지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

https://orbi.kr/00043463424

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

https://atom.ac/books/9395

입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex
공통

1. $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1}\ (n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\quad B = \{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? 〔2024학년도 6월 12〕

① 30　② 34　③ 38　④ 42　⑤ 46

1. 정답 ⑤ 〔2024학년도 6월 12〕

1) 등차수열은 $a_n = a + (n-1)d$로 놓기, 문제해석

일단 $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이 있다고 하네요. 그럼 $a_n = a + (n-1)d \ (d \neq 0)$로 설정하죠. $a_2 = -4$이니까 $a + d = -4$이고 $a_n = -4 + (n-2)d$이네요.

이때 $b_n = a_n + a_{n+1} \ (n \geq 1)$이라고 하네요. 바로 식을 설정하면 $b_n = -8 + (2n-3)d \ (n \geq 1)$입니다.

그리고 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$일 때 $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열의 a_{20}의 합을 구하라고 합니다.

먼저 집합 A, B에 대하여 $n(A \cap B) = 3$이라는 건 겹치는 원소가 3개 있어야 한다는 거죠? 이때 우리가 설정한 등차수열을 각각 집어넣어보면

$$A = \{-4-d,\ -4,\ -4+d,\ -4+2d,\ -4+3d\},$$
$$B = \{-8-d,\ -8+d,\ -8+3d,\ -8+5d,\ -8+7d\}$$

이렇게 되네요. 결국 각각의 집합에 대하여 서로 겹치는 게 3개여야 합니다.

일단 여기서 주목해야 할 점은 $\{a_n\}$은 공차가 d이고, $\{b_n\}$은 공차가 $2d$라는 점입니다. 그 말은 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 어느 하나의 항이라도 겹치는 부분이 있다면, 예를 들어 $a_n = b_n$이라면 $b_{n+1} = a_{n+2}$, $b_{n+2} = a_{n+4}$, $b_{n+3} = a_{n+6} \cdots$의 관계가 성립하게 된다는 거죠. $\{b_n\}$은 값이 증가하는(혹은 감소하는) 속도가 $\{a_n\}$보다 두 배 빠르므로(공차가 두 배이므로) $\{a_n\}$이 두 항만큼 값이 변화할 때 $\{b_n\}$은 하나의 항만큼만 값이 변화하면 같아집니다.

그런데 이때 A와 B는 겹치는 게 3개여야 하잖아요? 방금 말했듯이 $a_n = b_n$일 때 $b_{n+1} = a_{n+2}$, $b_{n+2} = a_{n+4}$, $b_{n+3} = a_{n+6} \cdots$ 이어야 하는데 A의 원소의 개수는 5개입니다. 여기서 한 항을 건너 뛰어 B의 원소 3개와 같아지기 위해서는 무조건 a_1, a_3, a_5가 B의 원소 3개와 같아야 하겠네요.

이제 B의 원소 3개를 무엇을 고르느냐가 문제가 됩니다. 연속해서 뽑아야 하죠? 가능한 경우는 $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, $(b_2,\ b_3,\ b_4)$, $(b_3,\ b_4,\ b_5)$ 이렇게 3개입니다.

2) 케이스 분류

2-1) $(b_1,\ b_2,\ b_3)$일 때

이러면 $a_1=b_1$이어야 합니다. $-4-d=-8-d$이므로 $d=0$인데 아까 $d\neq 0$이어야 한다고 했잖아요? 안 되겠네요.

2-2) $(b_2,\ b_3,\ b_4)$일 때

$a_1=b_2$이어야 합니다. $-4-d=-8+d$이고 $d=2$이네요.

$A=\{-6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2\}$, $\quad B=\{-10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6\}$이니까 겹치는 것도 딱 3개구요. 맞습니다!

$a_n=-4+2(n-2)$이니까 $a_{20}=32$이네요.

2-3) $(b_3,\ b_4,\ b_5)$일 때

$a_1=b_3$이어야 합니다. $-4-d=-8+3d$이고 $d=1$이네요.

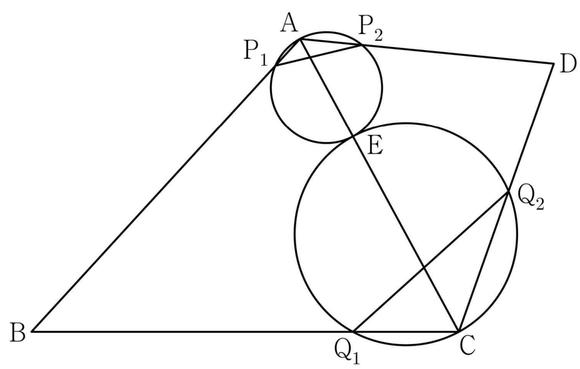
$A=\{-5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1\}$, $\quad B=\{-9,\ -7,\ -5,\ -3,\ -1\}$이니까 맞네요. $a_n=n-6$이고 $a_{20}=14$입니다.

따라서 모든 a_{20}의 합은 $32+14=46$입니다. 답은 ⑤번이네요.

2. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \overline{\mathrm{CD}}=2,\ \cos(\angle \mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle \mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하고,
선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자.
$\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$) 〔2024학년도 6월 13〕



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

2. 정답 ① 〔2024학년도 6월 13〕

1) 그림 있으면 그림 보면서, 삼각형은 정해져 있다 – 내부 : 두 변의 길이와 한 각

일단 그림이 있고 $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$, $\angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$라고 합니다. 그림에다 다 표시해두구요. 이후에 뭐 어쩌구저쩌구하는데 이미 그림에 다 표시되어 있습니다.

먼저 삼각형 BCD의 경우 두 변의 길이와 한 각이 정해졌습니다. 바로 $\overline{\mathrm{BD}}$를 구해보죠.

