대칭축)<3, $g(0)>0$, $g(3)>0$ 이어야 하므로 만족하는 a의 범위는

$\therefore\ -\frac{9}{2}<a<-4$

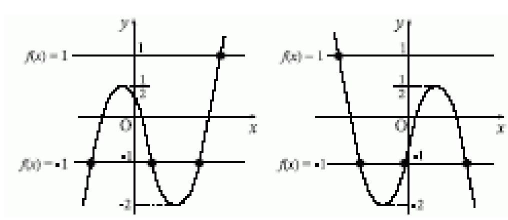
123. 정답: ④

(i) $|f(x)|<1$ 일 때 $g(x)=1$

(ii) $|f(x)|=1$ 일 때 $g(x)=\frac{1}{2}$

(iii) $|f(x)|>1$ 일 때 $g(x)=0$

따라서 함수 $y=g(x)$는 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$ 일 때 불연속이다. 그림과 같이 $f(x)=1$ 인 x는 1 개, $f(x)=-1$ 인 x는 3 개이므로 실수전체의 집합에서 불연속인 x는 4 개다.



124. 정답 ①

$\triangle ABC$에서 $\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$ (극값의 차)이므로 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{BC}}=6$

외심은 빗변의 중점이므로 $\overline{\mathrm{BC}}$ 중점의 x값은 6

그러므로 점 A, B의 x 값이 각각 3, 9

$x=3$에서 극대값, $x=9$에서 극소값이므로

$f'(3)=f'(9)=0$

$\therefore$ 두 근의 곱은 27

125. 정답 ④

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

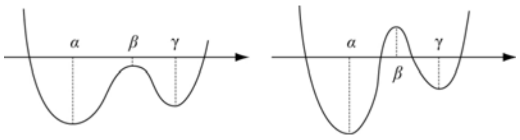
$h'(x)=0$의 세 실근이 α, β, γ이므로

$h'(\alpha)=h'(\beta)=h'(\gamma)=0$

$x=\alpha,\ \gamma$에서 극소값, $x=\beta$에서 극대값

최솟값이 음수를 만족하는 그래프의 개형으로

다음과 같은 경우를 생각하면



ㄱ. (거짓)

ㄴ. $\dfrac{h(\gamma)-h(\beta)}{\gamma-\beta}<\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}$ (참)

ㄷ. (참)

126. 정답 64

원점을 지나고 최고차항의 계수가 1인 사차함수

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$에 대해

$f(2+x)=f(2-x)$이므로 $x=2$에 대하여 대칭이고, $x=1$에서 극소이므로 $x=3$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이다.

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$=4(x-1)(x-2)(x-3)$

$=4x^3-24x^2+44x-24$

따라서 $a=-8$, $b=22$, $c=-24$

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x$

$x=2$에서 극대이고 극대값 $a=f(2)=-8$

$\therefore\ a^2=64$

127. . 정답③

[출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

ㄱ. 광원과 물체의 속도는 각각

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-\dfrac{11}{2}$ 이므로

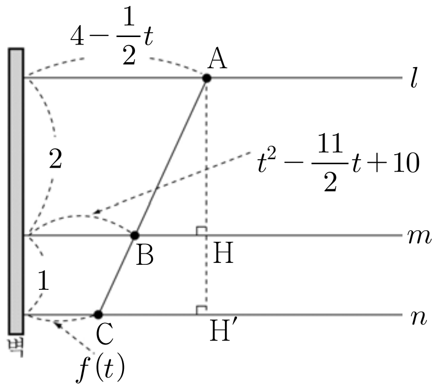
$t=\dfrac{5}{2}$에서 속도는 $-\dfrac{1}{2}$ 로 같다. $\therefore$ 참

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}=3$ 인 순간은

$t^2-\dfrac{11}{2}t+10=4-\dfrac{1}{2}t$ 이므로

$t=2$ 또는 $t=3$ $\therefore$ 참

ㄷ. 그림자 C 의 시각 t 에서 벽으로부터의 거리를 $f(t)$, 점 A 에서 직선 m, n 에 내린 수선의 발을 각각 H, H′ 라 하자.



$\overline{\mathrm{BH}}=\left(4-\dfrac{1}{2}t\right)-\left(t^2-\dfrac{11}{2}t+10\right)=-t^2+5t-6$

$\overline{\mathrm{CH'}}=4-\dfrac{1}{2}t-f(t)$

$\overline{\mathrm{BH}}:\overline{\mathrm{CH'}}=2:3$ 이므로

$f(t)=\dfrac{3}{2}t^2-8t+13$ 이다.

속도 v 는 $v=\dfrac{df(t)}{dt}=3t-8$ 이므로

가속도 a 는 $a=\dfrac{dv}{dt}=3$ 이다. $\therefore$ 거짓

128. 정답 16

ⅰ) $f'(x)=x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=3$에서 극솟값을 가진다.

$f(3)=\dfrac{1}{3}\cdot 3^3-3^2-3\cdot 3=-9$

$\therefore\ a=3,\ b=-9$

ⅱ) 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선은 $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y=-3x-\dfrac{4}{3}$

$9x+3y+4=0$과 점 $(3,\ -9)$ 사이의 거리 d는

$d=\dfrac{|27-27+4|}{\sqrt{9^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{90}}$

$\therefore\ 90d^2=90\times\dfrac{16}{90}=16$

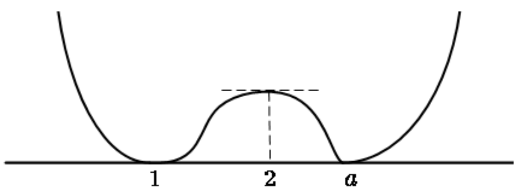
129. 정답:④

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

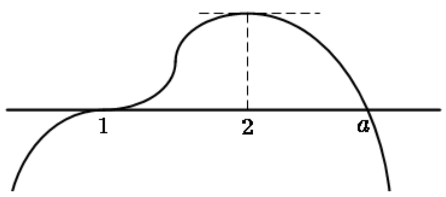
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{a}f(-ax-ah)+\frac{1}{a}f(-ax)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-ax-ah)-f(-ax)}{-ah}$$
$$=f'(-ax)$$

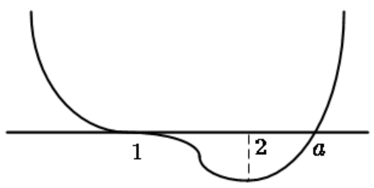
130. 정답 12

$g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하면
$g(1)=g'(1)=0,\ g'(2)=0$
$y=|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖는다.
따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$ 의 그래프를 그려 보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.

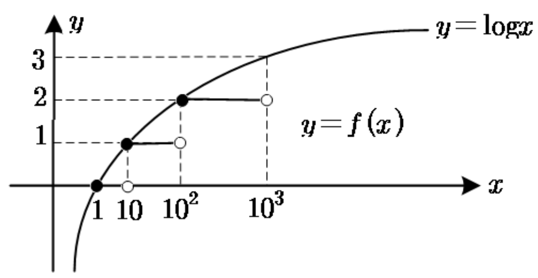




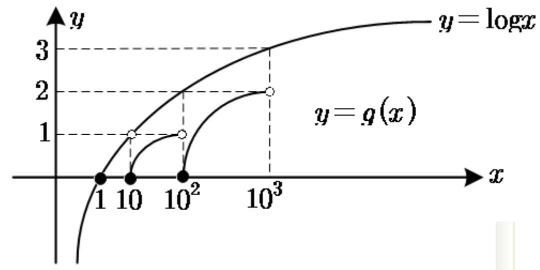
$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)\ (a\neq 0)$

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48a}{4a}=12$

(별해)
$y=\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하면
$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



또한 $y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



자연수 n에 대하여 $\log n$의 지표를 $f(n)$, 가수를 $g(n)$이라 할 때
$y=f(n)-g(n)$의 최솟값은
$1<n<10$사이에서 $n=9$일 때이다.
따라서 $f(9)-g(9)=0-\log 9=\log\frac{1}{9}$이므로
$a=9,\ b=1$
$\therefore\ a+b=10$

131. 정답:①

$x^2+3y^2=9$ 에서 $y^2=\frac{1}{3}(9-x^2)$ ···㉠, $y^2\geq 0$ 이므로
$-3\leq x\leq 3$ ···㉡
주어진 식에 ㉠을 대입한 식을 $f(x)$ 라 하면
$f(x)=x(x+y^2)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x$
$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3)$
㉡의 범위에서 $f(x)$ 의 증감표를 만들면

x	-3	···	-1	···	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	9	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	9

따라서 주어진 식의 최솟값은 $-\frac{5}{3}$ 이다.

