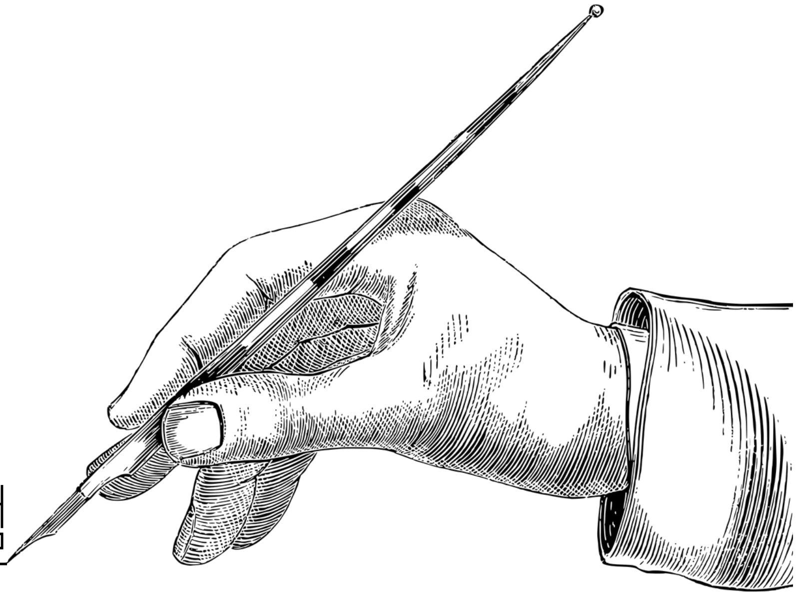
2024 삼도극
N제 해설



By UR독존

feat. 삼극사기

List _
2024 4의 규칙 시즌 1
2024 드릴드 전체
2024 드릴 전체

4의 규칙

11. $\angle PAO = \alpha$ 라 하자. θ가 0으로 갈 때 α도 0으로 간다는 것은 도형 상에서 확인 가능하다.
$\angle PQA = \alpha$ (접현각), $\angle APQ = \alpha + \theta$
원주각-중심각 관계에 의해 현 PA의 중심각은 2α → $\overline{AP} = 2\alpha$
원의 중심을 C라 하자. $\angle QAP = \pi - (2\alpha + \theta)$
→ C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\angle QCH = 2\alpha + \theta$ → $\overline{QH} = 2\alpha + \theta = \frac{1}{2}\overline{PQ}$
∴ $\overline{PQ} = 4\alpha + 2\theta$

$\overline{OQ}$는 θ가 0으로 갈 때 1로 가므로, $\overline{OP} \approx 1$ → ΔOPA에서 AtD를 사용하면, $\alpha : \theta = 1 : 2\alpha$
→ $\alpha = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$ α 차수가 낮으므로 $\overline{PQ} \approx 4\alpha$→ $S(\theta) \approx \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2}\theta) \times \sqrt{2\theta} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\theta}$ → 2 (답)

12. 삼각형 APO는 이등변 삼각형이므로 $\angle OAP = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ → $\angle OQP = \frac{3\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$, $\angle OBP = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$
∴ $\angle BPQ = \frac{\pi}{4}$ 이다. $\overline{BP} = \theta$, 삼각형 BPQ는 $\overline{PQ}$를 빗변으로 하는 직각 이등변 삼각형으로 근사된다.
$S(\theta) \approx \frac{1}{2}\theta^2$ → $\frac{1}{2}$ (답)

13. 원의 반지름이 1이므로 $\overline{AO} = \frac{1}{\theta}$, 점 B에서 원에 그은 두 접선의 가운데를 $\overline{BO}$가 관통하므로
각 $OBC = \frac{\theta}{2}$이다. $\angle ACB = \pi - 2\theta$ → 각 $BOC = \frac{3}{2}\theta$ → AtD에 의해 $3 \times \overline{OC} = \overline{BC}$
삼각형 AOB에서도 AtD를 사용하면, $\overline{BO} = \frac{2}{\theta}$ → $\overline{AB} = \frac{3}{\theta}$ & $\overline{BC} = \frac{3}{2\theta}$
∴ $\frac{1}{2} \times \frac{2}{\theta} \times \frac{3}{2\theta} \times \frac{\theta}{2} = S(\theta) = \frac{3}{4\theta}$ → $\frac{3}{4}$ (답)

14. $\angle BOC = 8\theta$, $\overline{AB} \approx 1$ → AtD에 의해 $\overline{BC} \approx \frac{4}{3}$ → $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{6\theta} = S(\theta) = \frac{1}{9\theta}$ → $\frac{1}{9}$ (답)

