2016학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(A 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ③

[출제의도] 지수법칙을 알고 있는가?

[해설]

$9^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} \times (3^{-1})^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} = 3^0 = 1$

2) [정답] ② (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$3A+B = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

$6+4+1+0 = 11$

[별해]

A의 성분의 합은 2이고, B의 성분의 합은 5이므로, $3\times 2+5=11$

3) [정답] ①

[출제의도] $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값을 계산할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n^2+4n}{2n^3+4n-7} = \lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{4}{n^2}-\frac{7}{n^3}} = 4$$

4) [정답] ⑤

[출제의도] 인접행렬의 성질을 알고 있는가?

[해설]

인접행렬의 1의 개수는 모든 꼭짓점의 차수의 합과 같고 꼭짓점의 차수의 합은 변의 개수의 2배이므로 1의 개수는 8개이다.

그래프의 꼭짓점이 5개이므로 인접행렬이 오차정사각행렬이기 때문에, 전체 성분의 개수인 25에서 1의 개수인 8을 빼면 0의 개수는 17개이다.

$\therefore 17-8=9$

5) [정답] ③ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 등비수열의 일반항을 찾을 수 있는가?

[해설]

$\{a_n\}$은 공비가 3이고 첫째항이 양수인 등비수열이므로

첫째항을 a_1이라 하면 일반항 $a_n = a_1 \times 3^{n-1}$이 된다.

$a_1 = a_1$, $a_4 = a_1 \times 3^3$이므로

$a_1 \times a_4 = a_1^2 \times 3^3 = 108$이므로 $a_1^2 = 4$

그런데 $a_1 > 0$이므로, $a_1 = 2$

따라서 $a_3 = a_1 \times 3^2 = 18$이다.

6) [정답] ④

[출제의도] 다항함수의 정적분을 할 수 있는가?

[해설]

$\int_1^3 (2x+1)\,dx = \left[x^2+x\right]_1^3 = (9+3)-(1+1) = 10$

7) [정답] ② (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 독립사건의 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\mathrm{P}(B) = x$라 하면 두 사건 A, B가 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}x$

한편, $\mathrm{P}(A^c\cap B) = \mathrm{P}(B-A)$

$= \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B) = x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$이다.

[별해]

두 사건 A, B가 독립이므로 두 사건 A^c, B 또한 독립이다.

따라서 $\mathrm{P}(A^c\cap B) = \mathrm{P}(A^c)\times\mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}\times\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$이고,

$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$이다.

8) [정답] ① (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 다항함수를 미분할 줄 아는가?

[해설]

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

$f'(x) = 2x + 3$

$f'(1) = 5$

[별해]

$f'(x) = (x+1)'(x+2) + (x+1)(x+2)'$

$= (1)(x+2) + (x+1)(1) = 2x + 3$

$\therefore f'(1) = 5$

9) [정답] ③ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 정규분포의 성질을 알고 정규분포의 표준화를 할 수 있는가?

[해설]

학생들의 수학점수가 정규분포를 따르고,

67점 이하의 학생들과 83점 이상의 학생들이 8명으로 동일하므로

평균 m은 그 두 점수의 평균인 75이다.

표준편차는 다음 방법 중 한 가지로 구할 수 있다.

(방법1)

$\mathrm{P}(x \le 67) = \dfrac{8}{400} = 0.02 = \mathrm{P}(Z \le -2)$

$\therefore \dfrac{67-75}{\sigma} = -2$

$\therefore \sigma = 4$

(방법2)

$\mathrm{P}(x \ge 83) = \dfrac{8}{400} = 0.02 = \mathrm{P}(Z \ge 2)$

$\therefore \dfrac{83-75}{\sigma} = 2$

$\therefore \sigma = 4$

$\therefore \mathrm{P}(x \ge 71) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{71-75}{4}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge -1)$

$= 0.5 + \mathrm{P}(-1 \le Z \le 0)$

$= 0.84$

$400 \times \dfrac{84}{100} = 336$

따라서 답은 ③이다.

10) [정답] ② (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 그래프를 통해 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

먼저, 그래프를 이용해 $x = 1$ 의 $f(x)$ 의 우극한 값을 구하면

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -3$

$\lim\limits_{x \to 0} |f(x)|$ 을 구하기 위해서, $|f(x)|$ 를 생각해 보자.

$f(x)$가 $x = 0$에서 극한값이 존재하지 않지만,

$f(x)$의 $x = 0$에서 좌극한 값은 -2이고, 우극한 값은 2이다.

그런데, 좌극한 값과 우극한 값에 절댓값을 씌우면 같아지게 되어,

$|f(x)|$는 $x = 0$에서 극한값을 가지게 되고, 그 값은 2가 된다.

따라서 구하는 답은 $-3 + 2 = -1$이다.

11) [정답] ⑤ (출제자 : 13오현주)

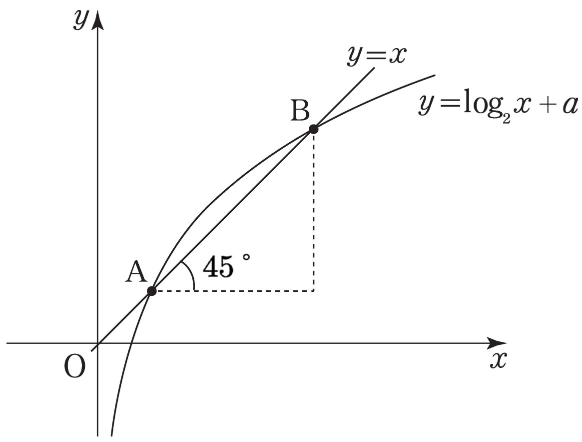
[출제의도] 로그함수의 그래프에 대해 주어진 조건과 로그의 성질을 통해 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

곡선 $y = \log_2 x$을 y축의 방향으로 a만큼 평행이동 시켰을 때,

곡선의 방정식은 $y = \log_2 x + a$이다. 또한 곡선 $y = \log_2 x + a$이 직선 $y = x$과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라고 할 때,

$\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{2}$ 이므로 점 A, B의 x좌표의 차는 2이다.



