

2023학년도 중앙대학교

모의 논술

- 자연계열 문제지 -

대학	학과(학부)	수험 번호	성명

□ 답안 작성 시 유의 사항

- 문제지는 표지를 제외하고 모두 12페이지로 구성되어 있습니다.
 - 연습지가 필요할 경우 문제지의 여백을 이용하십시오.
 - 답안지의 수험 번호 표기란에는 반드시 컴퓨터용 수성 사인펜으로 표기하고, 답안은 흑색 필기구를 사용하여 작성하십시오.
 - 답안지는 한 장만 사용하십시오.
 - 답안을 작성할 때 답과 관련된 내용 이외에 어떤 것도 쓰지 마십시오.
 - 답안은 반드시 문항별로 지정된 구역에만 작성하십시오. (지정 구역을 벗어난 답안은 채점이 불가능합니다.)
- ※ [문제 4]는 생명과학, 물리학, 화학 중 본인이 선택한 한 과목만 답안을 작성하십시오. (다른 과목의 답안을 작성하면 0점 처리됩니다.)

※ 위의 내용을 정확히 숙지하였음을 확인합니다: 응시자 성명 _____ (서명)

[수학]

[문제 1] 다음 상황에 기초하여 문제에 답하시오.

- 주머니 A에는 2부터 4까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 4부터 32까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 29개의 공이 들어 있다.
- 주머니 A에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 적힌 수를 a 라 하고, 주머니 B에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때 적힌 수를 b 라 하자.

이때 $-48 + 44 \log_a(ab) - 12 \{\log_a(ab)\}^2 + \{\log_a(ab)\}^3 > 0$ 을 만족하는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 모두 구하시오. **[20점]**

[문제 2] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 양수 M, N 에 대하여 $\ln(MN) = \ln M + \ln N$ 이 성립한다.
- 첫째항이 a 이고 공차가 d 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은 $\frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 이다.
- 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ($a \neq 0$)은 $|r| < 1$ 일 때 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.
- 미분가능한 함수 $g(x)$ 의 도함수 $g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 α 와 β 를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$$

- 모든 실수 x 에 대하여 다음 식이 성립한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

[문제 2-1] 첫째항부터 제5 항까지의 합이 45, 첫째항부터 제10 항까지의 합이 140인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음 급수의 합을 구하시오. [10점]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left\{ \frac{3(a_n)^2}{a_n + 2} \right\}$$

[문제 2-2] 다음 정적분의 값을 구하시오. [15점]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \sin^2 x dx$$

[문제 3] 다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서 접하는 접선의 방정식은 $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$ 이다.
- 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f'(x), g'(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때 다음 식이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

- 미분가능한 두 함수 $y=f(u), u=g(x)$ 에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$ 의 도함수는 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$ 이다.

[문제 3-1] 좌표평면 위의 점 $A(0,1)$ 에서 곡선 $y=f(x)=(\ln x)^2-\ln x$ 에 그은 두 접선의 접점을 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ 라 할 때, $\int_a^\beta \{(\ln x)^2-\ln x\}dx$ 를 구하시오. (단, $\alpha < \beta$ 이다.) [10점]

[문제 3-2] 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x, y) 가

$$x=t, \quad y=\sqrt{6}(t-2)^2$$

이다. 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 두 접선과 원 $x^2+y^2=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(t)$ 라 할 때, $S'(d)=0$ 을 만족시키는 d 를 구하시오. [15점]

[생명과학]

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (라)를 읽고 문제에 답하시오.

- (가) 사람의 몸은 외부 환경이 변하더라도 내부 환경 조건을 일정한 범위에서 유지할 수 있는데, 이를 항상성이라고 한다. 항상성의 예로는 체온, 혈당량, 삼투압 유지 등이 있다. 간뇌의 시상 하부는 체내 환경이나 외부 환경의 정보를 받아들이고, 자율 신경과 호르몬으로 반응을 조절하여 내부 환경을 일정하게 유지한다. 항상성은 대부분 음성 피드백과 길항 작용으로 유지된다. 음성 피드백은 반응의 결과가 다시 그 반응을 억제하는 현상으로, 신체의 갑작스러운 변화를 막고 생리 작용이나 체액의 성분이 일정 범위에서 유지되도록 한다. 음성 피드백에 의해 조절되는 대표적인 예는 갑상샘 호르몬(티록신)의 분비 조절이다. 시상 하부에서 분비되는 갑상샘 자극 호르몬 방출 호르몬(TRH)은 뇌하수체 전엽에서 갑상샘 자극 호르몬(TSH)의 분비를 촉진한다. TSH는 갑상샘을 자극하여 티록신의 분비를 촉진한다. 혈중 티록신의 농도가 높아지면 TRH와 TSH의 분비가 억제되고, 그 결과 티록신의 분비가 억제되어 혈중 티록신의 농도가 낮아진다.
- (나) DNA는 폴리뉴클레오타이드 두 가닥이 나선 모양으로 꼬여 있는 이중 나선 구조를 하고 있다. 각 폴리뉴클레오타이드 가닥을 이루는 당-인산 골격은 나선 구조에서 바깥쪽에 있고, 염기는 안쪽에 있다. DNA 이중 나선에서 두 폴리뉴클레오타이드 가닥은 방향성이 서로 반대로, 한쪽 가닥의 끝이 5' 말단이면 다른 쪽 가닥의 끝은 3' 말단이다. 또 두 가닥의 염기가 쌍을 이룰 때 아데닌(A)은 항상 타이민(T)과 2중 수소 결합으로 연결되고, 구아닌(G)은 항상 사이토신(C)과 3중 수소 결합으로 연결된다. 따라서 DNA 이중 나선을 이루는 A과 T의 수가 같고, G과 C의 수가 같으며, DNA 한쪽 가닥의 염기 서열을 알면 다른 쪽 가닥의 염기 서열을 알 수 있다.
- (다) 사람의 유전 형질 중 눈꺼풀, 보조개, 콧볼 모양 등은 상염색체에 있는 대립유전자 한 쌍으로 형질이 결정된다. 상염색체는 남녀에 공통으로 존재하므로 이러한 형질이 나타나는 빈도는 이론적으로 남녀에서 같다. 대립유전자 한 쌍으로 결정되는 유전 형질은 표현형이 우성과 열성으로 뚜렷이 구분되며, 가계도를 조사하면 형질의 유전방식과 유전 경로를 유추할 수 있다. 성염색체에는 성 결정에 관련된 유전자뿐만 아니라 여러 가지 형질을 결정하는 유전자가 있다. 성염색체 구성은 남녀에 따라 다르므로 유전자가 성염색체에 있으면 형질이 나타나는 빈도가 성별에 따라 다르다. 성염색체로 유전되는 대표적인 유전 형질로는 적록 색맹이 있다. 적록 색맹 유전자는 X 염색체에 있으며 열성 유전자이다. 성염색체 구성이 XX인 여자는 X 염색체 2개에 모두 적록 색맹 대립유전자가 있어야 적록 색맹이 된다. 성염색체 구성이 XY인 남자는 X 염색체에 적록 색맹 대립유전자가 있으면 적록 색맹이 된다. 따라서 적록 색맹은 여자보다 남자에서 많이 나타난다.
- (라) 유전자는 단백질 합성에 필요한 정보를 저장하고 있으며, 유전자의 정보에 따라 합성된 단백질은 특정한 형질이 나타나게 한다. 이렇게 유전자의 정보에 따라 단백질이 만들어지는 것을 유전자 발현이라고 한다. 유전자의 발현 과정에서 DNA의 유전 정보가 mRNA로 전달되는 것을 전사라고 하고, mRNA의 유전 정보에 따라 단백질이 합성되는 것을 번역이라고 한다. mRNA는 DNA에서 전사된 것이므로 mRNA의 유전부호는 3염기 조합과 마찬가지로 염기 3개로 이루어진다. mRNA의 연속된 염기 3개로 이루어진 유전부호를 코돈이라고 한다. 코돈은 A, G, C, U의 염기 4종류가 3개씩 조합하여 유전부호를 이룬 것이므로, 64종류가 존재한다. 코돈 64종류 중 61종류는 아미노산을 지정하고, 나머지 세 종류는 아미노산을 지정하지 않는다.

[문제 4-1] 다음은 갑상샘 기능과 관련된 검사와 실험이다.

피로감을 호소하는 환자 A와 B가 병원을 방문하였고, 각각의 갑상샘 기능을 확인하기 위해 아래와 같은 검사와 실험을 실시하였다.

[검사 과정]

I. 환자 A와 B의 혈액을 각각 채취하고 혈중 TSH 농도와 티록신 농도를 측정하여 <표 1>에 나타내었다.

<표 1> 혈중 TSH와 티록신 농도 측정값

구분	TSH (mU/mL)	티록신 (µg/L)
정상범위	1.9 ± 1.12	8.68 ± 1.70
환자 A	0.11 ± 0.08	4.91 ± 0.87
환자 B	6.30 ± 0.88	5.07 ± 0.49

[실험]

I. 환자 A와 B의 갑상샘 조직을 각각 적출하고 세포를 분리한 뒤, 방사성 동위원소로 표지가 된 타이민(*T)을 포함하는 배지에서 각각 배양하였다.

II. 24시간 후 환자 각각의 세포 당 DNA의 염기 조성비를 정상 세포와 비교하여 <표 2>에 나타내었다.

<표 2> 세포 당 DNA의 염기 조성비

구분	*T	T	A	G	C
정상 세포	15.1	15.0	29.1	20.8	20.0
환자 A 세포	14.8	15.1	30.1	20.1	19.9
환자 B 세포	20.7	9.1	30.1	20.7	19.4

(단위: %)

제시문 (가)와 (나)에 근거하여 <표 1>과 <표 2>의 결과를 해석하고, 환자 A와 B에서 나타나는 갑상샘 기능 이상의 원인을 통합적으로 추론하시오. [15점]

[문제 4-2] 다음은 유전자 검사를 통해 유전질환 D를 확인하는 과정을 나타내었다.

