2016학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(B 형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$3A+B=3\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}$

$6+4+1+0=11$

2) [정답] ④ (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\lim_{x \to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

$=2\times\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}$

$=2\times1=2$

3) [정답] ② (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 적분법을 알고 있는가?

[해설]

$\int_2^4\frac{1}{x}\,dx=[\ln|x|]_2^4=\ln4-\ln2=\ln2$

4) [정답] ① (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 삼각함수의 미분을 알고 이를 활용하여 미지수를 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 함수 $f(x)=2\sin2x-5\cos x+ax$ 을 미분하면,
$f'(x)=4\cos2x+5\sin x+a$ 이다. 함수 $f'(x)$ 에 $x=0$ 을 대입하면,
$f'(0)=4\cos0+5\sin0+a=4+a=13$ 이고
따라서 $a=9$ 이다.

5) [정답] ⑤ (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이해하고 이를 활용하여 미지수를 구할 수 있는가?

[해설]

두 점 A, B에 대하여 선분 AB을 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{1\times2+2\times a}{1+2},\frac{1\times(-6)+2\times3}{1+2},\frac{1\times b+2\times7}{1+2}\right)$ 이고
이때의 좌표는 $(4,0,1)$ 이다.
$\left(\frac{2+2a}{3},0,\frac{b+14}{3}\right)=(4,0,1)$ 이므로 $a=5$, $b=-11$ 이다.
따라서 $a-b=16$ 이다.

6) [정답] ④ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 삼각방정식을 풀 수 있는가?

[해설]

우선, $\sin2x=2\sin^2x$ 에서 $\sin2x=2\sin x\cos x$ 이므로,
이것을 대입해주면 $2\sin x\cos x=2\sin^2x$ 이고,
$\sin x$ 로 묶어주면 $2\sin x(\cos x-\sin x)=0$ 이 된다.

(i) $\sin x=0$ 을 만족하는 경우에는 $0\le x\le\pi$ 에서 $x=0$ 과 $x=\pi$ 로 2개가 존재하게 된다.

(ii) $\cos x-\sin x=0$, $\sin x \neq 0$
$\cos x=\sin x$, $\sin x\neq0$ 이므로 $\cos x\neq0$. 따라서 양 변을 $\cos x$ 로 나누어주면 $1=\tan x$, 범위 내에서 이 식을 만족하는 x 의 값은 $\frac{\pi}{4}$

$\therefore 0+\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$

7) [정답] ② (출제자 : 15이민욱)

[출제 의도] 포물선의 접선을 구할 수 있는가?

[해설]

포물선 $y^2=-8x$ 의 접선의 방정식은 $y=mx-\frac{2}{m}$ 로 나타낼 수 있다.
이 접선이 점 $(k,2k^2)$ 을 지나므로 $2k^2=mk-\frac{2}{m}$ 이고, 양변에 m 을 곱하면 $km^2-2k^2m-2=0$ 으로 m 에 관한 이차방정식이 나온다.
자연수 k 에 대하여 $\frac{D}{4}=k^4+2k>0$,
따라서 m 은 2개의 실근을 가지므로 근과 계수와의 관계를 이용하면
$a_k=2k$. 따라서 $\sum_{k=1}^{7}a_k=56$ 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 주어진 문제에서 중복조합을 사용할 수 있는가?

[해설]

(i) A와 B를 0개 택하는 경우, ○○○○에서 서로 다른 C, D, E 세 종류 중에서 중복을 허락하여 5개 택하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_5$

(ii) A와 B를 1개 택하는 경우, AB○○○에서 서로 다른 C, D, E 세 종류 중에서 중복을 허락하여 3개 택하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_3$

(iii) A와 B를 2개 택하는 경우, AABB○에서 서로 다른 C, D, E 세 종류 중에서 중복을 허락하여 1개 택하는 경우의 수 ${}_3\mathrm{H}_1$

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_5+{}_3\mathrm{H}_3+{}_3\mathrm{H}_1=21+10+3=34$

☺ 같이 풀어보면 좋은 문제

-엡실론 모의고사 1회 A형 15번

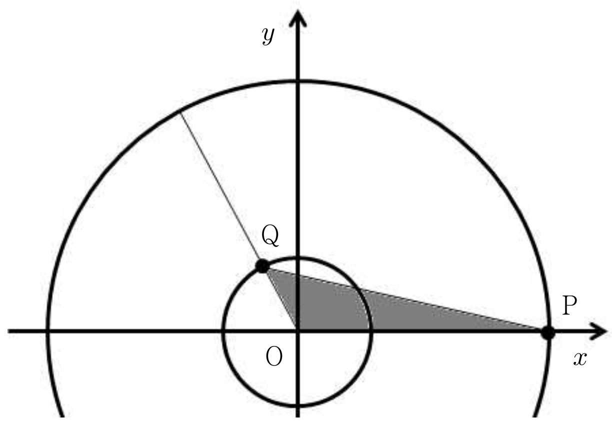
9) [정답] ⑤ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 닮음변환과 회전변환을 이해하고 있고, 합성변환에 의해 움직이는 점을 구할 수 있는가?

[해설]

$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$으로 닮음의 중심이

원점이고 닮음비가 $\frac{1}{2}$인 닮음변환과 원점을 중심으로 반시계방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전시키는 회전변환의 합성변환을 나타내는 행렬이다. 따라서 일차변환 f를 나타내는 행렬이 A^2이므로, f는 닮음의 중심이 원점이고 닮음비가 $\frac{1}{4}$인 닮음변환과 원점을 중심으로 반시계방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼 회전시키는 회전변환의 합성변환이다. 일차변환 f에 의하여 $\mathrm{P}(4,0)$가 옮겨지는 점 Q를 그림으로 나타내면



$\overline{\mathrm{OQ}}=1$, $\angle\mathrm{POQ}=\frac{2}{3}\pi$을 만족한다.

따라서 삼각형 QOP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PO}}\times\overline{\mathrm{OQ}}\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{1}{2}\times4\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

10) [　　] ① (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 로그의 실생활 활용 문제에서 주어진 내용을 잘 적용할 수 있는가?

[해설]

파고의 주기가 $\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, 파고가 H_A, 파랑에너지 밀도가 S_A이므로,

$\log S_A=\log(4{H_A}^2)-1+C\ \cdots$ ①

파고의 주기가 $\frac{1}{2}$일 때, 파고가 H_B, 파랑에너지 밀도가 S_B이므로,

$\log S_B=\log(16{H_B}^2)-4+C\ \cdots$ ②

①-②을 계산하면

$\log\frac{S_A}{S_B}=\log\frac{{H_A}^2}{4{H_B}^2}+3$ 이고, $H_B=2H_A$ 이므로

$\log\frac{S_A}{S_B}=\log\frac{1}{16}+3$

$\therefore\ \frac{125}{2}$

11) [정답] ④ (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 여사건과 조건부확률을 계산할 수 있는가?

[해설 1]

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(B\,|\,A)=3\mathrm{P}(B\,|\,A^C)$ 라는 주어진 조건에 의해,

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{5}$, $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(A^C)}$를 만족한다.

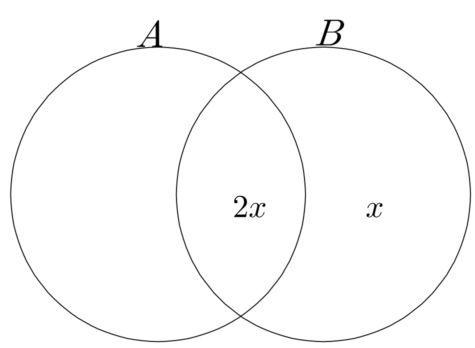
$\frac{5\mathrm{P}(A\cap B)}{2}=5\mathrm{P}(A^C\cap B)$이므로, $\mathrm{P}(A\cap B)=2\mathrm{P}(A^C\cap B)$이다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^C\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$

따라서 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\frac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)}=\frac{2}{3}$

[해설 2]

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=x$라고 하고, 다음 상황을 벤다이어그램으로 나타내면

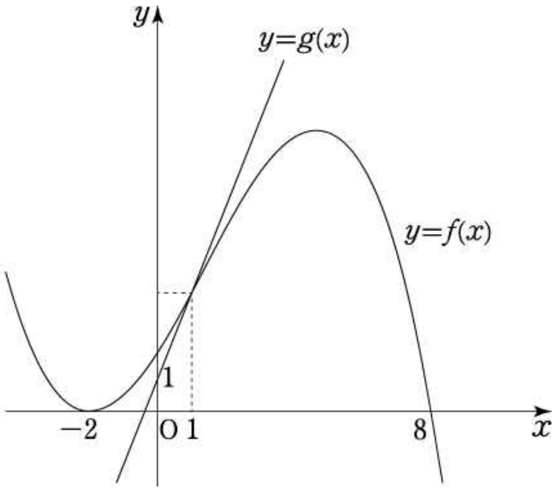


$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$

12) [정답] ② (출제자 : 12양한솔)

[출제의도] 그래프를 통해 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]



$t = 2x$로 치환하면 $\dfrac{g(t)}{f(t)} \geq 1$ 이고 부등식 양 변에 $\{f(t)\}^2$를 곱해 정리하면 $f(t)g(t) - \{f(t)\}^2 \geq 0$ 이다. $f(t)\{g(t) - f(t)\} \geq 0$을 만족하는 경우를 분류하면

(i) $f(t) > 0$, $g(t) - f(t) \geq 0$

$f(t) > 0$일 때, $g(t) \geq f(t)$을 만족하는 t의 범위는 $1 \leq t < 8$이다.