($\because$ 직선 $y = x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각이 45° 이므로)

점 A, B가 $y = x$ 위의 점이므로 x좌표와 y좌표의 값이 같고,

A의 x좌표를 k, B의 x좌표를 $k+2$라고 하면

두 개의 방정식을 세울 수 있다.

$\log_2 k + a = k$ ⋯

$\log_2 (k+2) + a = (k+2)$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡의 식을 연립하면, $\log_2 (k+2) + a = \log_2 k + a + 2$이고

$\log_2 (k+2) - \log_2 k = 2$이다.

$\therefore k = \dfrac{2}{3}$

구하고자 하는 값은 a이므로 ㉠의 식에 $k = \dfrac{2}{3}$을 대입하면,

$a = \dfrac{2}{3} - \log_2 \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} - (1 - \log_2 3) = \log_2 3 - \dfrac{1}{3}$이다.

12) [정답] ④ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] S_n과 a_n의 관계를 통해 일반식 a_n을 추론할 수 있으며, 첫째항을 제대로 구할 수 있는가?

[해설]

i) $S_1 = a_1 = 1$

ii) $a_n = S_n - S_{n-1}$ $\underline{(n \ge 2)}$

$= n^2 - 2n + 2 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 2\}$

$= 2n - 3$

$\therefore \sum_{n=1}^{5} a_{2n-1} = 1 + 3 + 7 + 11 + 15 = 37$

13) [정답] ⑤ (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

[해설]
먼저, 접선의 방정식을 세우면
$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ 이고
$f(x)=x^3+3x^2$ 이라 하면
$f'(x)=3x^2+6x$ 이므로 $f'(1)=9$
$y-4=9(x-1)$
$y=9x-5$ 이다.
따라서 접선은 점 $(2,13)$ 를 지난다.
$k=13$

14) [정답] ① (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 1. 확률밀도함수를 성질을 이용하여 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는가?
2. 확률밀도함수 $f(x)$ 와 $\mathrm{P}(a \le x \le b)=\int_a^b f(x)dx$ 를 구별할 줄 아는가?

[해설]
확률밀도함수의 정의된 구간 내에서의 넓이가 1 이므로
$\mathrm{P}(0 \le X \le 3)=1$ 이다.
따라서 $x=3$ 일 때, $af'(3)=1$
$f'(x)=3x^2+6x$
$f'(3)=27+18=45$
$af'(3)=45a=1$
$\therefore a=\dfrac{1}{45}$

그리고, $\mathrm{P}(0 \le X \le x)=af'(x)=g(x)$ 라 하면
확률밀도함수는 $g'(x)$ 이다.

$g(x)=af'(x)=\dfrac{1}{45}(3x^2+6x)$

$g'(x)=\dfrac{1}{45}(6x+6)$

$\mathrm{E}(X)=\int_0^3 xg'(x)\,dx=\int_0^3 \dfrac{1}{45}x(6x+6)dx=\int_0^3 \dfrac{1}{45}(6x^2+6x)dx$

$=\dfrac{1}{45}\left[2x^3+3x^2\right]_0^3$

$=\dfrac{1}{45}(54+27)=\dfrac{81}{45}=\dfrac{9}{5}$

15) [정답] ② (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 경우를 분류하여 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
i) A를 0개 택하는 경우, B를 0 개 이상 고르면 되므로, ○○○○○ 에서 서로 다른 B, C, D 세 종류 중에서 중복을 허락하여 5개 택하는 경우의 수를 구하면 ${}_{3+5-1}\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

ii) A를 1개 택하는 경우, B를 1 개 이상 고르면 되므로, AB○○○ 에서 서로 다른 B, C, D 세 종류 중에서 중복을 허락하여 3개 택하는 경우의 수를 구하면 ${}_{3+3-1}C_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

iii) A를 2개 택하는 경우, B를 2 개 이상 고르면 되므로, AABB○ 에서 서로 다른 B, C, D 세 종류 중에서 중복을 허락하여 1개 택하는 경우의 수를 구하면 ${}_{3+1-1}C_1={}_3C_1=3$

$\therefore 21+10+3=34$

16) [정답] ⑤ (출제자 : 15전성완)

[출제의도] $\sum$의 정의와 성질을 알고 활용할 수 있는가?