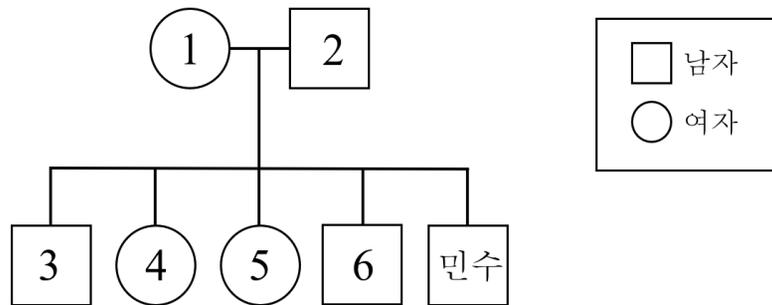
[유전질환 D의 특징]

- 유전질환 D는 운동신경에 문제가 발생하는 질환으로, 유전에 의한 가족력을 가지고 있다.
- 유전질환 D는 유전자 *d*의 125번째 염기가 아데닌(A)에서 구아닌(G)으로 치환되어, 이로부터 생성되는 아미노산이 발린에서 알라닌으로 바뀌어 발생하는 질환이다.

[유전자 검사 내용]

- I. 민수 가족의 가계도를 <그림 1>에 나타내었다.
- II. 유전질환 D의 발생 여부를 확인하기 위해 민수 가족들의 혈액을 채취하여 세포를 분리하였다.
- III. 같은 수의 혈액 세포로부터 DNA를 추출하고, DNA 염기 서열 분석장치를 이용하여 유전자 *d*의 염기 서열을 분석하였다.
- IV. 분석 결과 중 유전자 *d*의 125번째 염기의 종류와 조성 비율을 <표 1>에 정리하였다.

<그림 1> 가계도



<표 1> 유전자 *d*의 125번째 염기 분석 결과

검사 대상자 \ 염기 종류	①	②	③	④	⑤	⑥	민수
아데닌(A)	1.1	1.0	0	1.0	2.1	0	1.0
타이민(T)	1.0	1.1	0	1.0	2.0	0	1.1
구아닌(G)	1.0	0	1.1	0.9	0	1.1	0
사이토신(C)	1.1	0	1.0	1.1	0	1.0	0

(수치는 측정된 염기량의 상댓값임)

유전자 분석 결과를 활용하여 유전질환 D가 상염색체 유전인지 성염색체 유전인지 판별하고, 민수가 유전질환이 발생할 확률을 제시문 (나) - (라)에 근거하여 논리적으로 구하시오. (단, 유전질환 D는 유전자 *d*의 125번째 염기의 돌연변이에 의해서만 발생한다.) [15점]

- 끝 -

[물리학]

[문제 4] 다음 제시문 (가) - (바)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 역학적 에너지 보존 법칙은 운동 에너지와 퍼텐셜 에너지의 합이 항상 일정한 경우를 말한다. 질량 m 인 물체가 가만히 낙하하면서 높이 h 인 지점을 지날 때 속력을 v 라고 하면, 공기 저항이 없을 때 역학적 에너지 보존 법칙은 다음과 같다.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{일정} \quad (\text{단, } g \text{는 중력가속도})$$

(나) 같은 높이에서 가만히 놓은 공과 수평 방향으로 던진 공은 같은 시간 동안 떨어지는 높이가 같으므로 연직 방향으로 같은 가속도로 운동함을 알 수 있다. 공기 저항을 무시하면 수평 방향으로 던진 물체는 수평 방향으로 작용하는 알짜힘이 0이므로 등속도 운동을 하고, 연직 방향으로서는 일정한 중력이 작용하므로 등가속도 운동을 한다.

(다) 변위, 속도, 가속도, 힘 등과 같이 크기와 방향을 함께 가지는 물리량을 벡터량이라고 한다. 벡터는 화살표를 이용하여 간편하게 나타낸다. 화살표의 길이는 벡터의 크기를, 화살표의 머리 방향은 벡터의 방향을 나타낸다. 벡터 분해는 직각 좌표를 이용하여 벡터의 수직 성분과 수평 성분으로 나누어 분해한다.

(라) 물체의 운동 방향에 나란한 방향으로 일정한 알짜힘이 작용하면 물체는 직선을 따라 일정한 가속도로 운동하는데, 이것을 등가속도 직선 운동이라고 한다. 등가속도 직선 운동을 하는 물체의 속도와 시간의 관계 그래프에서, 그래프의 기울기는 가속도를 나타내며 그래프와 시간 축 사이의 면적은 변위를 나타낸다. 물체의 처음 속도가 v_0 이었다면 일정한 가속도 a 로 t 초 동안 운동한 후의 변위 s 는 다음과 같다.

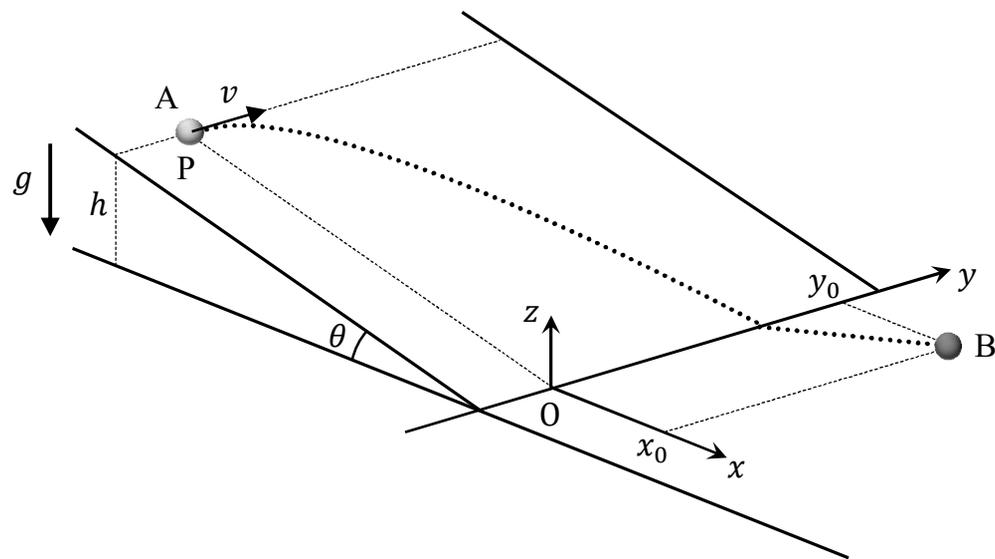
$$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

(마) 자석을 위아래로 움직이면 코일을 통과하는 자기 선속이 시간에 따라 변화하면서 코일에 전류가 흐른다. 이러한 현상을 전자기 유도라 하며, 이때 흐르는 전류를 유도 전류라고 한다. 자기 선속 Φ 는 자기장의 세기와 닫힌 회로의 넓이를 곱한 것과 같다. 코일에 유도되는 유도 기전력 V 의 크기는 코일을 통과하는 자기 선속의 시간 t 에 따른 변화율과 같고, 다음 식으로 표현한다.

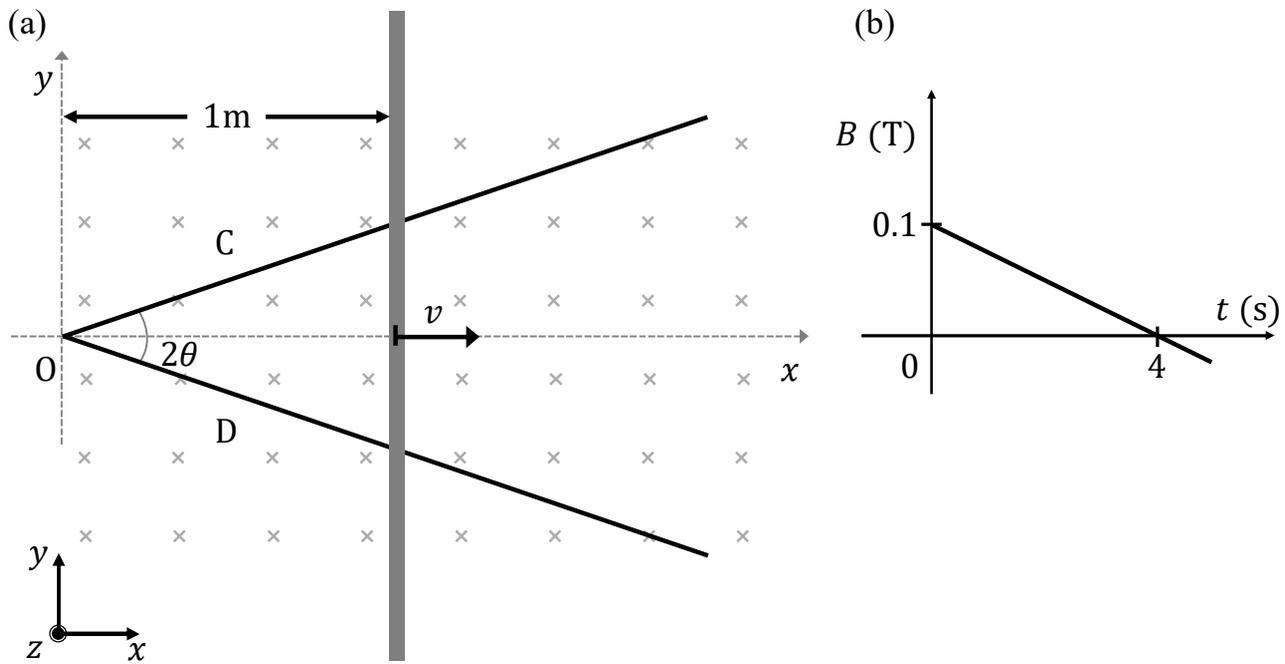
$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

(바) 전자기 유도 현상으로 코일에 생기는 유도 전류는 코일 내부를 지나는 자기 선속의 변화를 방해하는 방향으로 흐른다. 이를 렌츠의 법칙이라고 한다.

