1. 20

$n-9$의 n 제곱근 중 양의 실수가 존재하기 위해서는 $n-9>0$, 즉 $n>9$이어야 한다.

$n-20$의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하는 경우는 다음의 두 가지 경우가 있다.

(i) n이 홀수인 경우
$n-20$의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 $n-20<0$, 즉 $n<20$이어야 한다.

(ii) n이 짝수인 경우
$n-20>0$이면 n 제곱근 중 음의 실수가 무조건 존재하고.
$n-20=0$이면 n 제곱근은 0 뿐이고,
$n-20<0$이면 n 제곱근은 중에서 실수가 존재하기 않는다.
즉, $n-20>0$, $n>20$이어야 한다,

(i), (ii)에 의하여 자연수 n은
$9<n<20$인 홀수 또는 $20<n\le 50$인 짝수이다.

$9<n<20$인 홀수의 개수는 5
$20<n\le 50$인 짝수의 개수는 15이므로
구하는 자연수 n의 개수는 20

2. ④

$5-n$의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) $|n-6|=0$

$|n-6|=0$에서 $n=6$

이때 $5-6=-1$의 6 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $|n-6|=1$

$|n-6|=0$에서 $n=5$ 또는 $n=7$

이때 $5-5=0$의 5 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1 이므로 조건을 만족시키고,

이때 $5-7=-2$의 7 제곱근 중 실수인 것의 개수는 1 이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $|n-6|=2$

$|n-6|=2$에서 $n=4$ 또는 $n=8$

이때 $5-4=1$의 4 제곱근 중 실수인 것의 개수는 2 이므로 조건을 만족시키고,

이때 $5-8=-3$의 8 제곱근 중 실수인 것의 개수는 0 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $n=4,\ 5,\ 6,\ 7$이고 n의 개수는 4

3. 73

k의 m 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a
m의 $|k|$ 제곱근 중 실수인 것의 개수를 b라 하자.

k와 m에 대한 a, b의 값을 구하면 다음과 같다.

	m이 홀수	m이 짝수
$k>0$ $\|k\|$이 홀수	$\underline{a=1,\ b=1}$	$a=2,\ b=1$
$k>0$ $\|k\|$이 짝수	$a=1,\ b=2$	$\underline{a=2,\ b=2}$
$k<0$ $\|k\|$이 홀수	$\underline{a=1,\ b=1}$	$a=0,\ b=1$
$k<0$ $\|k\|$이 짝수	$a=1,\ b=2$	$a=0,\ b=2$

조건을 만족시키는 경우는 $k>0$인 경우 또는
$k<0$ 이면서 $|k|$가 홀수인 경우이다.

$1<|k|\leq 50$이므로 $k>0$인 k의 개수는 49
$k<0$이고 $|k|$가 홀수인 경우는 24

따라서 k의 개수는 73

4. 12

n이 홀수이면 음의 실수의 n 제곱근은 음수이고
n이 짝수이면 음의 실수의 n 제곱근은 존재하지 않는다.

$\sin\dfrac{n}{4}\pi$가 어떤 음의 실수의 n 제곱근이 되어야 하므로

n이 홀수이고 $\sin\dfrac{n}{4}\pi < 0$이어야 한다.

$\sin\dfrac{n}{4}\pi < 0$이고 $2 \le n \le 50$이므로

$\pi < \dfrac{n}{4}\pi < 2\pi,\ 3\pi < \dfrac{n}{4}\pi < 4\pi,\ 5\pi < \dfrac{n}{4}\pi < 6\pi,\ \cdots,\ 11\pi < \dfrac{n}{4}\pi < 12\pi$

$4 < n < 8,\ 12 < n < 16,\ 20 < n < 24,\ \cdots,\ 44 < n < 48$

이때
$4 < n < 8$인 홀수 n은 2개
$12 < n < 16$인 홀수 n은 2개
$20 < n < 24$인 홀수 n은 2개
$\vdots$
$44 < n < 48$인 홀수 n은 2개이므로
구하는 자연수 n의 개수는 $2 \times 6 = 12$

5. 116

(가)에 의하여 $f(x)=(x-a)(x-64)$라 둘 수 있다.

(나)에서 $f(x)f(x^n)=(x-a)(x-64)(x^n-a)(x^n-64)=0$인데

이 방정식의 실근이 모두 자연수이므로 a는 자연수이다.

만약 n이 짝수이면 방정식 $x^n-64=0$의 음의 실근이 존재하므로 (나)를 만족시킬 수 없다.

즉, n은 홀수이다.

$(x-a)(x-64)(x^n-a)(x^n-64)=0$에서

$x=a$, $x=64$, $x=a^{\frac{1}{n}}$, $x=64^{\frac{1}{n}}$에서 이 방정식의 실근이 모두 자연수이므로

$64^{\frac{1}{n}}$도 자연수이다. $64^{\frac{1}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이 자연수이므로 $n=1$, 2, 3, 6인데

n은 홀수이므로 $n=1$, 6

$n=1$이면 방정식 $f(x)f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 될 수 없다.

따라서 $n=3$이다.

$(x-a)(x-64)(x^3-a)(x^3-64)=0$에서

$x=a$, $x=64$, $x=a^{\frac{1}{3}}$, $x=4$이므로 $a^{\frac{1}{3}}$도 자연수이다.

즉, $a=1^3$, 2^3, 3^3, $\cdots$인데 $a=1$이면

방정식의 실근이 $x=1$, $x=4$, $x=64$이므로 (나)를 만족시킬 수 없다.

즉, $a=2^3$, 3^3, $\cdots$

$f(x)=(x-a)(x-64)$에서 $f(2n)=f(6)=(6-a)\times(-58)$이므로

a의 값이 최소일 때 $f(2n)$이 최솟값을 갖고,

a의 최솟값이 $2^3=8$이므로 $f(2n)$의 최솟값은 116

참고 : 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서 추가로 필요한 조건은 $a\neq1$, $a\neq4$, $a\neq64$, $a\neq64^3$이다.

6. 4

$2^{a-2} \times b = 16$에서 $(2^{a-2} \times b)^a = 2^{a^2-2a} \times b^a = 16^a = 2^{4a}$인데,

$b^a = 16$이므로 $2^{a^2-2a} \times b^a = 2^{a^2-2a} \times 16 = 2^{a^2-2a+4} = 2^{4a}$이다.

즉, $a^2 - 2a + 4 = 4a$에서 $a = 3 \pm \sqrt{5}$인데 $a > 1$이므로 $a = 3 + \sqrt{5}$이고

$p + q = 4$

7. 224

(나)에서 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 \frac{c}{3ab} = \log_3 c - 1 - \log_3 a - \log_3 b = \log_2 a$

(가)에서 $\log_2 a = \log_6 c - \log_3 b$이므로

$\log_3 c - 1 - \log_3 a - \log_3 b = \log_6 c - \log_3 b$

즉, $\log_3 c - 1 - \log_3 a = \log_3 \frac{c}{3a} = \log_6 c$이다.

$\log_3 \frac{c}{3a} = \log_6 c = k$라 두면 $c = 6^k$이고 $\frac{c}{3a} = 3^k$에서 $a = \frac{2^k}{3}$인데

$ac = 48$이므로 $ac = \frac{12^k}{3} = 48$, $k = 2$이다.

즉, $c = 36$, $a = \frac{4}{3}$이므로 $6(a+c) = 224$

참고 : $ac = 48$이라는 조건이 없어도 b의 값은 $b = 3^{\log_2 3}$으로 결정된다.

8. ④

$2^a=3^b$에서 $2^{\frac{1}{b}}=3^{\frac{1}{a}}$이고, $2^{\frac{1}{b}}\times 2^{\frac{1}{a}}=3^{\frac{1}{a}}\times 2^{\frac{1}{a}}$에서 $2^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=6^{\frac{1}{a}}$이다.

따라서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\log_2 6$이다.

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^c=3^a$에서 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\log_2 6$이므로

$\left(\frac{1}{a}\log_2 6\right)^c=3^a$, $\left(\frac{1}{a}\log_2 6\right)^{\frac{1}{a}}=3^{\frac{1}{c}}$이다.

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$에서 $\frac{1}{c}=1-\frac{1}{a}$이므로 $\left(\frac{1}{a}\log_2 6\right)^{\frac{1}{a}}=3^{1-\frac{1}{a}}$,

즉, $3^{\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{a}\log_2 6\right)^{\frac{1}{a}}=\left(\frac{3}{a}\log_2 6\right)^{\frac{1}{a}}=3$이므로 $3^a=\frac{3}{a}\log_2 6$이다.

$2^a=3^b$에서 $b=a\log_3 2$이므로 $3^a\times b=3\log_2 6\times\log_3 2=3\log_3 6=3+3\log_3 2$

<다른 풀이>

$2^a=3^b=x$라 두면 $a=\log_2 x$, $b=\log_3 x$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_x 6$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^c=(\log_x 6)^c=3^a$에서 $(\log_x 6)^c=3^a=y$라 두면

$c=\log_{\log_x 6}y$, $a=\log_3 y$,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$에서 $\log_y 3+\log_y(\log_x 6)=\log_y(3\log_x 6)=1$이므로 $3\log_x 6=y$이다.

$2^a=x$, $a=\log_3 y$이므로 $\frac{3}{a}\log_2 6=3^a$이다.

$2^a=3^b$에서 $b=a\log_3 2$이므로 $3^a\times b=3\log_2 6\times\log_3 2=3\log_3 6=3+3\log_3 2$

9. 224

$(a-3\log_b 6)(a-6\log_b 2)=0$에서 $a=3\log_b 6$ 또는 $a=6\log_b 2$이다.

(i) $a=3\log_b 6$

a와 b가 모두 자연수이므로 $3\log_b 6$도 자연수이다.

즉, $\log_b 6=1$ 또는 $\log_b 6=\dfrac{1}{3}$이다.

$\log_b 6=1$에서 $b=6$이고 이때 $a=3$, $\log_b 6=\dfrac{1}{3}$에서 $b=216$이고 이때 $a=1$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(3, 6)$ 또는 $(1, 216)$

(ii) $a=6\log_b 2$

a와 b가 모두 자연수이므로 $6\log_b 2$도 자연수이다.

즉, $\log_b 2=1$ 또는 $\log_b 2=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\log_b 2=\dfrac{1}{3}$, $\log_b 2=\dfrac{1}{6}$

$\log_b 2=1$에서 $b=2$이고 이때 $a=6$, $\log_b 2=\dfrac{1}{2}$에서 $b=4$이고 이때 $a=3$

$\log_b 2=\dfrac{1}{3}$에서 $b=8$이고 이때 $a=2$, $\log_b 2=\dfrac{1}{6}$에서 $b=64$이고 이때 $a=1$

즉, 순서쌍 (a, b)는 $(6, 2)$ 또는 $(3, 4)$ 또는 $(2, 8)$ 또는 $(1, 64)$

(i), (ii)에서

$a+b$가 최대가 되는 경우는 $a=1$, $b=216$인 경우이므로 $M=217$

$a+b$가 최소가 되는 경우는 $a=3$, $b=4$인 경우이므로 $m=7$

따라서 $M+m=224$

10. 15

자연수 k에 대하여 $\log_n a^2 = \log_a b^4 = 2^n \times \log_b n = k$라 둘 수 있다.

$\log_n a^2 \times \log_a b^4 \times 2^n \log_b n = 2\log_n a \times 4\log_a b \times 2^n \log_b n = 2^{n+3} = k^3$이므로

$2^{\frac{n+3}{3}} = k$인데 k가 자연수이므로 n은 3의 배수이다.

$\log_a b^4 = 4\log_a b = k$에서 $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{4}{k}$이므로

$\log_b a$의 최댓값과 최솟값은 $\dfrac{4}{k}$의 최댓값과 최솟값과 같다.

$2^{\frac{n+3}{3}} = k$에서 n이 3의 배수이고 $2 \le n \le 50$이므로

$\dfrac{4}{k}$의 최댓값은 $n = 3$일 때 $M = 1$

$\dfrac{4}{k}$의 최솟값은 $n = 48$일 때 $m = 2^{-15}$이다.

따라서 $\log_2 \dfrac{M}{m} = 15$

11. ④

함수 $y=4^{x-a}-a$의 점근선은 $y=-a$이고 $a>0$이므로 함수 $y=\left|4^{x-a}-a\right|$의 점근선은 $y=a$이다.
이 직선이 곡선 $y=2^{x-a}$와 만나는 점을 $\mathrm{A}(b,\ a)$라 두면 $a=2^{b-a}$이다.

점 A를 지나고 x축에 수직인 직선이 함수 $y=\left|4^{x-a}-a\right|$와 만나는 점이 B이므로 $\mathrm{B}(b,\ 12)$이다. 즉, $12=\left|4^{b-a}-a\right|$이다.
$a=2^{b-a}$이므로 $12=\left|a^2-a\right|$이고, $a^2-a=12$ 또는 $a^2-a=-12$이다.

$a^2-a=-12$인 경우는 실근이 존재하지 않고, $a^2-a=12$인 경우는 $a=4(\because a>0)$이다.
즉, $a=2^{b-a}$에서 $4=2^{b-4}$이므로 $b=6$이다.

12. 4

$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(\log_k 2,\ 2\right)$이다.

(가)에 의하여 $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{D}(4-a,\ 3-b)$라 둘 수 있다.

(나)에서 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b-1}{a}$, 직선 BD의 기울기는 $\dfrac{1-b}{4-a-\log_k 2}$

이 두 직선이 평행하므로 두 직선의 기울기는 같다.

따라서 $\dfrac{b-1}{a}=\dfrac{1-b}{4-a-\log_k 2}$이므로

$-a=4-a-\log_k 2$이고, $\log_k 2=4$, $k=2^{\frac{1}{4}}$이다.