[해설]
주어진 식에 의하여

$$(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n+\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

이므로 $n \ge 1$인 자연수 n에 대하여

$$(n+1)a_n=2a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \quad \cdots \ (*)$$

이다. 한편

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}\\ &=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+3}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}-\frac{(n-1)(n+1)}{2n+1}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\left(1+\boxed{n-2}-\frac{(n-1)(n+1)}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\because \sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}\\ &=\left(\frac{2\cdot4}{5}+\frac{3\cdot5}{7}+\frac{4\cdot6}{9}+\cdots+\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}\right)\\ &\quad-\left(\frac{1\cdot3}{5}+\frac{2\cdot4}{7}+\frac{3\cdot5}{9}+\cdots+\frac{(n-2)n}{2n-1}\right)\\ &=\left(\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\frac{9}{9}+\cdots+\frac{2n-1}{2n-1}\right)=n-2\end{aligned}$$

이므로 $(*)$에 의하여

$$a_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(2+\boxed{n-2}-\frac{n^2-1}{2n+1}\right) \quad (n \ge 1)$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{2(n+1)}\left(2+\boxed{n-2}-\frac{n^2-1}{2n+1}\right)\\ &=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{n^2+n+1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{\boxed{n^2+n+1}}{2(n+1)(2n+1)} \quad (n \ge 1) \text{ 이다.}$$

따라서 $f(n)=n-2,\ g(n)=n^2+n+1$이므로,

$$\frac{g(10)}{f(5)}=\frac{10^2+10+1}{3}=37$$

[별해]
(가)를 구하는 과정에서

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)+1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k^2+4k+3}{2k+3}$$

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)-k(k+2)}{2k+3}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{2k+3}{2k+3}$$

$$=n-2$$

따라서 $f(n)=n-2$

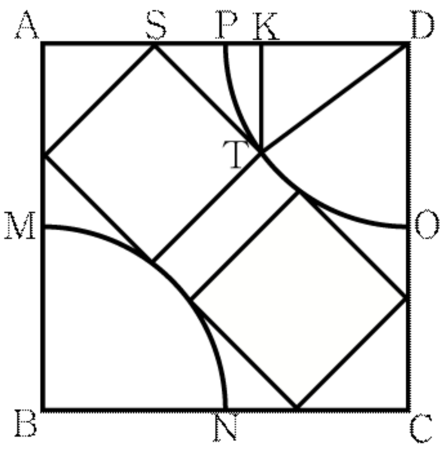
17) [정답] ③ (출제자 : 15이상민)
[출제의도] 역행렬을 구하고 그 성질을 이용할 수 있는가?

[해설]
ㄱ. (참)
첫 번째 식은 $(A-E)(A+B)=E$로 변형할 수 있으므로
$A+B$의 역행렬은 $A-E$로 존재한다.

ㄴ. (참)
역행렬끼리는 교환법칙이 성립하므로
ㄱ에 의해 $(A-E)(A+B)=(A+B)(A-E)$가 성립하고
정리하면 $AB=BA$이다.

ㄷ. (거짓)
$AB=BA$이므로 행렬의 연산을 할 때, 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈과 같은 방법으로 계산할 수 있다. $(A-B)^2-4A^2=O$을 합차공식을 이용해 두 식의 곱으로 변형하면 $(-A-B)(3A-B)=O$이고 이것은 $(A+B)(3A-B)=O$와 동치이다. $A+B$의 역행렬이 존재하므로 위 식의 양변에 $(A+B)^{-1}$을 곱하면 $B=3A$인 것을 알 수 있다.
$B=3A$를 첫 번째 조건식에 대입하면
$A^2-A=\frac{E}{4}$이다.

18) [정답] ③ (출제자 : 15이상민)
[출제의도] 1. 보조선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?
2. 무한등비급수를 계산하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]


부채꼴과 새로 그린 정사각형중 하나와의 교점을 T라 하고
T에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 K라 할 때
정사각형은 대각선 AC에 대하여 대칭이므로 KST $=\frac{\pi}{4}$이다.
$\overline{\mathrm{ST}}=a$이라 할 때
$\overline{\mathrm{KT}}=\overline{SK}=\overline{SA}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\overline{\mathrm{KD}}=2-\frac{2a}{\sqrt{2}}$, $\overline{TD}=1$ 이고
삼각형 KDT 에서 피타고라스 정리에 의해
$(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(2-\frac{2a}{\sqrt{2}})^2=1^2$
이차방정식을 풀면 $a=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이다.
새로 만들어지는 정사각형은 이전의 정사각형에 대해 일정한 비율로 작아지므로 $\lim_{n\ \infty} S_n$은 등비급수임을 알 수 있다.
즉, 첫 번째 정사각형의 넓이는 a^2이고, 이전의 정사각형에 대한 새로 만들어지는 정사각형의 길이의 비는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 2와 색칠된 첫 번째 정사각형의 한 변의 길이 a의 비인 $\frac{a}{2}$이다. 따라서 S_n은 첫째항이 $a^2=\frac{18}{25}$이고 공비는 두 정사각형의 넓이의 비 $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{9}{50}$인 등비급수이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{18}{25}}{1-\frac{9}{50}}=\frac{36}{41}$$

[별해]
정사각형의 한 변의 길이를 a로 ($\overline{\mathrm{ST}}=a$) 잡은 대신에, 정사각형의 대각선의 길이를 a로 놓으면 보다 계산을 간편하게 할 수 있다.

19) [정답] ④ (출제자 : 15유정훈)
[출제의도] 그림을 통해 수열의 일반항을 찾을 수 있는가?

[해설1] 발견적 추론
점 A_1의 좌표가 $(1, 2\sqrt{2})$임을 이용하여
이를 통해 점 B_2의 x좌표를 구해보면 선분 OA_1의 길이가 3이므로,
점 B_2의 x좌표 또한 3인 것을 알 수 있다.
다시 점 B_2를 통해 점 A_2의 좌표를 구하면 $(3, 4)$,
선분 OA_2의 길이는 5, 점 B_3의 x좌표는 5이다.
점 B_3를 통해 점 $\mathrm{A}_3(5, 2\sqrt{6})$이고, 다시 점 B_4의 x좌표가 7인 것을 알 수 있는데, 점 B_n의 좌표가 $1, 3, 5, 7, \cdots\cdots$으로 공차가 2인 등차수열을 이룬다. 점 B_n의 좌표는 $(2n-1, 0)$임을 알 수 있다.
B_n의 x좌표를 b_n라고 하면,
삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이 S_n는 $\frac{1}{2}\times b_{n+1}\times 2\sqrt{b_n+1}$이므로,
S_n은 $(2n+1)\sqrt{2n}$이고, $\{S_n\}^2=2n(2n+1)^2$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(S_n)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)^2}{n^3}=8\text{이다.}$$

[해설2] 수식을 통해
점 B_n의 x좌표를 b_n이라 하면 조건 (가)에 의해 $b_1=1$이고, 수열 b_n의 일반항을 구하면, 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이를 구할 수 있다.
수열 b_n의 일반항을 구해보자.