$\cos C=-\frac{1}{3}=\frac{3^2+2^2-\overline{\mathrm{BD}}^2}{2\times3\times2}$이고 정리하면 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{17}$입니다.

점 E는 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점입니다. $\overline{\mathrm{AE}}=2r$, $\overline{\mathrm{CE}}=4r$이라고 할게요. 그리고 이후에는 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$를 설명하고, $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$라고 합니다. 여기서 잘 생각해보세요. 일단 문제에서 중요하게 다뤄지는 건 AE를 지름으로 하는 원과 CE를 지름으로 하는 원입니다. 거기에 $\overline{\mathrm{AE}}=2r$, $\overline{\mathrm{CE}}=4r$로 서로의 반지름에 관한 관계식도 있어요. CE가 AE의 두 배죠. 그런데 심지어 새로운 관계식 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$도 있네요? 그리고 각 원에는 삼각형이 내접하고 있어요. 길이의 비에 관한 공식을 생각해보세요.

$\frac{A}{\sin A}=2R$을 사용할 수 있을 것 같지 않나요? 심지어 반지름도 연관되어 있어 식을 연결할 수도 있을 것 같아요. 가보죠.

먼저 $\angle\mathrm{ABD}=\mathrm{A}$, $\angle\mathrm{BCD}=\mathrm{B}$라 하면 삼각형 $A\mathrm{P_1P_2}$에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin A}=2r$이고, $C\mathrm{Q_1Q_2}$에 대하여 $\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin C}=4r$입니다. 그러면 $\frac{2\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin C}=4r$가 되겠군요. 이때 $\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 $\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\overline{\mathrm{P_1P_2}}$이므로 넣어서 정리하면 $\frac{6}{\sin A}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin C}=4r$가 됩니다.

이때 $\cos C=-\frac{1}{3}$이네요? 그러면 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$을 이용해서 $\sin C$를 구해봅시다. 넣고 정리하면 $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$가 나오네요. $\frac{6}{\sin A}\equiv\frac{15}{2}=4r$이고 $\sin A=\frac{4}{5}$, $r=\frac{15}{8}$입니다. 이때 $\angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$를 이용하면 $\cos A=-\frac{3}{5}$이네요.

이후에 삼각형 ABD의 넓이가 2라는 것과 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값을 구하라고 합니다. 일단 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$는 삼각형 ABD의 두 변의 길이이죠? 그리고 ABD의 넓이는 2이구요. 우리는 나머지 한 변의 길이인 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{17}$와 한 각인 $\cos A=-\dfrac{3}{5}$를 알죠. 다 나왔네요?

먼저 편의상 $\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$이라고 할게요. 코사인법칙에 의하여 $\cos A=-\dfrac{3}{5}=\dfrac{a^2+b^2-17}{2\times a\times b}$이고 정리하면 $a^2+b^2+\dfrac{6}{5}ab=17$입니다.

그리고 ABD의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times b\times a\times\sin A=2$이고 $\sin A=\dfrac{4}{5}$이므로 $ab=5$이네요. $a^2+b^2+\dfrac{6}{5}ab=17$에 넣으면 $a^2+b^2=11$입니다. 우리는 $a+b$를 구해야 하잖아요? 제곱의 형태로 만들고 루트 씌우죠.

$a^2+b^2=11$의 양변에 $2ab=10$를 더하면 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=21$가 되구요, 길이가 음수가 될 리 없으니 $a+b=\sqrt{21}$입니다. 답은 ①번이네요.

3. 실수 $a\,(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? 〔2024학년도 6월 14〕

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

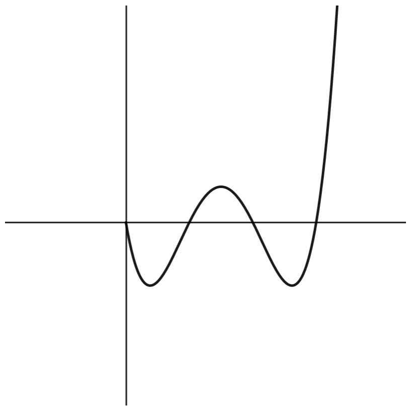
3. 정답 ③ 〔2024학년도 6월 14〕

1) 위치, 속도, 가속도는 수직선 위를 움직인다

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$인데 출발한 후에 운동방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여 $t=0$부터 $t=2$까지 위치의 변화량의 최댓값을 구하랍니다.

일단 운동 방향을 한 번만 바꾼다는 건 어떤 의미인가요? 도함수가 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 뜻이죠. 지금 위치의 함수의 도함수는 속도의 함수 $v(t)$잖아요? 다시 말하면 $v(t)$의 부호의 변화가 단 한 번만 일어나야 한다는 말이 됩니다.

그런데 지금 $v(t)$를 잘 보세요. 사차함수입니다. 만약에 a 혹은 $2a$가 0과 1이 아닌 다른 값이라면 $v(t)$는



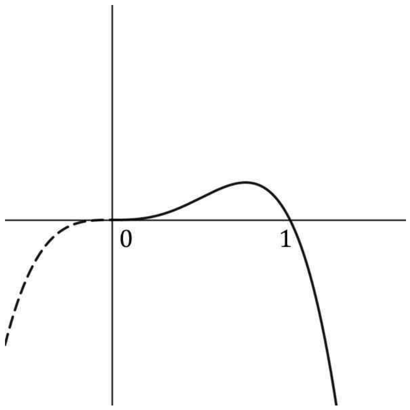
이런 함수가 되겠죠? 이러면 부호의 변화가 3번이나 일어나게 됩니다. 조건에 맞지 않잖아요?

결국 a 혹은 $2a$가 0과 1가 되어 겹치는 부분이 있어야 하겠네요.