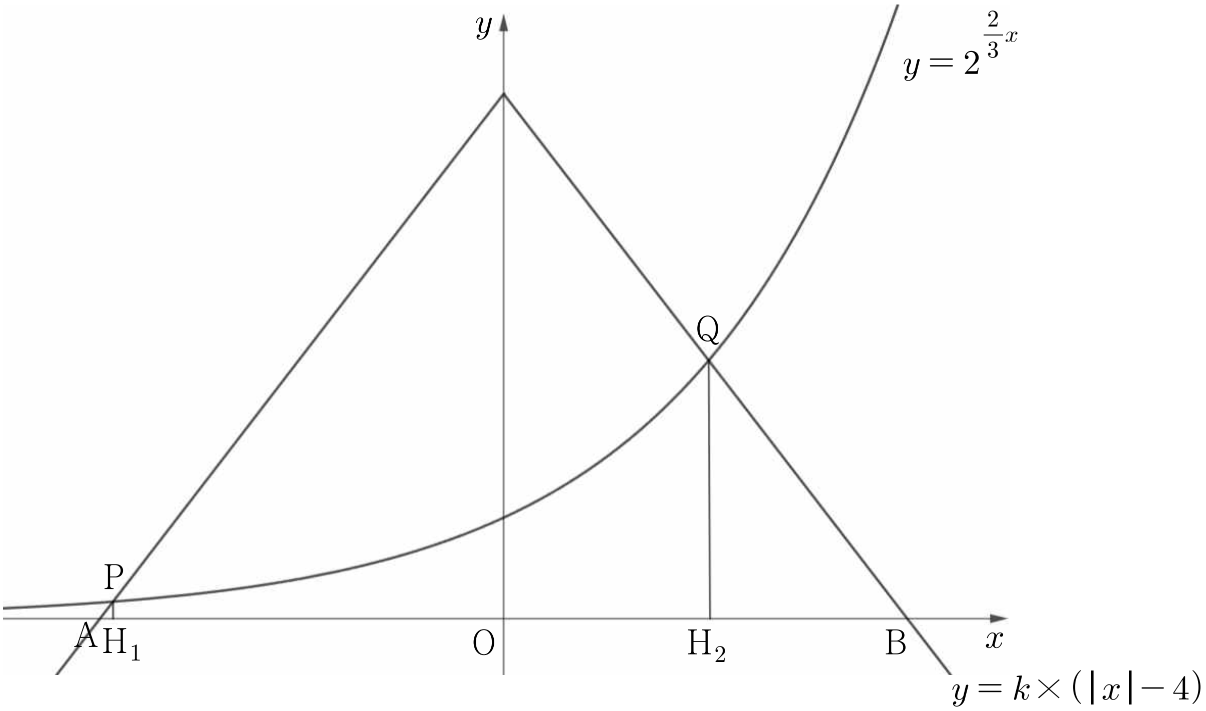
두 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$, $\mathrm{D}(4-a,\ 3-b)$가 모두 곡선 $y=2^{-\frac{x}{4}}$위에 있으므로

$b=2^{-\frac{a}{4}}$, $3-b=2^{-\frac{4-a}{4}}=\dfrac{1}{2b}$, $3b-b^2=\dfrac{1}{2}$이고 $b=\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{2}$인데

점 C의 x좌표가 음수이므로 $b>1$이고 $b=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$

따라서 $p+q+k^4=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}+2=4$

13. 83

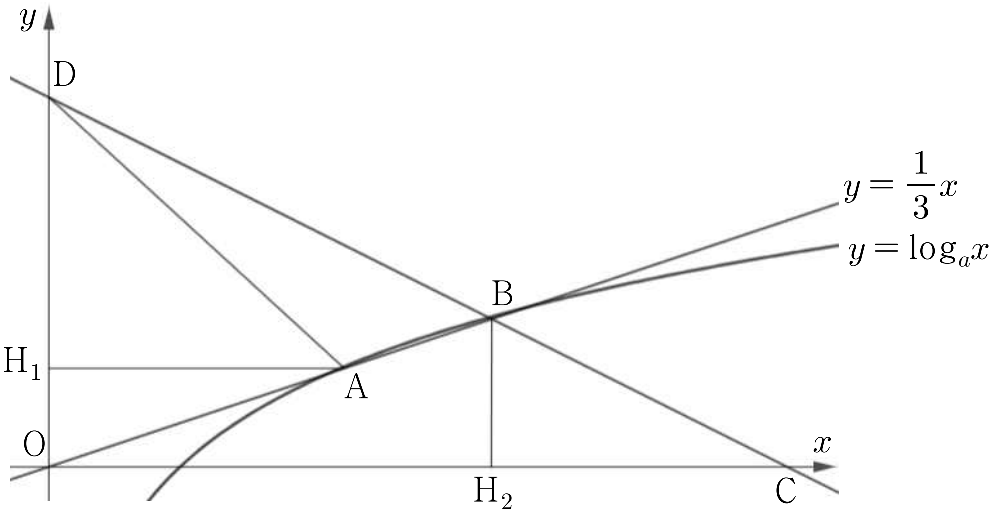


두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 두면
두 삼각형 PAH_1, QBH_2는 닮음이다.
이때 $\overline{AP}:\overline{BQ}=1:16$이므로 $\overline{AH_1}:\overline{BH_2}=1:16$이고, $\overline{PH_1}:\overline{QH_2}=1:16$이다.
점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, 점 Q의 좌표를 $(c,\ d)$라 두면
$\overline{AH_1}=4+a$, $\overline{BH_2}=4-c$이고, $\overline{PH_1}=b$, $\overline{QH_2}=d$이다.
$\overline{AH_1}:\overline{BH_2}=1:16$에서 $4-c=16(4+a)$, $c=-16a-60$
$\overline{PH_1}:\overline{QH_2}=1:16$에서 $d=16b$
따라서 점 Q의 좌표는 $(-16a-60,\ 16b)$이다.

두 점 P, Q모두 곡선 $y=2^{\frac{2}{3}x}$ 위에 있으므로
$b=2^{\frac{2}{3}a}$, $16b=2^{\frac{2}{3}(-16a-60)}=2^{-\frac{32}{3}a-40}$이고, $b=2^{\frac{2}{3}a}$에서 $16b=2^{\frac{2}{3}a+4}$이므로
$2^{-\frac{32}{3}a-40}=2^{\frac{2}{3}a+4}$에서 $-\frac{32}{3}a-40=\frac{2}{3}a+4$이고, $a=-\frac{66}{17}$

따라서 점 P의 x좌표는 $-\frac{66}{17}$이고 $p+q=83$

14. ②



직선 CD의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{OC}=2\overline{OD}$이다.

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H_1, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

두 삼각형 OBC, OAD의 넓이가 같으므로

$\overline{OC}\times\overline{H_2B}=\overline{OD}\times\overline{H_1A}$이고, $\overline{OC}=2\overline{OD}$이므로 $\overline{H_2B}=2\overline{H_1A}$이다.

이때 $\overline{H_1A}$는 점 A의 x좌표와 같고, $\overline{H_2B}$는 점 B의 y좌표와 같으므로

점 A의 x좌표를 p라 두면, 점 B의 y좌표는 $\frac{p}{2}$이고,

두 점 모두 직선 $y=\frac{1}{3}x$위에 있으므로 $A\left(p,\ \frac{1}{3}p\right)$, $B\left(\frac{3}{2}p,\ \frac{p}{2}\right)$이다.

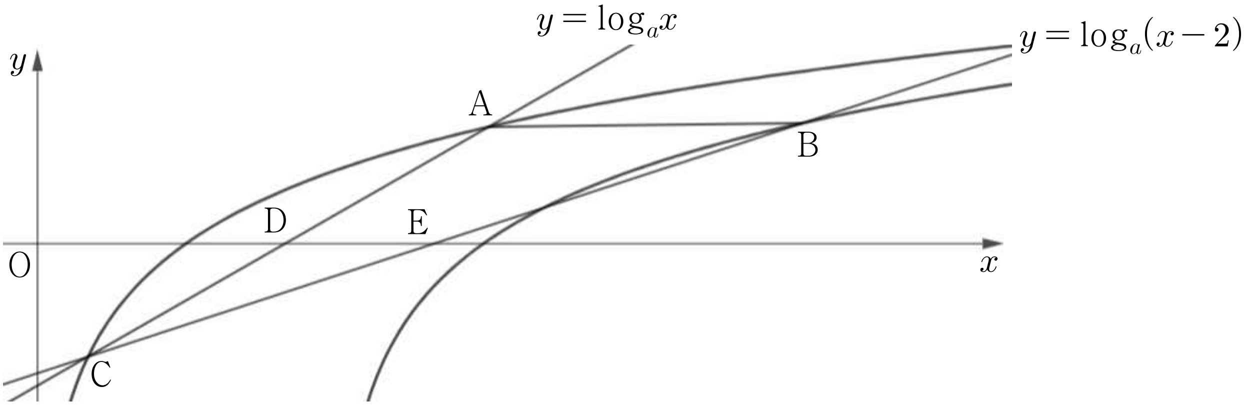
두 점 모두 곡선 $y=\log_a x$위에 있으므로

$\frac{1}{3}p=\log_a p$, $\frac{1}{2}p=\log_a \frac{3}{2}p$이고, $\frac{3}{2}\log_a p=\log_a \frac{3}{2}p$에서

$\log_a p^{\frac{3}{2}}=\log_a \frac{3}{2}p$에서 $p^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}p$이다. $p>0$이므로 $p=\frac{9}{4}$이다.

따라서 A의 x좌표는 $\frac{9}{4}$

15. ③



D$\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, E$\left(\frac{8}{3},\ 0\right)$라 하면 $\overline{\mathrm{DE}}=1$이다.

두 삼각형 DEC, ABC는 닮음이다.

곡선 $y=\log_a x$를 x축 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이 $y=\log_a(x-2)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이다.

$\overline{\mathrm{DE}}=1$이므로 선분 AC의 중점은 D이다.

A$(p,\ \log_a p)$, C$(q,\ \log_a q)\ (p>q)$라 두면

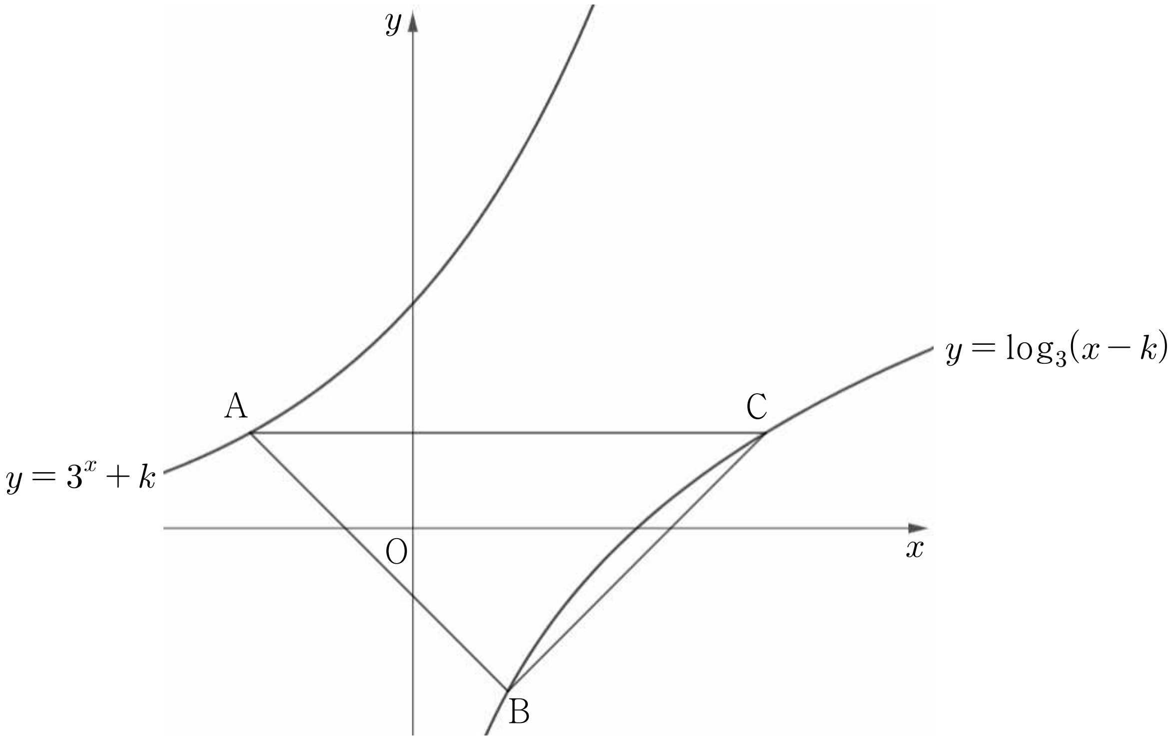
$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{3}$에서 $p+q=\frac{10}{3}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=\frac{\log_a pq}{2}=0$에서 $pq=1$

따라서 $p=3$, $q=\frac{1}{3}$이고 C$\left(\frac{1}{3},\ \log_a\frac{1}{3}\right)$, A$(3,\ \log_a 3)$, B$(5,\ \log_a 3)$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{16}{3}$이므로 $\left(5-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\log_a 3-\log_a\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{16}{3}\right)^2$

따라서 $(2\log_a 3)^2=\frac{20}{3}$이고 $a>1$이므로 $a=3^{\frac{\sqrt{15}}{5}}$

16. ①



$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$, $\angle \mathrm{ABC} = 90^\circ$ 이므로 직선 AB의 기울기는 -1, 직선 BC의 기울기는 1이다.
$\mathrm{B}(b,\ a)$라 두면 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{2}$이므로 $\mathrm{A}(b-1,\ a+1)$, $\mathrm{C}(b+1,\ a+1)$이다.

직선 AB의 기울기는 -1이고 두 곡선 $y = 3^x + k$, $y = \log_3(x-k)$는 역함수 관계이므로
두 점 A, B는 직선 $y = x$에 대칭이다.
즉, $\mathrm{B}(b,\ a)$라 두면 $\mathrm{A}(a,\ b)$이고 $\mathrm{A}(b-1,\ a+1)$이므로 $b = a+1$이다.
즉, $\mathrm{B}(a+1,\ a)$, $\mathrm{A}(a,\ a+1)$, $\mathrm{C}(a+2,\ a+1)$이다.
두 점 $\mathrm{B}(a+1,\ a)$, $\mathrm{C}(a+2,\ a+1)$가 곡선 $y = \log_3(x-k)$위의 점 이므로
$a = \log_3(a+1-k)$, $a+1 = \log_3(a+2-k)$이다.

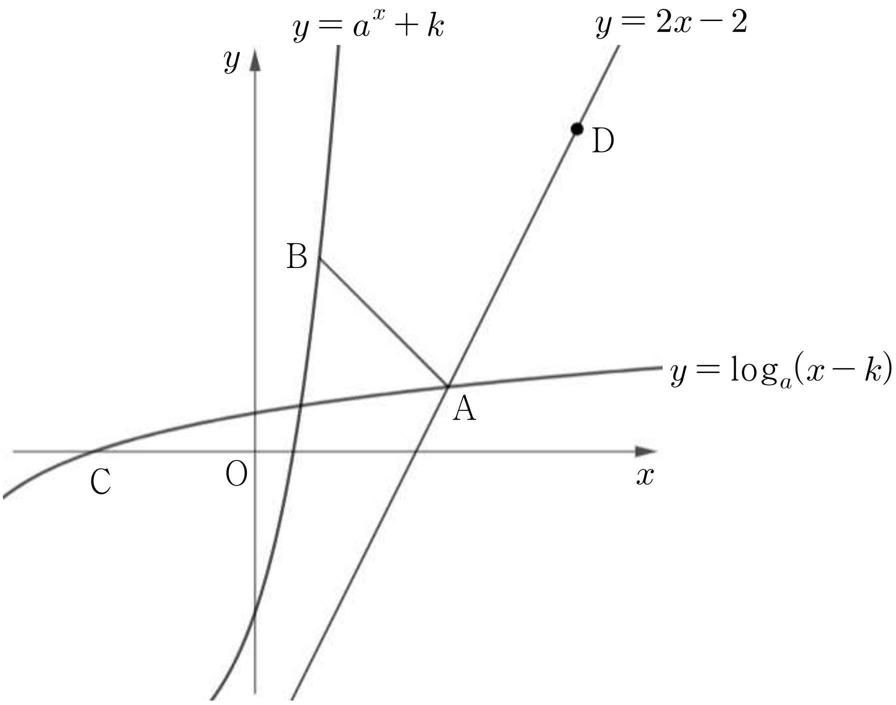
$(a+1) - a = 1 = \log_3(a+2-k) - \log_3(a+1-k) = \log_3 \dfrac{a+2-k}{a+1-k}$이므로

$\dfrac{a+2-k}{a+1-k} = 3$이고, $a = k - \dfrac{1}{2}$이다.

즉 $a = \log_3(a+1-k) = \log_3 \dfrac{1}{2} = -\log_3 2$이고

점 B의 y좌표는 $-\log_3 2$

17. 157



직선 AB의 기울기는 -1이고 두 곡선 $y=a^x+k$, $y=\log_a(x-k)$은 역함수 관계이므로
두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대칭이고, 두 직선 AD, BD도 직선 $y=x$에 대칭이다.
직산 AD의 방정식이 $y=2x-2$이므로 직선 BD의 방정식은 $x=2y-2$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$이다.

점 C와 두 직선 $y=2x-2$, $y=\frac{1}{2}x+1$ 사이의 거리를 각각 d_1, d_2라 하자.

두 삼각형 DAC, DBC의 넓이는 각각 $\frac{1}{2}d_1\times\overline{\mathrm{AD}}$, $\frac{1}{2}d_2\times\overline{\mathrm{BD}}$이므로

$\frac{1}{2}d_1\times\overline{\mathrm{AD}}=4\times\frac{1}{2}d_2\times\overline{\mathrm{BD}}$이고 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$이므로 $d_1=4d_2$이다.

C$(c,\ 0)$이라 하면 $d_1=4d_2$에서 $\frac{|2c-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=4\times\frac{\left|\frac{c}{2}+1\right|}{\sqrt{\frac{1}{2^2}+1^2}}$에서 $c=-5$ 또는 $c=-1$이다.

