제2교시

17머스크

[출처] 2022 대원외고 1-1 기말 수상 21 [1.80점]

••••어려움6

1. 좌표평면 위의 서로 다른 6개의 점 A, B, C, D, E, F에 대하여 두 이등변삼각형 ABC, DEF는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{EDF} = 120^\circ$
(나) $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{DE}} = 4$

두 이등변삼각형 ABC, DEF의 외심의 좌표가 $(0, 0)$일 때, 삼각형 DBC의 넓이의 최댓값을 구하시오.

••••어려움6

2. 이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$의 근이 모두 유리수가 되도록 하는 6 이하의 두 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

[출처] 2023 휘문고 1-1 중간 수상 11 [4.60점]

••••어려움5

3. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2 + (2k+2)x + k + 5 = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 값을 모두 구하시오.

[출처] 2022 영동일고 1-1 중간 수상 5 [3.00점]

••••어려움5

4. x에 대한 이차방정식

$$x^2 - 4(k-a)x + 4k^2 - a^2 + 8b - 1 = 0$$

이 실수 k의 값과 관계없이 중근을 가질 때, 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{8}$ ③ 0

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

[출처] 2022 반포고 1-1 중간 수상 9 [4.40점]

•••◦어려움6

5. 두 자연수 a, b에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2+(ab^2+a)x-2ab-72=0$$

의 두 근을 α, β라 하자. $\alpha+\beta=\alpha\beta$일 때, 모든 b의 값의 합은?

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

[출처] 2023 진선여고 1-1 중간 수상 8 [4.60점]

•••◦어려움6

6. $abc\neq0$인 실수 a, b, c에 대하여 등식 $a^3+c^3+3abc=b^3$이 성립할 때,

$$ax^2+bx+c=0 \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 p의 값은?

> 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖고, 두 실근의 합과 곱은 각각 -5, p이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2023 은광여고 1-1 중간 수상 17 [5.00점]

•••◦어려움6

7. 다음 조건을 만족시키는 소수 p의 개수는?

> (가) a는 13의 배수인 두 자리의 자연수이다.
> (나) 이차방정식 $x^2-ax+3p=0$의 두 근은 서로 다른 자연수이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 명덕고 1-1 중간 수상 15 [4.40점]

•••◦어려움6

8. 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+1$의 그래프와 만나지 않고, 이차함수 $y=-x^2+4x-5$의 그래프와도 만나지 않을 때, 정수 k의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

[출처] 2014년 교육청 고2문과 3월 19 [4.00점]

••◦◦보통4

9. 이차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱은 7이다.
(나) 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $f(\alpha)+f(\beta)=3$이다.

$f(7)$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2022 청담고 1-1 중간 수상 13 [5.30점]

•••◦어려움5

10. 이차함수

$$y=x^2+ax-a-2$$

의 그래프는 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 점 P를 꼭짓점으로 하고 최고차항의 계수가 2인 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표의 곱은?

① -2 ② $-\frac{1}{2}$ ③ -1
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

[출처] 2022 보인고 1-1 기말 수상 10 [2.60점]

•••◦어려움5

11. 이차항의 계수와 그래프의 꼭짓점의 좌표가 모두 자연수인 이차함수 $y=f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2+x)=f(2-x)$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+2$는 한 점에서 만난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+11-k^2$이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 k의 개수는?

[출처] 2021년 교육청 고1공통 6월 26

•••◦어려움6

12. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+5$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.

(가) a, b는 음의 정수이다.
(나) $1\le x\le 2$일 때, 이차함수 $f(x)$의 최댓값은 3이다.

[출처] 2023 세화고 1-1 중간 수상

•••◦어려움6

13. 상수 k에 대하여 x의 값의 범위가 $-1 \le x \le 2$일 때, 이차함수 $y=x^2-2x+k$의 최솟값은 -3이다. 이 범위에서 이 이차함수의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 영동일고 1-1 중간 수상 16 [4.00점]

•••◦어려움6

14. 음이 아닌 두 실수 x, y가 $2x+y=4$를 만족시킬 때, $3x^2+4y+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하자. $M-m$의 값은?