2) 케이스 분류

2-1) $a=0$일 때

$a=0$이라면 $v(t) = -t^3(t-1)$입니다. 그래프를 그려보면

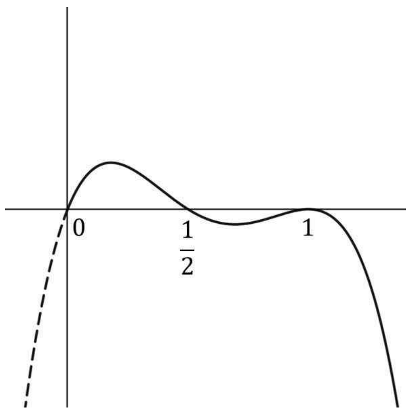


이렇게 됩니다. 부호의 변화가 단 한 번만 일어나죠? 맞네요!

$t=0$부터 $t=2$까지의 위치의 변화량을 구해봅시다. $\int_0^2 -t^3(t-1)dt = \left[-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = -\frac{12}{5}$입니다.

2-2) $a=\frac{1}{2}$일 때

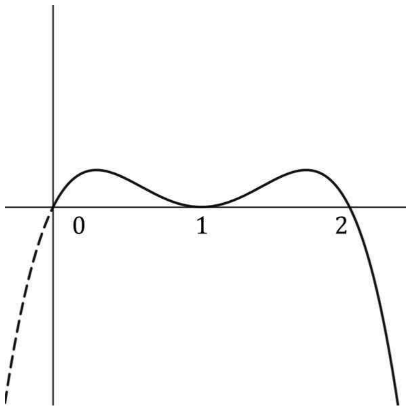
정확히 말하면 $2a=1$일 때입니다. 이러면 $v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$이고 그래프로 그려보면



이렇게 됩니다. $t=\frac{1}{2}$일 때 부호변화가 일어난 후 다시 일어나지 않네요. 조건을 만족시킵니다. 위치의 변화량을 구해보면 $\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt = \left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2 = -\frac{11}{15}$이네요.

2-3) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이고 그래프는



이렇게 됩니다. $t=2$에서만 부호변화가 일어나네요. 조건을 만족합니다. 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2=\frac{4}{15}$$ 입니다.

위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이네요. 답은 ③번입니다.

4. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?
〔2024학년도 6월 15〕

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

4. 정답 ② 〔2024학년도 6월 15〕

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

k가 자연수인데 $a_1 = k$이고 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$이라고 합니다. 이때 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$가 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하라네요.

일단 곱해서 음수가 나온다는 건 a_3, a_4, a_5, a_6 중에서 음수가 1개이거나 3개여야 한다는 거죠?

먼저 $a_1 = k > 0$이므로 $a_2 = a_1 - 2 - k = -2$입니다. 이러면 $a_2 = -2 \le 0$이므로 $a_3 = a_2 + 4 - k = 2 - k$이죠. 여기서부터 시작하네요. $2-k$는 0보다 작거나 같을까요 아니면 클까요?

2) 케이스 분류

2-1) $a_3 = 2 - k > 0$일 때

$k < 2$이면 $k < 2$인 자연수는 $k = 1$ 하나밖에 없죠. $a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - 1 & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - 1 & (a_n > 0) \end{cases}$입니다. $a_3 = 1$이고, $a_4 = a_3 - 7 = -6$입니다. $a_5 = a_4 + 7 = 1$입니다. $a_6 = a_5 - 11 = -10$입니다. 이러면 a_3, a_4, a_5, a_6 중에서 음수가 총 2개가 되므로 곱해서 음수가 나올 수 없습니다.

2-2) $a_3 = 2 - k \le 0$일 때

$k \ge 2$이면 $a_4 = a_3 + 6 - k = 8 - 2k$입니다. 이때 역시 마찬가지로 $8 - 2k$가 0보다 작거나 같은 경우와 큰 경우로 나뉘네요.

2-2-1) $a_4 = 8 - 2k > 0$일 때

$k < 4$이면 $2 \le k < 4$인 자연수는 $k = 2$, 3이네요.
$k = 2$라면 $a_3 = 0$, $a_4 = 4$, $a_5 = -6$, $a_6 = 2$로 음수가 총 1개입니다. 다만 문제는 0이 있어서 곱하면 0이 되겠네요. 조건에 맞지 않습니다.

$k = 3$이라면 $a_3 = -1$, $a_4 = 2$, $a_5 = -9$, $a_6 = -2$로 음수가 총 3개입니다. 되네요!

2-2-2) $a_4=8-2k\le 0$일 때

일단 지금 현재 a_3, a_4 모두 0보다 작거나 같습니다.

$a_4\le 0$이므로 $a_5=16-3k$입니다. 또 나뉘겠죠?

2-2-2-1) $a_5=16-3k>0$일 때

$4\le k<\frac{16}{3}$인 자연수는 $k=4$, 5입니다.

$k=4$이면 $a_4=0$이 됩니다. 하나라도 0이 되면 안 되죠?

$k=5$이면 $a_3=-3$, $a_4=-2$, $a_5=1$, $a_6=-14$로 음수가 3개입니다. 되네요!

2-2-2-2) $a_5=16-3k\le 0$일 때

이러면 a_3, a_4, a_5 모두 0보다 작게 됩니다. 0이 되는 케이스는 다 지워버렸으니까 고려하지 않아도 됩니다.

그러면 $a_6>0$이 되는지만 확인하면 되겠네요.

$a_5\le 0$이기 때문에 $a_6=26-4k$입니다. $a_6>0$이 되려면 $26-4k>0$이고 $k<\frac{13}{2}$이어야 하네요.

$\frac{16}{3}\le k<\frac{13}{2}$인 자연수 k는 $k=6$만 존재합니다.