점 $B_n(b_n, 0)$에서 y축과 평행한 직선이 곡선 $y = 2\sqrt{x+1}$과
점 A_n에서 만나므로, A_n의 x좌표가 b_n이고,
따라서 점 A_n은 $(b_n, 2\sqrt{b_n+1})$이다.

원점O 에서 점 A_n에 그은 선분의 길이는
$\sqrt{(b_n)^2+(2\sqrt{b_n+1})^2} = \sqrt{(b_n)^2+4b_n+4}$ 이다.
점 B_{n+1}은 $(b_{n+1}, 0)$이므로 $\overline{OB_{n+1}} = b_{n+1}$라는 것을 알 수 있다.
$\overline{OA_n} = \overline{OB_{n+1}}$를 식으로 정리해보면 $\sqrt{(b_n)^2+4b_n+4} = b_{n+1}$인데,
$b_n > 0$이므로 $b_{n+1} = b_n + 2$를 만족하게 된다.
점화식 $b_{n+1} = b_n + 2$를 만족하는 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1이고, 공차가 2인 등차수열 이므로, $b_n = 2n-1$이다.
삼각형 OA_nB_{n+1}의 넓이 S_n는 $\frac{1}{2}\times b_{n+1}\times 2\sqrt{b_n+1}$이므로,
S_n은 $(2n+1)\sqrt{2n}$이고, $\{S_n\}^2 = 2n(2n+1)^2$이므로,
$\lim_{n\to\infty}\frac{\{S_n\}^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n(2n+1)^2}{n^3} = 8$이다.

20) [정답] ① (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 1. 지표와 가수의 정의를 문제에 잘 적용시킬 수 있는가?
2. 범위에 따라 경우를 나눠서 할 수 있는가?

[해설]
$\log x = f(x) + g(x)$ ($f(x)$: 수, $0 \le g(x) < 1$)
$0 \le g(x) < 1$이므로, $0 \le 3g(x) < 3$가 된다.
이때, $f(10x^2) - 3g(x) = n$ 에서 $f(10x^2) - n = 3g(x)$이고
$f(10x^2)$와 n이 정수이므로, $3g(x)$도 정수이다.
$3g(x)$는 정수이면서, $0 \le 3g(x) < 3$를 만족하므로
$3g(x)$는 0,1,2가 될 수 있다.
$f(10x^2) - 3g(x) = n$
$\Leftrightarrow 1 + f(x^2) - 3g(x) = n$
$\Leftrightarrow \boldsymbol{f(x^2) = n - 1 + 3g(x)}$ … $(*)$

(i) $3g(x) = 0$일 때
즉, $g(x) = 0$일 때이므로 $(*)$에서 $f(x^2) = n-1$이다.
$\log x = f(x) + g(x) = f(x)$에서
$\log x^2 = 2\log x = 2f(x) + 0$이므로
$f(x^2) = 2f(x) = n-1$, 즉, $f(x) = \frac{n-1}{2}$이다.
이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,
$\frac{n-1}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 홀수여야 한다.

즉, n이 홀수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에
n이 홀수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(ii) $3g(x) = 1$일 때
즉, $g(x) = \frac{1}{3}$일 때이므로 $(*)$에서 $f(x^2) = n$이다.
$\log x = f(x) + g(x) = f(x) + \frac{1}{3}$에서
$\log x^2 = 2f(x) + \frac{2}{3}$이므로,
$f(x^2) = 2f(x) = n$, 즉, $f(x) = \frac{n}{2}$이다.
이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,
$\frac{n}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 짝수여야 한다.

즉, n이 짝수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에
n이 짝수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(iii) $3g(x) = 2$일 때
즉, $g(x) = \frac{2}{3}$일 때이므로 $(*)$에서 $f(x^2) = n+1$이다.
$\log x = f(x) + g(x) = f(x) + \frac{2}{3}$에서
$\log x^2 = 2f(x) + \frac{4}{3} = \{2f(x)+1\} + \frac{1}{3}$이므로
$f(x^2) = 2f(x) + 1 = n+1$, 즉, $f(x) = \frac{n}{2}$이다.
이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,
$\frac{n}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 짝수여야 한다.