(ii) $f(t) < 0$, $g(t) - f(t) \leq 0$

$f(t) < 0$일 때 $g(t) \leq f(t)$를 만족하는 t는 존재 하지 않는다.

따라서 $f(t)\{g(t) - f(t)\} \geq 0$을 만족하는 t의 범위는 $1 \leq t < 8$이다.

$t = 2x$이므로 부등식을 만족하는 x의 범위는 $\dfrac{1}{2} \leq x < 4$ 이므로 6 이다.

13) [정답] ① (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 회전체의 부피를 적분을 이용하여 구할 수 있는가?

[해설]

$y = ax^2 - 4a$와 x축으로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전시키므로 $\pi \displaystyle\int_0^{-4a} x^2 dy$의 값을 구하면 된다.

$y = ax^2 - 4a$에서 $x^2 = \dfrac{1}{a}y + 4$ 이므로

$$\pi \int_0^{-4a} x^2 dy = \pi \int_0^{-4a} \left(\frac{1}{a}y + 4\right) dy = \pi \times (-8a) = 16\pi$$

따라서 $a = -2$

14) [정답] ④ (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 수열의 일반항을 찾을 수 있는가?

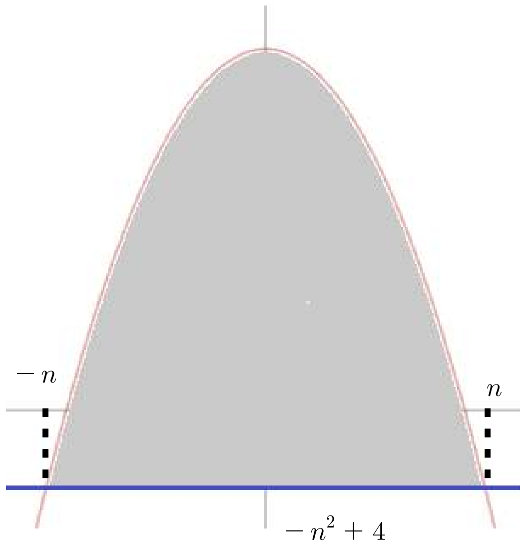
[해설]

먼저, $y = -n^2 + 4$와 $y = f(x)$로 둘러싸인 내부의 점을 구하기 위해서는 $y = -n^2 + 4$와 $y = f(x)$의 교점을 찾아야 한다.

$-x^2 + 4 = -n^2 + 4$

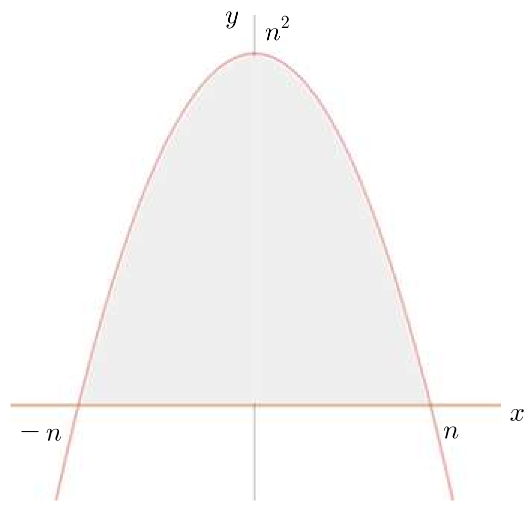
$x = \pm n$, 즉 $y = -n^2 + 4$와 $y = f(x)$는 $x = \pm n$에서 만난다.

이에 따라 그래프를 그리면

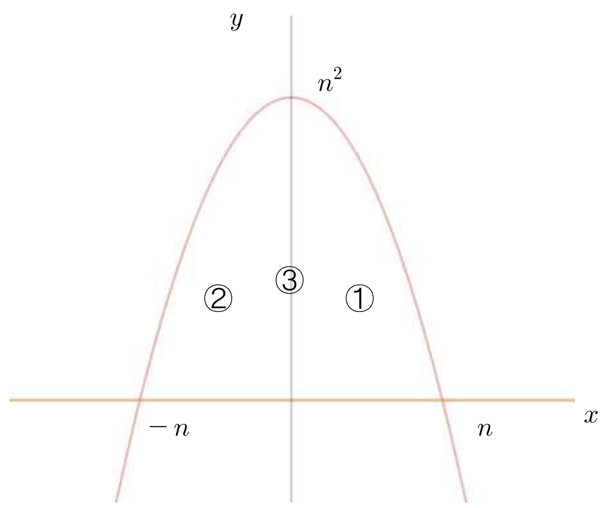


이 그래프에서 색칠한 부분 안에 존재하는 점 (x, y)의 개수를 찾으면 된다.

여기서, 두 그래프를 평행이동해도 그래프 모양에는 변화가 없기 때문에 위의 그래프를 y축으로 $n^2 - 4$만큼 평행이동을 시키면



다음 그래프에서 색칠한 부분에 속하는 점 중, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 (x, y)을 찾으면 된다.



다음 함수는 y축 대칭이기 때문에,

$x > 0$인 부분 (① 영역)과

$x < 0$인 부분(② 영역)의 점 (x, y)의 개수가 같다.

그러므로 $0 < x \leq n$일 때 점 개수를 구하고 2를 곱한 뒤, $x = 0$일 때(③ 영역)의 점 개수를 더하면 된다.

$x=k\ \ (0<k\le n)$일 때 점의 개수는

$0\le y\le -k^2+n^2$을 만족하는 정수 y의 개수이므로 $-k^2+n^2+1$개다.

따라서 $0<x\le n$일 때의 점의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-k^2+n^2+1)=n(n^2+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 개다.

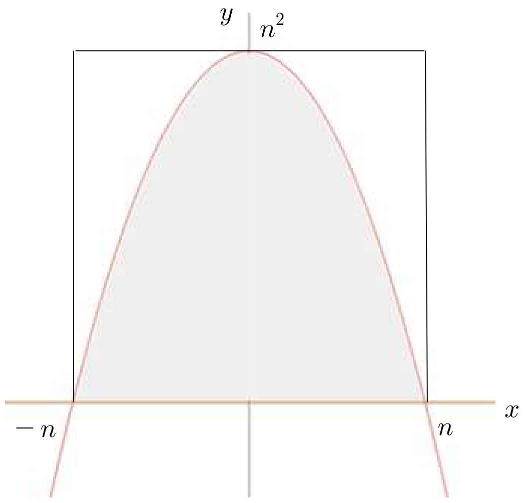
$x=0$일 때의 점의 개수는 n^2+1개다.

따라서 $a_n=2n(n^2+1)-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{3}+n^2+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)(n^2+1)-\frac{(n-1)n(2n-1)}{3}+n^2+1}{n^3}$$

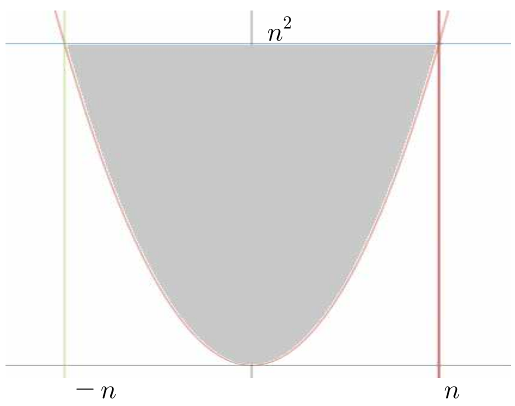
$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

[별해]



평행이동 시킨 그래프 $y=-x^2+n^2$와 x축으로 둘러싸인 부분에 속하는 점 중, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 (x,y)을 찾기 위해서는 그림과 같이 두 꼭짓점이 $(n,0)$, $(-n,0)$이고 $(0,n^2)$을 지나는 직사각형에 존재하는 점의 개수에서 흰색 부분의 점의 개수를 빼면 된다.

다음 그림을 x축 대칭이동 후, y축의 방향으로 n^2만큼 평행이동 시키면 아래 그림과 같다.



다음 그림에서 직사각형에 존재하는 점의 개수에서 하얀색 부분의 점의 개수를 빼면 된다.

하얀색 부분에 존재하는 점의 개수는

$$2\times\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

따라서 구하고자 하는 a_n은

$$a_n=(2n+1)(n^2+1)-\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

15) [정답] ③ (출제자 : 15전성완)

[출제의도] $\sum$의 정의와 성질을 알고 활용할 수 있는가?