132. 정답: 527

최대최소의 활용
점 P의 좌표를 $(x,\ -x^2+5x)$라 하면
두 정사각형 $OABC$, $PQRS$가 겹칠 때,
$0\leq x\leq 5$이다.
두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$라 하면
$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$이다.
$S'(x)=-3x^2+10x=-3x\left(x-\frac{10}{3}\right)$이므로
$S'(x)=0$에서 $x=0,\ \frac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

증감표에서 $S(x)$는 $x=\frac{10}{3}$ 일 때,

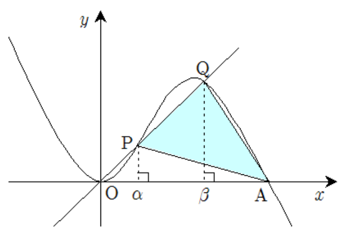
최댓값을 갖고 최댓값은

$S\left(\frac{10}{3}\right)=-\frac{1000}{27}+5\cdot\frac{100}{9}=\frac{500}{27}$

$\therefore p+q=27+500=527$

133. 정답 15

원점 O를 통과하는 직선을 $y=mx$(단, $m>0$)이라 놓으면



$x^2(3-x)=mx$에서 $x(x^2-3x+m)=0$이다.

여기에서 $x\neq0$이므로 $x^2-3x+m=0$이다.

$x^2-3x+m=0$의 서로 다른 두 양의 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$D=9-4m>0$이므로 $0<m<\frac{9}{4}$

$\triangle$APQ의 넓이를 S라 하면

$S=\triangle\mathrm{OAQ}-\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot m\beta-\frac{1}{2}\cdot3\cdot m\alpha=\frac{3m}{2}(\beta-\alpha)$

$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{9-4m}$

$\therefore S=\frac{3}{2}\sqrt{-4m^3+9m^2}$

여기에서 $f(m)=-4m^3+9m^2$이라 하면,

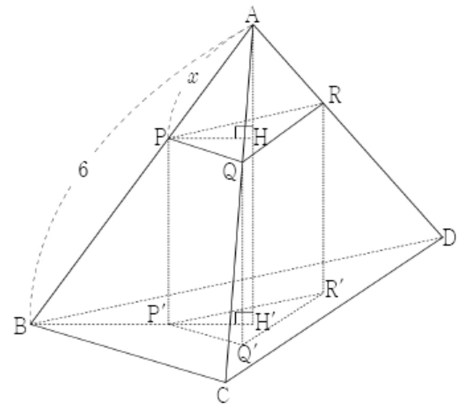
$0<m<\frac{9}{4}$에서 $f(m)=-4m^3+9m^2$의 최댓값을 구해보자.

$f'(m)=-6m(2m-3)$이므로

넓이 S는 $m=\frac{3}{2}$일 때, 최댓값 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$을 갖는다

따라서 $10m=10\times\frac{3}{2}=15$

134. 정답 128



점 A를 면 PQR과 면 $P'Q'R'$에 내린 수선의 발을 각각 H, H'라고 하자.

점 H'는 $\triangle BCD$의 외심이므로 제이코사인법칙을 적용하면 $\overline{BH'}^2=\dfrac{6^2}{2\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right)}=12$

$\therefore\overline{BH'}=2\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 $AH'B$에서 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AH'}=2\sqrt{6}$

$\overline{AP}$를 x라고 하자. $\triangle APH\backsim\triangle ABH'$이므로

$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AH}:\overline{AH'}$ $\therefore\overline{AH}=\frac{\sqrt{6}}{3}x$

삼각기둥 $PQR-P'Q'R'$의 높이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}(6-x)$,

$\triangle PQR$의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$이므로

구하는 부피

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}(6-x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x^2(6-x)$이다.

$V'(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}x(4-x)$이므로

$x=4$일 때, 부피가 최대이며 최댓값 $V=8\sqrt{2}$이다.

따라서 $V^2=(8\sqrt{2})^2=128$이다.

135. 정답:⑤

ㄱ. $a=b=c$이면 $f'(x)=(x-a)^3$

$f'(x)=0$ 에서 $x=a$이고

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

위의 증감표에서 $f(x)=0$의 근이 실근을 가지는지 가지지 않은 지는 알 수 없음.

ㄴ. $a=b\neq c$ ($a<c$)이고 $f(a)<0$이면

$f'(x)=(x-a)^2(x-c)$ 이고 $f'(x)=0$ 에서

$x=a$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	극소	↗

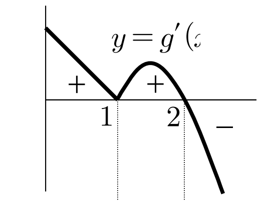
위의 증감표에서 $f(a)<0$ 이므로 $f(c)<0$ 이다.
$\therefore$ $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 가진다.

ㄷ. $a<b<c$ 이고 $f(b)<0$ 이면

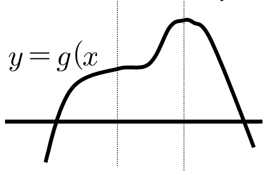
x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 극대값$f(b)<0$ 이므로
방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

136. 정답 ③



[그림1]



[그림2]

x의 범위에 따라 $g(x)$는 다음과 같이 주어진다.

$$g(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-1}^{x}(t-1)(-1)\,dt & (x<1)\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}(t-1)(-1)\,dt+\int_{1}^{x}(t-1)(2-t)\,dt & (x\geq 1)\end{cases}$$

위의 식을 정리하고 각 구간에 따라 미분하면

$$g'(x)=\begin{cases}1-x & (x<1)\\ -x^2+3x-2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

$y=g'(x)$와 그에 따른 $y=g(x)$의 그래프 개형을 그려보면
위 그림과 같다.
ㄱ. (1, 2)에서 $g'(x)>0$ 이므로 $g(x)$는 증가한다. (참)
ㄴ. $x=1$에서의 좌우 미분계수가 0으로 같으므로
$x=1$에서 미분가능하다.(참)
ㄷ. [그림2]에서 $y=k$의 그래프는 $y=g(x)$와 최대 서로 다른 두 점에서 만나므로, 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k는 존재하지 않는다. (거짓)
따라서 ㄱ,ㄴ 만 옳다.

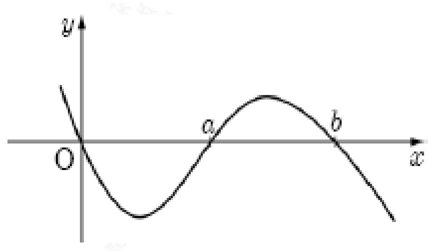
137. 정답 ⑤

[출제의도] 도함수의 성질 이해하기

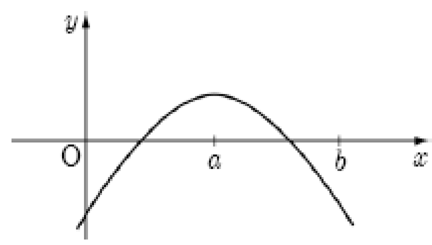
ㄱ. $x<0$ 에서 $f'(x)>g'(x)$
$y=f'(x)-g'(x)>0$ 이므로 $y=f(x)-g(x)$ 는 증가한다.
$\therefore$ 참
ㄴ. $f'(x)=g'(x)$ 의 세 근을 $0, a, b$ $(0<a<b)$라 하고
$y=f(x)-g(x)$ 의 증감표를 완성하면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)-g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)-g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 $y=f(x)-g(x)$ 는 극솟값 1 개이다. $\therefore$ 참
ㄷ. ㄴ 의 증감표를 이용하여 $y=h(x)$ 의 개형을 그려보면