결국 $k=3$, 5, 6일 때 조건을 만족시킬 수 있습니다. 따라서 모든 k의 합은 $3+5+6=14$입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.
〔2024학년도 6월 20〕

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $\lvert g(x) \rvert \geq \lvert g(3) \rvert$이다.

5. 정답 39 〔2024학년도 6월 20〕

1) 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있는데 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$랍니다. 그럼 $g(0)=0$이고 $g'(x)=f(x)$이죠?

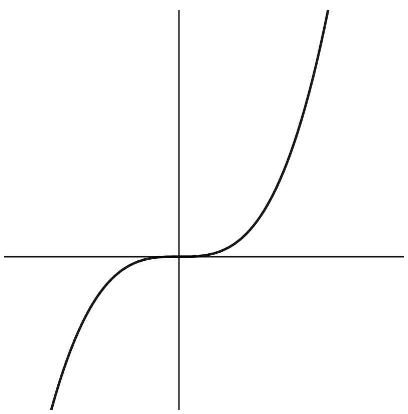
그리고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수입니다.

이때 $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$라고 하네요.

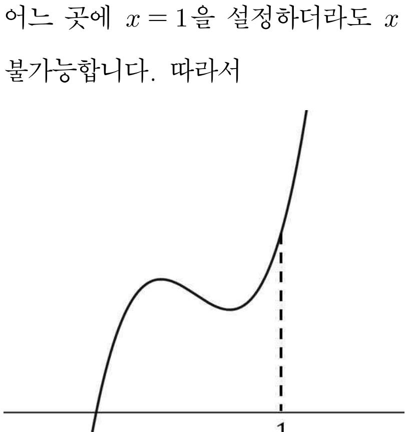
먼저 $g(x) \geq g(4)$라는 건 $x \geq 1$에서 $g(x)$는 $x=4$에서 최솟값을 갖게 된다는 거죠? 그리고
$|g(x)| \geq |g(3)|$이므로 절댓값을 씌웠을 때는 $x=3$에서 최솟값을 갖게 된다는 거구요.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

일단 먼저 개형부터 살펴볼게요. 감소하는 부분 없이 계속 증가하는 개형을 생각해보죠.

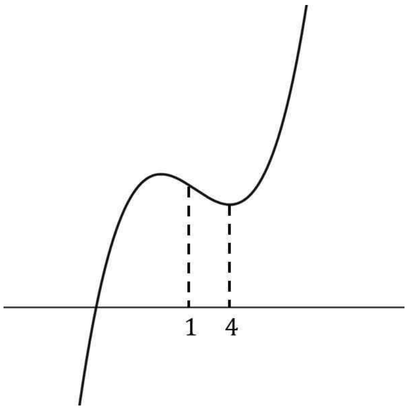


어느 곳에 $x=1$을 설정하더라도 $x \geq 1$에서 $g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지게 됩니다. 따라서 이 개형은 불가능합니다. 따라서

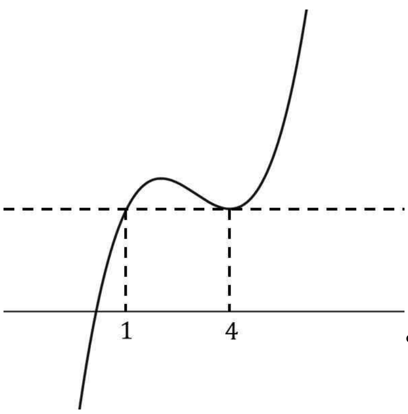


이런 개형이 됩니다. 이제 문제는 $x=1$을 어디에 설정해야 하냐는 거에요. 그림과 같이 설정하면 $x \geq 1$에서

$g(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지게 됩니다. 안 되죠?

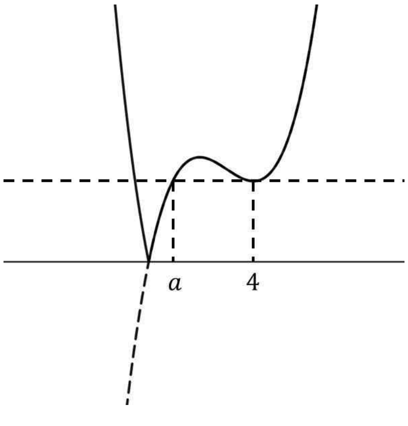


이런 식으로 설정하면 $x \geq 1$일 때 $g(x)$는 $x=4$에서 최소가 되어야 하므로 극소가 되는 x좌표는 4가 됩니다. 언제까지일까요?



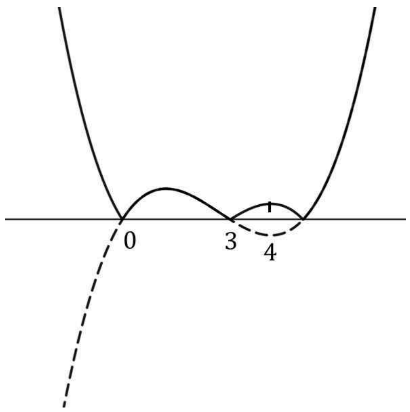
이때가 마지막이겠네요. 왜냐하면 이거보다 더 왼쪽으로 가면 최소가 되는 지점이 $x=1$이 되거든요.

이제 $|g(x)| \geq |g(3)|$를 확인해보죠. 이거는 $x \geq 1$일 때 $g(x)$에 절댓값을 씌운 $|g(x)|$는 $x=3$에서 최솟값을 갖게 된다는 의미입니다. 우리가 방금 찾은 개형을 위아래로 움직이면서 확인해볼게요.



이렇게 설정하면 최솟값은 $x=3$이 불가능합니다. $x=1$은 a와 4 사이에 있는데 최솟값은 a보다 작은 곳에 있잖아요.