15. 삼각형 ABR에서 Tip을 사용하면, $\overline{BR} \approx 1$, $\overline{AR} = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta$
삼각형 ABR과 삼각형 QPR은 1:2 닮음이므로 $\overline{QR} = \frac{4}{\sqrt{3}}\theta$ → $S(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\theta \times \frac{4}{\sqrt{3}}\theta \times \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}\theta^2$
∴ $24 \times \frac{4}{3} = 32$ (답)

16. 원의 중심은 선분 PQ의 중점에 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면, $\overline{CH}$의 중점에 원의 중심이 있다. → (지름)$=\theta$ / 삼각형 CHB에서 $\overline{BC} = \theta$, $\overline{BH} = \theta^2$, $\angle HCB = \angle CQP = \theta$
할선 정리를 사용하면, $\theta^4 = \overline{BQ} \times \theta$ → $\overline{CQ} \approx \overline{BC} = \theta$ → $\overline{PC} = \theta^2$ ∴ $\frac{1}{2}\theta^3 \to 50$ (답)

17. $\overline{\mathrm{PA}}=\theta$ → $\overline{\mathrm{AB}}\times\angle\mathrm{PBA}=\overline{\mathrm{PA}}$ → $\angle\mathrm{PBA}\approx\dfrac{\theta}{2}$ → 원주각-중심각 관계에 의해 $\angle\mathrm{QOA}\approx\theta$

부채꼴 OQA에 대해 $\overline{\mathrm{PQ}}$는 sec자리와 cos자리 샌드위치 정리에 의해 $\dfrac{1}{2}\theta^2$ → $S(\theta)\approx\dfrac{1}{2}\times1(\overline{\mathrm{OP}})\times\dfrac{1}{2}\theta^2\times\dfrac{1}{2}\theta$ → $\dfrac{1}{8}$ (답)

18. $\dfrac{\pi}{4}-\theta=\alpha$라 하자. $\angle\mathrm{BAP}=\alpha$ → 원주각-중심각 관계에 의해 $\angle\mathrm{BOQ}=\alpha$

직선 $\overline{\mathrm{OQ}}$와 원이 만나는 교점 중 제1사분면에 있는 교점을 R, $\overline{\mathrm{BP}}$의 중점을 M라 하자.

$1-l(\theta)=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QM}}+\overline{\mathrm{MR}}$ / $\overline{\mathrm{BP}}=2\alpha$ (기본근사) → $\overline{\mathrm{QM}}=\alpha$ / 부채꼴 OBR의 cos자리$=\overline{\mathrm{MR}}=\dfrac{1}{2}\alpha^2$

$\therefore$ $1-l(\theta)=\alpha+\dfrac{1}{2}\alpha^2\approx\alpha$ (Theta-d 사용했으면 바로 구할 수 있었음 _ 활꼴 안의 길이이므로 차수 높을 것이라 예측 후 $\overline{\mathrm{QR}}\approx\overline{\mathrm{QM}}$으로 바로 할 수도 있다는 의미)

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}\alpha)^2=\alpha^2$ $\therefore$ 1 (답)

19. $\angle\mathrm{PAQ}=\angle\mathrm{QAB}=\dfrac{\theta}{2}$ → Cleaner를 사용하여 $T(\theta)\approx\Delta\mathrm{PCQ}$ & $\overline{\mathrm{AC}}\approx1$ & $\angle\mathrm{PCQ}=\theta$

삼각형 CAP가 이등변 삼각형이므로, $\overline{\mathrm{PC}}\approx1$

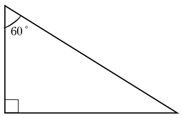
$\overline{\mathrm{AB}}\approx\overline{\mathrm{AQ}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}\approx1$ → $\overline{\mathrm{CQ}}\approx1$ → $\Delta\mathrm{PCQ}=\dfrac{1}{2}\times(1)^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\theta$ $\therefore$ $\dfrac{1}{2}$ (답)

20. 빼기 꼴이니 사실 f-1을 직접 찾는 것이 맞으나 정석적으로 쉬워서 바로 정석으로 가는 게 더 좋은 문항이 맞다. 왜냐하면 외접원의 반지름인데 각이 다 나와 있고 변도 나와 있으므로 사인 법칙 쓰는 게 편하다. 삼각형 PRQ에서 점 R에서 사인 법칙을 쓰면 $2R=\dfrac{2}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}\right)}$ → $R=\sec\dfrac{\theta}{2}$

$\sec\dfrac{\theta}{2}-1\approx\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}\theta^2$ → 9 (답)

05.