점 C$(c,\ 0)$가 곡선 $y=\log_a(x-k)$위의 점이므로 $c-1=k$이고,
$-3<k<1$이므로 $c=-1$이고 $k=-2$이다.

점 A가 직선 $y=2x-2$위에 있으므로 $\mathrm{A}(p,\ 2p-2)$라 두면

$\overline{\mathrm{CA}}=\sqrt{5}$이고 $\mathrm{C}(-1,\ 0)$이므로 $(p+1)^2+(2p-2)^2=5$에서 $p>0$이므로 $p=\dfrac{6}{5}$

따라서 $\mathrm{A}\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$이고 이 점이 곡선 $y=\log_a(x+2)$위에 있으므로

$\dfrac{2}{5}=\log_a\left(\dfrac{6}{5}+2\right)$에서 $a=\left(\dfrac{16}{5}\right)^2\times\sqrt{\dfrac{16}{5}}$이고 $\dfrac{a}{32}=\dfrac{32}{125}\sqrt{5}$이다.

따라서 $p+q=157$

18. ②

$\cos^2\frac{\pi}{6}x+\left(\frac{x-8}{16}\right)\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{x}{32}=0$에서 $\left(\cos\frac{\pi}{6}x-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}x+\frac{x}{16}\right)=0$이므로

'(i) $\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$' 또는 '(ii) $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$' 이다.

(i)의 경우 :

$\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$에서

$\frac{\pi}{6}x=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}x=\frac{5}{3}\pi,\ \frac{\pi}{6}x=\frac{7}{3}\pi,\ \frac{\pi}{6}x=\frac{11}{3}\pi,\ \frac{\pi}{6}x=\frac{13}{3}\pi$이고

$x=2,\ x=10,\ x=14,\ x=22,\ x=26$이므로

$\cos\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$을 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{74}$ 이다.

(ii)의 경우 :

x가 자연수이므로 $-\frac{x}{16}$은 음의 유리수이고, $\cos\frac{\pi}{6}x$도 음의 유리수이다.

$\cos\frac{\pi}{6}x$가 음수이므로 $\cos\frac{\pi}{6}x$가 될 수 있는 수는 $-1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}$ 뿐이고,

$\cos\frac{\pi}{6}x$가 음의 유리수가 되는 경우는

$$\cos\frac{\pi}{6}x=-1 \text{ 또는 } \cos\frac{\pi}{6}x=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

이다.

(1) $\cos\frac{\pi}{6}x=-1$인 경우 $-\frac{x}{16}=-1$에서 $x=16$인데 $\cos\frac{16}{6}\pi\neq-1$이므로 모순이다.

(2) $\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{1}{2}$인 경우 $-\frac{x}{16}=-\frac{1}{2}$에서 $x=8$이고, $\cos\frac{8}{6}\pi=-\frac{1}{2}$을 만족시킨다.

(1), (2)에 의하여

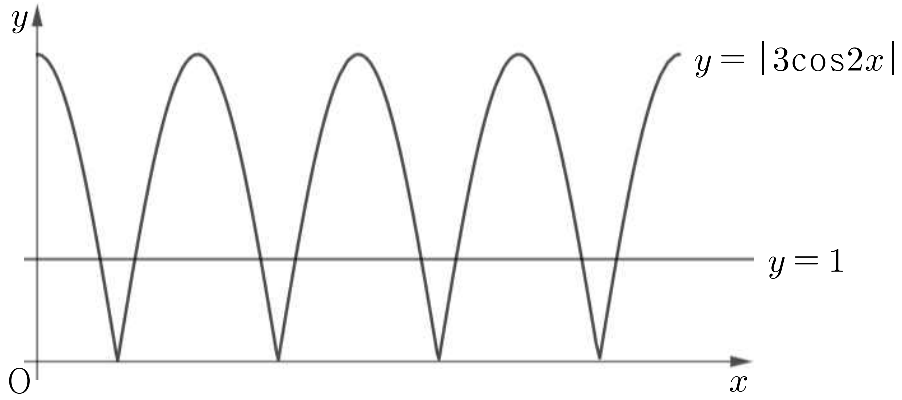
$\cos\frac{\pi}{6}x=-\frac{x}{16}$을 만족시키는 30 이하의 자연수 x의 값은 $\boxed{8}$ 뿐이다.

(i), (ii)에 의하여 30 이하의 모든 자연수 x의 값의 합은 $\boxed{74}+\boxed{8}$ 이다.

$p=74,\ q=-\frac{1}{2},\ r=8$이므로 $p+q+r=\frac{163}{2}$

19. ②

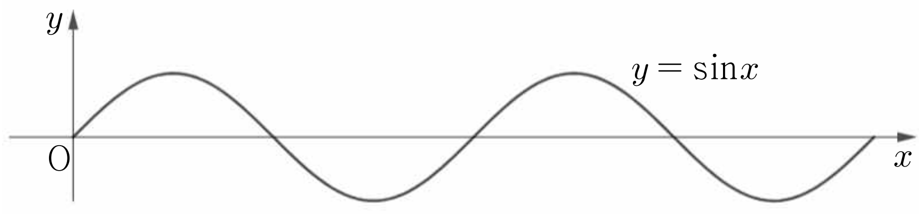
$0 \le x \le 2\pi$에서 함수 $y = |3\cos 2x|$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 집합 B의 원소의 개수는 8이므로
집합 A의 원소의 개수도 8이다.

함수 $y = \sin ax$의 주기가 $\dfrac{2\pi}{a}$이므로
$0 \le x \le 2\pi$에서 곡선 $y = \sin ax$와 직선 $y = -1$이 만나는 점의 개수는 a임을 알 수 있다.
따라서 $a = 8$

20. ③

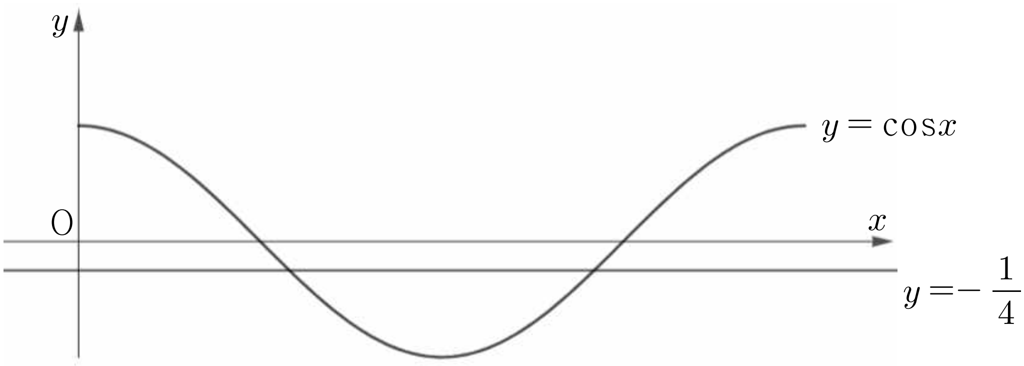


$0 \le x \le 4\pi$에서 방정식 $\sin x = a$의 실근의 개수가 n_1이므로

$a < -1$일 때 $n_1 = 0$

$a = -1$일 때 $n_1 = 2$

$-1 < a < 0$일 때 $n_1 = 4$이다.



$4\cos^2 x + (1-8b)\cos x = 2b$에서 $(4\cos x + 1)(\cos x - 2b) = 0$이므로

$\cos x = -\frac{1}{4}$ 또는 $\cos x = 2b$이고, $0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $\cos x = -\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 2이다.

방정식 $4\cos^2 x + (1-8b)\cos x = 2b$의 실근의 개수가 n_2이므로

$2b = -\frac{1}{4}$ 또는 $2b > 1$ 또는 $2b < -1$일 때 $n_2 = 2$

$-1 < 2b \le 1$이고 $2b \ne -\frac{1}{4}$일 때 $n_2 = 4$

$2b = -1$일 때 $n_2 = 3$이다.

즉, $n_2 - n_1 = 1$을 만족시키는 경우는 $2b = -1$, $b = -\frac{1}{2}$이고 $a = -1$인 경우이고

이때 $n_1 = 2$, $n_2 = 3$이다.

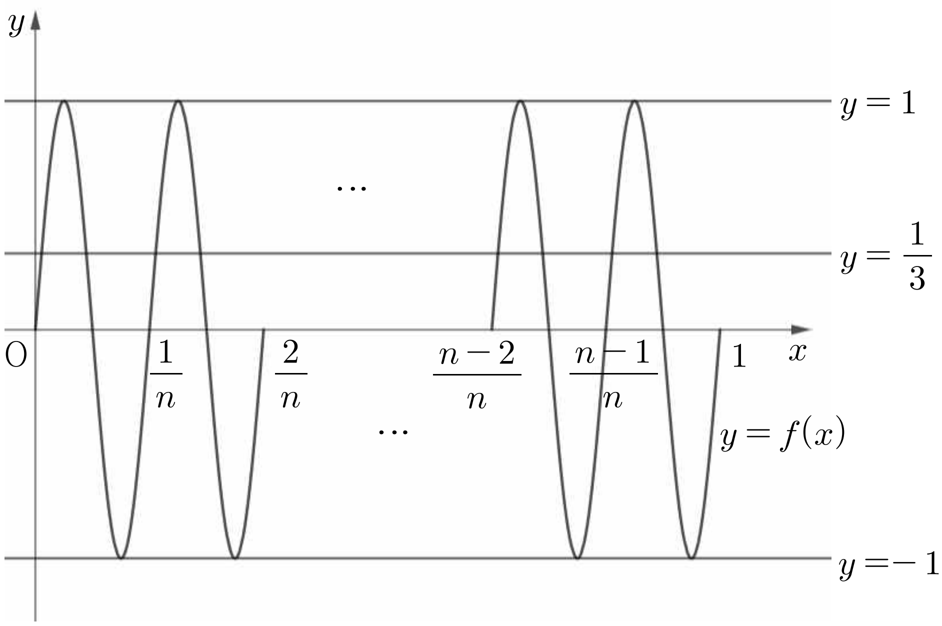
따라서 $a \times b \times n_2 = \frac{3}{2}$

21. 52

(i) k가 짝수인 경우

$k=2n$(n은 자연수)라 둘 수 있다.

$f(x)=\sin(2n\pi x+2n\pi)=\sin 2n\pi x$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n\pi}=\frac{1}{n}$이다.



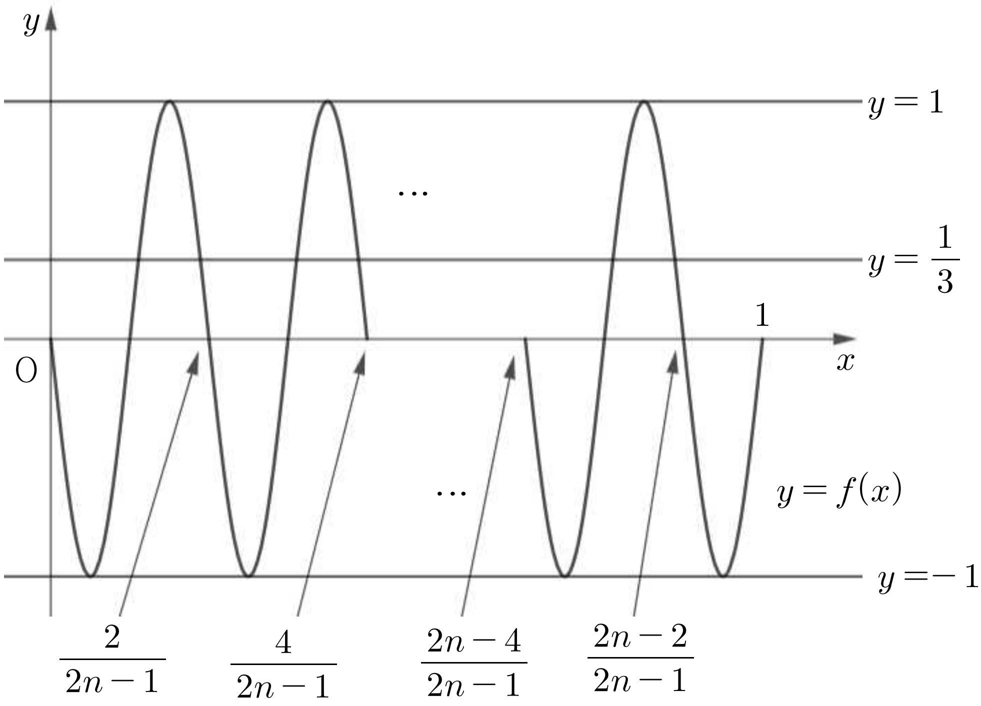
위의 그림에서 $a=n$, $b=2n$, $c=n$이므로 모든 n에 대하여 $a=c$를 만족시킨다.

(ii) k가 홀수인 경우

$k=2n-1$(n은 자연수)라 둘 수 있다.

$f(x)=\sin((2n-1)\pi x+(2n-1)\pi)=\sin((2n-1)\pi x-\pi)=-\sin(2n-1)\pi x$이므로

함수 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{(2n-1)\pi}=\frac{2}{2n-1}$이다.



위의 그림에서 $a=n-1$, $b=2(n-1)$, $c=n$이다.
$a=b$에서 $n=1$이고 $k=1$, $b=c$에서 $n=2$이고 $k=3$,
$c=a$가 되도록 하는 n은 존재하지 않는다.
따라서 $k=1$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에 의하여
k는 100 이하의 짝수이거나 $k=1$ 또는 $k=3$이므로 k의 개수는 52

22. 288

방정식 $4x^2+px+35=0$가 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로

근과 계수의 관계에 따라서 $\alpha+\beta=-\dfrac{p}{4}$이다.

방정식 $\sin\dfrac{\pi}{2}x=q$가 서로 다른 두 실근 α, β를 가지므로 $-1<q<1$이고 $q\neq 0$이다.

(i) $0<q<1$

방정식 $\sin\dfrac{\pi}{2}x=q$가 서로 다른 두 실근 α, β를 가지고

곡선 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$가 직선 $x=1$에 대칭이므로 $\alpha+\beta=2$이다.

즉, $\alpha+\beta=-\dfrac{p}{4}$에서 $p=-8$이다. 하지만 방정식 $4x^2-8x+35=0$는 실근을 갖지 않으므로 모순이다.

(ii) $-1<q<0$

방정식 $\sin\dfrac{\pi}{2}x=q$가 서로 다른 두 실근 α, β를 가지고

곡선 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$가 직선 $x=3$에 대칭이므로 $\alpha+\beta=6$이다.

즉, $\alpha+\beta=-\dfrac{p}{4}$에서 $p=-24$이다.

방정식 $4x^2-24x+35=0$에서 $x=\dfrac{5}{2}$ 또는 $x=\dfrac{7}{2}$이고, $\sin\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{5}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=q$이다.

(i), (ii)에 의하여 $p=-24$, $q=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $p^2\times q^2=288$

23. 7

$2\sin^2 x-(2a+1)\sin x+a=0$에서 $(\sin x-a)(2\sin x-1)=0$이고

$\sin x=a$ 또는 $2\sin x-1=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$이다.

이때 $a<0$이므로 $k_1=\dfrac{\pi}{6}$, $k_2=\dfrac{5}{6}\pi$이고, $k_3<\dfrac{3}{2}\pi<k_4$이며

곡선 $y=\sin x$가 직선 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에 대칭이므로 $k_3+k_4=3\pi$이다.