즉, n이 짝수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에
n이 짝수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(i), (ii), (iii)에 의해
n이 홀수일 때, $f(10x^2) - 2g(x) = n$를 만족하는 x가 (i)에서 1개,
n이 짝수일 때, $f(10x^2) - 2g(x) = n$를 만족하는 x가 (ii), (iii)에서 각각 1개씩 존재하므로,

$a_1 = a_3 = \cdots = a_{25} = 1$, $a_2 = a_4 = \cdots = a_{24} = 2$이다.
$$\sum_{n=1}^{25} a_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{25}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{24})$$
$$= 13 + (2\times 12)$$
$$= 37$$

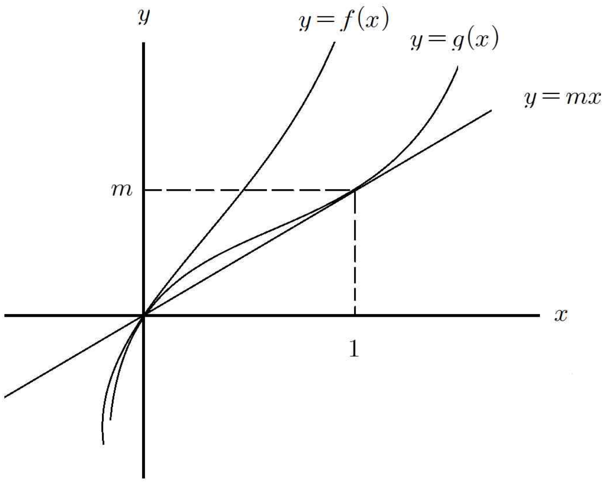
21) [정답] ④ (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 부등식으로 표현된 미분계수를 파악할 수 있는가?

[해설]
$f(x)$의 도함수 $f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$의 판별식은
$D = 64 - 120 < 0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \ge 0$이다.
따라서 삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

(가)의 부등식 $mx \le g(x) \le f(x)$에 $x \to +0$의 극한을 취하면
$\lim_{x\to+0} mx \le \lim_{x\to+0} g(x) \le \lim_{x\to+0} f(x)$
$0 \le c \le 0$
$\therefore c = 0$
따라서 $g(0) = 0$이므로 곡선 $y = g(x)$는 원점을 지난다.

$g(1) = m$이면서 $mx \le g(x)$인 그림은 아래와 같다.



$g'(1)=m$ (점 $(1,m)$에서 접할 수밖에 없다.)

$g(0)=0$, $g(1)=m$, $g'(1)=m$이므로 a, b, c를 모두 m에 관해 통일해서 $g(x)$의 식을 구하면 다음과 같다.

$g(x)=x^3-2x^2+(m+1)x$ ⋯ $(*)$

여기서 $g(2)=2m+2$이므로 $g(2)$가 최대일 때는 m이 최대일 때와 같다. $mx\le f(x)$를 만족하는 m의 최댓값을 구하기 위해, 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선을 생각해보자. $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서 그은 접선의 방정식이 점 $(0,0)$을 지나므로

$0-f(t)=f'(t)(0-t)$

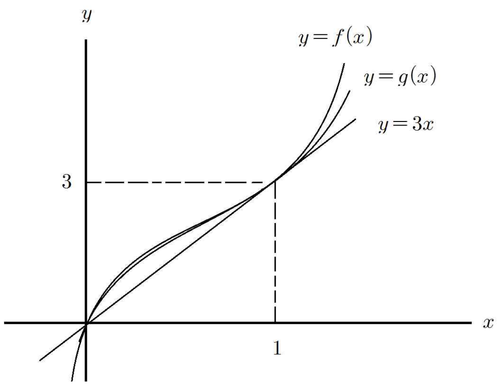
$-2t^3+4t^2-5t=(6t^2-8t+5)(-t)$

$4t^3-4t^2=0$이므로 $t=0$ 또는 $t=1$이다.

그런데 원점 위에서 그은 접선의 방정식이 아니므로 $t=1$이고

$m=6\times1^2-8\times1+5=3$이 기울기 m의 최댓값이다.

그러므로 $g(2)=2m+2$의 최댓값은 $m=3$일 때인 8이며, 그림으로 확인하면 아래와 같다.



(함수 $y=g(x)$의 그래프가 가장 높이 올라와있는 상태)

<확인사살과정> 마지막으로 $m=3$일 때, 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x)\le f(x)$인지를 확인하자.

$f(x)-g(x)=(2x^3-4x^2+5x)-(x^3-2x^2+4x)$

$=x^3-2x^2+x=x(x-1)^2$

이고 모든 양의 실수 x에 대하여 $x>0$, $(x-1)^2\ge 0$이므로 $f(x)-g(x)\ge 0$이 성립한다.

따라서 $m=3$일 때, 모든 양의 실수 x에 대하여 $mx\le g(x)\le f(x)$를 만족한다.

[별해 Ⓐ]

(위에서 $mx\le g(x)$을 이미 확인한 상태에서, $g(x)\le f(x)$이기 위한 조건을 찾는 방식으로 푼 방법이다.)

$(*)$ $g(x)=x^3-2x^2+(m+1)x$로부터

$f(x)-g(x)=(2x^3-4x^2+5x)-\{x^3-2x^2+(m+1)x\}$

$=x^3-2x^2+(4-m)x$

$=x(x^2-2x+4-m)$

인데 모든 양의 실수 x에 대하여 $x>0$이므로 이차식 $x^2-2x+4-m$이 항상 0보다 크거나 같으면 부등식 $f(x)-g(x)\ge 0$가 성립한다.

$x^2-2x+4-m=(x-1)^2+3-m$의 $x>0$에서의 최솟값은 $3-m$이므로 $3-m\ge 0$이면 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)-g(x)\ge 0$이다. 따라서 m의 최댓값은 3이고, $g(2)=2m+2$이므로 $g(2)$가 최대일 때는 m이 최대일 때와 같다. 그러므로 $g(2)$의 최댓값은 8이다.

[별해 Ⓑ] (최상위권 내지는 그림에 의심이 있는 사람만 볼 것)

그래프를 사용하지 않고 부등식만 이용한 대수적 증명은 아래와 같다.