지금 보니까 최소가 되는 지점은 x축과 만나는 지점이네요. 절댓값 함수는 무조건 0보다 크거나 같으니까 최소는 0이 되는 지점이죠. 그러니까 다시 말하면 $g(3)=0$이 되도록 해야 하겠네요. 설정해보면



이렇게 되겠네요.

결국 정리해보면 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$이고 $g(0)=g(3)=0$이고 $g'(4)=0$인 삼차함수입니다. 함수를 구해볼게요.

3) 함수 구하기 - 인수정리

먼저 $g(0)=g(3)=0$이므로 인수정리에 의해 $g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-a)$라 할 수 있습니다. $g'(4)=0$이므로 미분하고 값을 넣어보면 $g'(x)=x^2-\frac{2(a+3)}{3}x+a$이고 $g'(4)=8-\frac{5a}{3}=0$이고 $a=\frac{24}{5}$입니다.

$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)\left(x-\frac{24}{5}\right)$이고 $g'(x)=f(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$입니다. $f(9)=39$이네요.

6. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
〈보기〉의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오.(단, $A+B+C\neq 0$)
〔2024학년도 6월 21〕

• 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
• 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
• 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$ 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

6. 정답 110 〔2024학년도 6월 21〕

1) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기

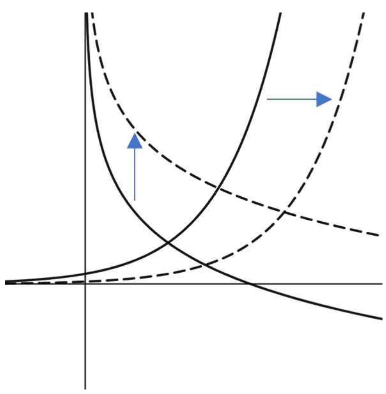
$y = t - \log_2 x$와 $y = 2^{x-t}$가 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라고 할 때 $A+B+C$의 값을 구하랍니다. 규칙은 바로 아래에 있구요.

ㄱ에서 $f(1) = 1$이고 $f(2) = 2$냐고 물어보네요. 일단 $f(1)$은 $1 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-1}$이 만나는 점의 x좌표죠? 그게 1이냐고 묻는 거구요. $x = 1$을 넣으면 둘 모두 1이 나옵니다. $f(1) = 1$ 맞네요.

$f(2)$도 해보죠. $2 - \log_2 x$와 $y = 2^{x-2}$인데 둘 다 $x = 2$를 넣으면 1이 나옵니다. $f(2) = 2$도 맞네요.
$A = 100$입니다.

ㄴ에서 t값이 증가할 때 $f(t)$의 값도 증가하냐고 물어보네요. 일단 그래프부터 살펴보죠.
$y = t - \log_2 x$는 $y = \log_2 x$를 부호를 반대로 해서 뒤집은 후에 t만큼 위로 올린 함수이고,
$(1,\ t)$, $(2,\ t-1)$를 지나는 함수입니다.

$y = 2^{x-t}$는 $y = 2^x$를 t만큼 오른쪽으로 평행이동한 함수이고 $(t,\ 1)$을 지나는 함수입니다. 그래프로 그려보면



이렇게 되죠. 두 함수 중 어느 하나를 고정시킨 후에 나머지 함수를 움직여도 만나는 점의 x좌표가 증가하는데, 심지어 두 함수 모두 증가하면? 당연히 만나는 점의 x좌표는 증가하겠죠? ㄴ도 맞고 $B = 10$입니다.

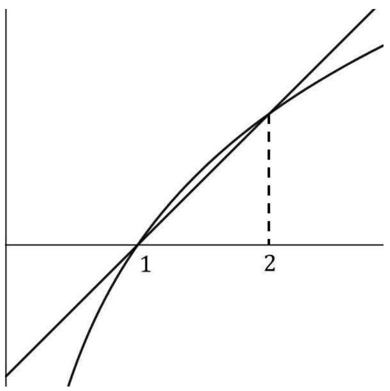
ㄷ에서 $t > 0$일 때 $f(t) \geq t$이냐고 물어보네요. 일단 생각을 좀 해볼게요.

$y = 2^{x-t}$의 경우 무조건 $(t,\ 1)$ 좌표를 지나게 됩니다. 그러니까 $f(t) \geq t$가 되려면 $y = t - \log_2 x$에 $x = t$를 넣은 값은 1보다는 크거나 같아야 합니다. 그래야 감소하는 $y = t - \log_2 x$가 증가하는 $y = 2^{x-t}$과 만나게 되고, 그 점의 x좌표는 t보다 크거나 같게 될 테니까요. 따라서 $t - \log_2 t \geq 1$이고 $t - 1 \geq \log_2 t$이어야

합니다.

이걸 그래프 상에서 표현하자면 $t>0$일 때 $y=t-1$의 그래프는 $y=\log_2 t$보다는 무조건 위에 있어야 합니다.

하지만 $y=\log_2 t$는 $(1,\ 0)$, $(2,\ 1)$을 지나고, $y=t-1$ 역시 그러하죠. 이걸 그래프로 그려보면



$y=\log_2 t$가 $y=t-1$보다 커지는 부분이 존재하네요? ㄷ은 맞지 않습니다. $C=0$입니다.

따라서 $A+B+C=110$입니다.

7. 정수 a $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오.
〔2024학년도 6월 22〕

함수 $f(x)$에 대하여 $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

7. 정답 380 〔2024학년도 6월 22〕

1) 문제해석

0이 아닌 정수 a가 있는데 $f(x)=x^3-2ax^2$이라고 합니다. $f(x)=x^2(x-2a)$이니까 $x=0$에서 x축에 접하고 $x=2a$에서 지나가는 지렁이같은 삼차함수죠? $x=\frac{4a}{3}$, $x=0$에서 극값을 갖구요.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하라네요. 일단 조건을 볼까요?