$\frac{\pi}{2}-\theta=\alpha$ ($\because \theta-\alpha$) $\rightarrow$ $\angle \mathrm{ECB}=\alpha$ (α go to zero) $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{EB}}=\alpha$

$\angle \mathrm{DBA}=\frac{\pi}{6}$ $\rightarrow$ $\Delta \mathrm{FEB}\approx$ 

$\rightarrow$ $S(\theta)\approx$ $\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\alpha\times\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha^2$ $\therefore \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}\alpha^2}{1-\cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (답)

06.

반원의 중심을 O라 하자. 반지름이 1이므로 $\overline{\mathrm{BP}}=2\theta$

평행선이므로 $\widehat{\mathrm{AQ}}=\widehat{\mathrm{BP}}$ (중심각이 2θ), $\angle \mathrm{QAR}$=(이등변 삼각형AOQ의 밑각)$=\frac{\pi}{2}-\theta$ $\rightarrow$ $\angle \mathrm{QAH}=\frac{\pi}{2}-2\theta$

$\rightarrow$ $\angle \mathrm{AQR}=2\theta$ $\rightarrow$ $\Delta \mathrm{QAR}$=(이등변 삼각형), $\overline{\mathrm{AH}}=4\theta^2$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{PH}}\approx 2$ & $\overline{\mathrm{HR}}=4\theta^3$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\times 2\times 4\theta^3$ $\rightarrow$ 4 (답)

07.

P가 삼등분점이므로 $\angle \mathrm{POA}=\frac{1}{3}\theta$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{BP}}=1\times\frac{2}{3}\theta=\frac{2}{3}\theta$, $\angle \mathrm{OPB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{3}$ $\rightarrow$ $\angle \mathrm{QBP}=\frac{2}{3}\theta$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{BQ}}\approx\overline{\mathrm{BP}}$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\theta\right)^2\times\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)=\frac{4}{27}\theta^3$ $\rightarrow$ $\frac{4}{27}$ (답)

08.

$\overline{\mathrm{BC}}=\theta$ ($\because$ 이등변 삼각형의 성질), $\angle \mathrm{BCD}=(\pi-\theta)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ $\angle \mathrm{CDB}=\angle \mathrm{BDE}=\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{BD}}\approx 2$

$r(\theta)\approx\frac{1}{2}\times$($\Delta \mathrm{BDE}$의 높이)$=\frac{1}{4}\theta$ $\rightarrow$ 5 (답)

09.

기본 근사에 의해, $\overline{\mathrm{HC}}=\frac{1}{2}\theta^2$

$\angle \mathrm{DHC}=\frac{\pi}{4}$라고 발문에서 주었으므로 $\Delta \mathrm{DHC}\approx\overline{\mathrm{HD}}$를 빗면으로 하는 직각 이등변 삼각형

$\therefore$ $f(\theta)=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\theta^2$ $\rightarrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (답)

10.

원의 중심을 O라 하자. $\angle \mathrm{POB}=2\theta$

Cleaner로 $\widehat{\mathrm{PB}}$에 접하는 원을 $\overline{\mathrm{PB}}$에 접하는 원으로 간주할 수 있다. … 심화편 빼기꼴 근사

$\overline{\mathrm{HB}}=\frac{1}{2}(1)(2\theta)^2=2\theta^2$ (cos자리) → 직각삼각형에 접하는 원이므로 $r(\theta)\approx\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{HB}})=\theta^2$ $\rightarrow$ 1 (답)

11.

$\theta-\frac{\pi}{3}=\alpha$ ($\because \theta-\alpha$)를 사용하려면, 기하적으로 찾아야 한다. 우선 θ로 각을 계속 구하며 α가 발견되면 그 다음에 근사를 하고 그 전에 풀리면 풀어버리도록 하자.

$\overline{\mathrm{AD}}=k$라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=k(2\cos\theta+1)=2 \rightarrow k=\frac{2}{2\cos\theta+1}$ 주어진 원의 중심을 O라 하고, 주어진 원이 부채꼴 ADE와 접하는 점을 점 P라 하자. 마지막으로 선분 AB에 점 O에서 내린 수선의 발을 H라 하자. 원과 원이 접할 때는 언제나 중심을 잇고, 접점이 나오면 언제나 수직을 표시해야 한다.

$\therefore \overline{\mathrm{AO}}^2=\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{AM}}^2 \rightarrow (k-r)^2=r^2+1 \rightarrow r=\frac{k^2-1}{2k} \rightarrow \left(\frac{2\cos\theta+3}{2\cos\theta+1}\right)\times\left(\frac{1-2\cos\theta}{2\cos\theta+1}\right)\times\left(\frac{2\cos\theta+1}{4}\right)\approx\frac{1-2\cos\theta}{2}$

로피탈의 정리 : $\lim_{\theta\rightarrow\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (답)

12.