[문제 4-1] 아래 그림은 기울기가 일정한 빗면 위에서 물체를 옆으로 밀어 평평한 바닥에 있는 물체와 충돌시키는 실험을 나타낸다. 바닥으로부터 높이 h 인 빗면 위 점 P에서 물체를 가만히 놓았을 때 물체가 바닥에 닿는 점을 원점 O라고 하자. 원점 O에서 x 축 방향으로 x_0 , y 축 방향으로 y_0 만큼 떨어진 곳에 물체 B가 놓여있을 때, 점 P에서 물체 A를 y 축과 평행한 방향으로 속력 v 로 밀었다. 제시문 (가) - (라)에 근거하여 두 물체가 충돌하기 위한 속력 v 를 구하시오. (단, 중력가속도는 g 이며 빗면의 기울기 θ 는 충분히 작다. 물체의 크기, 공기 저항 및 마찰은 무시한다.) [15점]



[문제 4-2] 그림 (a)와 같이 xy 평면에 직선 도선 C, D가 x 축에 대칭으로 놓여있고, 두 직선 도선이 이루는 각의 크기는 2θ 이다. 원점 O에서 x 축 방향으로 1m 떨어진 위치에 길이가 충분히 긴 금속 막대가 놓여있다. 시각 $t=0$ s에서 금속 막대를 x 축 방향으로 일정한 속력 $v=2$ m/s로 y 축과 평행을 유지하며 움직이고, 그림 (b)와 같이 xy 평면에 균일하게 들어가는 자기장의 세기 B 를 0.1 T에서부터 일정하게 변화시켰다. 제시문 (라) - (바)에 근거하여 유도 기전력을 t 와 θ 를 이용하여 나타내고, 유도 전류의 방향이 바뀌는 시각을 구하시오. (단, 두 직선 도선이 만나는 원점 O에 크기를 무시할 수 있는 저항 R 이 있고, 직선 도선과 금속 막대의 저항은 R 보다 충분히 작다.) [15점]



- 끝 -

[화학]

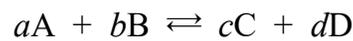
[문제 4] 다음 제시문 (가) - (마)를 읽고 문제에 답하시오.

(가) 밀폐한 비커의 물은 표면에서 증발하여 수증기가 되고, 수증기는 응결하여 다시 액체 상태의 물이 되기도 한다. 증발이 응결보다 활발하게 일어나면 증발만 일어나는 것처럼 보인다. 그런데 어느 순간 증발하는 물 분자 수와 응결하는 물 분자 수가 같아지면 더 이상 증발이 일어나지 않는 것처럼 보이는 상태가 되고, 수면의 높이는 일정하게 유지된다. 이처럼 어떤 변화가 가역적일 때 양쪽 방향으로 변하는 정도가 같아져서 변화가 일어나지 않는 것처럼 보이는 상태를 동적 평형 상태라고 한다. 이때 증기가 나타내는 압력을 증기 압력 또는 증기압이라고 한다.

(나) 기체의 부피(V)는 기체의 몰수(n)와 절대 온도(T)에 비례하고 압력(P)에 반비례한다. 이를 비례 상수(R)를 이용하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있고, 이 식을 이상 기체 방정식이라고 한다.

$$PV = nRT$$

(다) 일정한 온도에서 어떤 반응이 화학 평형 상태에 있을 때 반응물의 농도 곱에 대한 생성물의 농도 곱의 비는 항상 일정하다. 이것을 화학 평형 법칙이라고 하고, 일반적으로 다음과 같이 나타낸다.



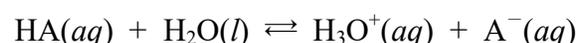
$$K = \frac{[C]^c[D]^d}{[A]^a[B]^b}$$

([A], [B], [C], [D]: 평형 상태에서 각 물질의 몰 농도)

이때 K 를 평형 상수라고 하고, 평형 상수는 온도가 일정할 때 농도나 기체의 압력에 관계 없이 항상 일정하다.

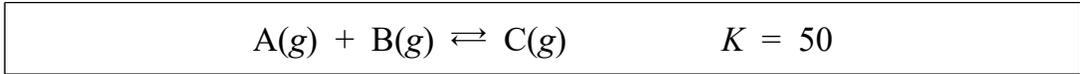
(라) 보라색 양배추에 들어 있는 색소는 산과 만나면 붉은색으로, 염기와 만나면 푸른색으로 변한다. 양배추의 색소처럼 수용액의 pH에 따라 색이 변하여 물질의 액성을 구별하는 데 쓰이는 물질을 지시약이라고 한다. 지시약이 사용되는 실험 중 대표적인 것은 pH의 변화를 계속 관찰해야 하는 중화 적정 실험이다. 일반적으로 지시약은 이온화한 형태와 이온화하지 않은 형태가 매우 다른 색을 가지는 약한 산성 혹은 약한 염기성 분자이다.

(마) 강산과 강염기는 수용액에서 거의 모두 이온화하지만, 약산과 약염기는 수용액에서 일부만 이온화한다. 따라서 약산, 약염기는 이온화 반응의 평형 상수식을 이용하여 이온화하는 정도를 비교할 수 있다. 임의의 약산 HA가 수용액에서 H_3O^+ 와 A^- 로 이온화하는 반응과 산 이온화 상수 K_a 는 다음과 같다.

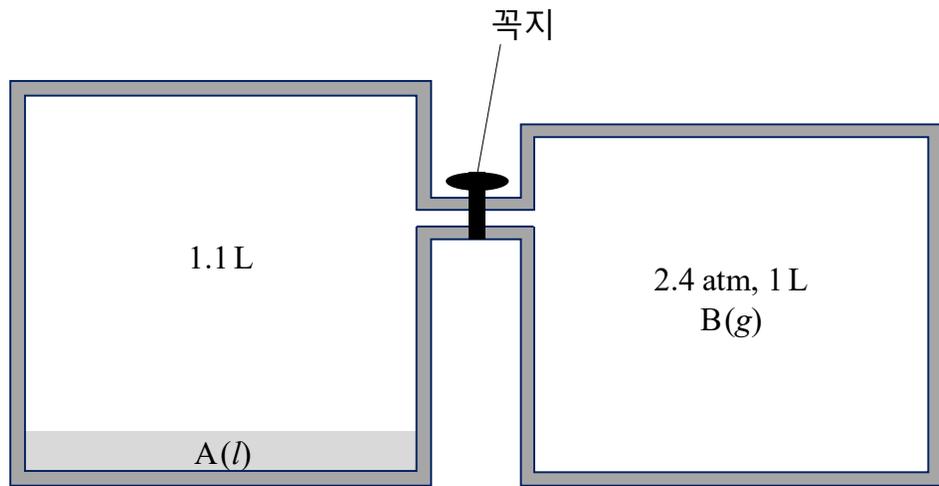


$$K_a = \frac{[H_3O^+][A^-]}{[HA]}$$

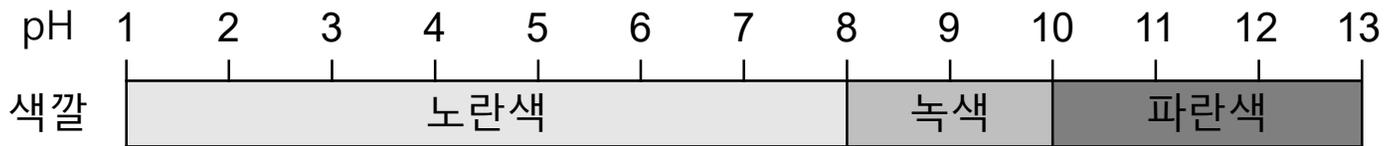
[문제 4-1] 다음은 기체 A와 B가 반응하여 기체 C를 생성하는 반응의 화학 반응식과 농도로 정의되는 평형 상수 K 이다.



그림과 같이 300 K에서 부피가 1.1 L인 진공 상태의 강철 용기에 액체 A를 100 mL 넣고, 부피가 1 L인 진공 상태의 강철 용기에 기체 B를 넣은 후, 닫혀 있는 꼭지를 사이에 두고 연결하였다. A의 분자량은 96이고, 밀도는 0.72 g/mL이며, 증기압은 0.72 atm이다. 꼭지가 닫혀 있는 상태에서 동적 평형 상태에 도달했을 때, 제시문 (가)와 (나)에 근거하여 강철 용기에 남아 있는 액체 A의 부피를 구하시오. 또한, 꼭지를 열어 새로운 평형에 도달했을 때, 제시문 (가) - (다)에 근거하여 강철 용기 안에 존재하는 C의 몰수와 남아 있는 액체 A의 부피를 구하시오. (단, 기체 상수는 0.08 atm·L/(mol·K)이고, 온도는 일정하며, 액체 A는 반응에 참여하지 않는다. 기체는 액체에 용해되지 않고, 기체의 부피를 고려할 때 연결관의 부피 및 액체 부피의 변화에 의한 차이는 무시한다.) [15점]