$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$을 만족시키는 x_1, x_2, x_3이 $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에 존재한다고 합니다.

그러니까 이걸 다시 표현하면 우리는 $k<x<k+\frac{3}{2}$이라는 범위를 설정할건데, 그 범위 안에서는 $\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$가 성립해야 한다는 거죠? 그리고 이게 성립하는 모든 k의 값의 곱이 -12가 되어야 한다는 거구요. 대충 소인수분해 해보면 $-2^2\times3$인데 경우의 수가 너무 많아서 찍을 수는 없겠네요.

$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$는 어떤 경우에 성립할까요? 일단 형태를 잘 관찰해보세요. 점과 점 사이의 기울기의 식이죠? 왼쪽의 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$는 점 $(x_1,\ f(x_1))$과 점 $(x_2,\ f(x_2))$을 이은 직선의 기울기이고, 오른쪽의 $\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$는 점 $(x_2,\ f(x_2))$과 점 $(x_3,\ f(x_3))$을 이은 직선의 기울기이네요. 여기서 x_1, x_2, x_3는 존재성만을 말해줬으니까 단 하나의 케이스만 존재하더라도 조건이 성립합니다. 아무튼 두 값을 곱했을 때 음수가 나와야 한다는 거네요. 둘 중 하나는 음수가 되어야 한다는 거예요.

그런데 생각해보면 계속 증가하는 부분, 혹은 계속 감소하는 부분만 존재할 때 함수 위의 점 세 개를 정해서 기울기를 곱했을 때 음수가 나올까요? $k<x<k+\frac{3}{2}$의 범위에서 계속 증가하는 부분만 존재한다면 기울기는 양수×양수가 되어 양수가 될 거고, 계속 감소하는 부분만 존재한다면 기울기는 음수×음수가 되어 양수가 될

거예요. 그러니까 기울기의 곱이 음수가 된다는 말은 **$k < x < k+\frac{3}{2}$의 범위에 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재해야 한다는 거죠.**

다시 정리해봅시다. $k < x < k+\frac{3}{2}$의 범위에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하는 k를 찾아낸 다음,

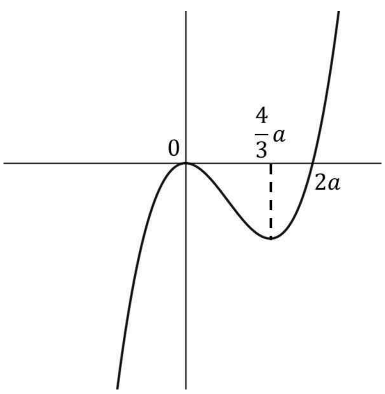
그 찾아낸 k의 곱이 -12가 되도록 하는 a를 구한 후,

$f'(10)$의 값이 계산해라. 이거네요.

일단 $f(x)=x^2(x-2a)$이므로 a가 양수냐 음수냐에 따라 개형이 두 가지가 가능합니다.

2) 함수 보이면 관찰 → 그래프 그리기, 케이스 분류

2-1) $a>0$일 때



이런 함수네요.

일단 $k < x < k+\frac{3}{2}$의 범위 안에서 증가하는 부분과 감소하는 부분이 동시에 존재하게 하는 최솟값은

$k+\frac{3}{2}=0$이 될 때이고, 최댓값은 $k=\frac{4}{3}a$일 때이죠. 그러니까 $-\frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$가 조건을 만족시키는 k의 범위입니다.

그런데 여기서 조심해야 할 점은 $0 < x < \frac{4}{3}a$의 범위보다 $k < x < k+\frac{3}{2}$의 범위가 작을 경우,

$k < x < k+\frac{3}{2}$에서는 감소만 할 가능성이 존재한다는 거예요. 이 경우는 $-\frac{3}{2} < k < \frac{4}{3}a$에서 제거해야 합니다.

먼저 k의 곱이 음수가 나와야 하기 때문에 $-\frac{3}{2}< k < \frac{4}{3}a$의 범위 안에 존재하는 정수인 -1은 무조건 필요합니다. 그러니까 $-1 < x < \frac{1}{2}$의 범위에서는 무조건 증가와 감소가 둘 다 있어야 해요. 그런데 그건 가능할 거 같네요. $-1 < x < 0$의 범위에서 증가하고, $x > 0$일 때는 감소하는 부분이 무조건 존재하니까 가능합니다.

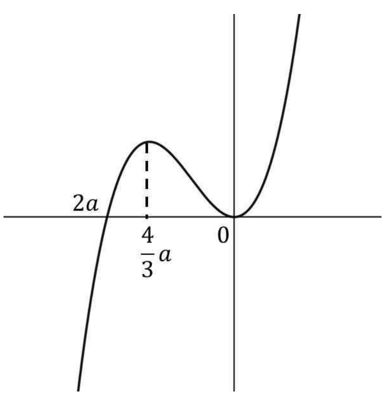
그리고 $k=0$은 포함되어서는 안 됩니다. 그러면 곱이 0이 되겠죠? 따라서 0을 제외하기 위해서 $0 < x < \frac{3}{2}$의 범위는 무조건 감소만 해야 합니다. 따라서 범위의 오른쪽 끝인 $\frac{3}{2}$보다 감소하는 범위의 끝점인 극소점의 x좌표 $\frac{4}{3}a$이 커야 하므로 $\frac{3}{2}< \frac{4}{3}a$이고 $a > \frac{9}{8}$입니다.