$k_1\cos k_4=a\times k_2\cos k_3$에서

$\dfrac{\pi}{6}\times\cos(3\pi-k_3)=a\times\dfrac{5}{6}\pi\times\cos k_3$이고

$-\dfrac{\pi}{6}\times\cos k_3=a\times\dfrac{5}{6}\pi\times\cos k_3$이고 $a=-\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 $\sin k_4=-\dfrac{1}{5}$이고, $\dfrac{3}{2}\pi<k_4<2\pi$이므로 $\cos k_4=\sqrt{1-\sin^2 k_4}=\dfrac{2}{5}\sqrt{6}$

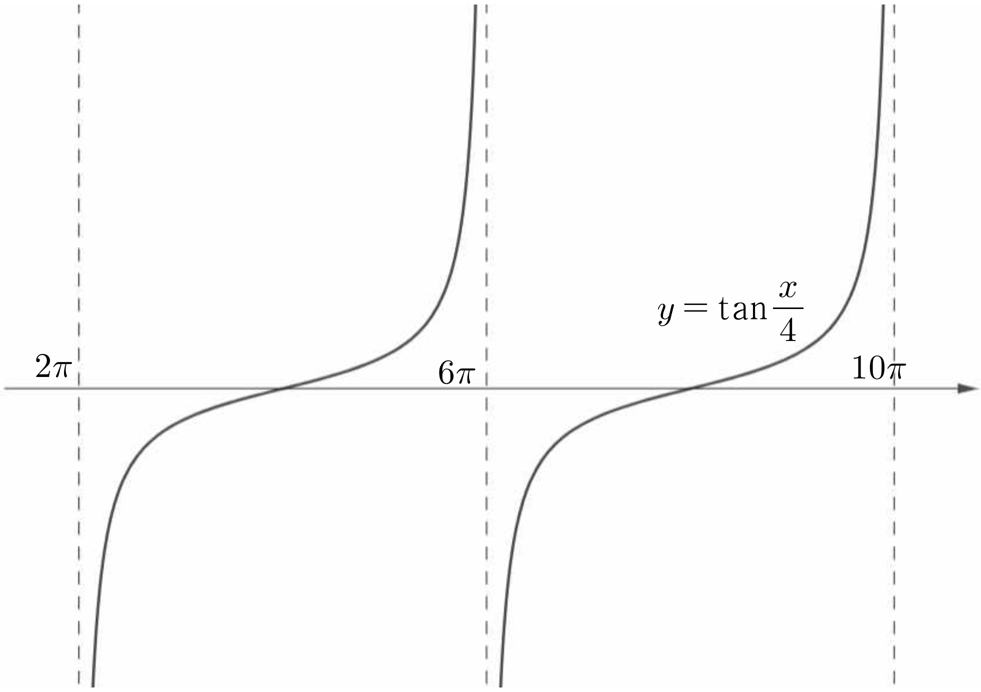
$p+q=7$

24. 69

함수 $f(x)=\sin\frac{12}{k}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{12}{k}}=\frac{k}{6}\pi$이고, 직선 $x=\frac{k}{24}\pi$에 대칭이다.

$0<t<1$이므로 $\frac{\pi}{2}+x_2=\frac{k}{12}\pi$에서 $x_2=\left(\frac{k}{12}-\frac{1}{2}\right)\pi$, $\frac{\pi}{2}+\frac{k}{6}\pi=\left(\frac{k}{6}+\frac{1}{2}\right)\pi=x_3$이다.

이때 $2\pi<x_2$이고 $x_3<10\pi$이므로 $30<k<57$이다.



함수 $y=\tan\frac{x}{4}x$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi$이다.

$x_2<x_3$이므로 $\tan\frac{x_3}{4}<\tan\frac{x_2}{4}$을 만족시키려면 다음의 두 가지를 만족시켜야 한다.

(i) $x_2<6\pi<x_3$

(ii) $\tan\frac{x_3}{4}<\tan\frac{x_2}{4}=\tan\left(\frac{x_2+4\pi}{4}\right)$에서 $\frac{x_3}{4}<\frac{x_2+4\pi}{4}$

$x_2=\left(\frac{k}{12}-\frac{1}{2}\right)\pi$, $x_3=\left(\frac{k}{6}+\frac{1}{2}\right)\pi$에서

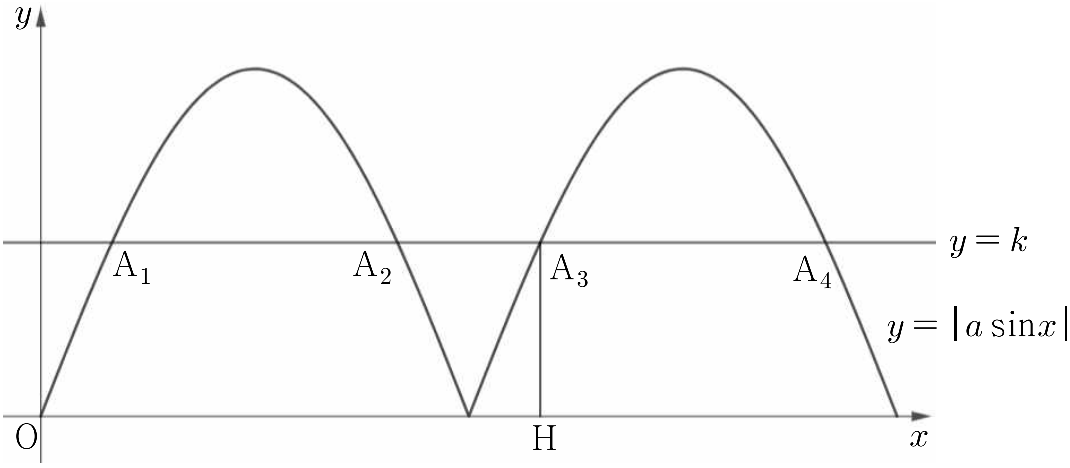
(i) $33<k<78$인데 $30<k<57$이므로 $33<k<57$,

(ii) $k<36$

(i), (ii)에 의하여 $33<k<36$이고 $k=34$, 35

따라서 모든 k의 값의 합은 69

25. 12



함수 $y=a\sin x$의 주기가 2π이므로 함수 $y=|a\sin x|$의 주기는 π이다.
네 점 A_1, A_2, A_3, A_4의 x좌표를 각각 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자.

함수 $y=|a\sin x|$의 주기가 π이므로 $a_2+\pi=a_4$이고 $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}=\pi$이고,

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2} : \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}=2:3$에서 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

이때 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4\mathrm{H}$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}\times\overline{\mathrm{A}_3\mathrm{H}}=\dfrac{\pi}{2}k=2$에서 $k=\dfrac{4}{\pi}$이다.

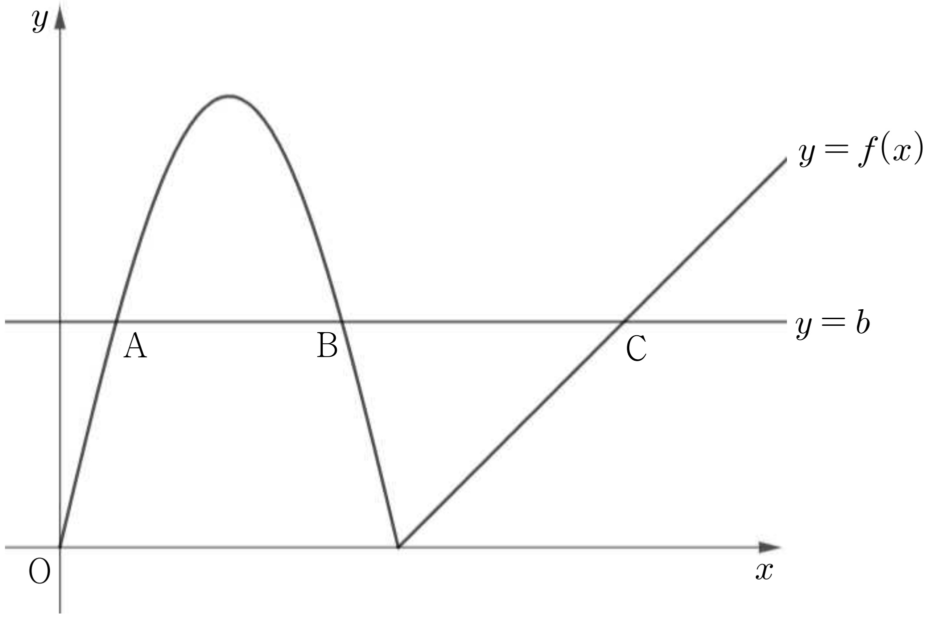
함수 $y=|a\sin x|$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$에 대칭이므로 $a_1+a_2=\pi$이고

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=\dfrac{2}{3}\pi$에서 $a_2-a_1=\dfrac{2}{3}\pi$이고 $a_1+a_2=\pi$이므로 $a_1=\dfrac{\pi}{6}$, $a_2=\dfrac{5}{6}\pi$이다.

$a\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{a}{2}=k=\dfrac{4}{\pi}$에서 $a=\dfrac{8}{\pi}$이다.

따라서 $k=\dfrac{4}{\pi}$, $a=\dfrac{8}{\pi}$이고 $\pi(a+k)=12$

26. ①



세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 p, q, r이라 하자.

곡선 $y=\sin ax$는 직선 $x=\dfrac{\pi}{2a}$에 대칭이므로 $p+q=\dfrac{\pi}{a}$에서 $q=\dfrac{\pi}{a}-p$

$r-\dfrac{\pi}{a}=b$이므로 $r=\dfrac{\pi}{a}+b$

직선 OA의 기울기가 4이고 $\mathrm{A}(p,\ b)$이므로 $\dfrac{b}{p}=4$

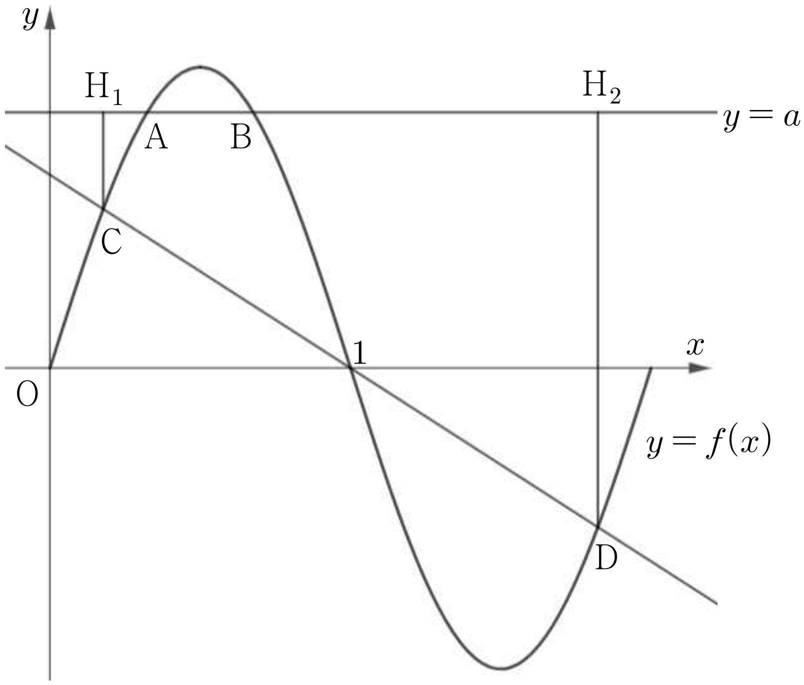
$\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{5}{8}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=r-q=b+p=\dfrac{5}{8}$, 따라서 $p=\dfrac{1}{8}$, $b=\dfrac{1}{2}$이다.

점 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2}\right)$가 곡선 $y=\sin ax$위에 있으므로 $\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{a}{8}$이고,

$0<a<4\pi$에서 $\dfrac{a}{8}=\dfrac{\pi}{6}$, $a=\dfrac{4}{3}\pi$이다.

따라서 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{4}{3}\pi x & \left(0<x\le\dfrac{3}{4}\right)\\ x-\dfrac{3}{4} & \left(\dfrac{3}{4}<x\right)\end{cases}$ 이고 $f(6)=\dfrac{21}{4}$

27. ④



곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=\frac{1}{2}$에 대칭이므로 두 점 A, B를

$A(\alpha,\ \sin\alpha\pi)$, $B(1-\alpha,\ \sin\alpha\pi)$라 둘 수 있다.

곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 0)$에 대칭이므로 두 점 C, D도

점 $(1,\ 0)$에 대칭이고, $C(\beta,\ \sin\beta\pi)$, $D(2-\beta,\ -\sin\beta\pi)$라 둘 수 있다.

이때 $\overline{AH_2}=(2-\beta)-\alpha=\frac{3}{2}$에서 $\beta=\frac{1}{2}-\alpha$이고,

$C\left(\frac{1}{2}-\alpha,\ \cos\alpha\pi\right)$, $D\left(\frac{3}{2}+\alpha,\ -\cos\alpha\pi\right)$이다.

$\overline{AB}=\overline{AC}$에서

$\overline{AB}=1-2\alpha$, $\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\alpha\right)^2+(\cos\alpha\pi-\sin\alpha\pi)^2}$이므로

$(1-2\alpha)^2=\left(\frac{1}{2}-2\alpha\right)^2+(\cos\alpha\pi-\sin\alpha\pi)^2$이고 $\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi=\alpha+\frac{1}{8}$이다.

$\mathrm{D}\left(\frac{3}{2}+\alpha,\ -\cos\alpha\pi\right)$, $\mathrm{H_1}\left(\frac{1}{2}-\alpha,\ \sin\alpha\pi\right)$에서

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\sqrt{(1+2\alpha)^2+(\sin\alpha\pi+\cos\alpha\pi)^2}=\sqrt{4\alpha^2+4\alpha+2+2\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi}$이고

$\sin\alpha\pi\cos\alpha\pi=\alpha+\frac{1}{8}$이므로

$\overline{\mathrm{DH_1}}=\sqrt{4\alpha^2+4\alpha+2+2\left(\alpha+\frac{1}{8}\right)}=\sqrt{4\alpha^2+6\alpha+\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}(4\alpha+3)=2\alpha+\frac{3}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=1-2\alpha$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{DH_1}}=\frac{5}{2}$

28. 67

a가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이므로
집합 $\{x|f(x)=a\}\cap\{x|g(x)=a\}$의 원소의 개수가 2라는 의미는
y좌표가 a인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수가 2 이상이라는 뜻이다.

k가 자연수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 직선 $y=\frac{\pi}{2}$에 대칭이라는 것에 주목하자.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$는 0 또는 1이고, $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이다.

즉, $a<1$이면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{2}$가 아니다.

따라서 만약 점 $(a,\ b)(a<1)$이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이면

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 직선 $y=\frac{\pi}{2}$에 대칭이므로

점 $(a,\ \pi-b)$도 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이다.
즉, $a<1$이면 무조건 조건을 만족시킴을 알 수 있고, $a=1$인 경우만 확인하면 충분하다.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$는 0 또는 1인데 만약 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이면 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이

될 수 없다. 즉, 점 $(1,\ b)\left(b\neq\frac{\pi}{2}\right)$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이면

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 모두 직선 $y=\frac{\pi}{2}$에 대칭이므로

점 $(1,\ \pi-b)$도 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이다.

즉, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$인 k에 대하여 항상 조건이 성립하고, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$인 k는 k가 짝수인 경우이다.
따라서 k가 짝수이면 조건을 만족시키고, k가 홀수인 경우만 확인하면 충분하다.

k가 홀수이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이고, $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이다.

만약 $(1,\ b)\left(b\neq\frac{\pi}{2}\right)$가 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점이 되도록 하는

점 b가 존재하지 않으면,

y좌표가 1인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점은 $\left(1,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 뿐이므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, $b \neq \frac{\pi}{2}$이고 $f(b)=g(b)=1$인 실수 b가 존재해야 한다.

$g(b)=-\cos 6b=1$이므로 $b=\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이고,

$f(x)=|\sin kb|$에서 $\left|\sin\frac{\pi}{6}k\right|=1$ 또는 $\left|\sin\frac{5}{6}k\right|=1$이다.

$|\sin x|=1$를 만족시키는 x는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\cdots$이므로

$\frac{\pi}{6}k=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\cdots$, 또는 $\frac{5}{6}\pi k=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, $\cdots$이고,
k가 자연수이므로 k는 3의 배수이면 충분하다.