[문제 4-2] 아래의 도표는 25 °C에서 가상의 지시약 A가 용액의 pH에 따라 나타내는 색깔을 표시한 것이다. 지시약 A는 약한 염기성 분자로, 이온화하지 않은 형태(A)가 파란색, 수소 이온을 얻은 양이온의 형태(AH⁺)가 노란색을 나타낸다. 25 °C에서 A의 염기 이온화 상수 K_b를 제시문 (라)와 (마)에 근거하여 구하시오. 또한, 25 °C에서 가상의 약염기 B가 0.1 M 들어있는 무색의 수용액에 지시약 A를 소량 첨가하였을 때 수용액의 색깔은 무엇인지, 그리고 일반적으로 지시약은 반드시 소량을 사용해야 하는 이유를 제시문 (라)와 (마)에 근거하여 제시하시오. (단, 지시약의 색깔은 $\frac{[A]}{[AH^+]} \leq \frac{1}{10}$, $\frac{1}{10} < \frac{[A]}{[AH^+]} < 10$, $\frac{[A]}{[AH^+]} \geq 10$ 일 때 각각 노란색, 녹색, 파란색으로 뚜렷하게 구분된다고 가정한다. 25 °C에서 물의 이온곱 상수는 1×10^{-14} 이고, B의 염기 이온화 상수 K_b는 1×10^{-9} 이다.) [15점]



- 끝 -

2023학년도
중앙대학교 모의 논술
채점자 매뉴얼

자연계열



**2023학년도 모의 논술 자연계열
제시문 출전 및 출제 의도**

[수학, 문제 1 제시문 출전]

- 수학, II-6 삼차방정식과 사차방정식 (㈜천재교과서, 류희찬 외 10인, 2020; p.75-78)
- 수학, II-3-1 삼차방정식과 사차방정식 (㈜천재교육, 이준열 외 7인, 2020; p.76-79)
- 수학, II-3-1 삼차방정식과 사차방정식 (㈜교학사, 권오남 외 14인, 2020; p.72-74)
- 수학, II-9 이차부등식과 연립이차부등식 (㈜천재교과서, 류희찬 외 10인, 2020; p.91-98)
- 수학, II-4-2 이차부등식과 연립이차부등식 (㈜천재교육, 이준열 외 7인, 2020; p.92-98)
- 수학, VI-1-1 경우의 수 (㈜좋은책신사고, 고성은 외 5인, 2020; p.249-252)
- 수학, VI-1-1 경우의 수 (㈜미래엔, 황선욱 외 9인, 2020; p.261-264)
- 수학, VI-1-1 경우의 수 (㈜교학사, 권오남 외 14인, 2020; p.255-262)
- 수학, VI-1-1 경우의 수 (㈜금성출판사, 배종숙 외 6인, 2020; p.262-266)
- 수학, VI-1-1 경우의 수 (동아출판㈜, 박교식 외 19인, 2020; p.255-258)
- 수학, II-4-03 이차부등식과 연립이차부등식 (㈜교학사, 권오남 외 14인, 2020; p.86-90)
- 수학I, I-1-03 로그의 뜻과 성질 (동아출판㈜, 박교식 외 19인, 2020; p.24-28)
- 수학I, I-1-03 로그 (㈜미래엔, 황선욱 외 9인, 2020; p.24-30)
- 수학I, I-3 로그의 뜻과 성질 (㈜교학사, 권오남 외 14인, 2020; p.29-35)

[문제 1 출제 의도]

본 문제에서는 로그의 성질과 삼차방정식 및 부등식을 활용하여 문제에 해당하는 경우를 정확하게 찾아낼 수 있는지를 평가한다. 특히 주어진 상황에서 로그값이 가질 수 있는 범위를 정확하게 계산하여 문제 상황에 맞는 순서쌍을 찾아내어야 한다.

[수학, 문제 2 제시문 출전]

- 첫 번째 제시문: - 수학I, 지수함수와 로그함수, 지수와 로그 (미래엔 p.25)
- 수학 I, 지수함수와 로그함수, 지수와 로그 (동아출판 p.26)
- 수학 I, 지수함수와 로그함수, 지수와 로그 (비상교육 p.26)
- 수학 I, 지수함수와 로그함수, 지수와 로그 (신사고 p.29)
- 두 번째 제시문: - 수학I, 수열, 등차수열과 등비수열 (미래엔 p.128)
- 수학 I, 수열, 등차수열과 등비수열 (동아출판 p.111)
- 수학 I, 수열, 등차수열과 등비수열 (신사고 p.120)
- 수학 I, 수열, 등차수열 (천재교과서 p.129)
- 세 번째 제시문: - 미적분, 수열의 극한, 급수 (천재교육 p.37)
- 미적분, 수열의 극한, 등비급수 (천재교과서 p.36)
- 미적분, 수열의 극한, 등비급수 (지학사 p.35)
- 미적분, 수열의 극한, 등비급수 (비상교육 p.33)
- 네 번째 제시문: - 미적분, 적분법, 여러 가지 적분법 (천재교육 p.151)
- 미적분, 적분법, 여러 가지 적분법 (천재교과서 p.168)
- 미적분, 적분법, 여러 가지 적분법 (미래엔 p.148)
- 미적분, 적분법, 여러 가지 적분법 (동아출판 p.138)
- 다섯 번째 제시문: - 수학I, 삼각함수, 삼각함수 (미래엔 p.78, p.89)
- 수학 I, 삼각함수, 삼각함수 (동아출판 p.70, p.74, p.78)
- 수학 I, 삼각함수, 삼각함수 (천재교과서 p.81, p.85, p.94)
- 수학 I, 삼각함수, 삼각함수 (비상교육 p.74, p.82)

[문제 2-1 출제 의도]

수열의 가장 간단하지만 중요한 예인 등차수열에 대하여 등차수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이해하고 있는지를 평가한다. 그리고 급수의 합을 계산할 수 있는지를 종합적으로 평가한다. 구체적으로 로그의 성질을 이용하여 급수를 적절히 분해하여 간단한 형태로 변형을 할 수 있는지와 부분합과 급수의 합 사이의 관계를 이용하여 급수의 합을 계산할 수 있는지를 평가한다. 또한 등비급수의 성질을 알고 합을 계산할 수 있는지를 묻는다.

[문제 2-2 출제 의도]

치환 적분 계산을 수행하기 위해 적절한 함수의 선택을 할 수 있는지를 평가한다. 그리고 이를 위해 삼각함수의 성질을 이용하여 적분을 하는 함수를 변형할 수 있는지를 평가한다.

[수학, 문제 3 제시문 출전]

첫 번째 제시문: - 수학 II, 미분, 접선의 방정식 (비상 p.71)
- 수학 II, 미분, 접선의 방정식 (천재교육 p.74)

두 번째 제시문: - 미적분, 적분법, 부분적분법 (지학사 p.148)
- 미적분, 적분법, 부분적분법 (동아출판 p.140)
- 미적분, 적분법, 부분적분법 (미래 p.151)
- 미적분, 적분법, 부분적분법 (교학사 p.158)

세 번째 제시문: - 미적분, 여러 가지 미분법, 합성함수의 미분법 (지학사 p.88)
- 미적분, 미분법, 합성함수의 미분법 (동아출판 p.81)
- 미적분, 여러 가지 미분법, 합성함수의 미분법 (미래 p. 86)
- 미적분, 여러 가지 미분법, 합성함수의 미분법 (교학사 p. 88)

[문제 3-1 출제 의도]

접선의 방정식을 구하고 주어진 점을 대입하여 두 접점을 구하고, 구간 $[a, \beta]$ 에서 주어진 함수를 적분할 수 있는지 평가한다. 적분은 $\ln x$ 적분과 부분적분을 이용하여 적절한 계산을 수행하는지 평가한다.

[문제 3-2 출제 의도]

원 밖의 점에서 원에 그은 두 접선과 원으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는지 평가한다. 이때, 넓이가 원의 중심과의 거리에 의해서 결정됨을 알아낸다. 합성함수의 미분법을 이용하여 $S'(t)$ 을 구하고, 3차 방정식을 풀어서 $S'(a)=0$ 을 만족시키는 a 를 구한다.

[생명과학, 문제 4 제시문 출전]

- 제시문 (가):
- 생명과학 I, 호르몬과 항상성 (천재교육, p.83-87)
 - 생명과학 I, 항상성 유지 (비상, p.82-85)
 - 생명과학 I, 호르몬과 항상성 유지 (지학사, p.84)
 - 생명과학 I, 항상성과 몸의 기능 조절 (동아출판, p.78-84)
 - 생명과학 I, 항상성과 몸의 조절 (미래엔, p.94-95)
- 제시문 (나):
- 생명과학 II, 유전 물질 (비상, p.117-119)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (미래엔, p.114-121)
 - 생명과학 II, 유전자 발현과 조절 (지학사, p.108-112)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (천재교육, p.105-110)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (교학사, p.105-108)
- 제시문 (다):
- 생명과학 I, 유전 (천재교육, p.135-146)
 - 생명과학 I, 유전 (비상, p.130-149)
 - 생명과학 I, 유전 (지학사, p.126-141)
 - 생명과학 I, 유전 (동아출판, p.134-149)
 - 생명과학 I, 유전 (미래엔, p.140-152)
- 제시문 (라):
- 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (비상, p.122-133)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (미래엔, p.124-133)
 - 생명과학 II, 유전자 발현과 조절 (지학사, p.114-123)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (천재교육, p.115-124)
 - 생명과학 II, 유전자의 발현과 조절 (교학사, p.111-120)

[문제 4-1 출제 의도]

호르몬은 매우 적은 양으로 생리 작용을 조절하고, 우리 몸에서 일정한 농도로 존재하며 항상성을 조절하는데 항상성이 유지되지 않으면, 특정 호르몬이 너무 부족하거나 많아지게 되어, 우리 몸은 균형이 깨지고 비정상적인 상태가 되어 결핍증이나 과다증이 나타난다. [문제 4-1]에서는 호르몬의 과다 혹은 결핍이 생긴 현상을 보여 주며 음성 피드백의 조절 유무를 판단할 수 있는지와 음성 피드백에 의한 조절 중 어느 단계의 이상인지를 묻고 있다. 따라서 시상 하부, 뇌하수체, 갑상샘까지 이어지는 각 기관별 호르몬의 분비와 각 호르몬에 의한 음성 피드백 작용을 이해하면 어느 단계의 조절 실패로 인한 문제인지 추론할 수 있다. 또한 <표 2>에서는 복제된 DNA에 포함된 4가지 염기의 비율을 보여 주고 있는데, 제시문 (나)를 통해 A와 T의 수가 같고 G와 C의 수가 같다는 점을 인식하고 이를 통해 방사성 동위원소로 표지된 *T의 비율 증가가 DNA 복제 증가와 연관된다는 사실을 추론할 수 있는 지

평가하고자 하였다. 이를 통해 주어진 측정값과 실험 결과의 이해력, 제시문을 통한 논리적 추론 능력을 종합적으로 판단할 수 있다.