이고 $y=h'(x)$ 의 개형은



이므로 $h'(x)=0$ 은 서로 다른 2 개의 양의 실근을 갖는다.
$\therefore$ 참

138. 정답 : ②

[출제의도] 삼차함수 $f(x)$ 와 이의 도함수 $f'(x)$ 그래프 사이의 관계를 이해하여 방정식의 해와 관련된 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. (반례) $f(x)=x^3+1$ 이라 하자.
$f'(x)=3x^2=0$ 이므로 서로 같은 실근 0 을 가진다.
하지만, $f(x)=x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ 또는 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 가 되어
반드시 서로 같은 실근을 가진다고는 볼 수 없다. $\therefore$ 거짓
ㄴ. 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 허근을 가지면, $f(x)$ 는 증가함수 또는 감소함수이므로 $f(x)=0$ 은 단 하나의 실근과 서로 다른 두 허근을 가진다. $\therefore$ 참
ㄷ. (반례) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2x$ 이라 하자.
$f'(x)=x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ 또는 $x=2$ 가 되어
서로 다른 실근을 갖는다. 하지만,

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^3-9x^2+12x=0$$
$$\Leftrightarrow x(2x^2-9x+12)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \text{ 또는 } x=\frac{9\pm\sqrt{15}i}{4}$$

가 되므로 $f(x)=0$ 이 반드시 서로 다른 두 실근을 갖는다고 볼 수는 없다. ∴ 거짓

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

139. 정답 ⑤

ㄱ. $\dfrac{g(2)}{f(2)}=0$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$ (참)

ㄴ. $g(f(1))=-1$, $\lim\limits_{x\to1}g(f(x))=-1$(참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases}1 & (3\le x<4)\\ x-3 & (4\le x\le5)\end{cases}$,

$g(x)=x-4\ (3\le x\le5)$

$f(x)g(x)=\begin{cases}x-4 & (3\le x<4)\\ (x-3)(x-4) & (4\le x\le5)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to4-0}\dfrac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$

$\lim\limits_{x\to4+0}\dfrac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=1$ (참)

140. 정답 13

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$⋯⋯⋯(a)

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$⋯⋯⋯⋯(b)

주어진 조건이 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$, $f(2)=2$ 이므로

(b)식에 적용해보면 $c=0$, $b=-3a-8$

이를 (a)에 적용해보면 $d=4a+18$

이들을 (a)에 대입하여 a대하여 정리해보면

$f(x)=x^4+ax^3+(-3a-8)x^2+(4a+8)$

$=(x^4-8x^2+8)+a(x^3-3x^2+4)$

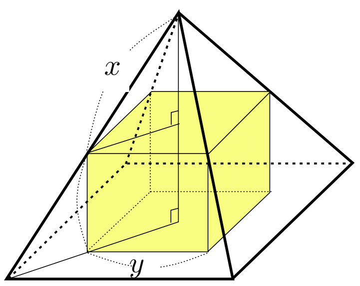
$=(x^4-8x^2+8)+a(x-1)(x-2)^2$

따라서 $f(x)$는 a값에 상관없이 $x=1$, $x=2$을 지난다.

따라서 점의 좌표는 $f(1)=11$, $f(2)=2$이다.

$f(1)+f(2)=13$

141. 정답:①



$(3-x):3=y:\dfrac{3\sqrt2}{2}$ 에서 $y=\dfrac{\sqrt2}{2}(3-x)$

부피 $V(x)=x^2y=\dfrac{\sqrt2}{2}(3x^2-x^3)$ 을 미분하면

$V'(x)=\dfrac{\sqrt2}{2}(6x-3x^2)\ (0<x<3)$

∴ $x=2$ 일 때, 부피의 최댓값 $2\sqrt2$ 를 갖는다.

142. 정답:22

$h(x)=f(x)-g(x)=5x^3-10x^2+k-(5x^2+2)$

$=5x^3-15x^2+k-2$ 라 하면

$\{x|0<x<3\}$ 에서 부등식 $h(x)\ge0$ 이 성립하는 k 의 최솟값을

구하면 된다.

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)=0$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 이므로 $h(x)$ 는 $x=0$ 일 때

극대값을, $x=2$ 일 때 극소값을 갖는다. 따라서,

$\{x|0<x<3\}$ 에서

$h(x)$ 는 $x=2$ 일 때

최소가 되고 $h(2)=k-22$ 이므로 $\{x|0<x<3\}$ 에서

$h(x)\ge0$ 이려면 $k-22\ge0$ 이면 된다.

∴ $k\ge22$

따라서, k 의 최솟값은 22 이다.

143. 정답 ④

함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 $f'(x)=3x^2-3$ 이므로

구간 $[0,\ a_n]$ 에서의 평균변화율과 같은 순간변화율을 갖는 점의 x 좌표를 $x=a_{n+1}$ 이라 하면

$\dfrac{{a_n}^3-3a_n}{a_n}=3{a_{n+1}}^2-3$

$a_{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt3}a_n$ $(\because a_n>0)$이므로 $a_n=a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^{n-1}$

ㄱ. 구간 $(-1,1)$에서 $f'(x)=3x^2-3<0$이므로

함수 $y=f(x)$는 감소한다.

따라서 $0<a_{n+1}<a_n<1$를 만족하는 a_n에 대하여

$f(a_n)<f(a_{n+1})$

ㄴ. $f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(a_n)=3{a_n}^2-3$

$f'(a_{n+1})=3{a_{n+1}}^2-3={a_n}^2-3$ 이므로

$f'(a_n)-f'(a_{n+1})=2{a_n}^2>0$ $\therefore f'(a_n)>f'(a_{n+1})$

ㄷ. $a_n=a_1\left(\dfrac{1}{\sqrt3}\right)^{n-1}$ 에서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}f'(a_n)=f'(0)=-3$

그러므로 옳은 것은 ㄴ과 ㄷ이다.

144. 정답 ⑤

$f(a)=f(b)=f(c)=k$ 라 할 때 삼차방정식 $f(x)=k$ 의 세 근이 a,b,c 이므로 $f(x)=p(x-a)(x-b)(x-c)+k$

$(p>0)$ 로 놓으면

$f'(x)=p(x-b)(x-c)+p(x-a)(x-c)+p(x-a)(x-b)$

ㄱ. $f'(a)=p(a-b)(a-c)>0$ (참)

ㄴ. $f'(a)+f'(b)=p(a-b)^2>0$ (참)

ㄷ. $f'(a)-f'(c)=p(c-a)(2b-a-c)=0$ 이므로 $b=\dfrac{a+c}{2}$ (참)

145. 정답 ④

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정육각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 3 이므로 t 초후의 반지름의 길이는 $3=2t$ 이다.

따라서 원의 넓이를 S라 하면 $S(t)=\pi(3+2t)^2$

$\dfrac{dS}{dt}=2\pi((3+2t)\times 2=4\pi(3+2t)$

따라서 4 초후의 넓이의 증가율은 44π 이다.

146. 정답:③

$\dfrac{dx_1}{dt}=6t^2-18t=6t(t-3)$

따라서 P는 $t=3$일 때 운동방향을 바꾸므로 $a=1$

마찬가지로 $\dfrac{dx_2}{dt}=2t+8$ 이므로 $b=0$

t 분 후의 M의 좌표를 $f(t)$ 라 하면 $f(t)=t^3-4t^2+4t$

$f'(t)=3t^2-8t+4=(3t-2)(t-2)$

$\therefore\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=3$

147. 정답: ①

[해설] 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{d}{dx}(e^x\ln y)=\dfrac{d}{dx}(1)$

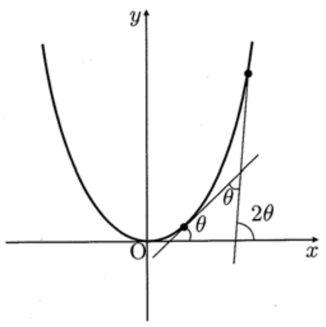
$e^x\ln y+e^x\cdot\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=-y\ln y$

따라서 점 $(0, e)$에서의 접선의 기울기는 $-e\cdot\ln e$ 즉, $-e$이다.

148. 정답: 32

접선과 2배각공식



위의 그림에서 점 P에서 접선의 기울기는

$y'_{x=\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=\tan\theta$

점 Q에서 접선의 기울기는

$y'_{x=a}=\dfrac{1}{2}a$

$=\tan 2\theta$이다.

배각 공식에서

$\dfrac{1}{2}a=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ a=4\sqrt{2}\quad\therefore\ a^2=32$

149. 정답 ③

$f'(x)=2ax-2\sin x,\ f''(x)=2a-2\cos x$

$f'(x)=0,\ f''(x)\neq 0$인 x가 오직 하나 존재하여야 한다. a값에 관계

없이 $f'(x)=0,\ f''(x)\neq 0$을 만족하는 x의 값은 0이 존재한다.