즉, k는 짝수이거나 k는 홀수인 3의 배수이다.
100 이하의 짝수 k의 개수는 50,
100 이하의 홀수인 3의 배수 k의 개수는
100 이하인 3의 배수의 개수에서 100 이하인 6의 배수의 개수를 제외하면 된다.
즉, $33-16=17$

따라서 100 이하의 자연수 k의 개수는 $50+17=67$

29. 60

조건에 의하여

$\sin 10a = \cos ka$이고 $\sin 10(a+\pi) = \sin 10a = \cos k(a+\pi)$이므로

$\cos ka = \cos k(a+\pi)$이다.

(i) k가 짝수인 경우

$\cos ka = \cos k(a+\pi)$가 성립하므로 $\sin 10a = \cos ka$인 $a\left(0 < a < \frac{\pi}{4}\right)$가 존재하면 충분하다.

함수 $y = f(x)$는 $0 < x < \frac{\pi}{20}$에서 증가하고 $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{20}\right) = 1$이다.

$g(0) = 1$이므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$는 $0 < x < \frac{\pi}{20}$에서 교점을 갖고,

$\sin 10a = \cos ka$인 $a\left(0 < a < \frac{\pi}{4}\right)$가 존재한다.

따라서 k가 짝수이면 조건을 만족시킨다.

(ii) k가 홀수인 경우

$\cos ka = \cos k(a+\pi) = -\cos ka$이므로 $\cos ka = 0$

즉, $\sin 10a = 0$이고 $0 < a < \frac{\pi}{4}$이므로 $a = \frac{\pi}{10}$ 또는 $a = \frac{\pi}{5}$이다.

즉, $\cos \frac{\pi}{10} k = 0$ 또는 $\cos \frac{\pi}{5} k = 0$이다.

$\frac{\pi}{10} k = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi, \ \frac{5}{2}\pi, \ \cdots$, 또는 $\frac{\pi}{5} k = \frac{\pi}{2}, \ \frac{3}{2}\pi, \ \frac{5}{2}\pi, \ \cdots$

이고 이를 만족시키는 자연수 k는 5의 배수이면 충분하다.

(i), (ii)에 의하여 즉, k는 짝수이거나 k는 홀수인 5의 배수이다.

100 이하의 짝수 k의 개수는 50,

100 이하의 홀수인 5의 배수 k의 개수는

100 이하인 5의 배수의 개수에서 100 이하인 10의 배수의 개수를 제외하면 된다.

즉, $20 - 10 = 10$

따라서 100 이하의 자연수 k의 개수는 $50 + 10 = 60$

30. ①

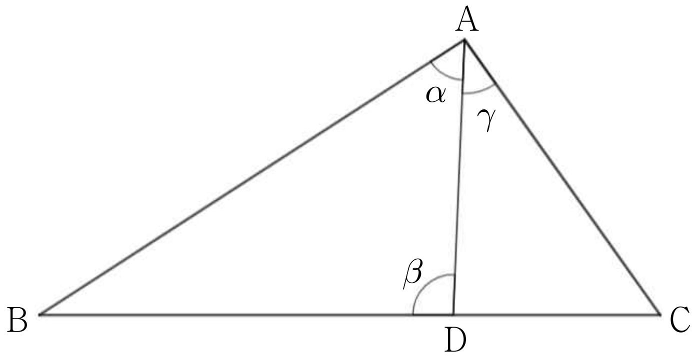
삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{9}{10}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin(\angle\mathrm{ABC})=3\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{9}{10}$, $\sin(\angle\mathrm{ABC})=\frac{3}{10}$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 삼각형 ABC의 외접원의 지름의 길이는

$\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=\frac{4}{\frac{3}{10}}=\frac{40}{3}$이고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{20}{3}$

31. 15



$\sin(\angle\mathrm{BAD})=\alpha$, $\sin(\angle\mathrm{BDA})=\beta$, $\sin(\angle\mathrm{DAC})=\gamma$라 하자.

$\angle\mathrm{ADC}=\pi-\beta$이다.

삼각형 ABD의 외접원의 넓이가 두 점 C, D를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이의 6배이므로 삼각형 ABD의 외접원의 지름의 길이는 선분 CD의 길이의 $\sqrt{6}$배이다.

$\overline{\mathrm{DC}}=k$, $\overline{\mathrm{BD}}=2k$라 두면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}:\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{2k}{\sin\alpha}:k=\dfrac{2}{\sin\alpha}:1=\sqrt{6}:1$이므로 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

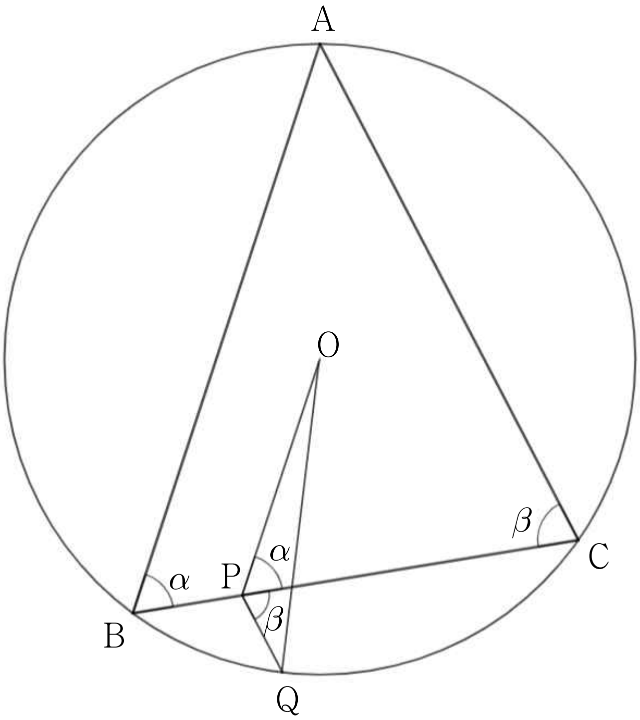
$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\beta}$, $\dfrac{2k}{\dfrac{2\sqrt{6}}{6}}=\dfrac{3}{\sin\beta}$, $\sin\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{2k}$이고

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin\gamma}=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\pi-\beta)}$, $\dfrac{k}{\sin\gamma}=\dfrac{2}{\dfrac{\sqrt{6}}{2k}}$, $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

따라서 $\sin(\angle\mathrm{DAC})=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$이고, $40\times\sin^2(\angle\mathrm{DAC})=15$

32. ⑤



$\angle \mathrm{ABC} = \alpha$, $\angle \mathrm{ACB} = \beta$라 하자.

두 선분 AB, OP가 평행하므로 $\angle \mathrm{OPC} = \alpha$, 두 선분 AC, PQ가 평행하므로 $\angle \mathrm{QPC} = \beta$이다.

삼각형 ABC의 외접원의 지름의 길이가 16이므로 사인법칙에 의하여

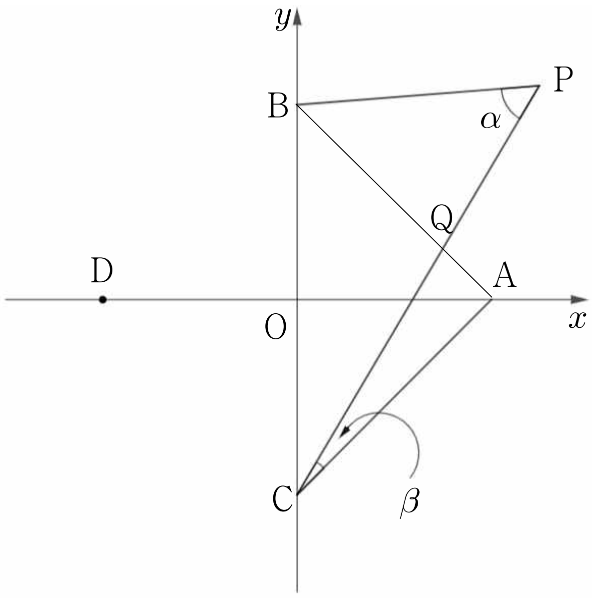
$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \dfrac{12}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \dfrac{12}{\sin(\alpha + \beta)} = 16$이고, $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{3}{4}$

삼각형 OPQ에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}}}{\sin(\angle \mathrm{OPQ})} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\sin(\angle \mathrm{POQ})}$, $\dfrac{8}{\sin(\alpha + \beta)} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\frac{1}{4}}$, $\dfrac{8}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\frac{1}{4}}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $\dfrac{8}{3}$

33. ③



점 D를 D$(-4,\ 0)$이라 하면 점 P는 원 $(x+4)^2+y^2=100$위의 점이므로

$$\overline{\mathrm{BP}}=5, \quad \overline{\mathrm{DP}}=\boxed{10}$$

이다. 사각형 BDCA가 정사각형이므로 $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{DBA}=\dfrac{\pi}{2}$이고

두 선분 AB, CP의 교점 Q에 대하여 $\angle\mathrm{CQA}=\angle\mathrm{BQP}=\dfrac{\pi}{2}-\beta$이다

삼각형 BQP에서 $\angle\mathrm{QBP}=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta$이고

$$\angle\mathrm{DBP}=\angle\mathrm{DBA}+\angle\mathrm{QBP}=\boxed{\pi}-\alpha+\beta$$

이다. 따라서 삼각형 PBD에서 $\overline{\mathrm{BP}}=5$, $\overline{\mathrm{DP}}=10$, $\overline{\mathrm{DB}}=4\sqrt{2}$이므로
코사인법칙에 의하여

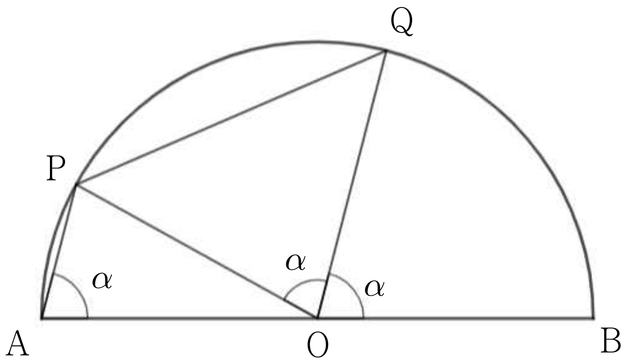
$$\cos(\angle\mathrm{DBP})=\frac{\overline{\mathrm{BD}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2-\overline{\mathrm{DP}}^2}{2\times\overline{\mathrm{BD}}\times\overline{\mathrm{BP}}}=-\frac{43\sqrt{2}}{80}$$이고 $\angle\mathrm{DBP}=\pi-\alpha+\beta$이므로

$$\cos(\alpha-\beta)=\boxed{\frac{43\sqrt{2}}{80}}$$

이다

$p=10$, $q=\pi$, $r=\dfrac{43\sqrt{2}}{80}$이므로 $p\times q\times r=\dfrac{43}{8}\sqrt{2}\pi$.

34. 3

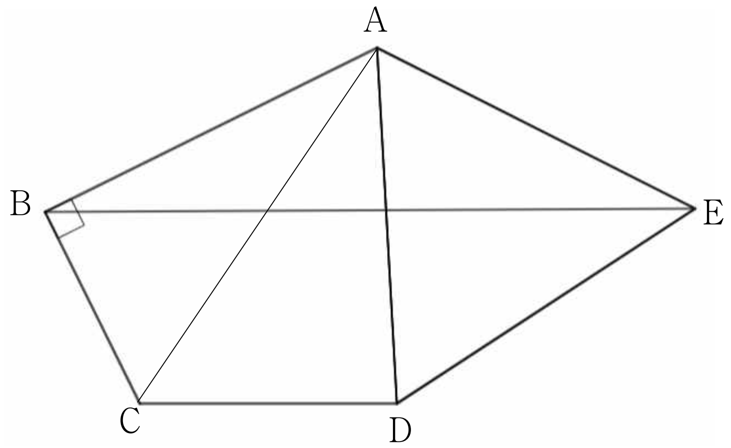


$\angle \mathrm{PAO}=\alpha$라 두면 $\angle \mathrm{APO}=\alpha$이므로 $\angle \mathrm{POB}=2\alpha$이다.
이때 두 선분 AP, OQ가 평행하므로 $\angle \mathrm{QOB}=\alpha$이고, $\angle \mathrm{POQ}=\alpha$이다.

삼각형 POQ에서 $\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}=6$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=3\sqrt{6}$이므로 코사인법칙에 의하여
$\cos\alpha=\dfrac{\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}{2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{OQ}}}=\dfrac{1}{4}$이다.

점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때.
$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$이고 $\overline{\mathrm{OA}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{3}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{HP}}$이므로
선분 AP의 길이는 3

35. 70



삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=6$이고 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{6}$이다.

삼각형 ADE의 넓이가 $\frac{25}{4}\sqrt{3}$이므로 이 정삼각형의 한 변의 길이는 5이고,

$\overline{\mathrm{AD}}=5$, $\overline{\mathrm{AE}}=5$, $\angle\mathrm{DAE}=\frac{\pi}{3}$이다.

삼각형 ACD에서 $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\overline{\mathrm{AD}}=5$, $\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{13}$이므로

코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle\mathrm{CAD})=\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-\overline{\mathrm{CD}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AD}}}=\dfrac{4}{5}$

$\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{CAD}+\angle\mathrm{DAE}=\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{CAD}$이므로

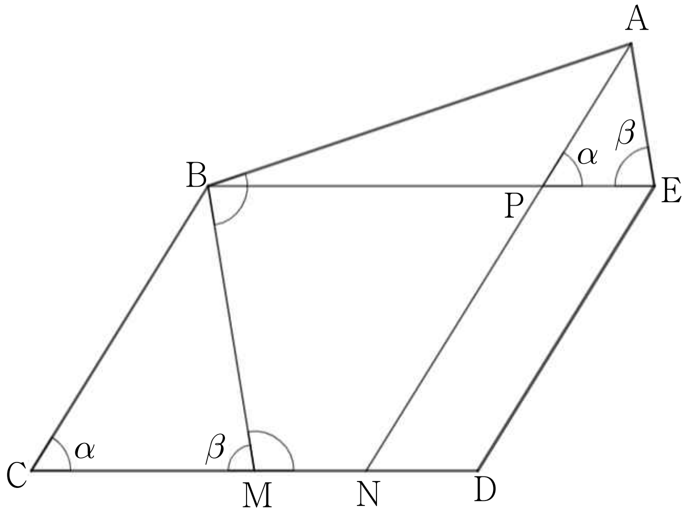
$\cos(\angle\mathrm{BAE})=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\angle\mathrm{CAD}\right)=-\sin(\angle\mathrm{CAD})=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$이다.

따라서 삼각형 ABE에서 $\overline{\mathrm{AB}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AE}}=5$, $\cos(\angle\mathrm{BAE})=-\frac{3}{5}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos(\angle\mathrm{BAE})=52+18\sqrt{3}$

$p+q=70$

36. 5



두 선분 BE, AN의 교점을 P라 하고, $\angle \mathrm{BCM} = \alpha$, $\angle \mathrm{BMC} = \beta$라 하자.
$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{ED}}$이고 두 직선 BC, ED가 평행하므로 사각형 BCDE는 평행사변형이고,
두 직선 BE, CD도 평행하다.
두 직선 BC, NA이 평행하므로 사각형 BCNP도 평행사변형이고,
$\angle \mathrm{BCM} = \angle \mathrm{BPN} = \angle \mathrm{APE} = \alpha$이다.

$\angle \mathrm{BMD} = \angle \mathrm{ABM} = \pi - \beta$이고 $\angle \mathrm{CMB} = \angle \mathrm{MBE} = \beta$이므로
$\angle \mathrm{ABE} = \angle \mathrm{ABM} - \angle \mathrm{MBE} = \pi - 2\beta$이다.
$\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{BE}} = 4$이므로 삼각형 ABE는 이등변삼각형이고, $\angle \mathrm{BEA} = \angle \mathrm{BAE} = \beta$이다.
따라서 $\angle \mathrm{BCM} = \angle \mathrm{APE} = \alpha$, $\angle \mathrm{BMC} = \angle \mathrm{BEA} = \beta$이므로
두 삼각형 BCM, APE는 서로 닮음이다.
$\overline{\mathrm{CN}} = \overline{\mathrm{BP}} = 3$에서 $\overline{\mathrm{PE}} = 1$, $\overline{\mathrm{CM}} : \overline{\mathrm{PE}} = 2 : 1$이므로 $\overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{AP}} = 2 : 1$이고
$\overline{\mathrm{CB}} = 3$에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{2}$이다.