$\overline{\mathrm{AC}}$를 그어서 직각 이등변 삼각형을 만들자. $\angle\mathrm{CAP}=\frac{\pi}{4}-\theta=\alpha$ ($\because \theta-\alpha$)

삼각형 APC에서 Tip을 사용하자 $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{AP}}\approx2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CP}}=4\alpha$

Theta-d : 삼각형 APQ를 보면, $\overline{\mathrm{PQ}}$가 1차고, $\overline{\mathrm{AP}}$가 0차이므로 $\angle\mathrm{PAQ}(\bigstar)$는 1차이다.

$2\sqrt{2}\times\bigstar=4\alpha \rightarrow \bigstar=\sqrt{2}\alpha \rightarrow \overline{\mathrm{AQ}}\approx\overline{\mathrm{AP}} \rightarrow S(\theta)=2\sqrt{2}\times4\alpha=8\sqrt{2}\alpha \rightarrow 2\sqrt{2}$ (답)

13.

사각형 ABCD의 외접원은 삼각형 BCD의 외접원과 같다. $\angle\mathrm{DCB}=\pi-\theta$

$\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 k라 하면, AtD에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}\approx3k=1 \rightarrow k=\frac{1}{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}\approx2k=\frac{2}{3}$

sin법칙 at 삼각형 BCD : $2R=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{\sin(\pi-\theta)} \rightarrow \therefore\ \frac{1}{3}$ (답)

14.

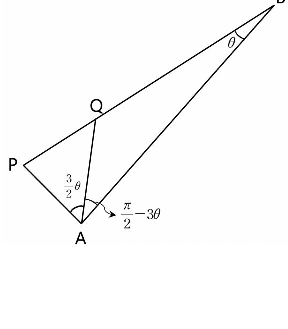
호의 길이가 같다고 했으므로 $\angle\mathrm{QAP}=\theta \rightarrow \angle\mathrm{RPQ}=2\theta$, $\overline{\mathrm{PQ}}\approx\overline{\mathrm{PR}}$

원의 중심을 O라 하면, 부채꼴 OPQ로부터 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\theta \rightarrow S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2\theta)^2\times2\theta=4\theta^3 \rightarrow 4$ (답)

15.

원 C_2의 중점을 C라 하자. 이등변 삼각형 OAB의 외각으로 $\angle\mathrm{BAC}=2\theta \rightarrow \angle\mathrm{ACB}=\pi-4\theta$

각을 다 표시해보면 아래의 그림과 같다.



기본 근사에 의해 $\overline{\mathrm{PA}}=\theta \rightarrow \overline{\mathrm{PQ}}=\theta\times\frac{3}{2}\theta=\frac{3}{2}\theta^2 \rightarrow \frac{3}{2}$ (답)

16.

ΔMAB는 이등변 삼각형이므로 AtD에 의해 $\overline{AB}:\overline{MB}=2:1$

$\angle AOC=\frac{\theta}{8} \rightarrow \angle ABC=\frac{\theta}{16} \rightarrow \angle CBM=\frac{3}{16}\theta$ (단순 각 찾기) $\therefore\ \frac{f}{g}=\frac{\overline{MC}\times\angle CBM}{\overline{AB}\times\angle ABC}=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2} \rightarrow 90$ (답)

17.

AtD를 사용하면, $\overline{BC}=\frac{2}{3}$ / 삼각형의 외각으로 $\angle BCD=3\theta \rightarrow$ sin법칙 at 삼각형 BCD : $r=\frac{1}{3}$

원의 중심을 O라 하면, $\angle COB=\pi-3\theta \rightarrow$ Theta-d : 삼각형 COB는 1차, 부채꼴 OBC는 0차

$\therefore\ S(\theta)\approx$부채꼴 OBC $\rightarrow \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times(\pi-3\theta)=\frac{1}{18}\pi$ (답)

18.

삼각형 OPB에서 Tip을 사용하면 $\overline{OP}\approx1, \overline{PB}=\sqrt{2}\theta$ / 점 P에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{OP}=(1-r)\approx\overline{OH}=1-\theta \rightarrow r\approx\theta \rightarrow \pi$ (답)

19.

$\angle HCD=\theta$ & 기본 근사에 의해 $\overline{CH}=\theta$, $\overline{CD}=\frac{\theta}{2}$이다. 선분 CH와 선분 BD의 교점을 E라 하자.

$\overline{HE}=\frac{1}{2}\theta$ (기본근사) $\rightarrow$ Theta-d : 삼각형 CHD에서 $\overline{HE}\approx\overline{EC}$이므로 $\angle DHC\approx\angle HCD$

$\therefore\ \overline{HD}\approx\frac{1}{2}\overline{HC}=\frac{\theta}{2} \rightarrow$ sin법칙 at 삼각형 HDC : $r(\theta)=\frac{1}{4}$ (답)

20.