이후에 곱이 -12가 되려면 $k=3$, 4가 포함되어야 하겠죠? $k=1$은 있든 없든 상관없구요.
먼저 $k=3$의 경우 $3 < x < \frac{9}{2}$의 범위 사이에 극소점의 x좌표인 $x=\frac{4}{3}a$가 포함되어 있어야 합니다.
$3 < \frac{4}{3}a < \frac{9}{2}$이고 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$입니다.

$k=4$도 마찬가지입니다. $4 < \frac{4}{3}a < \frac{11}{2}$이고 $3 < a < \frac{33}{8}$입니다.

그런데 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$와 $3 < a < \frac{33}{8}$를 동시에 만족시키는 정수 a가 존재하나요? $3 < a < \frac{33}{8}$를 만족시키는 건 $a=4$인데 이러면 $\frac{9}{4}< a < \frac{27}{8}$를 만족시킬 수 없네요. 아예 조건을 만족시킬 수 없는 경우입니다.

2-2) $a<0$일 때



여기도 마찬가지로 확인해보면 되겠죠? 그런데 음수일 때는 조심해야 할 점이 더 있어요.

먼저 $k \geq 0$일 때는 아예 불가능합니다. 계속 증가하는 부분이잖아요? 따라서 k는 무조건 음의 정수여야 합니다. k가 음의 정수라면 곱했을 때 부호도 신경써야 해요. 음의 정수가 짝수 개면 -12가 아니라 12가 나오겠죠?

여기서 경우의 수를 한 번 생각해볼게요. 1×12, 2×6, 3×4가 가능합니다. 다만 1×12는 불가능합니다. 왜냐하면 무조건 음의 정수라서 $-1\times-12=12$가 되거든요. 그러면 2×6, 3×4는 왜 가능하냐고 물으실 수 있지만 얘네 둘은 -1을 중간에 끼워넣는 게 가능합니다. $-1\times-2\times-6=-12$이고, $-1\times-3\times-4=-12$이니까요. 따라서 가능한 k는 $(-1,\ -2,\ -6)$ 이거나 $(-1,\ -3,\ -4)$입니다.

일단 최초로 달성하는 범위는 $k+\dfrac{3}{2}=\dfrac{4}{3}a$을 넘을 때부터 $k=0$일 때까지입니다. $\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<0$의 범위 안에 있는 거죠. 다만 $a>0$때와 마찬가지로 감소만 하는 구간에 $k<x<k+\dfrac{3}{2}$가 있다면 그건 범위에서 제외해줘야 합니다.

$(-1,\ -2,\ -6)$의 경우 각각의 $k<x<k+\dfrac{3}{2}$의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 여기서는 $-3,\ -4,\ -5$가 제외되었으니 이 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k=-6$일 때의 범위에는 극대점이 포함되고, $k=-1,\ -2$일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. 그런데 $k=-2$일 때는 $-2<x<-\dfrac{1}{2}$로 극소점의 x좌표인 $x=0$가 포함되어 있지 않은데요? 이 경우는 불가능하겠네요.

$(-1,\ -3,\ -4)$의 경우 역시 각각의 $k<x<k+\dfrac{3}{2}$의 범위에 극소 또는 극대점이 포함되어야 합니다. 다만 여기서는 -2가 제외되었으니 $k=-2$인 범위에서는 계속 감소한다는 말이겠죠? 따라서 $k=-3,\ -4$일 때의 범위에는 극대점이 포함되고, $k=-1$일 때의 범위에는 극소점이 포함되어야 합니다. $k=-1$일 때는 $-1<0<\dfrac{1}{2}$로 당연하게 되고, $k=-3,\ -4$일 때는 $-3<\dfrac{4}{3}a<-\dfrac{3}{2}$이고 $-4<\dfrac{4}{3}a<-\dfrac{5}{2}$이네요.

정리하면 $-\dfrac{9}{4}<a<-\dfrac{9}{8}$이고 $-3<a<-\dfrac{15}{8}$입니다. 이를 모두 만족시키는 음의 정수는 $a=-2$이네요.

$f(x)=x^2(x+4)$이고 $f'(x)=3x^2+8x$이니까 $f'(10)=380$이네요.

확통

8. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? 〔2024학년도 6월 확통 28〕

(가) $f(1) \times f(3) \times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2) < f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

8. 정답 ⑤ 〔2024학년도 6월 확통 28〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

$X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$가 있는데 조건을 만족시키는 $f: X \to X$의 개수를 구하랍니다.

(가)조건에서 $f(1)\times f(3)\times f(5)$가 홀수라고 하네요. 그러면 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$는 모두 홀수여야 하죠?

지금 홀수는 1, 3, 5로 3개가 있습니다. 이 중에서 고르면 되는 거네요.

(나)조건에서 $f(2)< f(4)$이고, (다)조건에서 치역의 원소의 개수가 3개라고 합니다.

치역의 원소의 개수가 3개라는 건 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 3개의 값만을 가질 수 있다는 거잖아요? 그런데 (가)조건과 (나)조건이 서로 연관되어 있는 조건이 아니기 때문에 섣불리 행동할 수가 없게 되네요. 이럴 땐 그냥 어느 하나를 기준으로 잡고 분류해야 합니다.

지금 (가)조건에서 홀수를 골라야 하는데 홀수는 3개입니다. 그리고 우리는 치역의 원소의 개수가 3개여야 하죠. 당연히 홀수를 몇 개 고르느냐가 중요하게 되겠죠?

2) 케이스 분류

2-1) 홀수 3개

그러면 1, 3, 5를 모두 사용해야 합니다. 먼저 1, 3, 5를 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$에 배열하면 경우의 수는 $3!=6$입니다. 그리고 1, 3, 5 중에서 2개를 고른 후 작은 순서대로 $f(2)$, $f(4)$에 배정하면 (나)조건도 만족하죠. 경우의 수는 ${}_3C_2=3$입니다. 따라서 경우의 수는 $6\times 3=18$입니다.