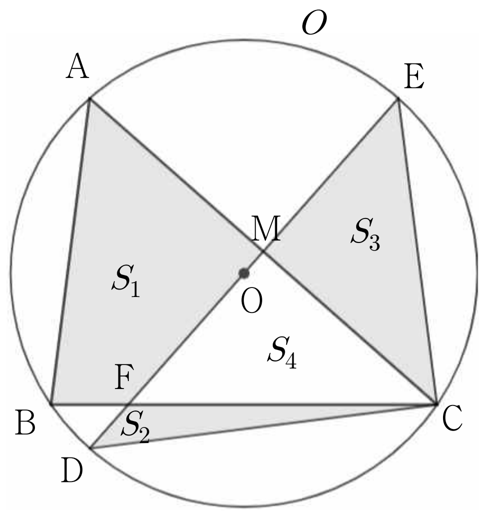
삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{BP}} = 3$이므로 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{APB}) = \cos(\pi - \alpha) = \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2}{2 \times \overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{BP}}} = -\dfrac{19}{36}$이므로 $\cos\alpha = \dfrac{19}{36}$이고

삼각형 APE에서 $\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{PE}} = 1$, $\cos\alpha = \dfrac{19}{36}$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AE}}^2 = \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{PE}}^2 - 2\overline{\mathrm{AP}} \times \overline{\mathrm{PE}} \times \cos\alpha = \dfrac{5}{3}$, $\overline{\mathrm{AE}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3} = l$이고 $3l^2 = 5$

37. 37



삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=6$이므로

코사인법칙에 의하여 $\cos(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{CA}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{1}{8}$이므로

$\sin(\angle ABC)=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$이고, 사인법칙에 의하여 원 O의 지름의 길이는

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\dfrac{16}{7}\sqrt{7}$, 원 O의 반지름의 길이는 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\dfrac{8}{7}\sqrt{7}$이다.

또, 선분 AC의 중점이 M이므로 $\overline{MC}=3$이며, 원의 성질에 의하여 $\angle OMC=\dfrac{\pi}{2}$이다.

삼각형 FMC의 넓이를 S_4라 하면 $S_1-S_2-S_3=(S_1+S_4)-(S_2+S_3+S_4)$이므로

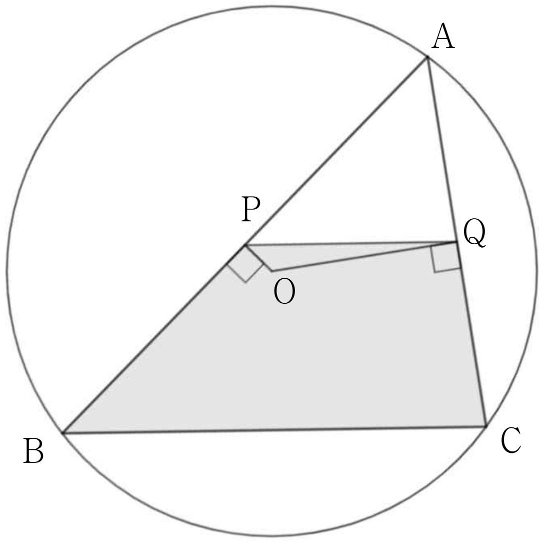
$S_1-S_2-S_3$의 값은 삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 EDC의 넓이의 차와 같다.

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin(\angle ABC)=\dfrac{15}{4}\sqrt{7}$

삼각형 EDC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{MC}=\dfrac{24}{7}\sqrt{7}$이므로

$S_1-S_2-S_3=\dfrac{15}{4}\sqrt{7}-\dfrac{24}{7}\sqrt{7}=\dfrac{9}{28}\sqrt{7}$, $p+q=37$

38. 18



점 O에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발이 각각 P, Q이므로

원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{CQ}}$이다.

즉, 두 삼각형 APQ, ABC는 닮음이고, 닮음비가 1 : 2이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:2$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$이다.

삼각형 ABC의 외접원의 지름의 길이가 10이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})}=10$에서 $\sin(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{4}{5}$이고, $0<\angle \mathrm{BAC}<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\angle \mathrm{BAC})=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$이다.

두 삼각형 APQ, ABC는 닮음이고, 닮음비가 1 : 2이므로 넓이의 비는 1 : 4이다.

즉, 사각형 PBCQ의 넓이는 삼각형 APQ의 넓이의 3배이므로 삼각형 APQ의 넓이는 7이다.

$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{AQ}}=b$라 두면 $\cos(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{3}{5}$ 삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\times\dfrac{3}{5}=4^2$이며, 삼각형 APQ의 넓이가 7이고 $\sin(\angle \mathrm{BAC})=\dfrac{4}{5}$이므로

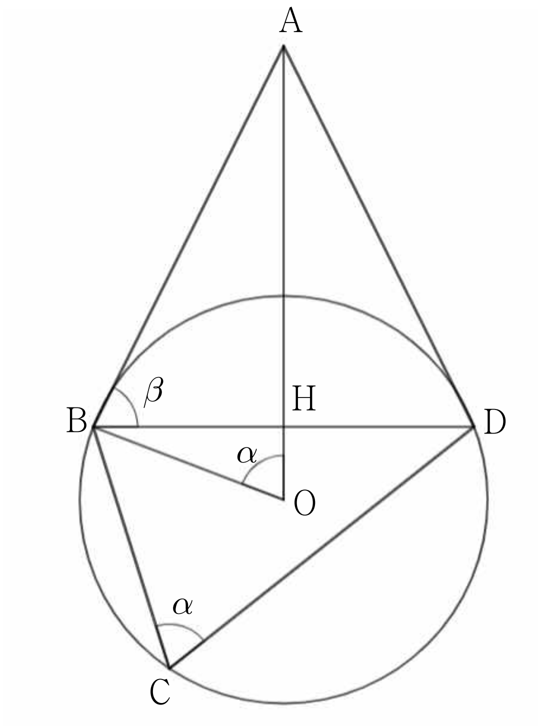
$\dfrac{1}{2}\times ab\times\dfrac{4}{5}=7$, $ab=\dfrac{35}{2}$이다. 따라서 $a^2+b^2-2ab\times\dfrac{3}{5}=4^2$에서 $a^2+b^2=37$이다.

$a^2+b^2=37$, $ab=\dfrac{35}{2}$에서 $(a+b)^2=\left(a^2+b^2\right)+2ab=72$이므로 $a+b=6\sqrt{2}$이다.

사각형 PBCQ의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CQ}}+\overline{\mathrm{QP}}=12+a+b=12+6\sqrt{2}$이고

$p+q=18$

39. 18



삼각형 BCD의 외접원의 중심을 O, 점 O에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼각형 ABD가 이등변삼각형이므로 직선 OH는 점 A를 지난다.

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 r이라 두면 사인법칙에 의하여
$2r=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{2r}=\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$이므로 $2r=\overline{\mathrm{AD}}=4$에서 $r=2$이고, $\overline{\mathrm{BO}}=2$이다.

원주각과 중심각의 관계에 의하여 $\angle\mathrm{BOD}=2\alpha$이고, 삼각형 BOD가 이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{BOH}=\angle\mathrm{HOD}=\alpha$이다. 이때 $\angle\mathrm{OBH}=\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\angle\mathrm{ABO}=\beta+\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로 $\cos(\angle\mathrm{ABO})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)=\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{8}$이다.
삼각형 ABO에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BO}}=2$, $\cos(\angle\mathrm{ABO})=\frac{1}{8}$이므로 코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AO}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BO}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BO}}\times\cos(\angle\mathrm{ABO})=18$이므로 $l^2=18$

40. ①

모든 자연수 n에 대하여 $S_n=(a_2-a_1)\times(a_3-a_2)\times\cdots\times(a_{n+1}-a_n)$라 하면, $S_n=k^{2-a_{n+1}}$에서

$$2-a_{n+1}=\log_k S_n \ \cdots \ ㉠$$

이고, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$2-a_n=\log_k S_{n-1} \ \cdots \ ㉡$$

이다. ㉠$-$㉡을 하면

$$a_n-a_{n+1}=\log_k S_n-\log_k S_{n-1}=\log_k(a_{n+1}-a_n) \ \cdots \ ㉢$$

이다. 즉 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $-x=\log_k x$의 해이다.

$k>1$이므로 방정식 $-x=\log_k x$은 오직 하나의 실근 d를 갖는다.

따라서 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이다.

즉, $n\ge 2$일 때 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 $a_n=a+(n-1)d$라 둘 수 있다.

$a_7=4,\ a_{11}=6$에서 $a+6d=4,\ a+10d=6$이므로 $a=1,\ d=\dfrac{1}{2}$이고,

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n=\boxed{1+\frac{1}{2}(n-1)}$$

이다. ㉢에서 $a_n-a_{n+1}=\log_k S_n-\log_k S_{n-1}=\log_k(a_{n+1}-a_n)$이고 $a_{n+1}-a_n=d$에서

$d=\dfrac{1}{2}$이므로 $-\dfrac{1}{2}=\log_k\dfrac{1}{2},\ k=\boxed{4}$ 이고, $S_n=k^{2-a_{n+1}}$에서 $n=1$을 대입하면

$S_1=a_2-a_1=4^{2-a_2},\ a_2=\dfrac{3}{2}$이므로 $\dfrac{3}{2}-a_1=4^{\frac{1}{2}},\ a_1=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$ 이다.

$f(n)=1+\dfrac{1}{2}(n-1),\ p=4,\ q=-\dfrac{1}{2}$이므로

$f(14)+p+q=11$

41. 290

$0 < x < 11\pi$이면서 $\sin x = 0$인 x의 값은 $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ 10\pi$이다.

즉, (나)를 만족시키려면 집합 $\{a_n | n\text{은 자연수}\} \cap \{\pi,\ 2\pi,\ \cdots,\ 10\pi\}$의 원소의 개수가 6이어야 한다.

10개의 수 $\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots,\ 10\pi$ 중에서 6개를 택할 때 그 수가 등차수열을 이루는 경우는 $5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ \cdots,\ 10\pi$인 경우이다.

즉, $\{a_n | n\text{은 자연수}\} \cap \{\pi,\ 2\pi,\ \cdots,\ 10\pi\} = \{5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ \cdots,\ 10\pi\}$이고

$\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi$는 수열 $\{a_n\}$의 항이 될 수 없다.

즉, 수열 $\{a_n\}$의 항 중 가장 작은 수는 5π이므로 $a_1 = 5\pi$이고

조건 (가)에 의하여 공차는 π이다.

따라서 $a_n = 5\pi + (n-1)\pi$이고, $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k = 290$

42. 255

(가) $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)=0$

(나) $(a_4-1)(a_5-2)(a_6-3)=0$

(다) $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)<0$

(가)에서

(i) $a_1=1$인 경우

$a_4=1$이면 $a_7=1$, $a_5=2$이면 $a_9=3$이므로 (다)를 만족시킬 수 없다.

$a_6=3$이면 공차가 양수이므로 $3<a_7<a_8<a_9$이고 $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)>0$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $a_2=2$인 경우

$a_5=2$이면 $a_8=2$이므로 (다)를 만족시킬 수 없다.

$a_6=3$이면 공차가 양수이므로 $3<a_7<a_8<a_9$이고 $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)>0$이므로 조건을 만족시킬 수 없다.

$a_4=1$이면 $a_6=0$이고 공차가 음수이므로 $0>a_7>a_8>a_9$이고

(다)를 만족시킨다.

$a_n=a+(n-1)d$에서 $a_2=a+d=2$, $a_4=a+3d=1$이므로

$a=\dfrac{5}{2}$, $d=-\dfrac{1}{2}$이고 $a_n=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}(n-1)$이다. $a_{10}\times a_{11}=-2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=5$이므로

모순이다.

(iii) $a_3=3$인 경우

$a_6=3$이면 $a_9=3$, $a_5=2$이면 $a_4=1$이므로 (다)를 만족시킬 수 없다.

$a_4=1$이면 $a_5=-1$, $a_6=-3$이고 공차가 음수이므로 $-3>a_7>a_8>a_9$이고

(다)를 만족시킨다.

$a_n=a+(n-1)d$에서 $a_3=a+2d=3$, $a_4=a+3d=1$이므로

$a=7$, $d=-2$이고 $a_n=7-2(n-1)$이다. $a_{10}\times a_{11}=-11\times(-12)\neq 5$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a_n=7-2(n-1)$이고 $a_{12}\times a_{13}=255$

<다른 풀이>

(가) $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)=0$
(나) $(a_4-1)(a_5-2)(a_6-3)=0$
(다) $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)<0$

(나)에서
(i) $a_5=2$인 경우
$a_5=2$이므로
$(a_1,\ 2,\ a_9)$, $(a_2,\ 2,\ a_8)$, $(a_3,\ 2,\ a_7)$ 모두 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
따라서 $(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)=0$이면 $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3)=0$이므로
(다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_6=3$인 경우
만약 공차가 양수이거나 0이면 $3 \le a_7 \le a_8 \le a_9$이므로 $(a_7-1)(a_8-2)(a_9-3) \ge 0$이므로
(다)를 만족시킬 수 없다. 즉, 공차가 음수인데 $a_1 > a_2 > a_3 > a_6 = 3$이므로
(가)를 만족시킬 수 없다.

(ii) $a_4=1$인 경우
$a_1=1$이면 $a_7=1$이므로 (다)를 만족시키지 않는다.
따라서 $a_2=2$ 또는 $a_3=3$이므로 공차는 음수이고 $0 > a_7 > a_8 > a_9$이므로
(다)를 만족시킨다.
$a_2=2$ 또는 $a_3=3$인지 확인하는 풀이는 위 풀이와 동일하다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a_n=7-2(n-1)$이고 $a_{12} \times a_{13}=255$

43. 26

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$d > 0$이면 $a_2 > 0$이므로 $0 < a_3 < a_7 < a_{15}$이고

(가)에서 $a_3 + a_{15} = 2a_7$, $a + 2d + a + 14d = 2(a + 6d)$, $d = 0$이므로 모순이다.

따라서 $d < 0$이다.

$a_3 < 0$이면 $0 > a_3 > a_7 > a_{15}$이므로 (가)에서 $-a_3 - a_{15} = -2a_7$

즉, $a_3 + a_{15} = 2a_7$이고 $d = 0$이므로 모순이다. 따라서 $a_3 \geq 0$이다.

만약 $a_{15} \geq 0$이면 $a_3 > a_7 > a_{15} \geq 0$이고

(가)에서 $a_3 + a_{15} = 2a_7$, 즉 $d = 0$이므로 모순이다. 따라서 $a_{15} < 0$

따라서 $d < 0$, $a_3 \geq 0$, $a_{15} < 0$이고 a_7에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $a_7 \geq 0$인 경우

(가)에서 $a_3 - a_{15} = 2a_7$이고 $a + 2d - (a + 14d) = 2(a + 6d)$에서 $a = -12d$이다.

(ii) $a_7 < 0$인 경우

(가)에서 $a_3 - a_{15} = -2a_7$이고 $a + 2d - (a + 14d) = -2(a + 6d)$에서 $a = 0$이다.

이때 $d < 0$이므로 $a_2 = a + d < 0$이고 $a_2 > 0$에 모순이다.

(i), (ii)에 의하여 $a = -12d$이고, $a_n = -12d + (n-1)d = (n-13)d$이고 $a_{13} = 0$이다.

(나)에서 $|a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13}| = |a_{10} \times a_{13}| + 3$이고 $a_{13} = 0$에서

$|a_{10} + a_{11} + a_{12}| = 3$이다. $|-3d - 2d - d| = 3$에서 $d < 0$이므로 $d = -\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $a_n = -\dfrac{1}{2}(n - 13)$이고 $\displaystyle\sum_{k=3}^{15} a_k = 26$

<다른 풀이>
(가)에서 세 수 $|a_3|$, $|a_7|$, $|a_{15}|$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 0이 아닌 등차수열이므로 세 수 a_3, a_7, a_{15}는 이 순서대로 등차수열을 이룰 수 없다.
따라서 세 수 a_3, a_7, a_{15}의 부호가 모두 같을 수 없다.