주어진 두 함수가 역함수 관계이므로, l_1과 l_2를 $y=x$가 정확히 반으로 갈라 관통할 것이다.

$\frac{\pi}{2}-\theta=\alpha$ ($\because\ \theta-\alpha$) $\rightarrow \frac{1}{2}\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2} \rightarrow y=x$가 x축과 이루는 각도에서 $\frac{\theta}{2}$를 빼므로 l_2의 기울기다.

$y=a^x$ 위의 '임의의 점에서 그은 접선의 x절편'으로부터 '그 임의의 점'까지의 거리는 $\frac{1}{\ln a}$로 항상 같다.

따라서 이 문제에서는 $\frac{1}{\ln e}=1$이 그 거리일 것이다. 이 문제에서는 원점이 '임의의 점에서 그은 접선의 x절편'이므로, 임의의 점의 x좌표는 곧장 1임을 알 수 있다.

따라서 l_2와 $y=\log_t x$의 접점의 x좌표는 e다. 접선이므로 평균 변화율과 순간 변화율이 같음을 이용하면, $\frac{\log_t e}{e}=\frac{1}{e\ln t}=\tan\frac{1}{2}\alpha \rightarrow \alpha\times\ln t=\frac{2}{e}=2e^{-1}$ $\quad\therefore\ p=2,\ q=-1 \rightarrow 19$ (답)

Season 2

06.

$\frac{\pi}{6}-\theta=\alpha$를 찾아야 한다. $\angle\mathrm{POB}=\frac{\pi}{2}-\theta=\angle\mathrm{QBO}$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{BQP}=\frac{3}{4}\pi+\frac{\theta}{2}$ (원주각-중심각)

$\rightarrow$ $\angle\mathrm{QPO}=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\theta$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{PQH}=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}\theta=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)=\frac{3}{2}\alpha$, $\angle\mathrm{QOP}=\frac{\pi}{2}-3\theta=3\alpha$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}=1\times\angle\mathrm{QOP}=3\alpha$ $\rightarrow$ $S(\theta)=\frac{1}{2}\times(3\alpha)^2\times\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)=\frac{27}{4}\alpha^3$ $\rightarrow$ $\frac{27}{4}$ (답)

07.

점 M에 의해 중심각이 이등분된다. 사각형 PQAM은 평행사변형이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{AM}}=\frac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{MAO}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{4}=\angle\mathrm{PQO}$ $\rightarrow$ 점 P에서 선분 $\overline{\mathrm{OQ}}$에 내린 수선의 발을 점 H라 하자.

$\angle\mathrm{QPH}=\frac{\theta}{4}$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{PO}}\approx\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\theta=\frac{1}{8}\theta$ $\rightarrow$ $\frac{1}{8}$ (답)

08.

$\overline{\mathrm{PB}}=2\theta$, $\angle\mathrm{BPQ}=\theta$ (접현각) $\rightarrow$ 삼각형 내접원의 성질에 의해 삼각형 BPQ의 높이 $\approx 2r$

$\therefore$ $2f(\theta)=2\theta^2$ $\rightarrow$ 1 (답)

09.

$\angle\mathrm{PAO}=\theta$ $\rightarrow$ 현 OQ에 대해 Cleaner, $\angle\mathrm{POB}=2\theta$ $\rightarrow$ 현 PB에 대해 Cleaner 사용

$\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}\times(2\theta)=\theta$, $S_2(\theta)-S_1(\theta)=\Delta\mathrm{POB}-\Delta\mathrm{QBO}=\frac{1}{2}(1)^2\times\sin 2\theta-\frac{1}{2}\times\theta\times(1)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\theta$ $\rightarrow$ 5 (답)

10.

$\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}-\theta=\alpha$ $(\theta-d)$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{BC}}=2\alpha$ $\angle\mathrm{BOC}=\pi-\alpha$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{COD}=\alpha$

점 B와 점 C는 y좌표가 같고 대칭이므로, $\overline{\mathrm{CO}}\approx\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{CD}}=\alpha\times\alpha=\alpha^2$ $\rightarrow$ 1 (답)

11.

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times4\times2\times\theta=4\theta$, $\overline{\mathrm{BP}}=4\theta$, $\angle\mathrm{PBQ}=\theta=\angle\mathrm{QBR}$, $\angle\mathrm{PQB}=\frac{\pi}{2}-2\theta$ _ 단순히 구할 게 많다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(2)\times(2\theta)^2=4\theta^2$ $\cdots$ Sec자리 of 삼각형 POB / $\overline{\mathrm{QR}}=4\theta\times\theta=4\theta^2$

$\therefore$ $g(\theta)=\frac{1}{2}\times(4\theta^2)^2\times\sin(\pi-2\theta)=16\theta^5$ $\rightarrow$ $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ 41 (답)

12.