[문제 4-2 출제 의도]

유전 현상에 의해 생명의 지속성이 유지되고, 이에 문제가 생기면 생명체가 제대로 발생 및 성숙할 수 없거나, 다양한 질병에 걸리게 된다. [문제 4-2]에서는 민수 가족이 유전질환 D가 발생할 수 있는지를 유전자 검사를 통해 확인하고, 그 결과를 해석하여 질병의 원인을 추론하는 문제로서, 학생들의 데이터 해석력, 논리적 사고력, 추론 능력을 측정하고자 하였다. <그림 1>의 가계도를 확인해 보면 가족 구성은 확인할 수 있으나 유전질환 D가 발생했는지에 대한 정보는 확인할 수 없다. [유전질환 D]의 특징을 고려하면, 유전질환 D는 유전자 d 의 125 번째 염기가 치환되는 돌연변이에 의해 발생한다는 것을 알 수 있다. 이를 바탕으로 <표 1>의 검사 결과를 보면, 환자들로부터 동일한 양의 세포를 사용하여 DNA를 추출하였고, 이로부터 얻어진 125 번째 염기의 조성과 비율을 보여 주고 있음을 알 수 있다. 대립유전자의 개념을 이해하고, 결과를 분석해 보면 검사자 ①의 경우 A, T, G, C로 염기가 구성되어 있고, ①의 부모로부터 받은 유전자 중 한쪽 대립유전자는 A, T로 구성된 정상 DNA 서열을 가지고 있으며, 다른 쪽 대립유전자는 G, C로 구성되어 돌연변이가 일어난 부분이 있음을 알 수 있다. 즉 A'A와 같은 유전자형으로 표현할 수 있을 것이다. 이처럼 ①~⑥, 민수의 유전자형을 모두 표현할 수 있고, 구성 비율을 분석하여, 남자, 여자를 나누어 고려해 볼 수 있다. 이를 전체적으로 추론하여 가계도에 유전자형을 표현하여 상염색체/성염색체 유전 여부를 판별할 수 있고, 민수의 질병 발생 가능성을 정확히 예측해 볼 수 있다. 본 문제를 통해 주어진 상황을 종합적으로 판단하고, 주어진 제시문에 대한 이해력, 자료 및 실험 결과의 해석력, 논리적 추론 능력을 종합적으로 측정하고자 하였다.

[물리학, 문제 4 제시문 출전]

- 제시문 (가): 물리학 I - 역학과 에너지 (p.49, 지학사, 김성원 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.48, 천재교육, 강남화 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.42, 동아출판, 송진웅 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.52, 와이비엠, 광영직 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.52, 미래엔, 김성진 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.65, 교학사, 김영민 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.48, 비상교육, 손정우 외)
- 제시문 (나): 물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.31, 미래엔, 김성진 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.26, 비상교육, 손정우 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.32, 교학사, 김영민 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.29, 천재교육, 강남화 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.34, 지학사, 김성원 외)
- 제시문 (다): 물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.14-16, 교학사, 김영민 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.12-13, 비상교육, 손정우 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.14-15, 미래엔, 김성진 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.11-15, 천재교육, 강남화 외)
물리학 II - 역학적 상호 작용 (p.14-15, 지학사, 김성원 외)
- 제시문 (라): 물리학 I - 역학과 에너지 (p.22-23, 동아출판, 송진웅 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.25, 천재교육, 강남화 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.24, 지학사, 김성원 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.16-17, 와이비엠, 광영직 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.25, 미래엔, 김성진 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.20-21, 교학사, 김영민 외)
물리학 I - 역학과 에너지 (p.14-15, 비상교육, 손정우 외)
- 제시문 (마): 물리학 II - 전자기장 (p.123-125, 비상교육, 손정우 외)
물리학 II - 전자기장 (p.141, 교학사, 김영민 외)
물리학 II - 전자기장 (p.137, 미래엔, 김성진 외)
물리학 II - 전자기장 (p.144-147, 지학사, 김성원 외)
물리학 II - 전자기장 (p.127, 천재교육, 강남화 외)
- 제시문 (바): 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 146, 와이비엠, 광영직 외)
물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 137, 138, 지학사, 김성원 외)
물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 131, 천재교육, 강남화 외)

- 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 127, 동아출판, 송진웅 외)
- 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 124, 금성출판, 이상연 외)
- 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 128, 비상교육, 손정우 외)
- 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 143, 교학사, 김영민 외)
- 물리학 I - 물질과 전자기장 (p. 141, 미래엔, 김성진 외)

[문제 4-1 출제 의도]

기울기가 일정한 빗면에서 물체를 옆으로 밀었을 때 물체가 포물선 운동을 하고, 평평한 바닥 면에서는 등속 직선 운동함을 이용하여 문제에서 주어진 각 구간에서 물체의 운동을 정량적으로 기술하는 문제이다. 역학적 에너지 보존 법칙을 이용하여 물체의 속력을 구할 수 있고, 빗면 방향의 가속도로부터 빗면에서 이동한 시간과 변위를 구할 수 있다. 바닥에서 물체는 등속 직선 운동을 하므로 속도와 변위 벡터가 평행하다. 본 문항 평가에서는, 역학적 에너지 보존 법칙, 등속 직선 운동, 포물선 운동을 이해하고 물체의 운동을 논리적으로 분석하는 문제 해결력을 측정하고자 하였다.

[문제 4-2 출제 의도]

문제 4-2는 자기장이 만드는 자기 선속이 시간에 따라 변화하면 코일에 전류가 흐르는 현상을 일컫는 전자기 유도 현상을 이해하고 적용하는 문제이다. 전자기 유도 현상을 설명하는 패러데이 법칙을 이해함으로써 전자기장을 통합적으로 이해할 수 있게 된다. 또한, 문제를 통해 유도 기전력과 전류의 크기를 코일을 통과하는 자기 선속의 시간에 따른 변화율에 비례함을 수식적으로 이해할 수 있다.

먼저 제시문 (라)에 근거하여 일정한 속력으로 이동하는 변위를 계산하여 자기장이 통과하는 면적 변화를 구하고, 그래프를 통해 자기장의 크기 변화를 시간에 따라 수식으로 표현할 수 있다. 문제에서 주어진 조건과 제시문 (마)와 (바)를 이용하면, 자기 선속의 변화를 구할 수 있고 패러데이 법칙을 이용하여 유도 기전력과 전류를 각각 구할 수 있다. 따라서, 패러데이 법칙을 적용해 문제를 해결함으로써 전자기장을 통합적으로 이해할 수 있게 한다. 물리 현상에 대한 이해와 논리적 사고력을 평가하며, 중간 수준의 난이도를 갖는 문제이다.

[화학, 문제 4 제시문 출전]

- 제시문 (가): 화학 I – 단원 IV. 역동적인 화학 반응
(p.172-173, 와이비엠, 강대훈 외 3인)
(p.149-150, 교학사, 홍훈기 외 6인)
(p.170, 동아출판, 황성용 외 3인)
(p.161-162, 상상아카데미, 장낙한 외 3인)
(p.157-159, 지학사, 이상권 외 7인)
(p.159-161, 천재교육, 노태희 외 6인)
(p.156-157, 미래엔, 최미화 외 5인)
(p.147-148, 금성출판사, 하윤경 외 5인)
(p.143-144, 비상교육, 박종석 외 7인)
- 제시문 (나): 화학 II – 단원 I. 물질의 세 가지 상태와 용액
(p.15-16, 비상교육, 박종석 외 7인)
(p.18, 천재교육, 노태희 외 6인)
(p.21-23, 상상아카데미, 장낙한 외 9인)
(p.9, 교학사, 홍훈기 외 6인)
(p.17-18, 지학사, 이상권 외 7인)
(p.20-21, 미래엔, 최미화 외 5인)
- 제시문 (다): 화학 II – 단원 II. 반응엔탈피와 화학 평형
(p.79-80, 비상교육, 박종석 외 7인)
(p.91-92, 천재교육, 노태희 외 6인)
(p.99-100, 상상아카데미, 장낙한 외 9인)
(p.93-94, 교학사, 홍훈기 외 6인)
(p.94-95, 지학사, 이상권 외 7인)
(p.92-93, 미래엔, 최미화 외 5인)
- 제시문 (라): 화학 I – 단원 IV. 역동적인 화학 반응
(p.180-181, 동아출판, 황성용 외 3인)
(p.181-184, 와이비엠, 강대훈 외 3인)
(p.174, 지학사, 이상권 외 7인)
(p.181, 천재교육, 노태희 외 6인)
(p.156-157, 미래엔, 최미화 외 5인)
- 제시문 (마): 화학 II – 단원 II. 반응엔탈피와 화학 평형
(p.100-105, 비상교육, 박종석 외 7인)
(p.111-117, 천재교육, 노태희 외 6인)

- (p.121-126, 상상아카데미, 장낙한 외 9인)
 (p.109-110, 교학사, 홍훈기 외 6인)
 (p.117, 지학사, 이상권 외 7인)
 (p.116-117, 미래엔, 최미화 외 5인)

[문제 4-1 출제 의도]

화학 I에서 다루는 액체와 기체 사이의 동적 평형과 화학 II에서 다루는 이상 기체의 성질과 화학 평형의 개념을 통합적으로 연계하여, 액체와 동적 평형 상태에 있는 기체가 화학 반응을 할 때 생성물과 반응물의 양적 변화를 논리적으로 도출해 낼 수 있는지 물어보는 문제이다. 닫혀 있는 용기에서 액체와 기체가 동적 평형 상태일 때, 액체의 증기압과 이상 기체 방정식을 접목하여 증발하는 액체의 양을 알아낼 수 있어야 한다. 또한, 기체의 화학 반응과 기체와 액체 사이의 동적 평형이 동시에 일어날 때, 액체와 동적 평형을 이루는 기체의 압력은 반응 정도와 관계없이 증기압과 동일하다는 것을 이해하여 평형 상태에서의 기체 생성물의 양 및 액체의 양을 논리적으로 구해 낼 수 있어야 한다. 이를 통해 고등학교 화학 교과와 기본 개념에 대한 통합적인 이해도와 논리적인 사고력을 평가하고자 한다.