$a_2 > 0$이므로 $a_{15} > 0$이면 세 수 a_3, a_7, a_{15}의 부호가 모두 양수이고
$a_3 < 0$이면 세 수 a_3, a_7, a_{15}의 부호가 모두 음수이다.
따라서 $a_3 \geq 0$, $a_{15} < 0$이고, 공차는 음수이다.

(i) $a_7 \geq 0$인 경우
$a_3 \geq 0$, $a_7 \geq 0$, $a_{15} < 0$이므로 세 수 a_3, a_7, $-a_{15}$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
이때 세 수 세 수 a_3, a_7, a_{11}이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a_{11} = -a_{15}$
$a_{11} + a_{15} = 2a_{13} = 0$에서 $a_{13} = 0$이다.

(ii) $a_7 < 0$인 경우
이 경우는 위 풀이와 동일하고, 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_{13} = 0$이고 $a_n = d(n-13)$이라 둘 수 있다.

이 다음 풀이는 위 풀이와 동일하고, $a_n = -\frac{1}{2}(n-13)$, $\sum_{k=3}^{15} a_k = 26$

44. 82

(i) n이 홀수인 경우

$a_n=-2$, $a_{n+1}=0$이므로 $a_{n+1}\times\sum_{k=1}^{n}b_k=n(m-a_n)(na_{n+1}-3)$에서

$0=n(m+2)\times(-3)$이다.

이 식이 모든 홀수 n에 대하여 만족해야 하므로 $m=-2$이다.

(ii) n이 짝수인 경우

$a_n=0$, $a_{n+1}=-2$이므로 $a_{n+1}\times\sum_{k=1}^{n}b_k=n(m-a_n)(na_{n+1}-3)$에서

$-2\sum_{k=1}^{n}b_k=-2n(-2n-3)$이고. $\sum_{k=1}^{n}b_k=n(-2n-3)=-2n^2-3n$이다.

n에 $n+2$를 대입하면 $\sum_{k=1}^{n+2}b_k=-2(n+2)^2-3(n+2)$이므로

$\sum_{k=1}^{n+2}b_k-\sum_{k=1}^{n}=-2(n+2)^2-3(n+2)+(2n^2+3n)=-8n-14$

따라서 $b_{n+1}+b_{n+2}=-8n-14$이다.

$b_n=a+(n-1)d$라 두면 $b_{n+1}+b_{n+2}=a+nd+a+(n+1)d=2dn+2a+d$이므로

$2d=-8$에서 $d=-4$, $2a+d=-14$에서 $a=-5$이므로

$b_n=-5-4(n-1)$이다.

(i), (ii)에 의하여 $m=-2$, $b_n=-5-4(n-1)$이고 $m\times b_{10}=82$

45. ③

(가)에 의하여 $\sum_{k=n_1}^{n_1+4} a_k = a_{n_1} + a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_1+4} = 5a_{n_1+2} \geq 0$이므로

어떤 자연수 n_1에 대하여 $a_{n_1+2} \geq 0$이다.

$a_1 = 20$이므로 $a_{n+2} \geq 0$인 자연수 n이 존재하기 위해서는

공차가 0 이상이거나 공차가 음수이면서 $a_3 \geq 0$이어야 한다.

이때 공차가 0 이상이면 (나)를 만족시킬 수 없으므로 공차는 음수이고

$a_3 \geq 0$이다. 즉, $a_n = 20 + (n-1)d$라 두면 $a_3 = 20 + 2d \geq 0$, $d \geq -10$이다.

(나)에서 $\sum_{k=1}^{n_2} a_k = \dfrac{n_2\{40 + (n_2 - 1)d\}}{2} = 0$이므로

$40 + (n_2 - 1)d = 0$, $(n_2 - 1)d = -40$이다.

n_2가 자연수이고 d가 $d \geq -10$인 음의 정수이므로 $(n_2 - 1)d = -40$을 만족시키는 경우는

$d = -10$, $n_2 = 5$

$d = -8$, $n_2 = 6$

$d = -5$, $n_2 = 9$

$d = -4$, $n_2 = 11$

$d = -2$, $n_2 = 21$

$d = -1$, $n_2 = 41$

인 경우이다. 따라서 모든 d의 값의 합은 -30

46. ②

(나)에서 $b_4=a_6$이므로 (가)에서 $|a_4|=|b_4|=|a_6|$

즉, $a_4=a_6$ 또는 $a_4=-a_6$인데 수열 $\{a_n\}$의 공차가 0이 아니므로

$a_4=-a_6$, $a_4+a_6=2a_5=0$에서 $a_5=0$이다.

$a_n=a+(n-1)d$라 두면 $a+4d=0$이고

$\sum_{k=1}^{10} a_k=\frac{10(2a+9d)}{2}=10$에서 $2a+9d=2$이므로 $a=-8$, $d=2$이고

$a_n=-8+2(n-1)$이고, $b_4=a_6=2$이다.

(가)에서 $|a_n|=|b_n|$이고 $n\geq 5$에서 $a_n\geq 0$이다.

따라서 $\sum_{k=4}^{9} b_k$의 값이 최소가 되기 위해서는

$b_4=2$이고 $n=5,\ 6,\ \cdots,\ 9$일 때 $b_n=-a_n$이어야 한다.

따라서 $\sum_{k=4}^{9} b_k$의 최솟값은 $2-\sum_{k=5}^{9} a_k=2-20=-18$

47. 444

(가)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1} \times a_{2n} = -7+3(n-1) = 3n-10$이고,

$a_1 a_2 = -7$, $a_5 a_6 = -1$, $a_7 a_8 = 2$이다.

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로 a_2, a_5, a_8이 될 수 있는 값은 다음과 같다.

<table>
<tr><th>a_2</th><th>a_5</th><th>a_8</th></tr>
<tr><td>-7</td><td rowspan="2">-1</td><td>-2</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

위 경우 중에서 $a_2 < a_5 < a_8$을 만족시키는 경우는

$a_2 = -7$, $a_5 = -1$, $a_8 = 1$ 또는 $a_2 = -7$, $a_5 = -1$, $a_8 = 2$

또는 $a_2 = -7$, $a_5 = 1$, $a_8 = 2$ 또는 $a_2 = -1$, $a_5 = 1$, $a_8 = 2$

이다.

$a_5 a_6 = -1$이므로 $a_2 + a_6 + a_8$이 최대가 되는 경우는 $a_2 = -1$, $a_5 = 1$, $a_8 = 2$인 경우이고

이때 $a_2 + a_6 + a_8 = -1-1+2 = 0$이다.

$a_{2n-1} \times a_{2n} = 3n-10$이고 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로

$a_3 \times a_4 = -4$에서 a_4가 최대가 되는 경우는 $a_4 = 4$

$n \geq 5$에서 $3n-10 \geq 0$이므로 a_{2n}의 값이 최대가 되는 경우는 $a_{2n} = 3n-10$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{20} a_{2k}$의 최댓값은 $(-1+4-1+2) + \sum_{k=5}^{20}(3k-10) = 444$

48. ①

$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=2}^{10}(a_k + k) = \sum_{k=3}^{10}(a_k + 3)$에서

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=2}^{10}(a_k + k) = a_1 - \sum_{k=2}^{10} k = a_1 - 54 = 0$에서 $a_1 = 54$

$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=3}^{10}(a_k + 3) = a_1 + a_2 - \sum_{k=3}^{10} 3 = a_1 + a_2 - 24 = 0$에서 $a_2 = -30$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 공비는 $r = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{5}{9}$

49. ③

$\frac{a_{n+4}}{a_{2n}}=b_n$이라 두면 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이므로 $b_n=ar^{n-1}$이라 둘 수 있다

$b_4=\frac{a_8}{a_8}=1$에서 $ar^3=1$,

$b_5=\frac{a_9}{a_{10}}$, $b_6=\frac{a_{10}}{a_{12}}$, $b_8=\frac{a_{12}}{a_{16}}$이므로 $b_5b_6b_8=a^3\times r^{16}=\frac{a_9}{a_{16}}=-\frac{16}{\sqrt{2}}=-8\sqrt{2}$ 에서

$ar^3=1$이므로 $r^7=-8\sqrt{2}$, $r=-\sqrt{2}$이고, $ar^3=1$에서 $a=-\frac{\sqrt{2}}{4}$이다.

따라서 $\frac{a_{n+4}}{a_{2n}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\times(-\sqrt{2})^{n-1}$이다.

$n=1$을 대입하면 $\frac{a_5}{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{a_2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로 $a_2=-4$

50. ③

삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 넓이가 $\frac{a_n}{2}$이고 $\overline{\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n} = a_n$이다.

점 Q_{n+1}의 y좌표와 점 P_n의 y좌표의 차는 삼각형 $\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{H}_n\mathrm{P}_n$의 높이이므로 $\boxed{1}$ 이다

$\mathrm{Q}_{n+1}\left(a_{n+1},\ (a_{n+1})^2\right)$, $\mathrm{P}_n\left(a_n,\ 2(a_n)^2\right)$이므로

$$(a_{n+1})^2 - 2(a_n)^2 = \boxed{1}$$

이고,

$$(a_{n+1})^2 + \boxed{1} = 2 \times \left\{(a_n)^2 + \boxed{1}\right\}$$

이므로 수열 $\left\{(a_n)^2 + \boxed{1}\right\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

$a_1 = 1$에서 수열 $\left\{(a_n)^2 + 1\right\}$의 첫째항은 2이므로 수열 $\left\{(a_n)^2 + 1\right\}$의 일반항은

$(a_n)^2 + 1 = 2^n$이다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_n)^2 = \boxed{2^n - 1}$$

이고, $\mathrm{Q}_n\left(a_n,\ (a_n)^2\right)$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 $(a_n)^2$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \sum_{k=1}^{n} (2^n - 1) = \boxed{2(2^n - 1) - n}$$

이다.

$p = 1$, $f(n) = 2^n - 1$, $g(n) = 2(2^n - 1) - n$이고

$p + f(7) + g(8) = 630$

51. 99

$\sum_{k=1}^{50}\left\{(51-k)a_k-\frac{1}{50}\right\}=\sum_{k=1}^{49}S_k$에서

$\sum_{k=1}^{50}\left\{(51-k)a_k-\frac{1}{50}\right\}=50a_1+49a_2+48a_3+\cdots\ a_{50}-1$

$\sum_{k=1}^{49}S_k=(a_1)+(a_1+a_2)+(a_1+a_2+a_3)+\cdots+(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{49})$

$=49a_1+48a_2+47a_3+\cdots+a_{49}$이다.

$50a_1+49a_2+48a_3+\cdots\ a_{50}-1=49a_1+48a_2+47a_3+\cdots+a_{49}$

이므로 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{50}=S_{50}=1$이다.

$a_n=ar^{n-1}$이라 두면 $S_{50}=\frac{a\left(r^{50}-1\right)}{r-1}=1$, $S_{50}=\frac{a\left(r^{35}-1\right)}{r-1}=\frac{1}{100}$에서

$\frac{a\left(r^{50}-1\right)}{r-1}=\frac{a\left(r^{25}-1\right)\left(r^{25}+1\right)}{r-1}=\frac{r^{25}+1}{100}=1$에서 $r^{25}=99$

따라서 $\frac{a_{30}}{a_5}=r^{25}=99$

52. 527

$b_n = \begin{cases} a_n & (a_n > 0) \\ 1 - a_1 & (a_n \le 0) \end{cases}$ 에서

$a_1 \le 0$이면 $b_1 = 1 - a_1 = a_1$에서 $a_1 = \dfrac{1}{2}$이므로 모순이다. 따라서 $a_1 > 0$이다.

$a_4 + a_{10} = -\sqrt{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비는 음수이고, $a_1 > 0$에서 $a_7 > 0$이다.

따라서 $b_7 = 1 - a_1 = a_7$이고 $a_1 + a_7 = 1$이다.

$a_n = ar^{n-1}$이라 두면

$a_1 + a_7 = a + ar^6 = 1$, $a_4 + a_{10} = ar^3 + ar^9 = r^3(a + ar^6) = r^3 = -\sqrt{2}$이다.

$a + ar^6 = 3a = 1$에서 $a = \dfrac{1}{3}$이다.

$$3 \times \sum_{k=1}^{17} b_{3k-2} = 3(b_1 + b_4 + \cdots + b_{49}) = 3(b_1 + b_7 + b_{13} + \cdots + b_{49}) + 3(b_4 + b_{10} + b_{16} + \cdots + b_{46})$$

$b_1 + b_7 + b_{13} + \cdots + b_{49}$은 첫째항이 $b_1 = a_1 = \dfrac{1}{3}$이고 공비가 $r^6 = 2$인 등비수열의

첫째항부터 제9항까지의 합과 같다. 따라서 $b_1 + b_7 + b_{13} + \cdots + b_{49} = \dfrac{\frac{1}{3}(2^9 - 1)}{2 - 1} = \dfrac{511}{3}$

$b_4 + b_{10} + b_{16} + \cdots + b_{46} = 8(1 - a_1) = \dfrac{16}{3}$

따라서 $3 \times \displaystyle\sum_{k=1}^{17} b_{3k-2} = 3\left(\dfrac{511}{3} + \dfrac{16}{3}\right) = 527$

53. 54

$a_n = ar^{n-1}$이라 하자.

$\sum_{k=1}^{m} 3a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k$에서 $3\frac{a(r^m-1)}{r-1} = \frac{a(r^{3m}-1)}{r-1}$에서

$3r^m - 3 = r^{3m} - 1 = (r^m-1)(r^{2m}+r^m+1)$에서

$r^m = 1$ 또는 $3 = r^{2m} + r^m + 1$에서 $r^m = -2$이다.

(나)에 의하여 r^{30}은 정수이다.

(i) $r^m = 1$인 경우

$r < 0$이므로 m은 짝수이며, $r = -1$이고 r^{30}은 정수이다.
따라서 m이 짝수이면 조건을 만족시킨다.

(ii) $r^m = -2$

$r < 0$이므로 m은 홀수이며, $r = -2^{\frac{1}{m}}$이다.

$r^{30} = -2^{\frac{30}{m}}$이 정수이므로 m은 30의 약수인 홀수이며, $m = 1,\ 3,\ 5,\ 15$이다.

(i), (ii)에 의하여 100 이하의 자연수 m의 개수는 $50 + 4 = 54$

54. ⑤

모든 자연수 k에 대하여

$$\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k=(\boxed{k})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ka_{k+1}}{k+1}-a_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(\boxed{k})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)$$이다.

이때

$$\sum_{k=1}^{n}(\boxed{k})\times\left(\frac{a_{k+1}}{k+1}-\frac{a_k}{k}\right)=\left(\frac{a_2}{2}-a_1\right)+2\left(\frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}\right)+3\left(\frac{a_4}{4}-\frac{a_3}{3}\right)+\cdots+n\left(\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}\right)$$

$$=-a_1-\frac{a_2}{2}-\frac{a_3}{3}-\cdots-\frac{a_n}{n}+\frac{n}{n+1}a_{n+1}=\left(\boxed{\frac{n}{n+1}}\right)\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}$$

이므로

$$\left(\boxed{\frac{n}{n+1}}\right)\times a_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=n^2 \quad\cdots\quad ㉠$$

이다. $a_{21}=42$이므로 ㉠에 $n=20$을 대입하면

$$\frac{20}{21}a_{21}-\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}=400$$이므로 $$\sum_{k=1}^{20}\frac{a_k}{k}=\boxed{-360}$$ 이다.