[해설]

주어진 식에 의하여

$$(n+2)a_{n+1}=(n+1)a_n+\frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)}$$

이므로 $n\ge 1$인 자연수 n에 대하여

$$(n+1)a_n=2a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}\quad\cdots\ (*)$$

이다. 한편

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+3}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}-\frac{(n-1)(n+1)}{2n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\boxed{n-1}-\frac{n^2-1}{2n+1}\right)$$

$$1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}$$

$$=1+\left(\frac{2\cdot 4}{5}+\frac{3\cdot 5}{7}+\frac{4\cdot 6}{9}+\cdots+\frac{(n-1)(n+1)}{2n-1}\right)$$

$$-\left(\frac{1\cdot 3}{5}+\frac{2\cdot 4}{7}+\frac{3\cdot 5}{9}+\cdots+\frac{(n-2)\cdot n}{2n-1}\right)$$

$$=1+\left(\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\frac{9}{9}+\cdots+\frac{2n-1}{2n-1}\right)=n-1$$

이므로 $(*)$에 의하여

$$a_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(1+\boxed{n-1}-\frac{n^2-1}{2n+1}\right)\quad(n\ge 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\frac{1}{2(n+1)}\left(1+\boxed{n-1}-\frac{n^2-1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{n^2+n+1}{2n+1}\right)$$

$$a_n=\frac{\boxed{n^2+n+1}}{2(n+1)(2n+1)}\quad(n\ge 1)$$

이다.

따라서 $f(n)=n-1$, $g(n)=n^2+n+1$이므로,

$$\frac{g(10)}{f(4)}=\frac{10^2+10+1}{3}=37$$

[별해]

(가)를 구하는 과정에서

$$\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)}{2(k+1)+1}=\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k^2+4k+3}{2k+3}$$

$$1+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{k(k+2)}{2k+1}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}$$

$= 1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)}{2k+3}-\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k(k+2)}{2k+3}$

$= 1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{(k+1)(k+3)-k(k+2)}{2k+3} = 1+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{2k+3}{2k+3}$

$= n-1$

따라서 $f(n) = n-1$

16) [정답] ③ (출제자 : 15이상민)

[출제의도] 역행렬을 구하고 그 성질을 이용할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

첫 번째 식은 $(A-E)(A+B)=E$로 변형할 수 있으므로

$A+B$의 역행렬은 $A-E$로 존재한다.

ㄴ. (참)

역행렬끼리는 교환법칙이 성립하므로

ㄱ에 의해 $(A-E)(A+B)=(A+B)(A-E)$가 성립하고

정리하면 $AB=BA$이다.

ㄷ. (거짓)

$AB=BA$이므로 행렬의 연산을 할 때, 다항식의 덧셈, 뺄셈, 곱셈과 같은 방법으로 계산할 수 있다. $(A-B)^2-4A^2=O$을 합차공식을 이용해 두 식의 곱으로 변형하면 $(-A-B)(3A-B)=O$이고 이것은 $(A+B)(3A-B)=O$와 동치이다. $A+B$의 역행렬이 존재하므로 위 식의 양변에 $(A+B)^{-1}$을 곱하면 $B=3A$인 것을 알 수 있다.

$B=3A$를 첫 번째 조건식에 대입하면

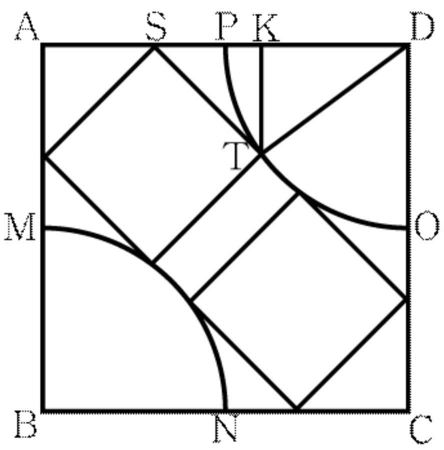
$A^2-A=\frac{E}{4}$이다.

17) [정답] ③ (출제자 : 15이상민)

[출제의도] 1. 보조선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

2. 무한등비급수를 계산하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]



부채꼴과 새로 그린 정사각형중 하나와의 교점을 T라 하고

T에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 K라 할 때

정사각형은 대각선 AC에 대하여 대칭이므로 $\angle KST=\frac{\pi}{4}$이다.

$\overline{ST}=a$이라 할 때

$\overline{KT}=\overline{SK}=\overline{SA}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\overline{KD}=2-\frac{2a}{\sqrt{2}}$, $\overline{TD}=1$ 이고

삼각형 KDT 에서 피타고라스 정리에 의해

$(\frac{a}{\sqrt{2}})^2+(2-\frac{2a}{\sqrt{2}})^2=1^2$

이차방정식을 풀면 $a=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이다.

새로 만들어지는 정사각형은 이전의 정사각형에 대해 일정한 비율로 작아지므로 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 등비급수임을 알 수 있다.

즉, 첫 번째 정사각형의 넓이는 a^2이고, 이전의 정사각형에 대한 새로 만들어지는 정사각형의 길이의 비는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이 2와 색칠된 첫 번째 정사각형의 한 변의 길이 a의 비인 $\frac{a}{2}$이다. 따라서 S_n은 첫째항이 $a^2=\frac{18}{25}$이고 공비는 두 정사각형의 넓이의 비 $\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{9}{50}$인 등비급수이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{18}{25}}{1-\frac{9}{50}}=\frac{36}{41}$

[별해]

정사각형의 한 변의 길이를 a로 ($\overline{ST}=a$) 잡은 대신에, 정사각형의 대각선의 길이를 a로 놓으면 보다 계산을 간편하게 할 수 있다.

18) [정답] ① (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 무리방정식을 풀 수 있는가?

절댓값이 존재하는 이차함수의 풀이법과 그래프를 그릴 수 있는가?

[해설]

$|f(x)|-3=\sqrt{|f(x)|-1}$의 양변을 제곱해 보자.

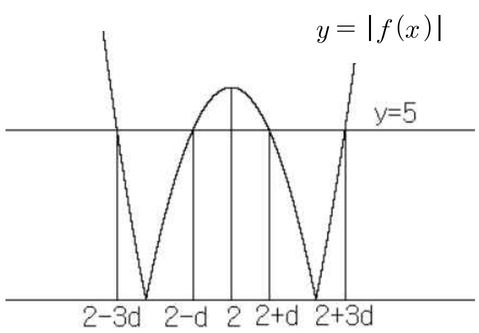
$|f(x)|^2-7|f(x)|+10=(|f(x)|-2)(|f(x)|-5)=0$

$|f(x)|=2$는 무연근이므로 $|f(x)|=5$

문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 네 근이 등차수열을 이루고,

$|f(x)|$는 $x=2$ 대칭이므로,

네 근은 $2-3d, 2-d, 2+d, 2+3d$로 둘 수 있다.



위의 그림과 같이, $|f(2+d)|=|f(2+3d)|=5$이다.

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로,

$f(2+d)=-5$, $f(2+3d)=5$이다.

최고차항의 계수가 1이고 대칭축이 $x=2$인 이차함수 $f(x)$를

$f(x)=(x-2)^2+k$라 하고 위의 두 식을 대입하면,

$d^2+k=-5$, $9d^2+k=5$이다.

따라서 $d^2=\frac{5}{4}$, $k=-\frac{25}{4}$이고

$f(x)=(x-2)^2-\frac{25}{4}$이다.

$\therefore f(2)=-\frac{25}{4}$

19) [정답] ② (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 모비율의 추정을 할 수 있는가?

[해설]

먼저 $a+b+20 = 100$ 이고, 선호도 조사를 한 사람들 전체 중에서 A 제품을 선호한 사람들의 비율을 p, B 제품을 선호한 사람들의 비율을 q, C 제품을 선호한 사람들의 비율을 r이라고 하자.

선호도 조사를 한 사람들 전체 중에서 C 제품을 선호한 사람들의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구해보자.

100 명을 임의추출 했을 때, 20 명이 C 제품을 선호했으므로 $\hat{r} = \dfrac{20}{100}$,

또한 C 제품의 표본 비율은 정규분포 $\mathrm{N}\left(r, \dfrac{r(1-r)}{100}\right)$을 이루기 때문에,

선호도 조사를 한 사람들 전체 중에서 C 제품을 선호한 사람들의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $2 \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{100}}$ (단, k는 상수)이다. 이 때, r 대신 $\hat{r}$를 차용가능하다.

마찬가지의 방법으로 A 제품을 선호한 사람들의 비율을 p라고 하면, A 제품을 선호한 사람들의 표본비율 또한 정규분포 $\mathrm{N}\left(p, \dfrac{p(1-p)}{100}\right)$를 따른다. 선호도 조사를 한 사람들 전체 중에서 A 제품을 선호한 사람들의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면

$2 \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$ 이다. 이 때, p 대신 $\hat{p}$를 차용가능하다.

문제에 의해

$2 \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}} = \sqrt{6} \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{r(1-r)}{100}}$ 이고,

$\hat{r}$와 $\hat{p}$를 차용하면

$2 \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{100}} = \sqrt{6} \times 1.96 \times \sqrt{\dfrac{\hat{r}(1-\hat{r})}{n}}$ 이고,

정리하면 $2\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \sqrt{6}\sqrt{\dfrac{1}{5}\left(1-\dfrac{1}{5}\right)}$ 이므로,

이 식을 풀면 $\hat{p} = \dfrac{2}{5}$ or $\dfrac{3}{5}$ 가 나온다.

$a > b$ 이어야 하므로 $\hat{p} = \dfrac{3}{5}$, $a = 60$ 이며, 따라서 $b = 20$ 이다.

(추가 : 신뢰구간에서 r와 p 대신 $\hat{r}$, $\hat{p}$ 로 차용 가능한 이유는 $100r$ 와 $100p$ 의 값이 모두 5가 넘기 때문이다.)