① $-\frac{64}{7}$ ② $-\frac{8}{7}$ ③ $\frac{8}{7}$
④ $\frac{64}{7}$ ⑤ $\frac{144}{7}$

[출처] 2023 은광여고 1-1 중간 수상 14 [4.80점]

•••◦어려움6

15. $-6 \le x \le 3$에서 정의된 이차함수 $f(x)$가

$$f(-5)=f(1),\ |f(-5)|+f(2)=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최솟값이 -25일 때, $f(-3)$의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19
④ 21 ⑤ 23

[출처] 2023 영동고 1-1 중간 수상 13 [1.10점]

•••◦어려움6

16. 최고차항의 계수가 1인 두 이차식 $f(x)$와 $g(x)$에 대해 다항식 $f(x)g(x)$는 $(x-2)(x+2)(x+3)$으로 나누어떨어진다. 이차함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 최솟값 -9를 가질 때, $f(-5)+g(-1)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[출처] 2023 중동고 1-1 중간 수상 18 [5.00점]

••••어려움5

17. 실수 t에 대하여 $-2 \le x \le 2$에서 함수

$$f(x)=x^2-4|x-t|+4$$

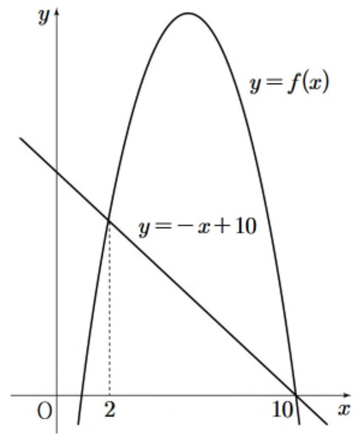
의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 방정식 $g(x)=2x+k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2020년 교육청 고1공통 6월 20

••••어려움6

18. 그림은 이차함수 $f(x)=-x^2+11x-10$의 그래프와 직선 $y=-x+10$을 나타낸 것이다. 직선 $y=-x+10$위의 한 점 $\mathrm{A}(t,\ -t+10)$에 대하여 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 C, 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선과 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?

$\left(\text{단, } 2<t<10,\ t \ne \dfrac{11}{2}\text{이다.}\right)$

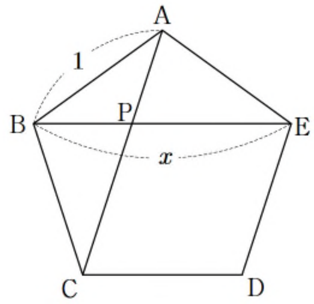


① 30 ② 33 ③ 36
④ 39 ⑤ 42

[출처] 2021년 교육청 고1공통 6월 20

•••◦어려움6

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정오각형 ABCDE가 있다. 두 대각선 AC와 BE가 만나는 점을 P라 하면 $\overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{PE}} = \overline{\mathrm{PE}} : \overline{\mathrm{BP}}$가 성립한다.



대각선 BE의 길이를 x라 할 때,

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8=p+q\sqrt{5}$$

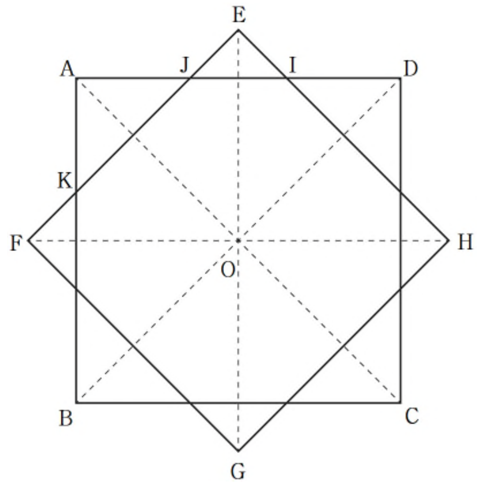
이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 유리수이다.)