조건 (가)의 부등식 $mx\le g(x)$를 (나)의 조건을 이용하면

$mx-m\le g(x)-g(1)$ ($\because g(1)=m$)

i) $x>1$이라 가정하고 양변을 $x-1$로 나누면

$m\le\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$이다. 여기서 양변에 극한을 취하면

$m\le\lim_{x\to1+0}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$ ⋯ ①

ii) $x<1$이라 가정하고 양변을 $x-1$로 나누면

$m\ge\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$이다. 여기서 양변에 극한을 취하면

$m\ge\lim_{x\to1-0}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$ ⋯ ②

①과 ②에 의해 $g'(1)=m$

다시 (가)의 부등식 $mx\le g(x)\le f(x)$에 $x\to+0$의 극한을 취하면

$\lim_{x\to+0}mx\le\lim_{x\to+0}g(x)\le\lim_{x\to+0}f(x)$

$0\le c\le 0$

$\therefore c=0$ ⋯ ③

$g(1)=m$이 주어졌고 $g'(1)=m$임을 구했으므로 이를 이용하면

$g(1)=g'(1)$이다. 즉, $1+a+b=3+2a+b$이므로

$\therefore a=-2$ ⋯ ④

마지막으로 (가)의 부등식 $mx\le f(x)$를 풀어보면

$mx\le 2x^3-4x^2+5x$인데 모든 양의 실수 x에 대해 성립하므로 양변을 x로 나누어도 성립한다.

즉, $m\le 2x^2-4x+5$

위 부등식이 모든 양의 실수 x에 대해 성립하기 위해서는 좌변의 m의 값이 우변의 이차식 $2x^2-4x+5$의 최솟값 3보다 작거나 같아야함을 의미한다.

$\therefore m\le 3$

③과 ④로부터 $g(1)$ 값을 구하면,

$\therefore g(1)=1+a+b+c=b-1=m\le 3$

$\therefore b\le 4$

③과 ④로부터 $g(2)$ 값을 구하면, $g(2)=8+4a+2b+c=2b\le 8$

그러므로 $g(2)$의 최댓값은 8이다.

이때, 모든 양의 실수 x에 대해 $g(x)\le f(x)$인 것은 <확인사살과정>을 따른다.

☺ 같이 풀어보면 좋은 문제

-2015년도 9월 평가원 A형

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

> (가) $f(0)=-3$
> (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

22) [정답] 2 (출제자 : 14임현우)
[출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]
$\lim_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+1} = \frac{4}{2} = 2$

23) [정답] 5 (출제자 : 14김민지)
[출제의도] 연립일차방정식의 특수한 경우를 역행렬을 이용하여 구할 수 있는가?

[해설]
연립일차방정식 $\begin{pmatrix} 3-a & -1 \\ a+1 & 8-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이 $x=0,\ y=0$ 이외에 해를 갖도록 하려면, 행렬 $\begin{pmatrix} 3-a & -1 \\ a+1 & 8-a \end{pmatrix}$이 역행렬을 가지지 않아야 한다.
$(3-a)(8-a)-(-1)(a+1)=0$
$a^2-10a+25=0$
$a=5$

24) [정답] 7 (출제자 : 14임현우)
[출제의도] 등차수열의 일반항을 이용해 각 항을 구할 수 있는가?

[해설]
$a_5-a_3=(a_1+4d)-(a_1+2d)=2d$
따라서 $a_1=2d$
$a_2=a_1+d=3d$
$a_7=a_1+6d=8d$
$a_{12}=a_1+11d=13d$
$\frac{a_7+a_{12}}{a_2}=\frac{8d+13d}{3d}=\frac{21d}{3d}=7$

25) [정답] 12 (출제자 : 14고정민)
[출제의도] 함수가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건을 아는가?

[해설]
주어진 함수가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는
$x=-4$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to -4} f(x)=f(-4)$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to -4}\frac{x^2+(a+4)x+4a}{x+4}=8$ 이어야 한다.
따라서

$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+(a+4)x+4a}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+a)(x+4)}{x+4}$
$=\lim_{x\to -4}(x+a)$
$=-4+a$
$=8$

$a=12$이다.

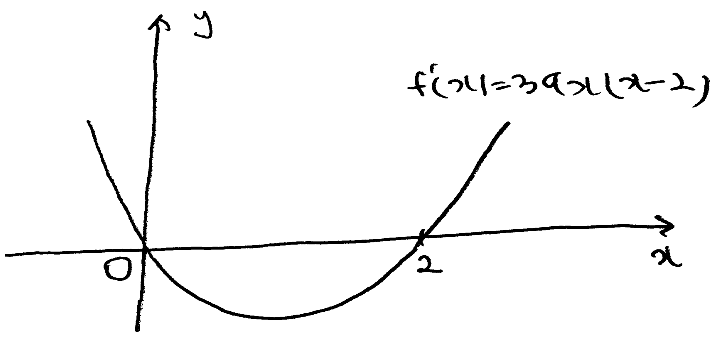
26) [정답] 250 (출제자 : 10최원재)
[출제의도] 로그의 실생활활용 문제에서 주어진 내용을 잘 적용할 수 있는가?

[해설]
파고의 주기가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 파고가 H_A, 파랑 에너지 밀도가 S_A이므로,
$\log S_A=\log(4{H_A}^2)-1+C$ ⋯ ①
파고의 주기가 $\frac{1}{2}$일 때, 파고가 H_B, 파랑 에너지 밀도가 S_B이므로,
$\log S_B=\log(16{H_B}^2)-4+C$ ⋯ ②

①－②을 계산하면
$\log\frac{S_A}{S_B}=\log\frac{{H_A}^2}{4{H_B}^2}+3$ 이고, $H_B=H_A$ 이므로
$\log\frac{S_A}{S_B}=\log 250$
$\therefore \frac{S_A}{S_B}=250$

27) [정답] 4 (출제자 : 15정다혜)
[출제의도] 삼차함수의 극값을 구할 수 있는가?