20) [정답] ⑤ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\overline{\mathrm{AD}}$를 긋고 삼각형 ADB와 삼각형 $\mathrm{O_1AO_2}$를 생각해보자.
우선 원 C_2의 반지름의 길이를 r이라 놓으면,

삼각형 $\mathrm{O_1AO_2}$에서 $(r+4)\cos 2\theta = 4$ 이므로, $r = \dfrac{4(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta}$ 이다.

또한, DBA $= \theta$ 이고, $\overline{O_1B} = \overline{O_1D}$ 이므로 $\angle BDO_2 = \pi - \theta$가 된다.

점 $\mathrm{O_1}$에서 $\overline{\mathrm{BD}}$에 수선의 발을 내리고, 그 점을 M이라 두면,
직각삼각형 $\mathrm{O_1MD}$에서 $\overline{\mathrm{MD}} = 4\cos\theta$, $\overline{\mathrm{BD}} = 2 \times 4\cos\theta = 8\cos\theta$이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식을 이용하면,

$f(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BD}} \times \overline{\mathrm{DO_2}} \times \sin(\pi - \theta)$ 이고,

$\overline{\mathrm{BD}} = 8\cos\theta$, $\overline{\mathrm{DO_2}} = r = \dfrac{4(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta}$ 을 대입하면

$$f(\theta) = \frac{1}{2} 8\cos\theta \frac{4(1-\cos 2\theta)}{\cos 2\theta} \sin(\pi - \theta)$$
$$= \frac{16\cos\theta(1-\cos 2\theta)\sin\theta}{\cos 2\theta}$$
$$= \frac{16\cos\theta\, 2\sin^2\theta \sin\theta}{\cos 2\theta} \quad (\because 1-\cos 2\theta = 2\sin^2\theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta\ 0} \frac{f(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \to 0} \frac{16\cos\theta\, 2\sin^2\theta \sin\theta}{\theta^3 \cos 2\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{16\cos\theta\, 2\sin^3\theta}{\theta^3 \cos 2\theta}$$

$\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$ 이고 $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ 이므로

$$\lim_{\theta \to 0} 32 \frac{\sin^3\theta}{\theta^3} \frac{\cos\theta}{\cos 2\theta} = 32 \times 1 \times 1 = 32$$

답은 32 이다.

21) [정답] ③ (출제자 : 14임현우)

[출제의도]

1. 그래프의 개형을 파악하여 그래프를 경우에 따라 그려낼 수 있는가?

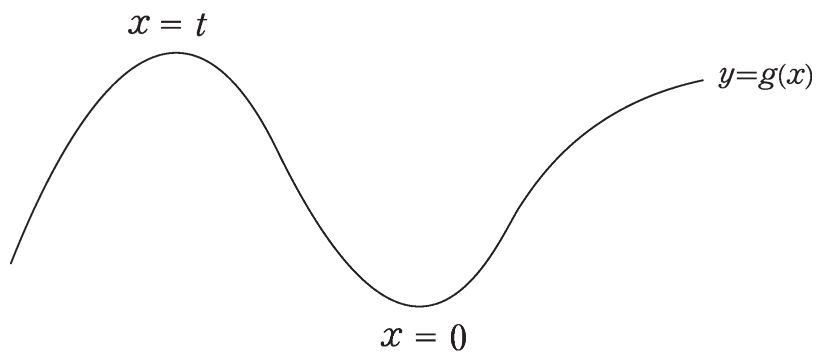
2. 극점에 대해 잘 이해하고 있는가?

[해설]

$f(0) = -2t + 6$ 이므로 $f(0)$의 최솟값을 구하기 위해서는 t의 최댓값을 구하면 된다.

$f'(x) = -e^{-x}\{x^2 - (t-2)x - (t-2)\} - mx$
곡선 $y = f(x)$의 극점을 판단하기 위해서는 $f'(x)$의 부호가 변하는 점, 즉 $f'(x) = 0$이 되는 상황에 주목해야 한다.
$f'(x) = 0$에서 $-mx$를 오른쪽으로 이항하면,
$-e^{-x}\{x^2 - (t-2)x - (t-2)\} = mx$
여기서 $g(x) = -e^{-x}\{x^2 - (t-2)x - (t-2)\}$라 하면 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = mx$가 만나는 점에 주목하며 생각하면 될 것이다.

곡선 $y = g(x)$를 그리기 위해 미분해보면, $g'(x) = xe^{-x}(x-t)$.
t는 음의 정수이므로, $g(x)$는 $x = t$에서 극댓값, $x = 0$에서 극솟값을 갖는다. 따라서 대략적인 개형은 <그림1>과 같이 되는데,



<그림 1>

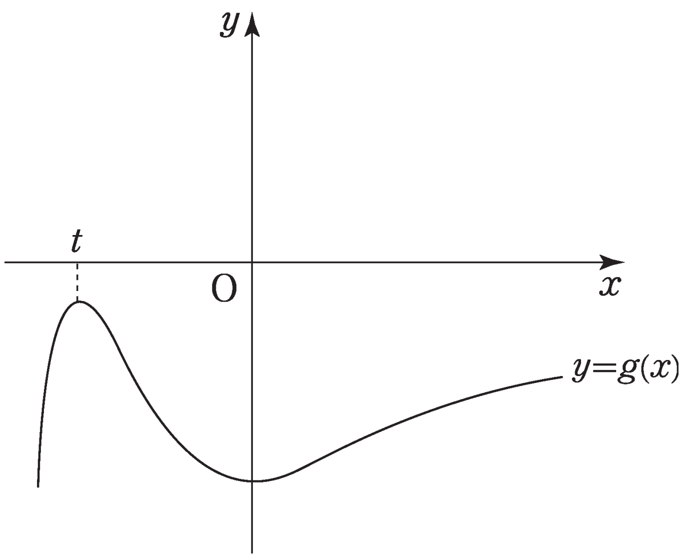
원점을 지나는 직선 $y = mx$와 곡선 $y = g(x)$를 비교해야하므로 $y = g(x)$와 x축 간의 관계를 살펴보아야 한다.

먼저 기본적으로 $g(x)=-e^{-x}\{x^2-(t-2)x-(t-2)\}$ 에서 e^{-x} 는 절대 0 이 될 수 없고, $x^2-(t-2)x-(t-2)$ 는 0 이 될 수 있는 x 의 값이 많아야 2 개이므로, $y=g(x)$ 와 x 축과의 교점은 2 개 이하이다. (교점은 $x^2-(t-2)x-(t-2)=0$ 을 만족하는 x 에서만 생길 수 있다.)
이 때 그 x 축과의 교점의 개수를 나누어 살펴볼 수 있는 방법을 2가지 제시하겠다. (어느 방법이든 자신이 편한 방법으로 풀이하면 된다.)

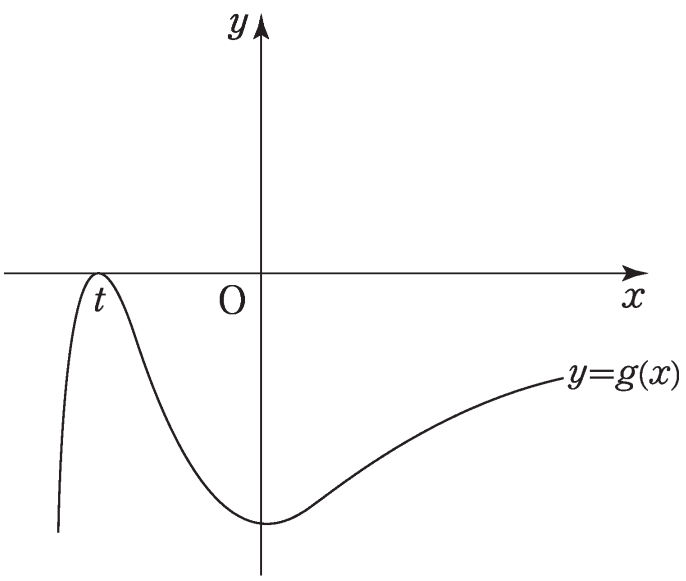
(방법1)
$g(x)=-e^{-x}\{x^2-(t-2)x-(t-2)\}$ 에서 e^{-x} 는 항상 0 보다 크므로, $x^2-(t-2)x-(t-2)$ 의 판별식을 확인한다.
$D=(t-2)^2+4(t-2)=(t-2)(t+2)$ 에서
$t<-2$ 이면 $D>0$, $t=-2$ 이면 $D=0$, $-2<t<0$ 이면 $D<0$ 임을 이용하여 x 축과의 교점의 개수를 파악하여 그래프를 그릴 수 있다.

(방법2)
$g(x)$ 의 극댓값, 극솟값을 파악하면 극댓값은 $g(t)=-e^{-t}(t+2)$, 극솟값은 $g(0)=t-2$ 이므로, 극솟값은 항상 음수이고, 극댓값은 $t<-2$ 일 때 양수, $t=-2$ 일 때 0, $-2<t<0$ 일 때 음수임을 이용하여 그래프를 그릴 수 있다.