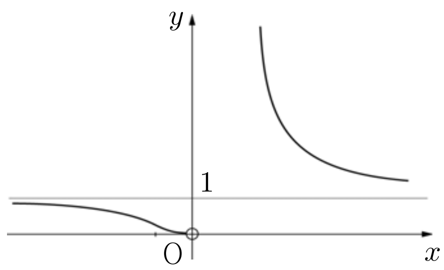
방정식 $f'(x)=0$의 해는 $y=ax$와 $y=\sin x$의 교점이다.

따라서,

0 이외에 나머지 값이 존재하지 않기 위해서는 $a>1$이어야 한다.

150. 정답 ③

함수 $f(x)=e^{\frac{2}{x}}$ 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{2}{x}}=1$ (참)

ㄴ. 극값을 가지지 않는다. (참)

ㄷ. $x>0$에서 $f'(x)<0$ (거짓)

151. 정답: ④

[출제의도] 미분을 이용하여 수학내적 문제해결하기

직선 $y=-x+k$와 $y=x$가 수직이다.

직선 $y=-x+k$와 두 함수$y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 두 점 사이의 거리가 최대가 되려면

직선 $y=-x+k$가 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 만나는 점에서 접선의 기울기가 1일 때이다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}=1\quad\therefore\ x=1$

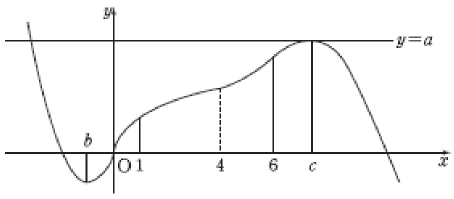
$g'(x)=e^{x-4}=1\ \therefore\ x=4$

(1, 4), (4, 1)을 지나는 직선의 방정식은 $y=-x+5$이므로 k의 값은 5이다.

152. 정답:⑤

x	$\cdots$	b		1	$\cdots$	4	$\cdots$	6	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	-1	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↘	·	↗	0	↗		↗		↗		↘

의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. $x=b$에서 극소값, $\sim x=c$에서 극대값을 갖는다. (거짓)

ㄴ. $4<x<6$에서 $f''(x)>0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하다.

따라서 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (참)

ㄷ. $y=f(x)$와 직선$y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나면 $f(x)$의 극대값은 a이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

153. 정답 108

$V(x)=\dfrac{1}{2}\times\{1+(1+2\sin\theta)\}\times\cos\theta\times 8$

$V(x)=8(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)$

$V'(x)=8(1-2\sin^2\theta-\sin\theta)=0$ 에서 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 부피는 최대가 된다.

$\therefore\ V=6\sqrt{3},\ V^2=108$

154. 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{PS}}=x$, (기둥높이)$=\sqrt{16-x^2}$,

사각기둥의 부피 $V(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$ 이다.

미분하면 $V'(x)=2x\sqrt{16-x^2}+x^2\dfrac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$

$=\dfrac{2x(16-x^2)-x^3}{\sqrt{16-x^2}}=\dfrac{32x-3x^3}{\sqrt{16-x^2}}$

$\mathrm{V}'(x)=0$의 해는 부피를 최대로 만든다. $\therefore\ x=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

155. 정답:②

[출제의도] 삼각함수의 미분을 이용하여 최소값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

[해설]

새로운 도로와 기존 도로 PA, PB가 만나는 점을 각각 C, D라 하고 마을을 점Q라 하면

$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{QC}}+\overline{\mathrm{QD}}=\dfrac{16}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}$

$f(\theta)=\dfrac{16}{\sin\theta}+\dfrac{2}{\cos\theta}$라 놓으면

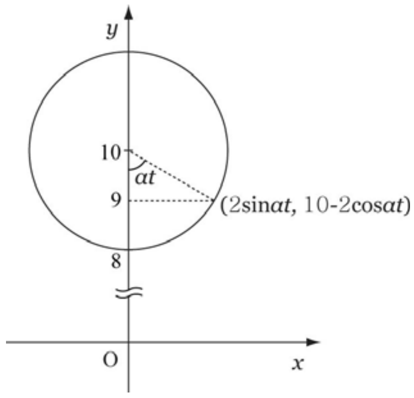
$f'(\theta)=-\dfrac{16\cos\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}=0$에서

$16\cos^3\theta-2\sin^3\theta=0$, $\tan^3\theta=8$ $\therefore\ \tan\theta=2$

이때 $f(\theta)$는 최소이므로 새로운 직선도로의 길이가 최소가 되기 위한 $\tan\theta$의 값은 2이다.

156. 정답: 70

[출제의도] 미분을 이용하여 수학외적 문제해결하기



날개의 끝을 점 $(x,\ y)$라 하면

$x^2+(y-10)^2=4$ …㉠

$y=9$일 때, $\dfrac{dy}{dt}=4\pi(m/s)$

시간에 따른 각의 변화율을 α라 하면

$x=2\sin\alpha t,\ y=10-2\cos\alpha t$

$y=9$를 ㉠에 대입하면 $x=\sqrt{3}$

따라서 $\sin\alpha t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y=10-2\cos\alpha t$를 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dy}{dt}=2\alpha\sin\alpha t(m/s)$ $\therefore\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\pi$

따라서 한 바퀴 도는데 걸리는 시간은

$k=\dfrac{2\pi}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore k^2=\dfrac{3}{4}$

$\therefore 10(p+q)=70$

157. 정답 $\dfrac{11}{3}$

[해설]

$\dfrac{dx}{dt}=2\cos t+2\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=3\cos 3t$ 이므로 점P의 속력 $|v|$는

$|v|=\sqrt{(\dfrac{dx}{dt})^2+(\dfrac{dy}{dt})^2}$

$=\sqrt{(2\cos t+2\sin t)^2+9\cos^2 2t}$

$=\sqrt{4+4\sin^2 2t+9(1-\sin^2 2t)}$

$=\sqrt{-9\sin^2 2t+4\sin 2t+13}$

$\sin t=A$ 라 하면 $-1\le A\le 1$이고

$|v|=\sqrt{19A^2+4A+13}$ 이므로 $|v|=\frac{2}{9}$일 때, 최댓값

$\sqrt{\frac{121}{9}}=\frac{11}{3}$이다

158. 정답 ⑤

$\mathrm{P}(x,\ x^{\frac{3}{2}})$에 대하여

$\overline{\mathrm{OP}}=l=\sqrt{x^2+x^3}$

$\frac{dl}{dt}=\frac{1}{2}(x^2+x^3)^{-\frac{1}{2}}(2x+3x^2)\frac{dx}{dt}$

$x=3$일 때, $\frac{dl}{dt}=11$이므로 $\therefore\ \frac{dx}{dt}=4$

159. 정답 ④

$\angle\mathrm{AOP}=\theta$라 하면 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=10\theta$

A의 속력이 2이므로 $\frac{d}{dt}(10\theta)=10\frac{d\theta}{dt}=2$

$\therefore\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{5}$

P의 좌표는 $(10\sin\theta, 10\cos\theta)$이므로

$y=10\cos\theta$

$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(10\cos\theta)$

$=10\cdot(-\sin\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}$

$=-2\sin\theta=-1$

160. 정답 16

채워지는 물의 양 V는

$V=\pi\int_{-1}^{h}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{h}=\pi\left(h-\frac{1}{3}h^3+\frac{2}{3}\right)$

양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{dV}{dt}=\pi(1-h^2)\frac{dh}{dt}$

여기에 부피의 증가량 0.2π와 높이가 $\frac{3}{4}$이므로 $h=-\frac{1}{4}$를 대입하면

$0.2\pi=\pi\left(1-\frac{1}{16}\right)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{16}{75}$이므로 $75v=75\times\frac{16}{75}=16$

161. 정답: 20

부피와 높이의 변화율에 대한 문제를 정적분 을 이용

그릇에 깊이가 $h$cm가 되도록 물을 넣었을 때 물의 부피 V는

$V=\int_0^h\pi(\sqrt{9+h^2})^2dh$

$=\int_0^h\pi(9+h^2)dh$

$=\pi\left[9h+\frac{1}{3}h^3\right]_0^h=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$

$V=\pi\left(9h+\frac{1}{3}h^3\right)$ 따라서

$\frac{dV}{dt}=\pi(9+h^2)\frac{dh}{dt}$

$\frac{dV}{dt}=260\pi$이고 $h=2$이므로

$260\pi=\pi(9+4)\left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}$

$\therefore\ \left[\frac{dh}{dt}\right]_{h=2}=\frac{260\pi}{13\pi}=20$ (cm/초)

162. 정답 ⑤

$S=\pi(\sin x)^2$ 에서 $\frac{dS}{dt}=2\pi\sin x\cos x\times\frac{dx}{dt}$

$x=\frac{t^2}{\pi}$ 로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{\pi}$ 이고 $t=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $x=\frac{\pi}{4}$ 이다.