[문제 4-2 출제 의도]

화학 I에서 다루는 동적 평형과 물의 자동 이온화, 화학 II에서 다루는 산 염기 평형에 대한 개념 적용 문제로서, 화학 교과에 대한 전반적인 이해도 및 응용 능력을 평가하고자 하였다. 지시약은 주위의 pH 변화에 따라 이온화한 형태와 이온화하지 않은 형태의 비율이 크게 달라지며, 이 비율은 지시약의 산 이온화 상수(혹은 염기 이온화 상수)와 용액의 pH로부터 결정됨을 제시문의 내용으로부터 파악할 수 있어야 한다. 주어진 그림 자료로부터 지시약의 K_b 를 파악하고, 이를 응용하여 다른 염기를 포함하고 있는 수용액이 나타내는 색을 올바르게 유추할 수 있어야 한다. 또한 지시약이 산 혹은 염기로 작용하여 pH를 변화시키는 효과를 최소화하기 위해 색 구별이 가능한 최소량이 사용되어야 함을 설명할 수 있어야 한다. 일련의 문제 풀이 과정을 통해 화학 평형에 대한 통합적인 이해도를 평가하고 올바른 결론 도출을 위한 분석적 사고 능력을 측정하고자 하였다.

2023학년도 중앙대학교

모의논술 예시 답안

[수학, 문제 1 예시 답안]

▶ $\log_a b = X$ 라고 두면

$$\begin{aligned} & -48 + 44 \log_a(ab) - 12 (\log_a(ab))^2 + (\log_a(ab))^3 \\ & = -48 + 44(1 + \log_a b) - 12(1 + \log_a b)^2 + (1 + \log_a b)^3 \\ & = X^3 - 9X^2 + 23X - 15 \\ & = (X-1)(X-3)(X-5) \end{aligned}$$

로 정리되어, $(X-1)(X-3)(X-5) > 0$ 을 만족하는 경우는 $1 < X < 3$ 또는 $X > 5$ 이다.

▶ $1 \leq \log_a b \leq 5$ 이므로, $X > 5$ 는 불가능하며, $1 < X < 3$ 의 경우는 아래와 같이 정리된다.

$$1 < X < 3 \Leftrightarrow 1 < \log_a b < 3 \Leftrightarrow \log_a a < \log_a b < \log_a a^3 \Leftrightarrow a < b < a^3 \text{ 이며,}$$

$a=2$ 인 경우는, $4 \leq b < 8$ 이므로, 4개

$a=3$ 인 경우는, $3 < b < 27$ 이므로, 23개

$a=4$ 인 경우는, $4 < b \leq 32$ 이므로, 28개

▶ 따라서, 가능한 순서쌍 (a,b) 의 개수는 $4 + 23 + 28 = 55$ 개 이다.

[문제 1 채점 기준]

1. 치환을 통해 삼차방정식의 형태로 올바르게 표현한 경우 +5점
2. 부등호를 풀어 로그값의 범위를 올바르게 계산한 경우: +5점
3. a 가 가질 수 있는 세 개의 값에 대해 b 의 범위를 올바르게 계산한 경우: +5점
4. 전체 가능한 순서쌍의 개수를 정확히 계산한 경우: +5점

※ 계산 실수로 틀렸어도 논리 전개 과정이 맞으면 해당 부분에 1~2점의 부분 점수를 부여함.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 20점 이내에서 ± 1 점 추가 점수 부여 가능함.

[수학, 문제 2-1 예시 답안]

등차수열의 합에 대한 공식과 문제에 주어진 조건으로부터 등차수열의 일반항 $a_n = 2n + 3$ 을 구한다. 이를 급수에 대입하고 로그함수의 성질을 이용하여 식을 다음과 같이 정리한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ln \left\{ \frac{3(2n+3)^2}{2n+5} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\ln(2n+3)}{2^{n-1}} - \frac{\ln(2n+5)}{2^n} \right\}$$

첫 번째 급수에 대해서는 등비급수의 합 공식을 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 3}{2^n} = \ln 3$ 를 얻고, 두 번째 급수에 대해서는 제 N 항까지의 합을 구한 후

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\ln(2n+3)}{2^{n-1}} - \frac{\ln(2n+5)}{2^n} \right\} &= \left\{ \ln 5 - \frac{\ln 7}{2} \right\} + \left\{ \ln \frac{\ln 7}{2} - \frac{\ln 9}{2^2} \right\} + \dots + \left\{ \frac{\ln(2N+3)}{2^{N-1}} - \frac{\ln(2N+5)}{2^N} \right\} \\ &= \ln 5 - \frac{\ln(2N+5)}{2^N} \end{aligned}$$

극한 $N \rightarrow \infty$ 를 취하여 $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{\ln(2n+3)}{2^{n-1}} - \frac{\ln(2n+5)}{2^n} \right\} = \ln 5$ 를 얻는다. 최종적으로 두 급수의 합을 더하여 정답 $\ln 3 + \ln 5 = \ln(15)$ 을 얻는다.

[문제 2-1 채점기준]

- 등차수열의 일반항 $a_n = 2n + 3$ 를 얻으면 **+2점**
- 로그함수의 성질을 이용하여 급수를 적절히 분해하면 **+3점**
- 첫 번째 등비급수의 합(+1)과 두 번째 급수의 합(+3)을 구한 후 정답을 얻으면 **+5점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.
 ※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

[수학, 문제 2-2 예시 답안]

$t = \frac{\pi}{2} - x$ 로 치환하여 정적분을 다음과 같이 정리한다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 - \pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi^2 \right\} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \, dx$$

여기서 삼각함수의 성질에 의해 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ 이고 다항식을 전개하면

$$2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 - \pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi^2 = 2x^2 - \pi x + \pi^2$$

이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \cos^2 x \, dx$$

이다. 따라서 제시문에 주어진 삼각함수의 성질에 의해

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \, dx \end{aligned}$$

가 성립한다. 마지막으로 적분을 계산하여 정답 $\frac{11\pi^3}{48}$ 을 얻는다.

[문제 2-2 채점기준]

- $t = \frac{\pi}{2} - x$ 로 치환하여 정적분을 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \cos^2 x \, dx$ 로 표현하면 **+6점**
- 삼각함수의 성질을 이용하여 $\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 - \pi x + \pi^2) \, dx$ 를 얻으면 **+6점**
- 최종적으로 정적분을 계산하여 정답 $\frac{11\pi^3}{48}$ 을 얻으면 **+3점**

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-1 예시 답안]

$(b, f(b))$ 에서의 접선의 방정식은 $y - \ln b(\ln b - 1) = \frac{1}{b}(2\ln b - 1)(x - b)$ 이고 $A(0, 1)$ 을 지나므로

대입하여 정리하면 $(\ln b)^2 - 3\ln b = 0$ 이다. 따라서 $\alpha = 1, \beta = e^3$ 이다.

$(x \ln x - x)' = \ln x$ 를 이용하여 부분적분을 하면

$$\int_1^{e^3} \ln x (\ln x - 1) dx = [(x \ln x - x)(\ln x - 1)]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} (\ln x - 1) dx = 3e^3 - 3 \text{ 이 된다.}$$

[문제 3-1 채점기준]

- $y - \ln b(\ln b - 1) = \frac{1}{b}(2\ln b - 1)(x - b)$ 를 얻으면 +2점
- $\alpha = 1, \beta = e^3$ 구하면 +3점
- 적분하여 $3e^3 - 3$ 을 얻으면 +5점

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

[문제 3-2 예시 답안]

원점을 O라 하고, 점 P에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 한 접선의 접점을 B라 하자. 또한 세 점이 이루는 각 $\angle POB$ 를 θ 라 하자. 이때, 원점과 점 $P(t, \sqrt{6(t-2)^2})$ 사이의 거리가 $L = \sqrt{t^2 + 6(t-2)^4}$ 이므로 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 두 접선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S(t) = \sqrt{L^2 - 1} - \theta(t), \quad \tan \theta(t) = \sqrt{L^2 - 1}$$

$S(t)$ 를 미분하면

$$S'(t) = \frac{LL'}{\sqrt{L^2 - 1}} - \theta', \quad (\sec^2 \theta) \theta' = \frac{LL'}{\sqrt{L^2 - 1}}$$

이므로 정리하여 $S'(t) = \frac{\sqrt{L^2 - 1}}{L} L'$ 를 얻을 수 있다. $L > 1$ 이므로 $S'(d) = 0$ 이 되는 d 를 찾는 것은 $L'(d) = 0$ 을 만족하는 d 를 찾는 것이 된다. $2LL' = 2t + 24(t-2)^3$ 이고 $t + 12(t-2)^3 = 0$ 의 근은 $t = \frac{3}{2}$ 이다. 따라서 $d = \frac{3}{2}$ 이다.