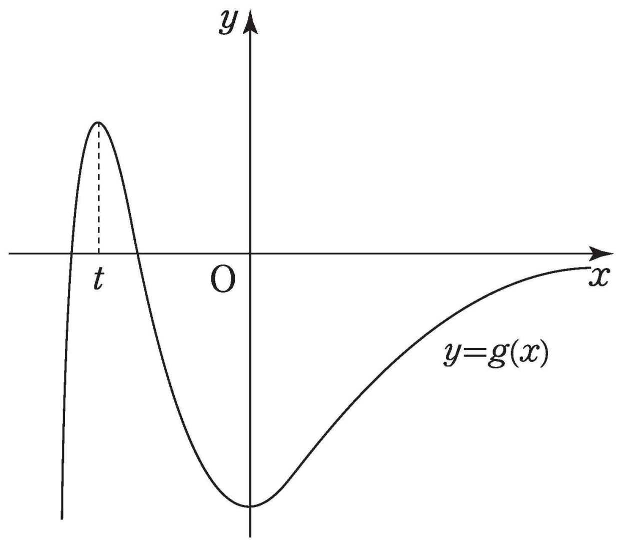
위의 방법을 이용하여 $g(x)$ 의 그래프를 그리면 다음과 같은 3 개의 그래프를 그릴 수 있다.



$(-2<t<0)$

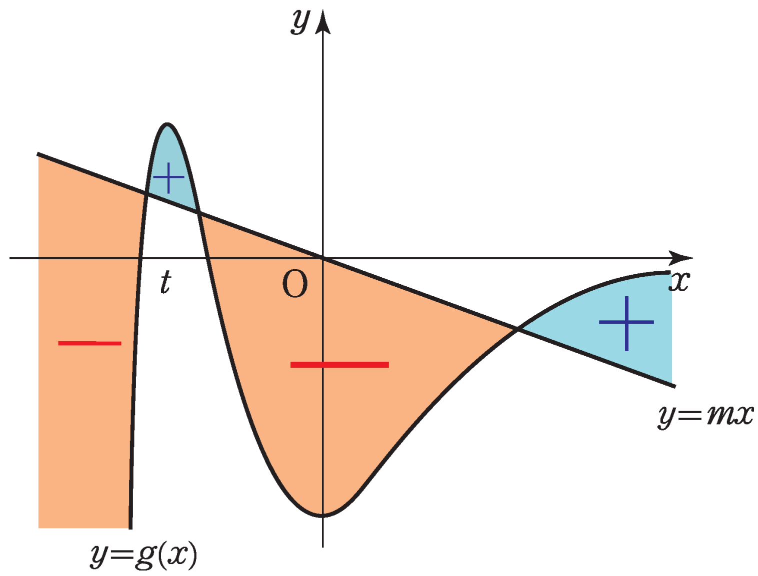


$(t=-2)$



$(t<-2)$

다음으로 2개의 극솟점을 가진다는 말은 $f'(x)$ 의 부호가 - 에서 +로 바뀌는 점이 2개라는 말이다. $f'(x)=g(x)-mx$ 이므로,
$y=g(x)$ 가 $y=mx$ 보다 아래에 있을 때가 $f'(x)$ 의 부호가 음수이고
$y=g(x)$ 가 $y=mx$ 보다 위에 있을 때가 $f'(x)$ 의 부호가 양수이다.
그러면 결국 다음의 <그림 2>처럼 $y=g(x)$ 와 $y=mx$ 가 세 점에서 만나면 그 교점의 x 좌표에서 $y=f(x)$ 가 극솟값을 갖는다.



<그림 2>

하지만 위의 그림처럼 세 점에서 만나려면 $t<-2$ 인 경우밖에 되지 않는다. $f(x)$ 가 2개의 극솟값을 가지게 하는 실수 m 이 존재한다고 하였으므로 t 는 -2 보다 작아야 한다. 따라서 t 의 최댓값은 -3 이고, $f(0)$ 의 최댓값은 $-2\times(-3)+6=12$ 이다.

22) [정답] 18 (출제자 : 13김찬호)
[출제의도] 등비수열의 일반항을 찾을 수 있는가?

[해설]
$\{a_n\}$ 은 공비가 3 이고 첫째항이 양수인 등비수열이므로 첫째항을 a_1 이라 하면 일반항 $a_n=a_1\times 3^{n-1}$ 이 된다. 여기에서 $a_1a_4=108$ 이므로,
$a_1=a_1$, $a_4=a_1\times 3^3$ 이므로 $a_1\times a_4=a_1^2\times 3^3$ 이 되므로, $a_1=2$ 가 된다.
따라서, $a_3=a_1\times 3^2$ 이므로, $a_3=18$ 이 된다.

23) [정답] 36 (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가?

[해설]

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ 과 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면,

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{AM}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \cdot \cos\theta$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AM}}| \cdot |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| \cdot \cos\theta = 6 \times 12 \times \frac{1}{2} = 36$

[별해]

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}$ 이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{CB}} - \overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = 144$

따라서, $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2 = 144$

$144 - 2\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} + 144 = 144$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 144$

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 72$ 이고 $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = -\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot (-2\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 72$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot (2\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 72$, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 36$

24) [정답] 40 (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 조건부 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

전체 학생 200명 중에서 임의로 선택한 한 명이 30번 문제를 해결한 학생인 사건을 A, 학생이 여학생인 사건을 B라 하면

$$\frac{1}{4} = P(B|A) = \frac{P(A\ \ B)}{P(A)} = \frac{\frac{x}{200}}{\frac{24+x}{200}} = \frac{x}{24+x}$$

$24 + x = 4x$, $3x = 24$, $x = 8$

$24 + 8 + y + 72 = 200$

$y = 96$

전체 학생 200명 중에서 임의로 선택한 한 명이 30번 문제를 해결하지 못한 학생인 사건을 C, 학생이 남학생인 사건을 D 라 하면

$$p = P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{y}{200}}{\frac{y+72}{200}} = \frac{y}{y+72}$$

$$= \frac{96}{96+72} = \frac{96}{168} = \frac{4}{7}$$

$\therefore 70p = 40$

25) [정답] 10 (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 직선의 방정식과 평면의 방정식을 이해하고 있는가?

[해설]

직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로 직선의 방향벡터 $(4, 3, a)$와 평면의 법선벡터 $(1, 2, 1)$가 이루는 각의 크기는 30° 이다.

이를 이용하여 두 벡터를 내적하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(4, 3, a) \circ (1, 2, 1) &= \sqrt{4^2 + 3^2 + a^2} \times \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \times \cos 30^\circ \\ &= \sqrt{25 + a^2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{25 + a^2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{25 + a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4, 3, a) \circ (1, 2, 1) &= 4 \times 1 + 3 \times 2 + a \times 1 \\ &= 10 + a\end{aligned}$$

즉, $\frac{3\sqrt{2}}{2}\sqrt{25 + a^2} = 10 + a$ 이므로

$\frac{18}{4}(25 + a^2) = (a + 10)^2$

$9(25 + a^2) = 2(a^2 + 20a + 100)$

$7a^2 - 40a + 25 = 0$

$a > 1$ 이므로 $a = 5$ 이다.

한편, 직선 l 과 평면 α 의 교점은 직선 l 위에 있으므로

$\frac{x+3}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ 위에 있다.

따라서 $(4t - 3, 3t - 4, 5t)$ 로 나타낼 수 있다.

또한 이 점은 평면 α 위에도 있으므로 $x + 2y + z = 4$ 에 대입하면

$(4t - 3) + 2(3t - 4) + (5t) = 4$

$4t + 6t + 5t = 3 + 8 + 4$

$15t = 15$

$t = 1$

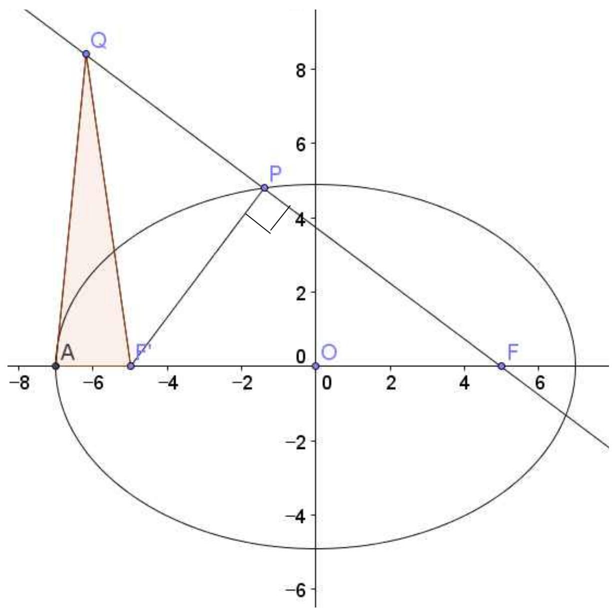
따라서 교점의 좌표는 $(1, -1, 5)$ 이다.

그러므로 $a + b + c + d = 5 + 1 - 1 + 5 = 10$ 이다.