① 22 ② 23 ③ 24 ④ 25 ⑤ 26

[출처] 2020년 교육청 고1공통 6월 29

•••◦어려움6

20. $\frac{\sqrt{2}}{2}<k<\sqrt{2}$인 실수 k에 대하여 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 2, $2k$인 두 정사각형 ABCD, EFGH가 있다. 두 정사각형의 대각선이 모두 한 점 O에서 만나고, 대각선 FH가 변 AB를 이등분한다. 변 AD와 EH의 교점을 I, 변 AD와 EF의 교점을 J, 변 AB와 EF의 교점을 K라 하자. 삼각형 AKJ의 넓이가 삼각형 EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배가 되도록 하는 k의 값이 $p\sqrt{2}+q\sqrt{6}$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.)



[출처] 2022년 교육청 고1공통 6월 20 [4.00점]

••••어려움6

21. 모든 실수 x에 대하여 다항식 $P(x)$가

$$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$$

를 만족시킬 때, 모든 $P(1)$의 값의 합은? (단, a는 실수이다.)

① -9 ② -8 ③ -7

④ -6 ⑤ -5

[출처] 2022년 교육청 고1공통 9월 29

••••어려움6

22. 두 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근은 α, β이고, 이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근은 $\alpha+2$, $\beta+2$이다. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오.

(가) $\alpha^n+\beta^n>0$ (나) $\alpha^n+\beta^n=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}$

[출처] 2021년 교육청 고1공통 6월 28

••••어려움6

23. x에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|<12$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

[출처] 2023년 교육청 고1공통 9월 21 [4.00점]

••••매우어려움7

24. 이차함수 $f(x)$와 이차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$\{x-f(k)\}\{x-g(k)\}=0$$

이 서로 다른 두 실근 0, 4를 갖도록 하는 모든 실수 k의 개수가 3이다. $f(2)=4$일 때, $g(8)-f(8)$의 값은?

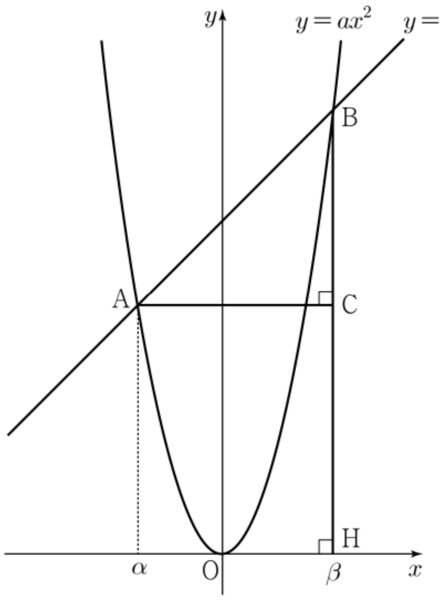
① 62 ② 64 ③ 66

④ 68 ⑤ 70

[출처] 2023년 교육청 고1공통 6월 17 [4.00점]

••••어려움6

25. 그림과 같이 이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와 직선 $y=x+6$이 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BH에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{\mathrm{BC}}=\frac{7}{2}$일 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은? (단, $\alpha<\beta$)



① $\frac{23}{4}$ ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$
④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{31}{4}$

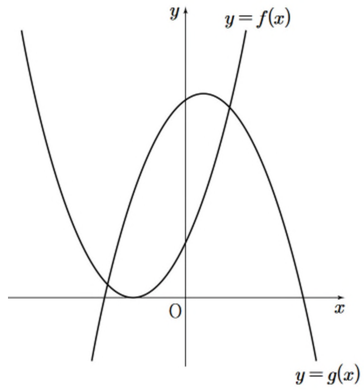
[출처] 2020년 교육청 고1공통 6월 16

••••어려움6

26. 두 이차함수

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=-x^2+cx+d$$

에 대하여 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축에 접하고, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 제1사분면과 제2사분면에서 만난다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a^2-4b=0$
ㄴ. $a^2-4d<0$
ㄷ. $(a-c)^2-8(b-d)>0$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021년 교육청 고1공통 9월 21

•••◦어려움6

27. 실수 k에 대하여 이차함수 $y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되도록 하는 서로 다른 k의 개수를 n, k의 최댓값을 M이라 하자. $n+M$의 값은?
(단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)