2-2) 홀수 2개

일단 어떤 홀수를 사용할지를 정해야 합니다. 경우의 수는 ${}_3C_2=3$입니다. 예를 들어 1, 3을 사용한다고 해볼게요. 그러면 어떤 숫자를 두 번 사용할지 정해야 합니다. 경우의 수는 2입니다. 예를 들어 1, 1, 3으로 결정했다고 해보죠. 이제 1, 1, 3을 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$에 배열해주면 됩니다. 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$입니다.

이제 $f(2)$, $f(4)$의 차례입니다. 이미 숫자 2개가 자리를 차지했기 때문에 치역의 원소 개수인 3개를 채우기 위해서는 위에 정했던 1, 3 중 하나랑 나머지 2, 4, 5 중 하나를 골라 작은 순서대로 배열해주면 됩니다. 경우의 수는 $2\times 3=6$이네요. 따라서 구하는 경우의 수는 $3\times 2\times 3\times 6=108$입니다.

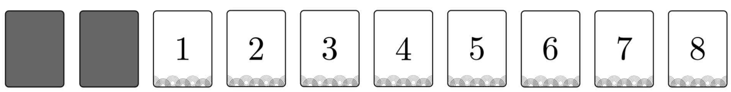
2-3) 홀수 1개

어떤 홀수를 사용할지를 정해야 합니다. 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$이네요. 예를 들어 1을 골랐다고 해봅시다. 그러면 $f(2)$, $f(4)$는 나머지 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 고르면 자동으로 작은 순서대로 $f(2)$, $f(4)$가 정해집니다.
경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$입니다. 구하는 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$이네요.

따라서 모든 경우의 수는 $18 + 108 + 18 = 144$입니다.

9. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오.
(단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.)
〔2024학년도 6월 확통 29〕

(가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



9. 정답 25 〔2024학년도 6월 확통 29〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석

일단 그림과 같이 카드가 있어요. 이때 (가)조건에서 흰색 카드는 무조건 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되어야 한답니다. 이건 뭐 지금도 그렇죠? 그렇다는 건 흰색 카드 사이사이에 검은색 카드를 집어 넣어야 한다는 거겠네요.

(나)조건에서 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 최소한 2장은 있어야 하고, (다)조건에서 검은색 카드 사이에 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 최소한 1장은 있어야 한답니다. 그냥 사이사이에 집어넣는 게 아니라 규칙을 지켜서 넣어야 하나 보군요.

여러 가지 방법이 있겠지만 어차피 검은색 카드는 2개고, 경우의 수도 많은 것 같진 않아서 그냥 다 세겠습니다. 의외로 얼마 안 걸려요.

흰색 카드 8장을 먼저 크기순으로 왼쪽부터 오른쪽으로 배열하면 흰색 카드 양옆으로 검은색 카드를 배열할 공간이 9개가 생깁니다. 이걸 왼쪽부터 1번~9번이라 부를게요.

먼저 검은색 카드가 1번에 있는 경우 조건을 만족시키기 위해서는 다른 검은색 카드는 4번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 6입니다.

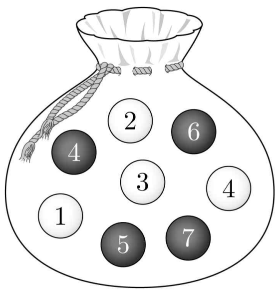
2번에 있는 경우 다른 하나는 4번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 6입니다.
3번에 있는 경우 다른 하나는 5번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 5입니다.
4번에 있는 경우 다른 하나는 7번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 3입니다.
5번에 있는 경우 다른 하나는 7번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 3입니다.
6번에 있는 경우 다른 하나는 8번~9번이어야 합니다. 경우의 수는 2입니다.

여기가 끝이네요. 총 $6+6+5+3+3+2=25$입니다.

10. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고, 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 〔2024학년도 6월 확통 30〕



10. 정답 51 〔2024학년도 6월 확통 30〕

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

흰 공에 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있고, 검은 공에 4, 5, 6, 7가 하나씩 적혀 있다고 하네요. 이때 공 두 개를 꺼내서 다른 색이면 12, 같은 색이면 두 공의 수의 곱을 점수로 한답니다. 이때 이걸 한 번 해서 점수가 24 이하의 짝수일 확률을 구하라네요.

일단 다른 색이면 무조건 가능하죠? 12는 24 이하의 짝수니까요. 이거부터 먼저 구해볼게요. 일단 전체 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$인데 흰 공 4개 중에 하나랑 검은 공 4개 중에 하나를 고르는 거니까 $4 \times 4 = 16$입니다.

$\dfrac{16}{28}$이네요.

문제는 같은 색일 때인데 지금 보면 흰색과 검은색 각각 짝수 두 개, 홀수 두 개로 이루어져 있잖아요? 그러면 그냥 홀수 두 개를 뽑거나 24를 넘기는 경우를 제외하면 되겠네요.

뽑은 공이 흰 색일 경우 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$인데 곱해서 24를 넘기는 경우는 없고 홀수 두 개를 뽑는 경우의 수는 1입니다. 따라서 구하는 경우의 수는 $6-1=5$이네요.

뽑은 공이 검은 색일 경우도 ${}_4C_2 = 6$인데 얘는 웬만해선 다 넘기네요? 이거는 그냥 다 셀게요. (4, 5), (4, 6) 이렇게 두 가지입니다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5+2}{28} = \dfrac{7}{28}$이네요.

따라서 우리가 구하는 확률은 $\dfrac{23}{28}$입니다. $p=28$, $q=23$이므로 $p+q=51$입니다.