26) [정답] 47 (출제자 : 15최봉규)

[출제의도] 타원의 정의와 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]



타원의 초점 구하는 공식을 이용하면

$c^2 = 49 - 24 = 25$, $c > 0$ 이므로 $c = 5$

$\mathrm{F}'(-5, 0)$, $\mathrm{F}(5, 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{FF}'} = 10$

$\overline{\mathrm{PF}'} = \alpha$, $\overline{\mathrm{PF}} = \beta$ 라고 두면

피타고라스 정리에 의해 $\alpha^2 + \beta^2 = 10^2$,

타원의 정의에 의해 $\alpha + \beta = 2 \times 7 = 14$

이 두 조건을 이용하여 계산하면

$\overline{PF'} = \alpha = 6$, $\overline{PF} = \beta = 8$

(점P 가 제 2사분면에 있으므로 $\overline{PF'} < \overline{PF}$)

$\overline{PF'} = 6$, $\overline{PQ} = 6$ 이므로 $\overline{QF'} = \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$

타원의 꼭짓점인 점A 의 좌표는 $(-7, 0)$ 이고, $F'(-5, 0)$ 이므로

$\overline{AF'} = 2$

점 Q 에서 x 축에 수선의 발을 점H 라고 하면

삼각형 AQF' 의 넓이 $= \frac{1}{2} \times \overline{AF'} \times \overline{QH} = \overline{QH}$

$\angle PFF'$ 를 θ 라고 하면 $\overline{QH} = \overline{QF} \times \sin\theta$

$\therefore$ (삼각형 AQF' 의 넓이)

$= \overline{QH} = (6+8) \times \frac{3}{5} = \frac{42}{5}$, $42+5 = 47$

[별해]

(삼각형 AQF' 의 넓이)

$= \frac{1}{2} \times \overline{AF'} \times \overline{QF'} \times \sin\angle AF'Q$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 6\sqrt{2} \times \sin\angle AF'Q = 6\sqrt{2} \times \sin\angle AF'Q$

$\angle PFF'$ 를 θ 라고 하면 $\angle PQF' = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\sin\angle AF'Q = \sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta + \cos\theta)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{5}$

$\therefore$ (삼각형 AQF' 의 넓이) $= 6\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$

$a+b = 42+5 = 47$

27) [정답] 37 (출제자 : 15정다혜)

[출제의도] 지표와 가수의 정의를 문제에 잘 적용시킬 수 있는가?

범위에 따라 경우를 나눠서 할 수 있는가?

[해설]

$\log x = f(x) + g(x)$ ($f(x)$: 수, $0 \le g(x) < 1$)

$0 \le g(x) < 1$ 이므로, $0 \le 3g(x) < 3$가 된다.

이때, $f(10x^2) - 3g(x) = n$ 에서 $f(10x^2) - n = 3g(x)$이고

$f(10x^2)$와 n 이 정수이므로, $3g(x)$도 정수이다.

$3g(x)$는 정수이면서, $0 \le 3g(x) < 3$를 만족하므로

$3g(x)$는 0,1,2가 될 수 있다.

$f(10x^2) - 3g(x) = n$

$\Leftrightarrow 1 + f(x^2) - 3g(x) = n$

$\Leftrightarrow f(x^2) = n - 1 + 3g(x)$ ⋯ (*)

(i) $3g(x) = 0$일 때

즉, $g(x) = 0$일 때이므로 (*)에서 $f(x^2) = n-1$이다.

$\log x = f(x) + g(x) = f(x)$에서

$\log x^2 = 2\log x = 2f(x) + 0$이므로

$f(x^2) = 2f(x) = n-1$, 즉, $f(x) = \frac{n-1}{2}$이다.

이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,

$\frac{n-1}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 홀수여야 한다.

즉, n이 홀수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에

n이 홀수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(ii) $3g(x) = 1$일 때

즉, $g(x) = \frac{1}{3}$일 때이므로 (*)에서 $f(x^2) = n$이다.

$\log x = f(x) + g(x) = f(x) + \frac{1}{3}$에서

$\log x^2 = 2f(x) + \frac{2}{3}$이므로,

$f(x^2) = 2f(x) = n$, 즉, $f(x) = \frac{n}{2}$이다.

이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,

$\frac{n}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 짝수여야 한다.

즉, n이 짝수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에

n이 짝수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(iii) $3g(x) = 2$일 때

즉, $g(x) = \frac{2}{3}$일 때이므로 (*)에서 $f(x^2) = n+1$이다.

$\log x = f(x) + g(x) = f(x) + \frac{2}{3}$에서

$\log x^2 = 2f(x) + \frac{4}{3} = \{2f(x)+1\} + \frac{1}{3}$이므로

$f(x^2) = 2f(x) + 1 = n+1$, 즉, $f(x) = \frac{n}{2}$이다.

이때, $f(x)$는 $\log x$의 지표이므로 정수여야 하고,

$\frac{n}{2}$가 정수이기 위해서는 n이 짝수여야 한다.

즉, n이 짝수일 때만 지표 $f(x)$가 존재할 수 있기 때문에

n이 짝수일 때만 $f(10x^2) - 3g(x) = n$을 만족하는 x가 존재한다.

(i), (ii), (iii)에 의해

n이 홀수일 때, $f(10x^2) - 2g(x) = n$를 만족하는 x가 (i)에서 1개,

n이 짝수일 때, $f(10x^2) - 2g(x) = n$를 만족하는 x가 (ii), (iii)에서

각각 1개씩 존재하므로,

$a_1 = a_3 = \cdots = a_{25} = 1$, $a_2 = a_4 = \cdots = a_{24} = 2$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{25} a_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{25}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{24})$$

$$= 13 + (2 \times 12)$$

$$= 37$$

28) [정답] 44 (출제자 : 14임현우)

[출제의도]

1. 확률밀도함수를 이해하고 평균과 분산을 구할 줄 아는가?
2. 기함수와 우함수의 성질을 정적분의 연산에서 적절히 활용할 수 있는가?

개념 알기

모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 '우함수'
$f(-x)=-f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$를 '기함수'
라고 한다.

우함수 $f(x)$에 대해 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$가 성립한다.

기함수 $f(x)$에 대해 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$이 성립한다.

(그래프를 그려보면 쉽게 확인할 수 있다.)

[해설]

$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$이므로 $E(X^2)$과 $E(X)$를 구하자.
먼저 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로, $f(x)$는 우함수이다.

$E(X)=\int_{-2}^{2} xf(x)dx$이고, $xf(x)$는 기함수이기 때문에,

$E(X)=\int_{-2}^{2} xf(x)dx=0$이다.

다음으로 $E(X^2)$를 구해보자.

$$E(X^2)=\int_{-2}^{0}(x-2)^2 f(x)dx$$
$$=\int_{-2}^{0} x^2 f(x)dx - 4\int_{-2}^{0} xf(x)dx + 4\int_{-2}^{0} f(x)dx$$

$x^2 f(x)$는 우함수이므로 $\int_{-2}^{0} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 f(x)dx$

$xf(x)$는 기함수이므로 $\int_{-2}^{0} xf(x)dx = -\int_{0}^{2} xf(x)dx$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 1$이고 $f(x)$는 우함수이므로 $\int_{-2}^{0} f(x)dx = \frac{1}{2}$

$E(X^2)=\int_{-2}^{2} x^2 f(x)dx = 2\int_{0}^{2} x^2 f(x)dx$

따라서

$$2\int_{0}^{2} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{2} x^2 f(x)dx + 4\int_{0}^{2} xf(x)dx + 2$$
$$\int_{0}^{2} x^2 f(x)dx = 4\int_{0}^{2} xf(x)dx + 2$$
$$E(X^2)=2\int_{0}^{2} x^2 f(x)dx = 8\int_{0}^{2} xf(x)dx + 4$$

(가) 조건에서 $\int_{-2}^{2} |x|f(x)dx = 10$

$|x|f(x)$는 우함수이므로

$$\int_{-2}^{2} |x|f(x)dx = 2\int_{0}^{2} |x|f(x)dx = 2\int_{0}^{2} xf(x)dx = 10$$

따라서 $\int_{0}^{2} xf(x)dx = 5$

$E(X^2)=8\times 5+4=44$, $V(X)=44-0^2=44$

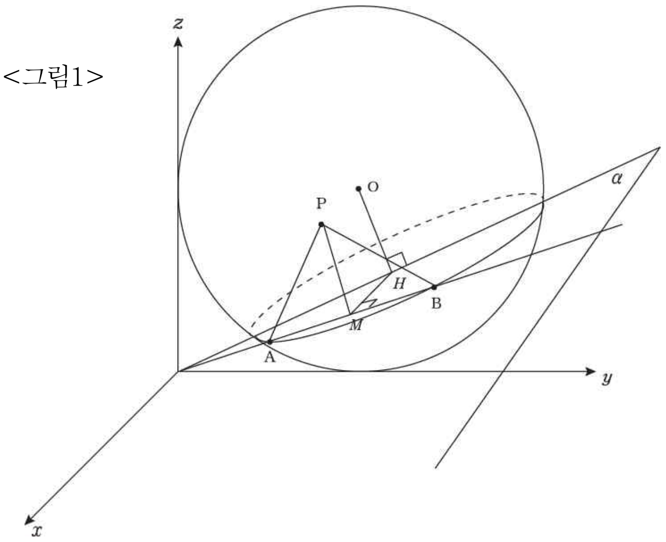
29) [정답] 16 ($s=\frac{2\sqrt{6}}{3}$) (출제자 : 10최원재)

[출제의도] 주어진 조건을 이용하여 정사영 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

[해설]

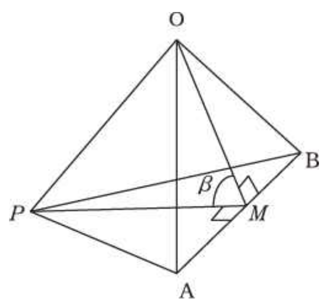
구의 중심O에 대하여 α평면에 내린 수선의 발을 H, H에서 선분AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자. 사면체OPAB는 모든 모서리의 길이가 2인 정사면체가 되고, 정사면체OPAB가 O를 중심으로 움직일 때, 정삼각형PAB와 α평면 사이의 각의 변화를 조사하자.