[문제 3-2 채점기준]

● $S(t) = \sqrt{L^2 - 1} - \theta(t)$, $\tan \theta(t) = \sqrt{L^2 - 1}$ 를 얻으면 +5점

● $S'(t) = \frac{\sqrt{L^2 - 1}}{L} L'$ 를 얻으면 +5점

● $t + 12(t - 2)^3 = 0$ 의 근은 $t = \frac{3}{2}$ 을 구하면 +5점

※ 논리 전개 과정이 맞으면 답이 틀리더라도 1~2점의 부분 점수를 부여할 수 있습니다.

※ 채점자는 답안의 완성도에 따라 -0.5~+0.5점을 부여할 수 있습니다.

[생명과학, 문제 4-1 예시 답안]

<표 1>의 각 호르몬 측정값을 보면 환자 A와 B의 티록신 농도는 정상 범위보다 낮은 것을 알 수 있다. 호르몬은 음성 피드백에 의해 조절되므로 정상적인 경우 낮은 티록신 농도에 의해 뇌하수체에서 분비되는 TSH의 분비가 증가되어야 하지만 환자 A의 경우 TSH의 농도는 정상 범위보다 낮은 것을 알 수 있어 환자 A의 경우 뇌하수체 기능 이상으로 TSH 분비가 되지 않아 갑상샘에서 분비되는 티록신의 농도도 낮은 것을 알 수 있다. 반면 환자 B의 경우 낮은 티록신 농도에 의해 뇌하수체에서 분비되는 TSH의 농도는 정상 범위보다 높아진 것을 알 수 있으며, 따라서 갑상샘에서 분비되는 티록신의 농도가 증가되어야 하지만 여전히 낮은 것을 알 수 있는데, 이는 갑상샘 기능 이상으로 추론할 수 있다.

<표 2>에서 갑상샘 세포의 DNA 복제 후 염기 비를 나타내었는데, 정상 세포와 환자 A의 방사성 표지된 T의 비율이 서로 비슷한 데 반해, 환자 B의 갑상샘 세포의 경우 방사성 표지된 T의 비율이 표지되지 않은 T의 2배가량 증가한 것을 알 수 있는데, 이는 DNA 복제가 될 때, 각 염기가 하나씩 상보적으로 결합하는 것을 고려하면 동일한 시간 동안 배지에 들어있는 방사성 표지된 T가 정상 세포 및 환자 A 세포에 비해 더 많이 결합되었음을 나타내며, 이는 환자 B의 세포에서 DNA 복제가 더 많이 일어났음을 의미하는 결과이다. 따라서 환자 A는 뇌하수체 기능 이상으로 갑상샘 호르몬 분비 조절이 되지 않은 것이 원인이고, 환자 B의 경우 DNA 복제가 정상 세포에 비해 더 많이 일어나는 등의 이유로 갑상샘 조직에 이상이 생겨 티록신 조절이 되지 않은 것이 원인이다.

[문제 4-1 채점기준]

1. 환자 A에서 뇌하수체 기능 이상에 의한 갑상샘 호르몬 감소를 설명하면, **+4점**
2. 환자 B에서 뇌하수체 기능은 정상이고 갑상샘 기능 이상을 설명하면, **+4점**
3. 환자 A에서 DNA 염기비가 정상인 것을 제시하면, **+2점**
4. 환자 B에서 방사성 표지 타이민 비율 증가와 연관지어 DNA 복제 증가를 설명하면, **+5점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ± 0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[생명과학, 문제 4-2 예시 답안]

- ▶ 제시문 (다)를 통해 상염색체 유전과 성염색체 유전의 특성을 알 수 있고, <그림 1>의 가계도를 통해 민수의 가족 구성원에 대해서 확인할 수 있다. 또한 [유전질환 D]의 특징을 통해서 유전질환 D는 유전자 d 의 125번째 염기가 치환되는 돌연변이에 의해 발생한다는 것을 알 수 있다.
- ▶ 검사 대상자의 세포로부터 DNA를 추출해서 유전자 d 의 염기서열을 분석했을 때, 125번째 염기의 종류가 A와 T로만 이루어져 있으면, 대립유전자 2개 모두 정상임을 추론해 볼 수 있고, G와 C로만 이루어져 있으면 두 대립유전자 모두가 돌연변이임을 알 수 있다. 또한 A, T, G, C가 같은 비율로 섞여 있으면 대립유전자 한쪽은 정상이고, 다른 쪽은 돌연변이임을 알 수 있다. 따라서 ②, ⑤, 민수는 정상인 것을 알 수 있는데, ②에 비해 ⑤에서 A와 T의 양이 두 배인 것으로 보아 유전자 d 는 성염색체인 X에 존재하고 있음을 추론해 볼 수 있다.
- ▶ <표 1>의 결과를 바탕으로 검사대상자를 유전자형으로 표현하면, ①은 X^*X , ②는 XY , ③은 X^*Y , ④는 X^*X , ⑤는 XX , ⑥은 X^*Y , 민수는 XY 로 나타낼 수 있다. 따라서 유전질환 D에 걸릴 수 있는 사람은 ③, ⑥이고, 그 이외의 사람들은 정상으로 생각해 볼 수 있다.
- ▶ 위의 분석을 바탕으로 유전질환 D는 성염색체 유전이고, 민수가 질병에 걸릴 확률은 0임을 알 수 있다.

[문제 4-2 채점기준]

1. <표 1>을 분석하여, 유전자형과 연계지어 제시하면, **+3점**
2. 각 검사 대상자의 유전자형을 정확히 제시하면, **+6점**
3. 유전질환이 성염색체 유전임을 제시하면, **+3점**
4. 민수가 유전질환에 걸릴 확률이 0임을 제시하면, **+3점**

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15점 이내에서 ± 0.5점 추가 점수 부여 가능함.

[물리학, 문제 4-1 예시 답안]

▶ 물체 A는 빗면 위에서 빗면 방향을 따라 등가속도 운동을 하고, 수평 방향으로는 등속도 운동을 한다. 바닥에서는 속도의 크기와 방향을 유지하며 등속도 직선 운동을 한다.

▶ 운동을 시작할 때 물체 A의 역학적 에너지는 $E = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ 이다. 바닥에 닿았을 때 물체의 속력을 V 라 하면 역학적 에너지 보존 법칙에 따라 $\frac{1}{2}mV^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$ 이다.

▶ 물체에 y 축 방향으로 작용하는 알짜힘이 0이므로 모든 구간에서 물체의 y 축 방향 속력은 $V_y = v$ 이다. 에너지 보존 법칙과 속도 벡터의 크기 공식 $V^2 = V_x^2 + V_y^2$ 에서 물체가 바닥에 닿았을 때 x 축 방향 속력은 $V_x = \sqrt{2gh}$ 이다.

▶ 물체는 빗면을 따라서 가속도 $a = g\sin\theta$ 로 등가속도 운동을 하므로, 빗면을 이동한 시간은 $t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 이다.

▶ 빗면에서 물체가 y 축 방향으로 움직인 거리는 $y_1 = vt = \frac{v}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 이다.

▶ 바닥에서 물체 A는 등속 직선 운동을 하므로 변위 벡터와 속도 벡터의 방향이 같다. 두 물체가 충돌할 조건은 $\frac{V_y}{V_x} = \frac{y_0 - y_1}{x_0}$ 이고, 정리하면 $v = \frac{y_0}{\frac{x_0}{\sqrt{2gh}} + \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}} = \frac{y_0\sqrt{2gh}}{x_0 + \frac{2h}{\sin\theta}}$ 이다.

[문제 4-1 채점기준]

- 구간별 물체의 운동을 바르게 기술하면 +3점
- 에너지 보존 법칙 (또는 포물선 운동)으로부터 물체의 속도를 바르게 기술하면 +4점
- 물체가 빗면을 지나 바닥에 닿았을 때의 변위를 바르게 구하면 +4점
- 바닥에서 변위 벡터와 속도 벡터의 관계로부터 초기 속력을 바르게 구하면 +4점

※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목 별 점수의 절반 이내에서 부분 점수를 부여할 수 있음.

※ 각 항목 별 답안의 완성도에 따라 ± 0.5 점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).

[물리학, 문제 4-2 예시 답안]

▶ 시간 t 에 따른 자기장의 세기는 $B = 0.1 \times (1 - \frac{t}{4})$ [T]이다.

▶ 제시문 (라)에 의하여, 처음 위치 h_0 에서 v 의 속력으로 등속 운동하는 위치 h 는 다음과 같다.

$$h = h_0 + vt = 1 + 2t \text{ [m]}$$

▶ 직선 도선 C, D와 금속 막대가 이루는 삼각형의 크기 A 는 다음과 같다.

$$A = \frac{1}{2}h \times 2h \tan\theta = h^2 \tan\theta$$

▶ 제시문 (마)에 의하여, 시간 t 에 따른 자기 선속은 다음과 같다.

$$\Phi = BA = \frac{1}{40} \tan\theta (4-t)(1+2t)^2$$

▶ 제시문 (마)와 (바)에 의하여, 유도 기전력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t)}{(t+\Delta t) - t} \\ &= -\frac{1}{40} \tan\theta \frac{[(4-(t+\Delta t))(1+2(t+\Delta t))^2] - [(4-t)(1+2t)^2]}{\Delta t} \\ &= +\frac{3}{10} \tan\theta \left[\left(t + \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{5}{2}\right) \right] \quad (\text{단, } \Delta t \text{는 충분히 작고, } t > 0 \text{이다.}) \end{aligned}$$

▶ 위의 식과 제시문 (바)에 의하여, 유도 전류는 코일의 자기 선속을 방해하는 방향으로 흐르며 다음과 같이 표현된다.

$$I = \frac{V}{R} = +\frac{3}{10R} \tan\theta \left[\left(t + \frac{1}{2}\right) \left(t - \frac{5}{2}\right) \right]$$

▶ 따라서 유도 전류의 방향이 바뀌는 시각 t 는 0s 이후인 $\frac{5}{2}$ s이다. 참고로, 시간이 $\frac{5}{2}$ s 이전에는 시계 방향으로 유도 전류가 흐르며, 이후에는 시계 반대 방향으로 흐른다.