$\therefore\ \left[\frac{dS}{dt}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}=2\pi\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times1=\pi$

163. 정답: 503

매개변수가 있는 함수의 미분을 이용하기

점프대를 출발한지 t초 후의 탄력줄의 길이를 $l\ (\geq 20)$, 반지름의 길이를 r라 하면 탄력줄의 부피 V는 $\mathrm{V}=\pi r^2 l$(일정)이고 l과 r는 모두 t의 함수이다. 이 식을 시각 t에 대하여 미분하면

$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\pi\left(r^2\frac{dl}{dt}+2rl\frac{dr}{dt}\right)=0$

($\because$부피가 변하지 않으므로)

$r^2\frac{dl}{dt}+2rl\frac{dr}{dt}=0$

탄력줄의 길이가 25m일 때,지나는 순간 $l=25$(m),

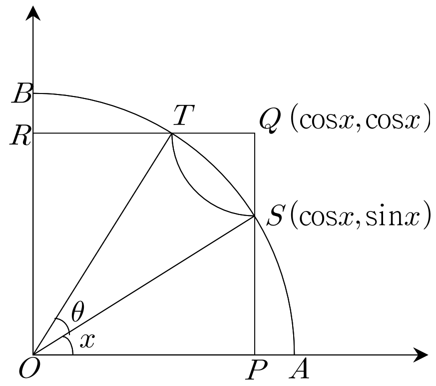
$r=\frac{3}{100}$(m), $\frac{dl}{dt}=10$(m/초)이므로

$\left(\frac{3}{100}\right)^2\times10+2\times\frac{3}{100}\times25\frac{dr}{dt}=0$에서

$\frac{dr}{dt}=-\frac{3}{500}$(m/초)

$\therefore\ a+b=500+3=503$

164. 정답 20



주어진 그림의 O를 원점, 직선 OA를 x축의 양의 방향, 직선 OB를 y축의 양의 방향으로 하여 좌표평면 위에 표현하고 직선 OS와 x축이 이루는 각을 x라고 하면 점 S, Q는 $S(\cos x, \sin x)$, $Q(\cos x, \cos x)$ 이고 $\overline{QS} = \cos x - \sin x$ 이다. 넓이 D를 구하면

$$D = \cos^2 x - \frac{\pi}{4}(\cos x - \sin x)^2 \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos^2 x - \frac{\pi}{4}(1 - \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\sin 2x$$

$$D' = -\sin 2x + \frac{\pi}{2}\cos 2x$$

$$D' = -\sin 2x + \frac{\pi}{2}\cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{\pi}{2}$$

가 성립하는 x에서 D는 극대이면서 최댓값이 된다.

$$\therefore 10\pi\tan\theta = 10\pi\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 10\pi\cot 2x$$

$$= 10\pi \times \frac{2}{\pi} = 20$$

165. 정답:②

[출제의도] 미분법

$v = \sqrt{20y}$ 를 t에 관하여 미분하면

$$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{\sqrt{20y}} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{10}{v} \cdot \frac{dy}{dt} \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

한편, 물탱크에 있는 물의 양의 순간 변화율은 $120\frac{dy}{dt}$이고,

빠져나가는 순간의 물의 양은 $\frac{1}{5} \times v$이다.

이 때, 두 물의 양은 부호만 다르므로

$$\left[\ 120\frac{dy}{dt} = -\frac{v}{5}\ \right] \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)식에서 얻은 $\frac{dy}{dt}$를 (1)식에 대입하여 정리하면

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{60}$$

이 때, $y = 5$일 때 $v = 10$, $y = \frac{5}{4}$일 때, $v = 5$이므로

$$5 = 10 + \int_0^t -\frac{1}{60}dt$$

$$-5 = -\frac{1}{60}t \qquad \therefore\ t = 300$$

따라서, 구하는 시간은 [300] (초)이다.

166. 정답 6

[출제의도] 미분을 이용하여 속력을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

t초 후에 $\mathrm{P}(10t + \cos t, \sin t)$이고, 직선의 방정식은

$y = \frac{\sin t}{\cos t}(x - 10t)$이므로 점 Q의 x 좌표는

$$x = 10t + 2\cot t$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dt} = 10 - 2\csc^2 t \quad \therefore\ \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t = \frac{3}{4}\pi} = 6$$

167. 정답 ③

x	$x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$
$f'(x)$		0		1
$f''(x)$	+		+	0
$f(x)$		$\frac{\pi}{2}$		π

위의 표에서 $x<1$, $1<x<3$일 때, $f''(x)>0$이므로 $f'(x)$는 증가하고 이 구간에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.

또한, $x=1$일 때, $f'(x)=0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌게 된다. 따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고 그래프는 아래로 볼록하다.

ㄱ. $g(x) = \sin(f(x))$에서

$g'(x) = \cos(f(x)) \times f'(x)$

$\therefore\ g'(3) = \cos(f(3)) \times f'(3)$

$= \cos\pi \times f'(3)$

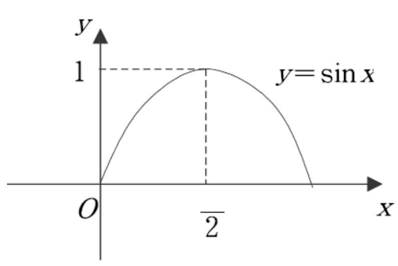
$= (-1) \times 1 = -1$ (참)

ㄴ. $1<x<3$에서 $f(x)$ 의 그래프는 아래로 볼록하며 증가하므로

$$\frac{\pi}{2} < f(x) < \pi$$

따라서 $\frac{\pi}{2} < f(x) < \pi$에서

$g(x) = \sin(f(x))$의 그래프는 감소하면서 위로 볼록하다.



$x=1$일 때,

$g'(1)=\cos(f(1))\times f'(1)$

$=\cos\frac{\pi}{2}\times 0=0$

$x=3$일 때,

$g'(3)=\cos(f(3))\times f'(3)$

$=\cos\pi\times 1=-1$

따라서 $1<a<b<3$에서

$-1<\frac{g(b)-g(a)}{b-a}<0$ (참)

ㄷ. $g''(x)=-\sin(f(x))\times f'(x)\times f'(x)$

$+\cos(f(x))\times f''(x)$

$x=1$일 때,

$g''(1)=-\sin(f(1))\times f'(1)\times f'(1)$

$+\cos(f(1))\times f''(1)$

$=-\sin\frac{\pi}{2}\times 0\times 0+\cos\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}=0$

이지만 $x<1$과 $x>1$에서 $g''(x)$의 부호가 같으므로

$x=1$에서 변곡점을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

168. 정답 ⑤

[출제의도] 미분을 이용하여 함수의 그래프추론하기

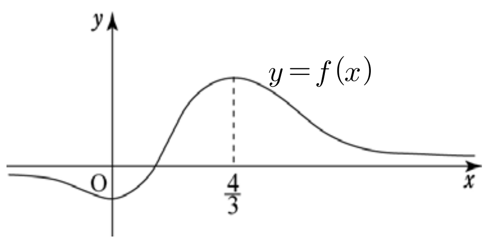
ㄱ. $f'(x)=\frac{-x(3x-4)}{(x^2-2x+2)^3}$, $f'(1)=1$