<그림1>



*Step*1) 한 변의 길이가 2인 정사면체OPAB에서 OMP $=\beta$ 라 하면, $\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{PM}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2$이므로 제2코사인 법칙에 의해

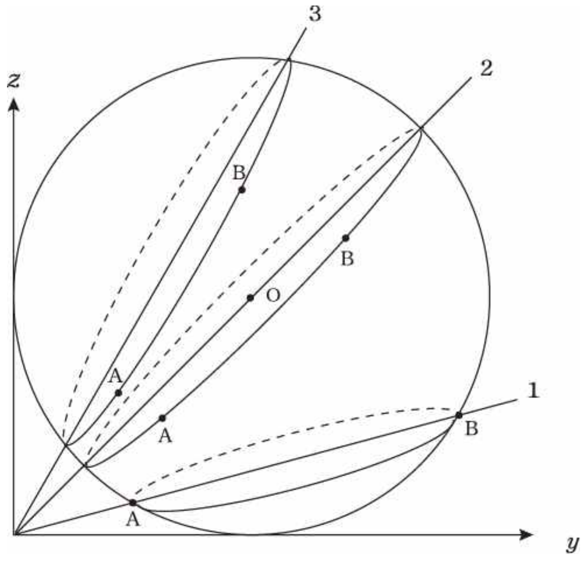
$\cos\beta = \frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$이다.



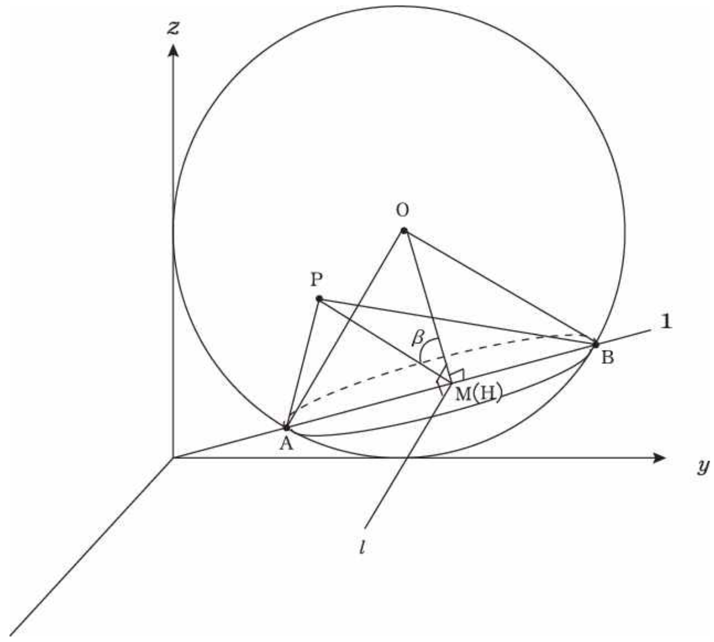
정삼각형PAB의 넓이는 항상 $\frac{\sqrt{3}}{4}(2)^2=\sqrt{3}$이고,

<그림1>에서 $\angle\mathrm{OMH}=\gamma$라 하면, 삼각형PAB와 α평면 사이의 이면각은 $\beta+\gamma$인데, β는 항상 일정하므로 γ가 어떻게 변하는지 생각하면 정삼각형PAB의 평면 α 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.

*Step*2)선분AB의 길이가 2가 될 수 있는 그림을 그려보면 1에서 2의 모양을 거쳐 3으로 가는 형태가 된다.

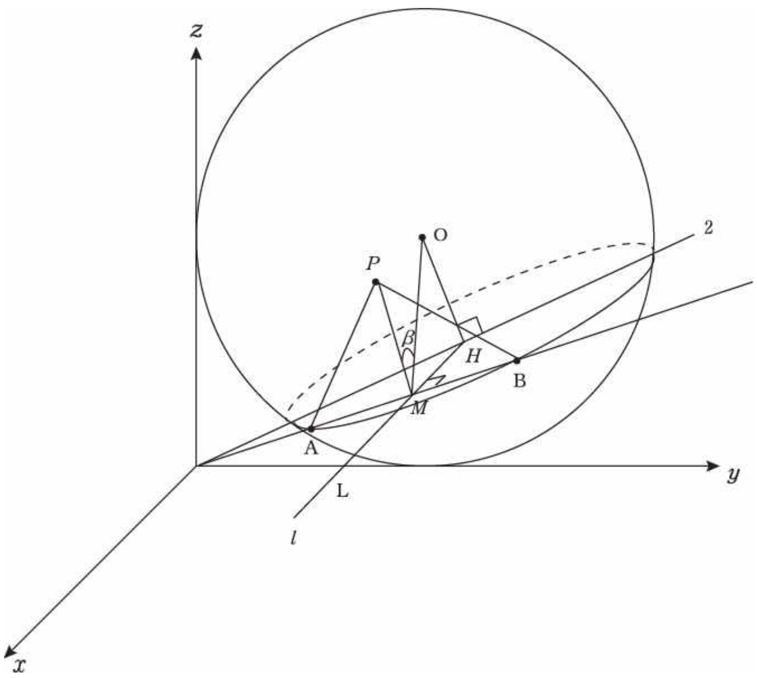


ⅰ) 1의 경우



삼각형PAB와 α평면 사이의 각은 $\frac{\pi}{2}-\beta$가 되므로 삼각형 PAB의 α평면 위로의 정사영의 넓이는 $\sqrt{3}\,cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sqrt{3}\,sin\beta=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

ⅱ) 1에서 3형태 사이의 경우



삼각형PAB와 α평면 사이의 각은 OML의 각이 $\frac{\pi}{2}$보다 커지므로 삼각형PAB의 평면 α위로의 정사영의 넓이는 점점 작아지다가 0이 되고, 점점 다시 커지게 된다.

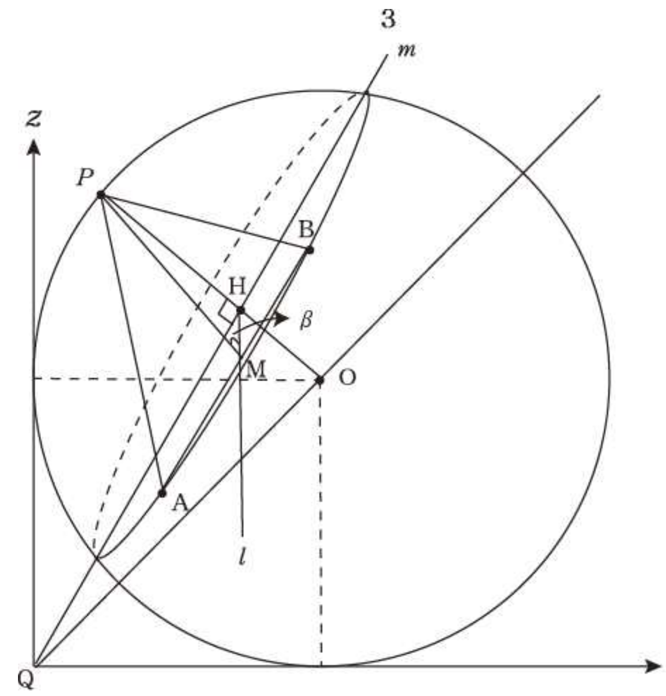
ⅲ) 3의 경우

점 P가 yz평면과 구의 교선 위에 있을 때를 생각하자.
점 P가 yz평면과 구의 교선 위에 있을 때를 생각하자.
α평면과 점 A, B, P를 포함하는 평면의 교선 $\overline{AB}$에 대하여 $\overline{AB}\perp\overline{HM}$이고 $\overline{PM}\perp\overline{AB}$이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH}\perp\alpha$이고, 점 H는 구의 중심 O에서 α에 내린 수선의 발이므로

$\therefore\ \alpha\perp\overline{OH}$

따라서 α평면 위의 직선 m에 대하여

$\therefore m\perp\overline{PH}$



$\angle\mathrm{OPM}=\theta$라 하면,

정사면체 POAB에서 $\overline{OP}=2$, $\overline{PM}=\sqrt{3}$, $\overline{OM}=\sqrt{3}$이므로

제 2코사인 법칙에 의해 $\cos\theta=\frac{2^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되고, 직각삼각형 PHM에서

$\overline{HM}=\overline{PM}\cos\beta=\overline{PM}\sin\theta=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$

삼각형 PAB의 α평면 위로의 정사영의 넓이는 삼각형HAB의 넓이와 같으므로 $\frac{1}{2}\times2\times\overline{HM}=\sqrt{2}$

ⅰ), ⅱ), ⅲ) 에 의하여 $\frac{2\sqrt{6}}{3}>\sqrt{2}$이므로 삼각형 PAB의 α평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$이고,

$\therefore 6s^2=16$이다.

[보충]

위에서 나눈 각 경우에 따라, 즉 α평면이 결정될 때마다, 문제의 조건을 만족하는 점 A, B의 경우가 한가지로 결정된다. 그리고 점 P의 경우는 두 가지로 결정되는데, 그 두 점은 평면 $z=y$에 대하여 대칭이므로, 세 경우 안에 포함된다.