$f(k)=k,\ g(n)=\dfrac{n}{n+1},\ p=-360$이므로

$f(20)\times g(9)+p=-342$

55. 200

$a_n \times a_{n+1} \leq 4a_n - 4$에서 n에 $3n-1$을 대입하면

$a_{3n-1} \times a_{3n} \leq 4a_{3n-1} - 4$이고 (가)에서 $a_{3n-1} = a_{3n}$이므로

$(a_{3n-1})^2 \leq 4a_{3n-1} - 4$, $(a_{3n-1} - 2)^2 \leq 0$, $a_{3n-1} = 2$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{3n-1} = a_{3n} = 2$이다.

$a_n \times a_{n+1} \leq 4a_n - 4$에서 n에 $3n$을 대입하면

$a_{3n} \times a_{3n+1} \leq 4a_{3n} - 4$에서 $a_{3n} = 2$이므로 $2a_{3n+1} \leq 4$, $a_{3n+1} \leq 2$

$a_n \times a_{n+1} \leq 4a_n - 4$에서 n에 $3n+1$을 대입하면

$a_{3n+1} \times a_{3n+2} \leq 4a_{3n+1} - 4$이고 $a_{3n-1} = 2$에서 $a_{3n+2} = 2$이므로

$2a_{3n+1} \leq 4a_{3n+1} - 4$, $2 \leq a_{3n+1}$이다.

따라서 $2 \leq a_{3n+1} \leq 2$이므로 $a_{3n+1} = 2$이고

$a_{3n-1} = a_{3n} = a_{3n+1} = 2$ 즉, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 2$이다.

$a_1 \times a_2 \leq 4a_1 - 4$에서 $a_2 = 2$이므로 $2a_1 \leq 4a_1 - 4$, $2 \leq a_1$이다

따라서 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최솟값은 $a_1 = 2$일 때이므로 $\sum_{k=1}^{100} 2 = 200$

56. ②

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n^2 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ a_n-n^2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$ 에서 $a_1=a$라 두면

$a_2=a+1^2$

$a_3=a+1^2-2^2$

$a_4=a+1^2-2^2+3^2$

$\vdots$

$a_{2n+1}=a+1^2-2^2+3^2-\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2$

$a_{2n+2}=a+1^2-2^2+3^2-\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2+(2n+1)^2$

이다.

$a_{2n+1}=a+1^2-2^2+3^2-\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2=a+\sum_{k=1}^{n}\{(2k-1)^2-(2k)^2\}$

$=a+\sum_{k=1}^{n}(-4k+1)=a-2n(n+1)+n=-2n^2-n+a$

$a_{2n+2}=a+1^2-2^2+3^2-\cdots+(2n-1)^2-(2n)^2+(2n+1)^2=-2n^2-n+a+(2n+1)^2$

$=2n^2+3n+1+a$

이므로

$\sum_{k=1}^{100}a_k=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{49}(a_{2k+1}+a_{2k+2})=a+a+1+\sum_{k=1}^{49}(2k+1+2a)=100a+2500=50$

따라서 $a_1=a=-\frac{49}{2}$

57. ②

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{2}{4-a_n} & (a_n \geq 1)\\ \\ n+1 & (a_n < 1)\end{cases}$$ 에서

$a_1=1,\ a_2=\dfrac{2}{3},\ a_3=3,\ a_4=2,\ a_5=1,\ a_6=\dfrac{2}{3},\ a_7=7,\ a_8=-\dfrac{2}{3},\ a_9=9,\ \cdots$

즉, $n \geq 7$인 자연수 n에 대하여

$a_n=n$이면 $a_{n+1}=\dfrac{2}{4-n},\ a_{n+2}=n+2,\ a_{n+3}=\dfrac{2}{4-(n+2)},\ \cdots$이다.

즉, $a_7=7$이므로 $n \geq 7$인 모든 홀수 n에 대하여 $a_n=n$이고, $a_{n+1}=\dfrac{2}{4-n}$이다.

따라서 $k \geq 4$인 모든 자연수 k에 대하여 $a_{2k}=\dfrac{2}{4-(2k-1)}=\dfrac{2}{5-2k}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{a_{2k}}=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_6}+\sum_{k=4}^{20}\frac{1}{a_{2k}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\sum_{k=4}^{20}\frac{5-2k}{2}=-158$

58. 129

(가)에 의하여 $a_n = 5$ 또는 $a_n = n$ 또는 $a_n = 2n$이다.

만약 $n \geq 11$인 자연수 n에 대하여 $a_n = n$ 또는 $a_n = 2n$이면

(나)를 만족시키지 못한다. 따라서 $n \geq 11$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = 5$이고,

$a_{11} = 5$이다.

(i) $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값이 최대가 되는 경우

$1 \leq n \leq 2$일 때 $n \leq 2n \leq 5$이므로 $a_n = 5$

$3 \leq n \leq 5$일 때 $n \leq 5 \leq 2n$이므로 $a_n = 2n$

$6 \leq n \leq 10$일 때 (나)에 의하여 $a_n \neq 2n$이고, $5 \leq n$이므로 $a_n = n$

$a_{11} = 5$

이때 $a_5 = a_{10} = 10$이므로 (나)를 만족시킨다.

이때의 최댓값은 $\sum_{k=1}^{2} 5 + \sum_{k=3}^{5} 2k + \sum_{k=6}^{10} k + 5 = 79 = M$

(ii) $\sum_{k=1}^{11} a_k$의 값이 최소가 되는 경우

$1 \leq n \leq 5$일 때 $n \leq 2n \leq 5$ 또는 $n \leq 5 \leq 2n$이므로 $a_n = n$

$6 \leq n \leq 9$일 때 (나)에 의하여 $a_n \neq 2n$이고, $5 \leq n$이므로 $a_n = 5$

$a_{10} = 5$ 또는 $a_{10} = 10$인데 $a_{10} = 5$이면 모든 자연수 n에 대하여

$a_n \neq 10$이므로 (나)를 만족시킬 수 없다.

따라서 $a_{10} = 10$이고 $a_{11} = 5$

이때의 최솟값은 $\sum_{k=1}^{5} n + \sum_{k=6}^{9} 5 + 10 + 5 = 50 = m$

따라서 $M + m = 129$

참고 : 최소인 경우는 위의 풀이인 경우도 있으나 다른 경우도 있다.

$1 \leq n \leq 4$일 때 $a_n = n$, $a_5 = 10$, $6 \leq n \leq 11$일 때 $a_n = 5$인 경우이고 이 경우도 $m = 50$이다.

59. ③

$$a_{n+1}=\begin{cases}(k+1)a_n & (a_n<0)\\ (k-1)a_n & (a_n\geq 0)\end{cases}$$ 에서

(i) $-1>k$일 때, $k+1<0$, $k-1<0$이다.

$a_1=1$, $a_2=k-1$, $a_3=(k-1)(k+1)$, $a_4=(k-1)^2(k+1)$, $a_5=(k-1)^2(k+1)^2$, $\cdots$

즉, n이 홀수이면 $a_n>0$, n이 짝수이면 $a_n<0$이므로 $a_m=-2a_{m+2}$인 자연수 m이 존재할 수 없다.

(ii) $k=-1$일 때, $a_{n+1}=\begin{cases}0 & (a_n<0)\\ -2a_n & (a_n\geq 0)\end{cases}$

$a_1=1$, $a_2=-2$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=0$

즉, 3 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=-2a_{m+2}=0$이므로 조건을 만족시킨다.

(iii) $-1<k<1$일 때, $k+1>0$, $k-1<0$이다.

$a_1=1$, $a_2=k-1$, $a_3=(k-1)(k+1)$, $a_4=(k-1)(k+1)^2$, $a_5=(k-1)(k+1)^3$, $\cdots$

즉, 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<0$이므로 $a_m=-2a_{m+2}$을 만족시키려면

$m=1$이어야 한다.$a=-2a_3$에서 $1=-2(k-1)(k+1)$이고 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이고 $-1<k<1$을 만족시킨다.

(iv) $k=1$일 때, $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<0)\\ 0 & (a_n\geq 0)\end{cases}$

$a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=0$ 즉, 2 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=-2a_{m+2}=0$이므로 조건을 만족시킨다.

(v) $k>1$일 때, $k+1>0$, $k-1>0$이다.

$a_1=1$, $a_2=k-1$, $a_3=(k-1)^2$, $a_4=(k-1)^3$, $a_5=(k-1)^4$, $\cdots$

즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이므로 $a_m=-2a_{m+2}$인 자연수 m이 존재할 수 없다.

(i)~(v)에서 $k=\pm 1$ 또는 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 k의 개수는 4

60. 29

(가) $a_{2n-1}+a_{2n}=(\sqrt{2}+1)a_n$

(나) $a_{2n-1}\times a_{2n}=k\times(a_n)^2$

(가), (나)에 $n=1$을 대입하면

$a_1+a_2=(\sqrt{2}+1)a_1$에서 $a_2=\dfrac{1}{9}$이므로 $a_1=\dfrac{\sqrt{2}}{18}$

$a_1\times a_2=k\times(a_1)^2$에서 $k=\sqrt{2}$이다.

$\sum_{k=1}^{128}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{64}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}$이고

(가), (나)에 의하여

$(a_{2n-1})^2+(a_{2n})^2=(a_{2n-1}+a_{2n})^2-2a_{2n-1}\times a_{2n}=(\sqrt{2}+1)^2(a_n)^2-2\sqrt{2}(a_n)^2=3(a_n)^2$

따라서

$$\sum_{k=1}^{128}(a_k)^2=\sum_{k=1}^{64}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=\sum_{k=1}^{64}3(a_k)^2=3\sum_{k=1}^{32}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}$$

$$=3\sum_{k=1}^{32}3(a_k)^2=3^2\sum_{k=1}^{16}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=3^2\sum_{k=1}^{16}3(a_k)^2=3^3\sum_{k=1}^{8}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}$$

$$=3^3\sum_{k=1}^{8}3(a_k)^2=3^4\sum_{k=1}^{4}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}=3^4\sum_{k=1}^{4}3(a_k)^2=3^5\sum_{k=1}^{2}\{(a_{2k-1})^2+(a_{2k})^2\}$$

$$=3^5\sum_{k=1}^{2}3(a_k)^2=3^6\{(a_1)^2+(a_2)^2\}=3^6\left(\frac{1}{9^2}+\frac{\sqrt{2}^{\,2}}{18^2}\right)=\frac{27}{2}$$

따라서 $p+q=29$

참고 : (가), (나)에서 $\begin{cases}a_{2n-1}=a_n\\ a_{2n}=\sqrt{2}\,a_n\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a_{2n-1}=\sqrt{2}\,a_n\\ a_{2n}=a_n\end{cases}$ 임을 직접 구할 수도 있다.

61. ④

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n - k & (a_n \ge 0) \\ k & (a_n < 0) \end{cases}$$ 에서

(i) $1 \le n \le 20$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \ge 0$인 경우

$a_1 = 40,\ a_2 = 40-k,\ a_3 = 40-2k,\ a_4 = 40-3k,\ \cdots,\ a_{20} = 40-19k,\ a_{21} = 40-20k$

따라서 $40-20k=0$을 만족시키려면 $k=2$이어야 한다.

(ii) $1 \le n \le 20$인 어떤 자연수 n에 대하여 $a_n < 0$인 경우

이때 $a_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 p라 하자.

$a_1 = 40,\ a_2 = 40-k,\ a_3 = 40-2k,\ \cdots,\ a_p = 40-pk,$

$a_{p+1} = k,\ a_{p+2} = 0,\ a_{p+3} = -k,\ a_{p+4} = k,\ a_{p+5} = 0,\ a_{p+6} = -k,\ \cdots$

이다. 즉 $a_{21}=0$이려면 $21 = p+2,\ p+5,\ p+8,\ p+11,\ p+14\ \cdots$이고

$p = 19,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ 4$

(1) $p=4,\ a_3 = 40-2k \ge 0,\ a_4 = 40-3k < 0$이어야 한다.

$\dfrac{40}{3} < k \le 20$에서 $k = 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20$

(2) $p=7,\ a_6 = 40-5k \ge 0,\ a_7 = 40-6k < 0$이어야 한다.

$\dfrac{20}{3} < k \le 8$에서 $k=7,\ 8$

(3) $p=10,\ a_9 = 40-8k \ge 0,\ a_{10} = 40-9k < 0$이어야 한다.

$\dfrac{40}{9} < k \le 5$에서 $k=5$

(4) $p=13,\ a_{12} = 40-11k \ge 0,\ a_{13} = 40-12k < 0$이어야 한다.

$\dfrac{10}{3} < k \le \dfrac{40}{11}$에서 k의 값은 존재하지 않는다.

$p=16,\ p=19$인 경우도 k의 값은 존재하지 않음을 알 수 있다.

따라서 $k = 5,\ 7,\ 8,\ 14,\ 15,\ \cdots,\ 20$이다.

(i), (ii)에 의하여 $k = 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 14,\ 15,\ \cdots,\ 20$이고 k의 개수는 11

62. 110

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$일 때, $a_n=4-|n-3|$이므로

$a_1=2,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=3,\ a_5=2,$ 이고

$S_5=14$이다. 또 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+5}$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}=14$이다,

ㄱ. $b_n=\cos\frac{S_n}{7}\pi$에서

$b_{n+5}=\cos\frac{S_{n+5}}{7}\pi=\cos\frac{S_n+a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+a_{n+4}+a_{n+5}}{7}\pi=\cos\frac{S_n+14}{7}\pi$

$=\cos\left(\frac{S_n}{7}+2\pi\right)=\cos\frac{S_n}{7}=b_n$

따라서 ㄱ은 참이고 $A=100$

ㄴ. ㄱ에 의하여

$b_2+b_9=b_2+b_4,\ b_3+b_{16}=b_3+b_1$이므로

$b_2=\cos\frac{S_2}{7}\pi=\cos\frac{5}{7}\pi,\ b_4=\cos\frac{S_4}{7}\pi=\cos\frac{12}{7}\pi=\cos\left(\pi+\frac{5}{7}\pi\right)=-\cos\frac{5}{7}\pi$

즉, $b_2+b_4=0$

$b_3=\cos\frac{S_3}{7}\pi=\cos\frac{9}{7}\pi=\cos\left(\pi+\frac{2}{7}\pi\right)=-\cos\frac{2}{7}\pi,\ b_1=\cos\frac{S_1}{7}\pi=\cos\frac{2}{7}\pi$

즉, $b_3+b_1=0$

따라서 $b_2+b_9=b_3+b_{16}=0$

ㄴ은 참이고 $B=10$

ㄷ. ㄱ에 의하여

$\sum_{k=3}^{26}b_k=4(b_3+b_4+b_5+b_6+b_7)+b_{23}+b_{24}+b_{25}+b_{26}=$

$4(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)+b_1+b_3+b_4+b_5=5(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5)-b_2$

ㄴ에 의하여 $b_2+b_4=0$, $b_3+b_1=0$이고 $b_5=\cos\frac{S_5}{7}\pi=\cos 2\pi=1$이므로

$\sum_{k=1}^{5} b_k=1$, 즉,

$\sum_{k=3}^{26} b_k=5-b_2=5-\cos\frac{5}{7}\pi$

$\frac{2}{3}\pi<\frac{5}{7}\pi$에서 $\cos\frac{5}{7}\pi<\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$이다.

따라서 $5-\cos\frac{5}{7}\pi>5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$이고 $\sum_{k=3}^{26} b_k>\frac{11}{2}$

ㄷ은 거짓이고 $C=0$

따라서 $A+B+C=110$

여담

사실 수1 N제 자체를 배포할 계획은 없었는데...
수2 N제 배포 후 정말 많은 분들이 수1 N제에 대한 해설을 원하셔서
이렇게 올리게 되었습니다!
이제는 진짜 큼지막한 자료 배포는 없지 않을까 싶습니다.
수능 관련으로 정말 시끌시끌한데 조금이나마 도움 되었으면 좋겠습니다ㅎㅎ

추가 TMI
1. 43번 문제가 N제 문제 중에서 가장 나이가 많습니다. (만든 지 5년 넘음)
2. 앞으로 큼지막한 자료 배포는 없습니다. 진짜로

풀어주신 모든 분들 및 해설 봐주신 모든 분들 진심으로 감사드립니다.
앞으로의 수능도 대박나시길 기원합니다!

감사합니다!