접선의 방정식은 $y=x-\frac{1}{2}$ 이므로

∴ 접선과 원점 사이의 거리는 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ∴ 참

ㄴ. $x=0$에서 최솟값 $-\frac{1}{8}$ 을 갖는다. ∴ 참

ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)-f(10)=0$ 의 근은 2 개다. ∴ 참

169. 정답 251

[출제의도] 미분을 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

분침의 속력 : $\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$

시침의 속력 : $\frac{\frac{\pi}{6}}{60}=\frac{\pi}{360}$

3시 정각에서 t(분) 후 분침과 시침이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 4시 정각 근처에서

$\theta=\frac{\pi}{30}t-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{360}t\right)=\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{360}t$

$\angle POQ=2\pi-\theta$ 이므로

$S=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sin(2\pi-\theta)=3\cos\frac{11\pi}{360}t$

$\frac{dS}{dt}=-3\times\frac{11\pi}{360}\times\sin\frac{11\pi}{360}t$

$t=60$일 때, $\frac{dS}{dt}=\frac{11}{240}\pi$

∴ $p+q=251$

170. 정답:25

[출제의도] 변화율을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\angle PAB=\theta$라 하면 $\overline{BP}=10\sin\theta$, $\overline{AQ}=10\cos2\theta$

$\frac{d}{dt}\overline{BP}=10\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{20\cos\theta}$

$\frac{d}{dt}\overline{AQ}=-20\sin2\theta\frac{d\theta}{dt}=-40\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dt}=-2\sin\theta$

$t=5$일 때, $10\sin\theta=\frac{5}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{1}{4}$이다.

$p=-2\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$이므로 $100p^2=25$이다.

171. 정답:10

[출제의도] 도함수를 활용하여 수학내적문제 해결하기

$\frac{dx}{dt}=2$ 이고 $10x=\sqrt{x}$ 에서 $x=\frac{1}{100}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{dx}{dt}$

$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{x=\frac{1}{100}}=10$

172. 정답 24

$f'(x)=4x^3+8x$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(1)=24$

173. 정답 28

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$에서

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x+1)-8\}=0$이어야 하므로 $f(3)=8$

$x+1=t$로 놓으면

$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{4}f'(3)=5$

$\therefore\ f'(3)=20$

$\therefore\ f(3)+f'(3)=28$

174. 정답 41

$f'(x)=2x(x^2+x-2)+(x^2+1)(2x+1)$이므로

$f'(2)=4\cdot4+5\cdot5=16+25=41$

175. 정답 ③

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore\ \lim_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(1)=2$ $\quad\therefore\ f(2)=1$

그러므로 주어진 식은

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$에서

$g'(f(x))\cdot f'(x)=1\quad\therefore\ f'(x)=\frac{1}{g'(f(x))}$

$\therefore\ f'(2)=\frac{1}{g'(f(2))}=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3}$

176. 정답 ③

ㄱ. $x=1$에서 두 함수의 함수값이 $f(1)=0$이므로 연속이고

좌미분계수: $\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-0}(x+1)=2$

우미분계수: $\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{2}{3}\lim_{x\to1+0}\frac{x^3-1}{x-1}$

$=\frac{2}{3}\lim_{x\to1+0}(x^2+x+1)=\frac{2}{3}\cdot3=2$

$x=1$에서 미분계수$\therefore\ f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$

따라서$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. [참]

ㄴ. $x=0$에서 두 함수의 함수값이 $|f(0)|=1$ 이므로 연속이고

$x<0$일 때 $f(x)>0$이므로 $|f(x)|=f(x)=1-x$

좌미분계수 $\lim_{x\to-0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{(1-x)-1}{x}=-1$

$0<x<1$일 때 $f(x)<0$이므로 $|f(x)|=-f(x)=1-x^2$

우미분계수 $\lim_{x\to+0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{(1-x^2)-1}{x}=0$

따라서 $\lim_{x\to-0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\neq\lim_{x\to+0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$이므로

$x=0$에서 미분가능하지 않다. [거짓]

ㄷ. $g(x)=x^kf(x)$라 하면 $g(0)=0$이므로 연속이다.

좌미분계수 $\lim_{x\to-0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{x^k(1-x)}{x}$

$=\lim_{x\to-0}x^{k-1}(1-x)$

우미분계수 $\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{x^k(x^2-1)}{x}$

$=\lim_{x\to+0}x^{k-1}(x^2-1)$

$\lim_{x\to-0}x^{k-1}(1-x)=\lim_{x\to+0}x^{k-1}(x^2-1)=0$에서 $k\geqq2$이므로

$x^kf(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수는 2이다. [참]

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

177. 정답 50

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$이므로 $x=a$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$ 이어야 한다.

따라서 $a^3-3a^2+3a-1=(a-1)^3=0$에서 $a=1$

$\therefore\ b=f(1)=7$

$\therefore\ a^2+b^2=1^2+7^2=50$

178. 정답 14

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$에서

$x=-2$ or 2이므로 증감표에 의해

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, $f(x)$는 $x=-2$일 때 극대값을 갖고, 극대값은

$f(-2)=-8+24=16$

$\therefore\ a=-2,\ b=16$

$\therefore\ a+b=14$

179. 정답 ②

삼차함수의 그래프가 원점에 대하여 대칭, 즉, 기함수이므로

$f(x)=ax^3+bx$ ⋯ ㉠ 로 놓을 수 있다.

$x=1$에서 극값을 가지므로, 미분하면 $f'(x)=3ax^2+b$

에서 $f'(1)=3a+b=0$ $\quad\therefore\ b=-3a$

이것을 ㉠에 대입하면 $f(x)=ax^3-3ax=ax(x^2-3)=0$

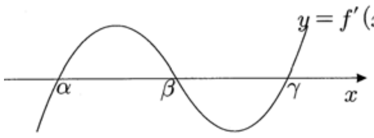
에서 삼차함수의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표는

$x=0,\ x=\pm\sqrt{3}$이다. 따라서 양수는 $\sqrt{3}$이다.

180. 정답 ③

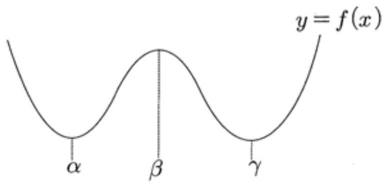
ㄱ. $f'(x)=0$은 최고차항의 계수가 양수인 삼차방정식이고, 서로 다른 세 실근을 가지므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은

다음과 같다.

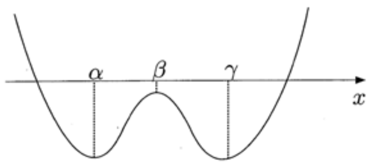


$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극대값을 갖는다. [참]

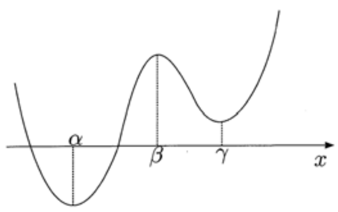
ㄴ. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



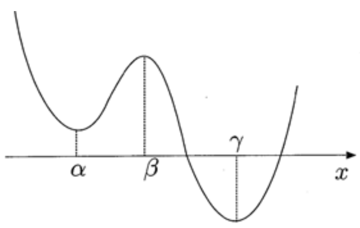
따라서, $f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$인 경우는 다음과 같다.
(i) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)<0$, $f(\gamma)<0$



(ii) $f(\alpha)<0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)>0$



(iii) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$

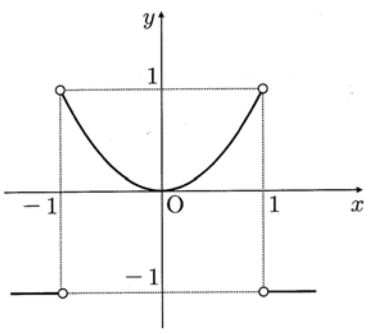


그러므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. [참]

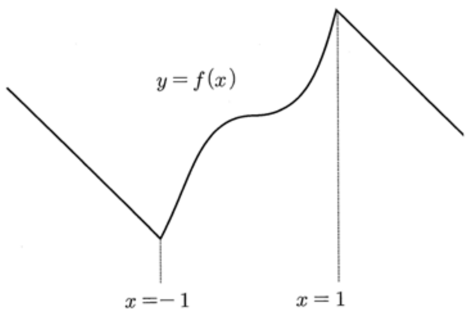
ㄷ. ㄴ의 (iii)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 모두 β보다 크다. [거짓]

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

181. 정답 ④
도함수 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 연속함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

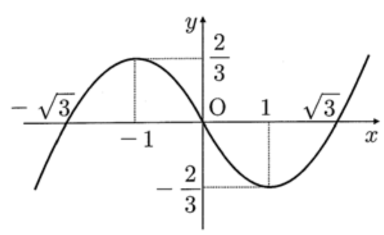


ㄱ. $\lim\limits_{x\to-1-0} f'(x)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to-1+0} f'(x)=1>0$이므로
$f(x)$는 $x=-1$에서 감소상태에서 증가상태로 바뀐다.
따라서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소값을 갖는다. [참]

ㄴ. 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이 아니므로 $f(x)=f(-x)$ 가 성립하지 않는다.[거짓]

ㄷ. $y=f(x)$의 그래프에서 $f(1)>f(0)$이므로 $f(0)=0$이면 $f(1)>0$ 이다. [참]
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

182. 정답 12
방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$에서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$로 놓으면
$f'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$
$x=-1$에서 극대값 $f(-1)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$
$x=1$에서 극소값 $f(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$
를 가진다. 따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 다음과 같다.