$\angle\mathrm{ABP}=\theta \rightarrow \overline{\mathrm{AP}}=4\theta$ / $\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{3} \rightarrow \angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{6} \rightarrow \angle\mathrm{CAP}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$

$\therefore$ $f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})\times(4\theta)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\theta$ / 사각형 $\mathrm{PAQR}=\dfrac{1}{2}\times(4\theta+8\theta)\times(4\theta^2)=24\theta^3 \rightarrow \dfrac{1}{4}$ (답)

13.

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle\mathrm{ADC}=\dfrac{\pi}{2}-\theta \rightarrow \angle\mathrm{DAH}=\theta$ / AtD at 삼각형 ABC : $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{3}{4}$, $\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{4}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{4}\times(3\theta)=\dfrac{3}{4}\theta\approx f(\theta)$ $\therefore$ $\dfrac{3}{4}$ (답)

14.

2022 수능 29번처럼 정사각형 한 변의 길이는 차수가 있고 $\overline{\mathrm{BF}}$, $\overline{\mathrm{GC}}$는 그보다 차수가 하나 낮아, $\overline{\mathrm{FG}}$를 없다고 간주할 수 있음 $\rightarrow$ $\Delta\mathrm{BD(E)C}$에서 AtD를 사용하면, $\overline{\mathrm{BD}}=3$, $\overline{\mathrm{EC}}=1$

$\rightarrow g(\theta)=(3\theta)^2=9\theta^2$ / 삼각형 ABC의 넓이는 $6\theta \rightarrow f(\theta)=6\theta\times$닮음비$=6\theta\times\dfrac{9\theta^2}{16}=\dfrac{27}{8}\theta^3$

$\therefore$ $15\times9\times\dfrac{8}{27}=40$ (답)

15.

(가) : 호의 길이≈중심각 $\rightarrow \angle\mathrm{BAC}=2\theta \rightarrow \angle\mathrm{BEC}=3\theta$, AtD at $\Delta\mathrm{ABE}$: $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{2}{3}$

(나) : 두 삼각형이 닮음이므로 $\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{EC}}=3:2 \rightarrow \overline{\mathrm{EC}}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

$\therefore$ $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{9}\times3\theta=\dfrac{4}{9}$(답)

16.

원의 중심을 O라 하자. $\angle\mathrm{PAB}=\theta \rightarrow \angle\mathrm{POB}=2\theta$, $\angle\mathrm{PQB}=\theta \rightarrow \overline{\mathrm{PB}}=4\theta=\overline{\mathrm{BQ}}$

$\rightarrow \angle\mathrm{POQ}=4\theta$, $\angle\mathrm{BAQ}=\theta \rightarrow \angle\mathrm{PBQ}=\pi-2\theta \rightarrow g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(4\theta)^2\times\sin(\pi-2\theta)=16\theta^3$

현재 각 PAQ가 0으로 가므로, $\overline{\mathrm{AP}}\approx\overline{\mathrm{AB}}\approx\overline{\mathrm{AQ}}=3 \rightarrow f(\theta)=\dfrac{1}{2}\times(3)^2\times2\theta=9\theta$ $\therefore$ $\dfrac{16}{9}$ (답)

2024 드릴 삼각함수의 극한 - 삼극사기

01.

(가) : $\cos^2(f(x))=\sin^2\left(\frac{(4n-k)\pi}{2}-f(x)\right)$ (k는 1과 3 모두 가능하다. 제곱이므로 어차피 제곱 안의 수는 부호가 상관없으니 말이다.)

$\frac{(4n-k)\pi}{2}-f(x)=g(x)$ $\cdots$ 최고차항의 계수가 $-\pi$인 삼차함수

우리가 0으로 갈 때 근사하기 좋은 것은 $\sin$꼴이나, $1-\cos$꼴이므로 이렇게 바꿔주자.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 g(x)}{x^4}\approx\frac{\{g(x)\}^2}{x^4}\approx 9\pi^2 \rightarrow g(x)=-\pi x^2(x-3) \rightarrow f(x)=\pi x^2(x-3)+\frac{(4n-k)\pi}{2}$

(나) : (극대와 극소의 함숫값 차) = $4\times\pi\times 1^3=4\pi \rightarrow 11\pi=\frac{15}{2}\pi+\frac{7}{2}\pi \rightarrow 4n-k=15$

$k=3$: $n=\frac{9}{2}$ - 모순

$k=1$: $n=4$ - 참 $\rightarrow f(x)=\pi x^2(x-3)+\frac{15}{2}\pi \rightarrow f(-1)=f(2)=$(극소) $\therefore \frac{7}{2}\pi \rightarrow 9$ (답)

02.