[해설]
$f(x)=ax^2(x-3)$을 미분하면,
$f'(x)=2ax(x-3)+ax^2=3ax^2-6ax=3ax(x-2)\,(a>0)$이다.



$f'(x)$의 그래프가 $x=2$에서 부호가 음에서 양으로 바뀌므로
$x=2$에서 극솟값을 가진다.
$x=2$에서 극솟값을 가지므로, $b=2$이다.
$f'(1)=-3a,\ f(b)=f(2)=-4a$를 $f'(1)=12a^2f(b)$에 대입하면,
$-3a=12a^2(-4a)$
$a^2=\frac{1}{16}$ 즉, $a=\frac{1}{4}$이다.

$a=\frac{1}{4}$이므로, $f(x)=\frac{1}{4}x^2(x-3)$이다.

따라서 $f(4)=\frac{1}{4}\times 16\times 1=4$이다.

28) [정답] 36 (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 이산확률분포표를 각각의 경우에 따라 제대로 만들 수 있는가?

[해설]

공을 뽑는 경우를 다음과 같이 나눌 수 있다.

i) 흰 공 0개, 검은 공 3개- 남은 공 : 흰 공 3개, 검은 공 1개

ii) 흰 공 1개, 검은 공 2개- 남은 공 : 흰 공 2개, 검은 공 2개

iii) 흰 공 2개, 검은 공 1개- 남은 공 : 흰 공 1개, 검은 공 3개

iv) 흰 공 3개, 검은 공 0개- 남은 공 : 흰 공 0개, 검은 공 4개

각각의 경우에서 남은 공의 차는 2, 0, 2, 4로

확률변수 X가 취할 수 있는 값은 0, 2, 4이다.

각각의 경우의 확률을 계산하여 X가 이루는 이산확률분포를 표로 작성하면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{{}_3C_1 \cdot {}_4C_2}{{}_7C_3}$	$\frac{{}_3C_2 \cdot {}_4C_1+{}_4C_3}{{}_7C_3}$	$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}$	1

계산하면

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{18}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{0\times 18+2\times 16+4\times 1}{35}=\frac{36}{35}$

$\mathrm{E}(X+a)=6\mathrm{E}(X)$

$\mathrm{E}(X)+a=6\mathrm{E}(X)$

$a=5\mathrm{E}(X)=\frac{36}{7}$

$7a=36$

29) [정답] 100 (출제자 : 14임현우)

[출제의도]

1-A. 정적분과 그래프의 넓이와의 관계를 아는가?

1-B. 최소와 극소의 관계를 알고 이차함수의 대칭성을 이해하는가?

2. 정적분의 계산을 할 줄 아는가?

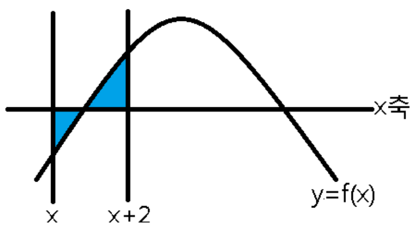
[해설1]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 음수인 이차함수이므로,

위로 볼록인 그래프를 가진다.

$g(x)$는 아래 그림과 같이 $[x, x+2]$에서 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 나타내는 함수이므로

(x축 밑의 영역의 경우에는 넓이에 -를 붙인다.)



$g(x)$가 최댓값을 가지려면 적분구간 $[x, x+2]$의 중간 값이 $f(x)$의 대칭축이 되어야 할 것이다.

$g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가진다고 했으므로,

$f(x)$는 x가 $[3, 5]$에서 중간 값인 4일 때 최댓값을 갖게 된다.

따라서 $f(x)$의 최댓값을 p라 하여 식을 써보면,

$f(x)=-(x-4)^2+p$ $g(3)=3$이라고 하였으므로,

$g(3)=\frac{1}{2}\int_3^5\{-(t-4)^2+p\}dt=3$

$\frac{1}{2}\int_3^5\{-(t-4)^2+p\}dt$ $\Rightarrow$

$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1(-t^2+p)dt$

$=\int_0^1(-t^2+p)dt$

$=-\frac{1}{3}+p=3$

$p=\frac{10}{3}$

$\therefore 9p^2=100$

$\frac{1}{2}\int_3^5\{-(t-4)^2+p\}dt$

$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(t-4)^3+pt\right]_3^5$

이렇게 계산해도 된다.

[해설2]

$g(x)$는 다항함수(이차함수)이므로,

$g(x)$가 최댓값을 가질 때 그 값은 극댓값이기도 하다.

$g(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로, $g'(3)=0$이다.

$g'(x)=\frac{1}{2}\{f(x+2)-f(x)\}$

$g'(3)=\frac{1}{2}\{f(5)-f(3)\}=0$

$f(3)=f(5)$

$f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)$는 $x=4$를 축으로 가짐을 알 수 있다.

30) [정답] 110 (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설 1]

좌표평면에서 영역 $\left\{(x,y) \mid \log_2 x \le y \le 2^x\right\}$에 속하는 점 중

조건 (가), (나)를 만족하는 점은

직선 $x+y=n$ 위의 점이면서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이다.