따라서 방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면
$-\frac{2}{3}<k<\frac{2}{3}$이어야 한다.
곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로
$0\le k<\frac{2}{3}$에서 세 실근을 $\alpha<\beta<\gamma$라 하면
$\alpha<\beta<0$, $\gamma>0$이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta+\gamma=0$이므로
$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma$
한편, $0\le k<\frac{2}{3}$에서 $\gamma\ge\sqrt{3}$ 이므로

이 때, $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$가 최소가 되려면 $\gamma=\sqrt{3}$ 이어야 한다.

또한, $-\dfrac{2}{3}\leqq k\leqq 0$으로 놓고 α, β, γ의 위치를 바꾸어도

계산 결과는

마찬가지이다.

따라서 최솟값은 $m=2\sqrt{3}$ 이므로 $m^2=12$

183.[정답] 14

$f'(x)=2(x-1)(x-4)+(x-1)^2$

$=(x-1)\{2(x-4)+(x-1)\}$

$=(x-1)(3x-9)$

$=3(x-1)(x-3)$

따라서 $x=3$ 에서 극솟값 $f(3)=(3-1)^2(3-4)+a$를 가지는데

조건에

서 극솟값이 10 이므로

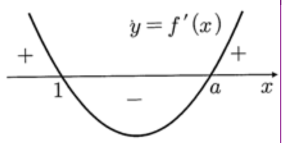
$(3-1)^2(3-4)+a=10 \quad \therefore\ a=14$

184. 정답 ④

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax-4a+2$에서

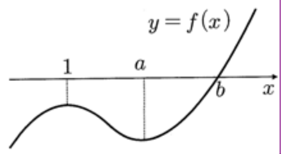
$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$

$=\boxed{6(x-a)(x-1)}$



$a>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서

$\boxed{\text{극대}}$값 을 가진다.



그런데 $f(1)=-a+1<0$이고,

$f(b)=0$이므로

오른쪽 그림과 같이 $a\boxed{<}b$

185. 정답 ③

ㄱ. 사차함수 $f(x)$에 대하여 주기가 2인 주기함수 $g(x)$가 실수전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은

$f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f(1)=1+a+b+c+d$

$f(-1)=1-a+b-c+d$

$f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$,

$\therefore\ c=-a$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$이고

$f'(1)=4+3a+2b+c$

$f'(-1)=-4+3a-2b+c$

$f'(1)=f'(-1)$이므로 $4+2b=0$

$\therefore\ b=-2$

즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이고

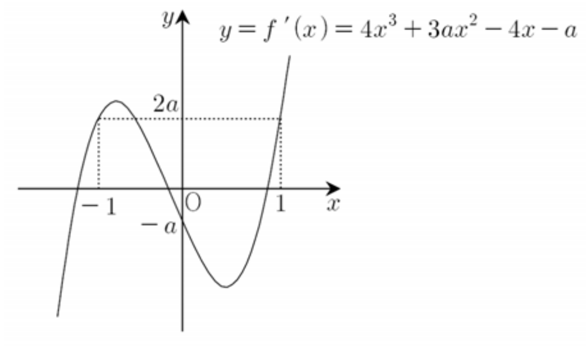
$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이다.

$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$이므로

$f'(0)f'(1)=-2a^2\leq 0$ (거짓)

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$ 이고 $f'(1)>0$이므로 $a>0$

$f'(0)=-a<0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

186. 정답 ⑤

ㄱ. (A의 평균속도)$=\dfrac{(\text{이동거리})}{40}$ (C의

평균속도)$=\dfrac{(\text{이동거리})}{40}$

이 때, 이동거리가 같으므로

(A의 평균속도)=(C의 평균속도) [참]

ㄴ. $v'(t)=0$인 시각에서 가속도는 0이므로 B, C 두

그래프에서 접선의

기울기가 0인 순간이 적어도 한 번 존재한다. [참]

ㄷ. 속도 그래프와 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 움직인 거리와 같고 세자동차의 움직인 거리는 동일하므로 영역의 넓이는 모두 같다. [참]

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

187. 정답 ②

곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ 즉, $y=ex$이다.

이 직선이 $y=2\sqrt{x-k}$와 접하므로

$ex=2\sqrt{x-k}$, $e^2x^2=4(x-k)$

$e^2x^2-4x+4k=0\cdots\cdots$㉠

에서 ㉠이 중근을 갖는다.

$\dfrac{D}{4}=4-e^2\cdot 4k=0$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{e^2}$

188.[정답] ⑤

음함수의 미분법에 의하여

$3y^2y'=\dfrac{-2x}{5-x^2}+y+xy'$,

$(3y^2-x)y'=\dfrac{-2x}{5-x^2}+y$, (2,2)를 **대입하여 정리하면**

$10y'=-2$

$\therefore y'=-\dfrac{1}{5}$

189. 정답 ③

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim\limits_{x\to1}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(1)=2$ $\therefore f(2)=1$

그러므로 주어진 식은

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=3$$

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $g(f(x))=x$에서

$g'(f(x))\cdot f'(x)=1$ $\therefore f'(x)=\dfrac{1}{g'(f(x))}$

$\therefore f'(2)=\dfrac{1}{g'(f(2))}=\dfrac{1}{g'(1)}=\dfrac{1}{3}$

190. 정답 ④

t초 후 $\angle POA=\dfrac{\pi}{2}t$, $OQ=1-t$이므로

S=부채꼴 OAP$-$삼각형 OQP

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}t-\dfrac{1}{2}\cdot(1-t)\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}t$

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\left\{\sin\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}(t-1)\cos\dfrac{\pi}{2}t\right\}$

$\dfrac{dS}{dt}_{t=1}=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

191. 정답 83

선분 OP가 x축과 이루는 각의 크기를 θ라 하면 색칠한 부분의 넓이는

$S=$(반원의 넓이)$+$(2개의 부채꼴의 넓이)

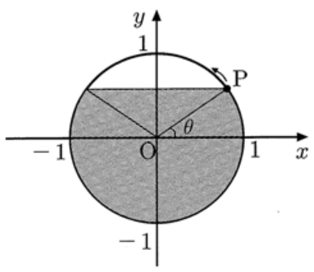
$+$(이등변삼각형의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\pi+2\times\dfrac{1}{2}\times1^2\times\theta+\dfrac{1}{2}\times1^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$=\dfrac{1}{2}\pi+\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

$=\dfrac{1}{2}\pi+\dfrac{t}{40}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{20}$

$(\because\ \theta=\dfrac{t}{40})$



$\therefore\ \dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{40}\cos\dfrac{t}{20}$

따라서 점 P의 좌표가

$\left(\dfrac{\sqrt3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$일 때

$\theta=\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{t}{40}$ 에서 $\dfrac{t}{20}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{40}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{40}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{80}$

$\therefore\ a+b=83$

[별해] 시각 t일 때, 선분$\overline{OP}$와 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 하면

$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}$이고, 점P의 좌표는 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$이다.