(가) : $\frac{\pi}{2}-x=\alpha$ ($\because\theta\rightarrow\alpha$)로 바꾸자. $\lim_{\alpha\to 0}\sin^4\alpha\times f(\cot\alpha) \rightarrow$ 값이 존재하려면 $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$가 (-4)차.

$\therefore$ $f(x)$는 최고차항이 4차 이하이다.

(나) : n이 홀수일 때 분모는 2이고, n이 짝수일 때는 $1-\cos 2x\approx\frac{1}{2}(2x)^2$일 것이다.

마찬가지로 분자의 경우, n이 홀수일 때는 $f(\pm 1)$이고, n이 짝수일 때는 $f(x)$로 근사된다.

$n=1$: $f(1)=4$

$n=2$: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x^2}=3 \rightarrow f(x)=x^2(ax^2+bx+6)$

$n=3$: $f(-1)=8$

$a+b+6=4,\ a-b+6=8 \rightarrow f(x)=-2x^2(x-3) \rightarrow \therefore\ f(2)=8$ (답)

03.

$\overline{AO}$의 연장선이 원과 만나는 점을 C라 하자. $(\sqrt{2}+1)=\overline{AC}$의 길이

$\overline{AB}$를 점 A를 축으로 하여 돌려서 원의 지름에 나타내보자. 이때 점 B가 이동한 점을 D라 하면, 문제의 답은 $\overline{DC}$이다.

삼각형 ABO를 생각해보자. 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{OH}=\sqrt{2}\theta$이다.

$\overline{OH}=\angle HBO\times\overline{OB}$ ($\because$ $\theta-d$) $\rightarrow \angle HBO\approx\sqrt{2}\theta \rightarrow \angle BOC=(\sqrt{2}+1)\theta$

점 B에서 $\overline{OC}$에 내린 수선의 발을 I라 하자. $\overline{ID}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\theta^2$ $\cdots$ Cos 자리 of 부채꼴 ABD

$\overline{IC}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2\theta^2$ $\cdots$ Cos 자리 of 부채꼴 OBD $\rightarrow \overline{DC}=\frac{1}{2}((3+2\sqrt{2})-(1+\sqrt{2}))\theta^2$ $\therefore$ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$(답)

feat. 2024 삼극사기 P.108 27번 문항

04.

2024 삼극사기 P.138의 활꼴과 부채꼴 근사에 의하면 APB로 둘러싸인 부분의 넓이는 반지름이 2이고 중심각이 θ인 부채꼴의 넓이와 같다. → $\frac{1}{2}(2)^2\times\theta=2\theta$ / 삼각형 APS의 넓이만 구해서 빼 주면 된다.

$\overline{QA}=\overline{PB}=2\theta$, $\angle QAR=\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\theta=\frac{\pi}{2}-2\theta$ → $l(\theta)=\overline{AR}=\overline{QA}\times\angle AQR=4\theta^2\approx\overline{AS}$

→ $\Delta APS=\frac{1}{2}\times(2)\times(4\theta^2)\times\theta=4\theta^3$ ⋯ 차수가 과다하므로 버리자. ∴ $S(\theta)\approx 2\theta$ ∴ $16\times\frac{\theta\times 2\theta}{4\theta^2}=8$ (답)

05.

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times(1)\times\left(\frac{1}{3}\right)\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{12}\theta$

$\angle OBC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{4}$ → $\angle BEO=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\theta$ → $\angle ACE=\frac{\theta}{2}$ → $g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}^2\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{16}\theta^3$

∴ $\frac{1}{12}\times 16=\frac{4}{3}$ → 7 (답)

06.

$\angle CAO=\frac{\pi}{4}$ → AtD at 삼각형 OPA : $f(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{4}$

$\angle CQB=\angle OQA=\frac{3}{4}\pi-\theta$, $\angle OBC=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$ → $\angle QCB=\frac{\theta}{2}$ → $g(\theta)=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\theta$

∴ $\frac{1}{8}$ → 9 (답)

07.

$\frac{\pi}{3}-\theta=\alpha$를 찾아보자. $\angle ABC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ → $\angle BAP=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{4}$ → $\angle CAP=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\theta=\frac{3}{4}\alpha$ (찾았네요)

$\angle AQC=\pi-\angle ABC=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\approx\frac{2}{3}\pi$ → Tip at 삼각형 AQC : $\overline{QC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$

삼각형 CQP는 각에 의해 정삼각형으로 근사되므로 $r(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\alpha$ → $\frac{1}{2}$ (답)

08.