[문제 4-2 채점기준]

- 시간 t 에 따른 자기장의 크기와 넓이를 바르게 구하면 +3점
- 시간 t 에 따른 자기 선속을 바르게 구하면 +3점
- 제시문에 근거하여 유도 기전력의 크기와 방향을 바르게 구하면 +4점
- 유도 전류의 방향이 바뀌는 시각 t 을 바르게 구하면 +5점

※ 논리 전개가 맞으면 계산이 틀려도 항목 별 점수의 절반 이내에서 부분 점수를 부여할 수 있음.

※ 각 항목 별 답안의 완성도에 따라 ± 0.5 점 부여할 수 있음 (최대 점수 이내).

[화학, 문제 4-1 예시 답안]

- ▶ 꼭지가 닫혀 있는 상태에서 액체 A는 증발하여 기체 A가 되고, 동적 평형 상태가 되면 기체 A의 압력은 A의 증기압과 같다. 따라서, 증발한 액체 A의 몰수를 $\Delta n_{\text{액}}$, 부피를 $\Delta V_{\text{액}}$, 액체 A의 밀도를 ρ_A , 분자량을 M_A 라고 할 때 다음의 식이 성립한다.

$$n_{\text{기}} = -\Delta n_{\text{액}} = -\frac{\Delta w_{\text{액}}}{M_A} = -\frac{\rho_A \Delta V_{\text{액}}}{M_A}, \quad V_{\text{기}} = 1 - \Delta V_{\text{액}} \approx 1$$

$$0.72 \text{ atm} = \frac{n_{\text{기}} RT}{V_{\text{기}}} = -\frac{\Delta n_{\text{액}} RT}{1} = -\frac{\rho_A \Delta V_{\text{액}}}{M_A} RT$$

$$= -\frac{0.72 \text{ kg/L} \times \Delta V_{\text{액}}}{96 \text{ g/mol}} \times 0.08 \text{ atm L/(mol K)} \times 300 \text{ K}$$

위 식을 풀면 $\Delta V_{\text{액}} = -0.0040 \text{ L} = -4.0 \text{ mL}$ 이므로 남아 있는 액체의 부피는 $(100 - 4.0) \text{ mL} = 96 \text{ mL}$ 이다.

- ▶ 꼭지를 열었을 때 기체 A는 기체 B와 반응하여 기체 C를 생성하게 된다. 평형 상태에서 기체 A는 액체 A와 동적 평형을 이루고 있으므로 기체 A의 압력은 반응의 진행과 관계없이 증기압과 같다. 즉, 기체 A의 농도는 항상 다음과 같다.

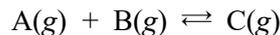
$$[A] = \frac{n_A}{V_A} = \frac{P}{RT} = \frac{0.72 \text{ atm}}{0.08 \text{ atm L/(mol K)} \times 300 \text{ K}} = 0.03 \text{ M}$$

꼭지를 열기 전 기체 B의 몰수와 꼭지를 열고 난 후 B의 농도는 다음과 같다.

$$n_B = \frac{PV}{RT} = \frac{2.4 \text{ atm} \times 1 \text{ L}}{0.08 \text{ atm L/(mol K)} \times 300 \text{ K}} = 0.1 \text{ mol}$$

$$[B]_0 = \frac{n_B}{V_B} = \frac{0.1 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 0.05 \text{ M}$$

이다.



	A의 몰 농도(M)	B의 몰 농도(M)	C의 몰 농도(M)
반응 전	0.03	0.05	0
반응 후	0.03	0.05 - x	x

따라서, $K = 50 = \frac{[C]}{[A][B]} = \frac{x}{0.03 \times (0.05 - x)}$ 이고, 이 식을 풀면 $[C] = x = 0.03 \text{ M}$ 이다. 생성된 C의 몰수는 $n_C = [C] \times V_C = 0.03 \text{ M} \times 2 \text{ L} = 0.06 \text{ mol}$ 이다.

- ▶ 초기 상태의 액체 A는 화학 반응을 통하여 0.06 mol이 소모되었고, 2 L의 기체 ($[A] \times V_A = 0.03 \text{ M} \times 2 \text{ L} = 0.06 \text{ mol}$)로 변하여 기체와 동적 평형을 이룬다. 따라서, 새로운 평형 상태에서 액체 A는 0.12 mol만큼 줄어들게 되므로 평형 상태에서의 액체 A의 부피는

$$100 + \frac{\Delta n_{\text{액}} M_A}{\rho_A} = 100 \text{ mL} + \frac{(-0.12 \text{ mol}) \times 96 \text{ g/mol}}{0.72 \text{ g/mL}} = 84 \text{ mL}$$

가 된다.

[문제 4-1 채점기준]

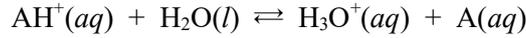
1. 꼭지를 열기 전 남아 있는 액체 A의 부피를 바르게 구하면 **+5점**
2. 꼭지를 열고 나서 새로운 평형에 도달했을 때 생성물 C의 몰수를 바르게 구하면 **+5점**
3. 꼭지를 열고 나서 평형에 도달했을 때 남아 있는 액체 A의 부피를 바르게 구하면 **+5점**

※ 계산을 잘못하면 -1 점.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15 점 이내에서 ± 2 점 점수 조절 가능함.

[화학, 문제 4-2 예시 답안]

▶ 지시약 A의 짙산인 AH^+ 의 산 이온화 반응과 그 평형 상수식은 다음과 같다.



$$K_a = \frac{[H_3O^+][A]}{[AH^+]}$$

▶ 위의 평형 상수식에서 AH^+ 의 산 이온화 상수 K_a 와 pH, 즉 $[H_3O^+]$ 를 알면 다음의 식을 통해 $[AH^+]$ 와 $[A]$ 의 비율을 결정할 수 있다.

$$\frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{[A]}{[AH^+]}$$

▶ 지시약 A가 들어있는 용액의 색이 녹색에서부터 파란색으로 바뀌는 pH는 10인데, 이 지점에서 $\frac{[A]}{[AH^+]}$ 의 값이 10이 된다. 이는 즉 $\frac{K_a}{[H_3O^+]} = 10$ 임을 의미하며 이때 수소 이온의 농도를 이용하면 K_a 의 값을 얻을 수 있다.

$$\text{pH} = 10 \text{에서 } [H_3O^+] = 1 \times 10^{-10} \text{ M}$$

$$\frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{K_a}{1 \times 10^{-10}} = 10$$

$$K_a = 1 \times 10^{-9}$$

▶ 마찬가지로 지시약 A가 들어있는 용액의 색이 노란색에서부터 녹색으로 바뀌는 pH는 8인데, 이 지점에서 $\frac{[A]}{[AH^+]}$ 의 값이 $\frac{1}{10}$ 이 된다. 이는 즉 $\frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{1}{10}$ 임을 의미하며 이때 수소 이온의 농도를 이용하면 K_a 의 값을 얻을 수 있다.

$$\text{pH} = 8 \text{에서 } [H_3O^+] = 1 \times 10^{-8} \text{ M}$$

$$\frac{K_a}{[H_3O^+]} = \frac{K_a}{1 \times 10^{-8}} = \frac{1}{10}$$

$$K_a = 1 \times 10^{-9}$$

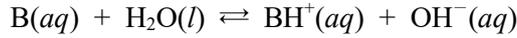
▶ 이를 통해 AH^+ 의 K_a 가 10^{-9} 의 값을 가짐을 알 수 있다. 지시약 A의 염기 이온화 상수 K_b 와 그 짙산 AH^+ 의 산 이온화 상수 K_a 의 곱은 물의 이온곱 상수와 항상 같은 것을 이용하여 K_b 의 값을 구할 수 있다.

$$K_a \times K_b = 1 \times 10^{-14}$$

$$1 \times 10^{-9} \times K_b = 1 \times 10^{-14}$$

$$K_b = 1 \times 10^{-5}$$

- ▶ 염기 이온화 상수 K_b 가 25°C에서 1×10^{-9} 인 가상의 약염기 B가 0.1 M 들어있는 수용액의 pH를 구하면 다음과 같다.



$$K_b = 1 \times 10^{-9} = \frac{[BH^+][OH^-]}{[B]} = \frac{x^2}{0.1 - x}$$

약염기인 B의 이온화도는 매우 낮으므로 $0.1 - x \approx 0.1$

$$1 \times 10^{-9} = \frac{x^2}{0.1 - x} \approx \frac{x^2}{0.1}$$

$$x = 1 \times 10^{-5} \text{ M} = [OH^-]$$

$$\therefore \text{pH} = 14 - \text{pOH} = 14 + \log [OH^-] = 9$$

- ▶ B를 포함한 용액의 pH가 9이므로, 지시약이 가리키는 용액의 색깔은 녹색이다.
- ▶ 지시약 또한 고유의 K_a 혹은 K_b 를 가지므로 산 혹은 염기로 작용하여 용액의 pH에 변화를 줄 수 있다. 따라서 용액의 색깔을 구별할 수 있는 최소한의 지시약을 사용하는 것이 중요하다.

[문제 4-2 채점기준]

1. 주어진 자료로부터 A의 K_b 를 올바르게 계산하면 **+7점**
2. 약염기 B가 들어있는 용액의 pH와 색깔을 올바르게 제시하면 **+5점** (색깔만 제시한 경우 **0점**)
3. 지시약 고유의 산성 혹은 염기성에 대해 올바르게 언급하면 **+3점**

※ 계산을 잘못하면 -1 점.

※ 각 부분에서 바르게 답안을 작성한 경우에도 답안의 완성도에 따라 총점 15 점 이내에서 ± 2 점 점수 조절 가능함.