이 때, 어두운 부분의 넓이 S는

$S=\dfrac{\pi}{2}+\theta+\sin\theta\cos\theta=\dfrac{\pi}{2}+\theta+\dfrac{1}{2}\sin2\theta$

점 P가 $\left(\dfrac{\sqrt3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$을 지날 때 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

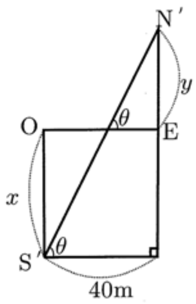
$\dfrac{dS}{dt}=(1+\cos2\theta)\dfrac{d\theta}{dt}=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{40}=\dfrac{3}{80}=\dfrac{b}{a}$

$\therefore a+b=83$

192. 정답 ③

문제의 그림에서 t초 후의 갑의 위치를 S$'$, 을의 위치를 N$'$라 하고

$\overline{OS'}=x$, $\overline{EN'}=y$라 두면 $\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=4$이다.



$\angle N'S'E'=\theta$이므로 $\tan\theta=\dfrac{x+y}{40}$이다.

양변을 t에 관해 미분하면

$\sec^2\theta\cdot\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\right)$ ⋯ ①

$t=20$이므로 $x=60$, $y=40$, $\tan\theta=\dfrac{5}{2}$가 된다.

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{25}{4}=\dfrac{29}{4}$

①에서 $\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{40}\left(\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}\right)\cdot\dfrac{1}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{40}(3+4)\cdot\dfrac{4}{29}=\dfrac{7}{290}$

193. 정답 ③

ㄱ. $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$의 정의역은

$\{x|0<x<10\}$

이때,

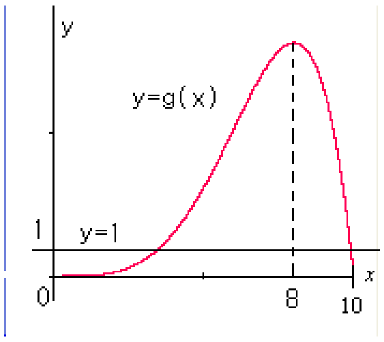
$f(x)=\ln x^4+\ln(10-x)=\ln x^4(10-x)$에서

$g(x)=x^4(10-x)=-x^5+10x^4$로 놓으면

$g'(x)=-5x^4+40x^3=-5x^3(x-8)$이므로

$x=8$에서 극댓값이자 최댓값

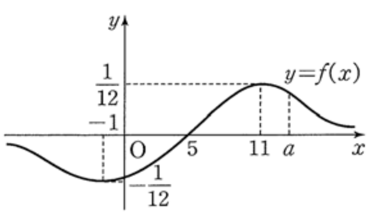
$g(8)=8^4(10-8)=2^{13}$을 갖는다.
이때, $f(x)=\ln g(x)$에서 밑 e가 1보다 크므로 $f(x)$는 $x=8$일 때 최댓값 $f(8)=\ln g(8)=\ln 2^{13}=13\ln 2$ 를 갖는다. (참)
ㄴ. 곡선 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 $f(x)=\ln g(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=1$이고
$y=g(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 두 점에서 만나므로
방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)
ㄷ. $y=e^{f(x)}=e^{\ln g(x)}=g(x)^{\ln e}=g(x)$이다.
$g'(x)=-5x^4+40x^3$이므로
$g''(x)=-20x^3+120x^2=-20x^2(x-6)=0$
에서 $g(x)$는 $x=6$일 때 변곡점이다.
즉, 곡선 $y=g(x)$는 $x<6$일 때 아래로 볼록이고, $x>6$일 때 위로 볼록이다. (거짓)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

194. 정답 ⑤
ㄱ. $f'(x)=1+\cos x$
$f''(x)=-\sin x$
개구간 $(0,\ \pi)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록이다. ∴ 참
ㄴ. $g'(x)=f'(f(x))\cdot f'(x)$
$=\{1+\cos(x+\sin x)\}(1+\cos x)$
개구간 $(0,\ \pi)$에서 $g'(x)>0$이므로 함수 $g(x)$는 증가한다.
∴ 참
ㄷ. $g(0)=f(f(0))=f(0)=0$
$g(\pi)=f(f(\pi))=f(\pi)=\pi$
$\dfrac{g(\pi)-g(0)}{\pi-0}=1$이고 $g(x)$는 미분가능이므로 평균값 정리에 의해 $g'(x)=1$인 x가 구간 $(0,\ \pi)$에 존재한다. ∴ 참

195. 정답 11
점근선 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=0$이므로 $y=0$을 점근선으로 한다.

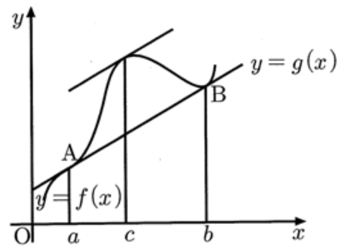


$$f'(x)=\frac{36-(x-5)^2}{\{(x-5)^2+36\}^2}=\frac{(1+x)(11-x)}{\{(x-5)^2+36\}^2}=0$$

$x=-1$에서 극소값 $-\dfrac{1}{12}$, $x=11$에서 극대값 $\dfrac{1}{12}$이므로
$a\leqq-1$, $a\geqq 11$인 범위에서 최대값과 최소값의 합이 0이다.
∴ $a\geqq 11$
따라서, a의 최대값은 11

196. 정답 ①
$f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.
ㄱ. $f(x)$가 기함수이므로 $f'(x)$는 우함수이다.
$f'(-x)=-f'(x)$ [참]
ㄴ. [반례] $f(x)=\sin x$이라 하면
$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\neq 0$ [거짓]
ㄷ. ㄱ에서 $f'(x)$가 우함수이므로 $f'(x)$는 $x=a$에서 극대값을 가지면
$x=-a$에서도 극대값을 갖는다.[거짓]
따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

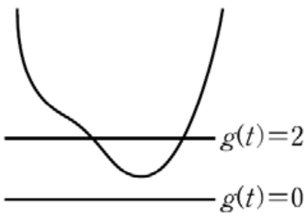
197. 정답 ⑤
$y=g(x)$가 $f(x)$의 점 $\mathrm{A}(a, f(a))$에서의 접선이므로
$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$
또, $g(x)$가 점 $\mathrm{B}(b,\ f(b))$에서 $f(x)$에 접하므로
$f'(a)=g'(b)=f'(b)$
$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$
ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x=b$에서 접하므로
$f(b)=g(b)$, $f'(b)=g'(b)$
∴ $h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$ [참]
ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 접하므로
$f(a)=g(a), f'(a)=g'(a)$
∴ $h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$

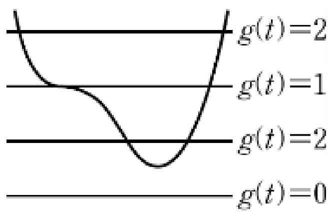


한편, 모든 실수의 구간에서 함수 $h(x)$는 미분가능한 함수이고
$h(a)=h(b)=0$이므로
평균값의 정리(롤의 정리)에 의하여 $h'(c)=0$을 만족하는 실수 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.
그러므로 방정식 $h'(x)=0$은 적어도 $x=a,\ b,\ c$의 3개의 근을 갖는다.
[참]
ㄷ. $g(x)$는 일차함수이므로 모든 실수 x에 대하여
$g''(x)=0$이다.
∴ $h''(x)=f''(x)-g''(x)=f''(x)$
그런데, 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로
$f''(a)=0$
$h''(a)=f''(a)=0$이고 $f''(x)$ 는 $x=a$의 좌우에서 부호가 반대이다.

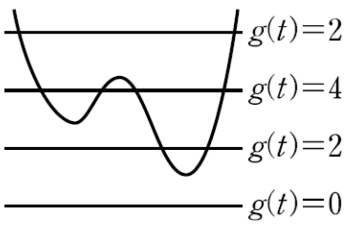
따라서 점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다. [참]
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

198.정답] 147
[해설]
만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.

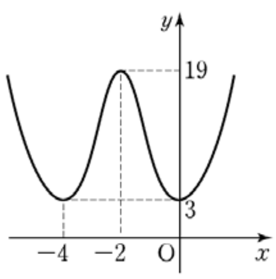


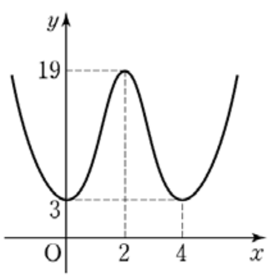


따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.
$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로
$k=3$
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로 $f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$
$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서
(극댓값)$=f\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{\alpha^4}{16}+3=19$
$\therefore \alpha=\pm4$
그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3,\ f(-2)=4\times36+3=147$