AtD at 삼각형 ABS : $\overline{AS}=\frac{4}{3}$ AtD at 삼각형 ARO : $\overline{AR}=\frac{4}{5}$

Sin 법칙 at 삼각형 QRS : $2r=\frac{\frac{4}{3}-\frac{4}{5}}{2\theta}=\frac{4}{15\theta}$ → $r=\frac{2}{15\theta}$ → 17 (답)

09.

$f-g=\Delta\mathrm{OBR}-\Delta\mathrm{BPM}$ / $\angle\mathrm{MBQ}=\dfrac{3}{2}\theta$, $\overline{\mathrm{BM}}=\dfrac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{BQ}}\approx\dfrac{\theta}{2}=\overline{\mathrm{BP}}\times 2\theta$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ $\Delta\mathrm{PBM}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times 2\theta=\dfrac{1}{16}\theta$ / 사잇각이 θ이고 나머지 두 각은 직각으로 근사되니 $\overline{\mathrm{OR}}\approx\overline{\mathrm{OB}}=1$

$\Delta\mathrm{OBR}=\dfrac{1}{2}\times 1^2\times\theta=\dfrac{1}{2}\theta$ $\rightarrow$ $\dfrac{7}{16}$ (답)

10.

중심각 원주각 관계에 의해 삼각형 PBQ의 두 밑각은 θ와 2θ이다. 원의 지름은 삼각형 높이로 근사되므로 $r(\theta)=\theta^2$ $\rightarrow$ $S(\theta)=\theta^4\pi$ / 한편 $\angle\mathrm{PRB}=\dfrac{\pi}{2}-\theta\approx\dfrac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{RB}}\approx 2r(\theta)$ $\rightarrow$ $\therefore$ $\dfrac{1}{4}\pi$ $\rightarrow$ 5 (답)

11.

$\angle\mathrm{BDC}=\angle\mathrm{BDE}=\pi-\theta$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{FDB}=\angle\mathrm{EDC}$, 삼각형 ABC는 이등변 삼각형이므로 $\Delta\mathrm{FDB}\sim\Delta\mathrm{EDC}$ 닮음비는 $2:1$이다. $\angle\mathrm{AED}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{DEC}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ 삼각형 EDC는 이등변 삼각형이다.

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{\theta}{3}$, $\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{2}{3}\theta$ $\rightarrow$ $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\theta}{3}\right)\times\left(\dfrac{2}{3}\theta\right)\times\sin(\pi-2\theta)=\dfrac{2}{9}\theta^3$ $\therefore$ $\dfrac{2}{9}$ (답)

12.

$\angle\mathrm{PQB}=\angle\mathrm{PCB}$ $\rightarrow$ 네 점 B, C, P, Q는 한 원 위에 있다. 각 B가 $\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{PC}}$는 원의 지름이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=1$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{\theta}$, $\overline{\mathrm{PB}}=\theta$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{\theta}-\theta$ $\rightarrow$ $f(\theta)\approx\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\theta}-\theta\right)^2\times\theta=\dfrac{1}{2\theta}$

$\angle\mathrm{ACP}=\dfrac{\pi}{2}-2\theta$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{CPQ}=2\theta$ $\rightarrow$ $\overline{\mathrm{QC}}=2\theta$

AtD at 삼각형 PQR : $\overline{\mathrm{QR}}=\dfrac{2}{3}$ $\rightarrow$ $g(\theta)=\dfrac{1}{2}\times 2\theta\times\dfrac{2}{3}\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{2}{3}\theta$ $\rightarrow$ $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$ $\therefore$ 13 (답)

13.

원 C의 중심을 O′라 하자. 원주각과 중심각에 의해 $\angle\mathrm{PRB}=\theta$, $\angle\mathrm{BQP}=\dfrac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\theta}{2}$

접현각 _ $\angle\mathrm{PBR}=\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\theta}{2}$ $\rightarrow$ AtD at 삼각형 PRB : $\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{\theta}{2}$

$\therefore$ $S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\theta\times\dfrac{\theta}{2}\times\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{8}\theta^3$ $\rightarrow$ 9 (답)

14.

$\overline{\mathrm{BC}}$는 발문에서 1차 $\rightarrow$ $\angle\mathrm{BAC}$도 1차 $\rightarrow$ AtD at 삼각형 $\mathrm{AO_1O_2}$: 변의 비가 $2:1$이므로 각은 $1:2$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{BAC}=2\theta$ / 직선 $\mathrm{O_1O_2}$와 원 C_1의 다른 교점을 P라 하자. $\angle\mathrm{O_1O_2C}=3\theta$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{PO_1C}=6\theta$, $\angle\mathrm{PO_1B}=\theta$ $\rightarrow$ $\angle\mathrm{BO_1C}=5\theta$ $\rightarrow$ $f(\theta)=10\theta$ $\therefore$ 10 (답)