30) [정답] 54 (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 역함수의 미분법과 적분법 및 부분적분법과 치환적분법을 이해하고 있는가?

[해설]

함수 $g(x)$ 가 $x=e$ 에서 연속이므로 $g(e)=\lim\limits_{x\to e+0} g(x)$ 를 만족한다.

그런데

$\lim\limits_{x\to e+0} g(x)=\lim\limits_{x\to e+0}\{2(x-e)g'(x-e)+k\}=\lim\limits_{t\to+0}\{2tg'(t)+k\}$

$=\lim\limits_{t\to+0}[2t\{6f'(t)+6tf''(t)\}+k]=k$ (별해 Ⓑ 참고)

$6ef'(e)=k$ 이다.

그런데 $f^{-1}(1)=e$ 이므로 $f(e)=1$ 이고 역함수 미분법으로부터

$f'(e)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(1} \displaystyle\int_0^e f(x)\,dx \dfrac{1}{{}^2)_{x=1}}=\dfrac{1}{3e}$

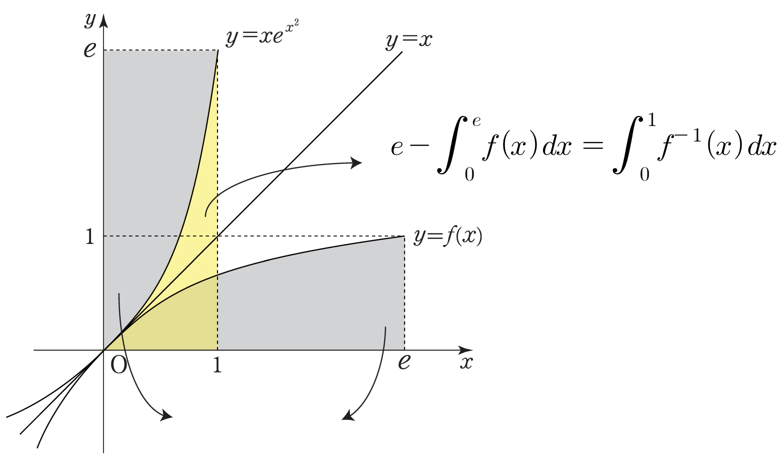
$\therefore g(e)=k=2 \ \cdots$ ①

$\displaystyle\int_0^{2e} g(x)\,dx$

$=\displaystyle\int_0^e 6xf'(x)\,dx+\int_e^{2e}\{2(x-e)g'(x-e)+2\}\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^e xf'(x)\,dx=[xf(x)]_0^e-\int_0^e f(x)\,dx$

$=ef(e)-0f(0)-\displaystyle\int_0^e f(x)\,dx=\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx$ (아래 그림 참고)



그러므로 $\displaystyle\int_0^e xf'(x)\,dx=\int_0^1 f^{-1}(x)\,dx=\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ 인데

$x^2=t$ 로 치환하면 $2x\,dx=dt$ 로부터 $x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1\frac{1}{2}e^t\,dt=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1=\frac{e-1}{2}$

$\therefore \displaystyle\int_0^e xf'(x)\,dx=\frac{e-1}{2}$

$\therefore \displaystyle\int_0^e 6xf'(x)\,dx=3e-3 \ \cdots$ ②

ii) $\displaystyle\int_e^{2e}\{2(x-e)g'(x-e)+2\}\,dx$ 에서 $x-e=t$ 로 치환하면 $dx=dt$ 이다.

따라서 $\displaystyle\int_e^{2e}\{2(x-e)g'(x-e)+2\}\,dx=\int_0^e\{2tg'(t)+2\}\,dt$

여기서 $\displaystyle\int_0^e tg'(t)\,dt$ 를 부분적분을 이용하여 구해보면

$\displaystyle\int_0^e tg'(t)dt=[tg(t)]_0^e-\int_0^e g(t)\,dt=eg(e)-\int_0^e 6xf'(x)\,dx$

$=2e-(3e-3)$ ($\because$ ①과 ②로부터)

$=3-e$

그러므로

$\displaystyle\int_0^e\{2tg'(t)+2\}\,dt=2\int_0^e tg'(t)\,dt+2e=2(3-e)+2e=6$

i)의 경우와 ii)의 경우를 합치면

$\displaystyle\int_0^{2e} g(x)\,dx=\int_0^e g(x)\,dx+\int_e^{2e} g(x)\,dx=(3e-3)+6=3e+3$

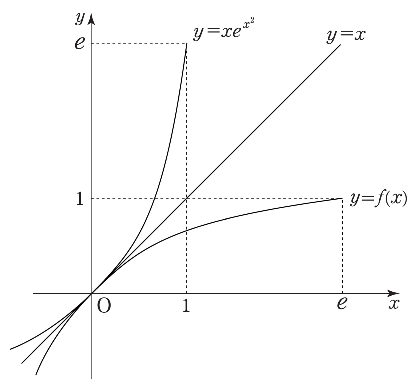
따라서 $a=3$, $b=3$ 이다.

$\therefore a^3+b^3=54$

[별해]

Ⓐ $\displaystyle\int_0^e xf'(x)\,dx$ 의 값을 부분적분 대신 치환적분을 사용하여 구할 수도 있다. $f(x)=y$ 로 치환하면 $f'(x)\,dx=dy$ 이고 $x=f^{-1}(y)$ 이므로 $\displaystyle\int_0^e xf'(x)\,dx=\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy=\int_0^1 ye^{y^2}dy$ 로 계산할 수 있다.

Ⓑ $\lim\limits_{x\to e+0} g(x)=\lim\limits_{t\to+0}[2t\{6f'(t)+6tf''(t)\}+k]$ 에서 $\lim\limits_{t\to+0} f'(t)$ 의 값과 $\lim\limits_{t\to+0} f''(t)$ 의 값을 구하는 과정이 쉽지가 않다. 다만, 존재성은 역함수의 $y=x$ 에 대한 대칭성을 이용하여, 아래 그림과 같이 두 값의 존재성을 간접적으로 확인할 수 있다.



함수 $y=xe^{x^2}$ 이 점 $(0,0)$ 의 좌우에서 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀐다. 즉, 이계도함수의 부호가 바뀌기 때문에 점 $(0,0)$ 을 변곡점으로 갖는다. 함수 $y=f(x)$ 는 $y=x$ 에 대한 대칭성에 의해 점 $(0,0)$ 의 좌우에서 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀐다. 따라서 함수 $y=f(x)$ 도 점 $(0,0)$ 을 변곡점으로 갖는다. 그러므로 $\lim\limits_{t\to+0} f''(t)=0$ 이다.

실제로 $\lim\limits_{t\to+0} f'(t)=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{e^{-t^2}}{1+2t^2}=1$,

$\lim\limits_{t\to+0} f''(t)=\lim\limits_{t\to+0}-\dfrac{2e^{-2t^2}t(2t^2+3)}{(2t^2+1)^3}=0$ 이다. (이는 역함수 미분법 및 매개변수 미분법에 의해 나온 결과이며, 출제 의도와는 관계없습니다.)

[출제자의 말]

$g(x)$ 의 식 $g(x) = \begin{cases} 6xf'(x) & (0 \quad x \leq e) \\ 2(x-e)g'(x-e)+k & (e < x < 2e) \end{cases}$ 에서

$g(2e)$ 값이 왜 빠져있는지 의문인 분들이 있을 것 같습니다. 저것은 오타가 아니고 문제 출제의 제약과 의도 상 일부러 주지 않은 것입니다.

① $g'(e)$ 의 값이 정의되지 않으므로

$g(x) = \begin{cases} 6xf'(x) & (0 \leq x \leq e) \\ 2(x-e)g'(x-e)+k & (e < x \leq 2e) \end{cases}$ 라 줄 경우

$g(2e) = eg'(e)+k$ 값이 정의되지 않습니다.

또한 미분가능성을 열린구간에서 확인하는 것처럼, 도함수의 함숫값도 열린구간에서 주는 것이 맞다고 판단했습니다.

②

$$g(x) = \begin{cases} 6xf'(x) & (0 \leq x \leq e) \\ 2(x-e)g'(x-e)+k & (e < x < 2e) \\ \dfrac{14}{9} & (x = 2e) \end{cases}$$

로 주는 방법도 있겠지만,

$\lim\limits_{x \quad 2e-0} (x-e)g'(x-e)+k = \dfrac{14}{9}$ 를 이용하여 k 값을 구하는 것이 문제의 의도가 아니기 때문에 배제시켰습니다.

③ 굳이 $x = 2e$ 에서의 연속성 여부에 관계없이 $\int_0^{2e} g(x)\,dx$ 값은 일정하므로 줄 필요 없지 않느냐는 분도 있겠지만, 고교 과정에서는 연속함수에서의 적분만을 묻기 때문에 배제시켰습니다.

이러한 이유들로 인해 본 문제의 표현과 같이 닫힌구간 $[0, 2e]$ 에서 연속이고 $g(2e)$ 값이 자동적으로 결정이 되면서 그 값에 관계없이 정적분 $\int_0^{2e} g(x)\,dx$ 값을 구하도록 했습니다.

☺ 같이 풀어보면 좋은 문제

-2014년도 9월 평가원 B형

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1})+5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2+4$ 이다.

$\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae+b$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오.

(단, a, b 는 정수이다.) [4점]