따라서 a_n은 주어진 영역 내에서 직선 $x+y=n$ 위의 점이면서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수이다. 이때 구하고자 하는 값 $\sum_{n=1}^{20} a_n$은, x축, y축, $y=\log_2 x$, $y=2^x$와 $y=-x+20$으로 둘러싸인 도형 위에 있는 점의 개수이다.

곡선 $y=2^x$ 위의 자연수 좌표의 점은 $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,8)$, $(4,16)$ 등이 있고, 이 중 점 $(4,16)$은 직선 $x+y=20$ 위에 있는 점이다. $y=2^x$ 와 $y=\log_2 x$는 $y=x$에 대칭인 역함수 관계이므로 곡선 $y=\log_2 x$와 직선 $x+y=20$이 만나는 점은 $(16,4)$이다.

따라서, $y=\log_2 x$ 와 $y=2^x$가 $x+y=20$ 와 만나는 교점이 각각 $(4,16)$과 $(16,4)$이므로 영역 내 $x=n$ ($1 \le n \le 16$ 인 자연수) 위의 점의 개수에 대해서 문제를 해결해보자.

$1 \le x < 4$의 경우, 각 x 값에 대하여 $2^x-[\log_2 x]$ 개의 점을,
$4 \le x \le 16$ 의 경우, 각 x 값에 대하여 $(20-x)-[\log_2 x]$ 개의 점을 생각해 볼 수 있다. ($[x]$는 x 보다 작거나 같은 정수이다.)

단, $[\log_2 x]=\log_2 x$ 인 경우에는 $y=\log_2 x$ 위에 있는 자연수 좌표의 점도 제외가 되므로 구하고자하는 영역 내에 있는 $(2,1)$, $(4,2)$, $(8,3)$, $(16,4)$ 인 4 개의 점을 꼭 고려해야 한다.

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n$ 은

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20} a_n &= \sum_{x=1}^{3}(2^x-[\log_2 x])+\sum_{x=4}^{16}\{(20-x)-[\log_2 x]\}+4\\ &=\sum_{x=1}^{3}2^x+\sum_{x=4}^{16}(20-x)-\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x]+4\\ &=\frac{2(2^3-1)}{2-1}+\frac{13(16+4)}{2}-\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x]+4\\ &=14+130-\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x]+4=148-\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x]\end{aligned}$$

이때, $\displaystyle\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x]$은 $[\log_2 x]$가
$1 \le x < 2$ 의 경우 $[\log_2 x]=0$, $2 \le x < 4$의 경우 $[\log_2 x]=1$,
$4 \le x < 8$ 의 경우 $[\log_2 x]=2$, $8 \le x < 16$ 의 경우 $[\log_2 x]=3$,
$x=16$의 경우 $[\log_2 x]=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{16}[\log_2 x] &= 0\times1+1\times2+2\times4+3\times8+4\times1\\ &=0+2+8+24+4=38\end{aligned}$$

이다.

따라서 구하고자하는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은 110 이다.

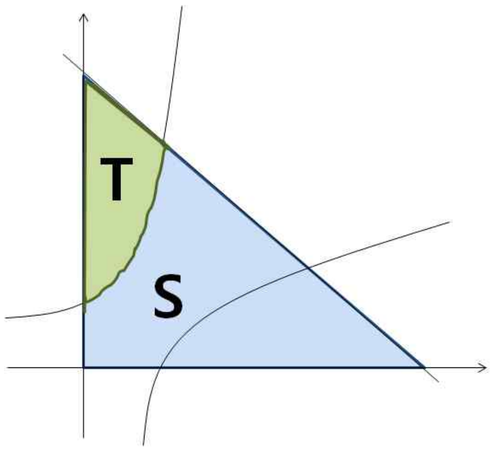
[해설 2]
좌표평면에서 영역 $\{(x,y)|\log_2 x \le y \le 2^x\}$에 속하는 점 중 조건 (가), (나)를 만족하는 점은 직선 $x+y=n$ 위의 점이면서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수이다.

따라서 a_n 은 주어진 영역 내에서 직선 $x+y=n$ 위의 점이면서 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수이다.

이때, 구하고자 하는 값 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n$ 은, x 축, y 축, $y=\log_2 x$, $y=2^x$ 와 $y=-x+20$ 으로 둘러싸인 도형 위에 있는 점의 개수이다.

$y=\log_2 x$ 와 $y=2^x$ 은 서로 역함수 관계인 함수이다.
따라서 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로, 이를 활용하여 x 축, y 축과 $y=20-x$ 으로 둘러싸인 도형 위에 있는 점의 개수에서 문제의 조건을 만족하지 못하는 y 축, $y=2^x$ 와 $y=20-x$ 로 둘러싸인 점의 개수를 구하여 2 배한 값만큼 제외해주는 방법으로 문제를 해결할 수 있다.

그림과 같이 영역 S을 $x>0$, $y>0$과 $y \le 20-x$을 만족시키는 도형으로, 영역 T을 $x>0$, $y>2^x$ 와 $y \le 20-x$을 만족시키는 도형이라 하자.



이때 영역 S위의 점의 개수와 영역 T위의 점의 개수를 구해보면

(역S위의 점의 개수) $=\displaystyle\sum_{k=1}^{19}k=\frac{19\times20}{2}=190$

(영역T위의 점의 개수)
$=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\{(20-k)-2^k\}=4\times20-\frac{4\times5}{2}-\frac{2(2^4-1)}{2-1}=40$

그러므로,
(영역S위의 점의 개수) $-2\times$ (영역T위의 점의 개수) $=110$ 이다.

따라서 구하고자하는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20} a_n$ 의 값은 110이다.