① $7+\sqrt{3}$ ② $7+2\sqrt{3}$ ③ $7+3\sqrt{3}$
④ $9+2\sqrt{3}$ ⑤ $9+3\sqrt{3}$

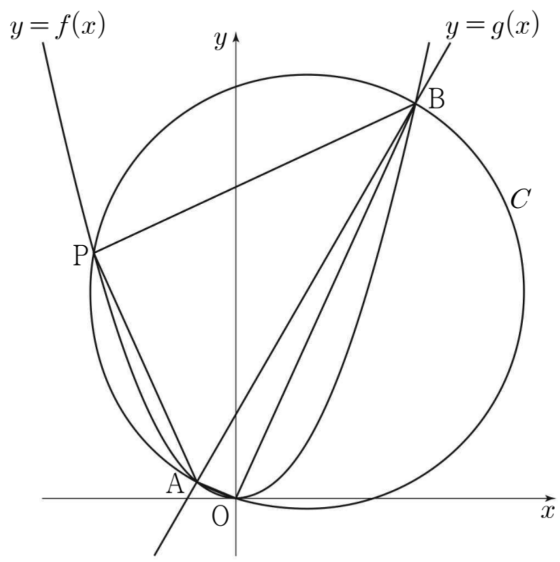
[출처] 2022년 교육청 고1공통 11월 30 [4.00점]

•••◦어려움6

28. 두 양수 a, m에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=ax^2$,
$g(x)=mx+4a$

라 하자. 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 만나는 두 점을 A, B라 할 때, 선분 AB를 지름으로 하고 원점 O를 지나는 원 C가 있다. 원 C와 곡선 $y=f(x)$는 서로 다른 네 점에서 만나고, 원 C와 곡선 $y=f(x)$가 만나는 네 점 중 O, A, B가 아닌 점을 P$(k, f(k))$라 하자. 삼각형 ABP의 넓이가 삼각형 AOB의 넓이의 5배일 때, $f(k)\times g(-k)$의 값을 구하시오.



[출처] 2020년 교육청 고1공통 6월 19

•••◦어려움6

29. 이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 두 점에서 만날 때, 그 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자. 세 점 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$, $\mathrm{B}(\beta, f(\alpha))$, $\mathrm{C}(\beta, f(\beta))$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 넓이가 8일 때, $f(6)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 28 ② 29 ③ 30
④ 31 ⑤ 32

[출처] 2020년 교육청 고1공통 6월 17

•••◦어려움6

30. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2+n^2$과 $g(x)=2nx+1$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 점 A와 B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. 네 점 A, B, C, D를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 66이 되도록 하는 n의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

고3에 필요한 고1 문제 모음(빠른 정답)

(가제)고1 2500제 2023.09.09

1. [정답] $5\sqrt{3}$
2. [정답] 7
3. [정답] 2
4. [정답] ④
5. [정답] ④

6. [정답] ④
7. [정답] ②
8. [정답] ②
9. [정답] ⑤
10. [정답] ④

11. [정답] ③
12. [정답] 3
13. [정답] ①
14. [정답] ⑤
15. [정답] ⑤

16. [정답] ①
17. [정답] 7
18. [정답] ③
19. [정답] ①
20. [정답] 50

21. [정답] ②
22. [정답] 6
23. [정답] 120
24. [정답] ④
25. [정답] ②

26. [정답] ⑤
27. [정답] ②
28. [정답] 48
29. [정답] ①
30. [정답] ④

고3에 필요한 고1 문제 모음(해설)

(가제)고1 2500제 2023.09.09

1) [정답] $5\sqrt{3}$

2) [정답] **7**

[해설]
방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근이 모두 유리수이므로
방정식의 근은 근의 공식에 의하여
$x=\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}$
따라서 m^2-4n이 제곱수가 되어야 두 근이 유리수가 된다.
자연수 m, n이 6 이하의 자연수이므로
$m=6$일 때 $n=5$
$m=5$일 때 $n=4$
$m=4$일 때 $n=3$ 또는 $n=4$
$m=3$일 때 $n=2$
$m=2$일 때 $n=1$
$m=1$일 때 주어진 조건을 만족시키는 n은 존재하지 않는다.
따라서 이차방정식의 근이 모두 유리수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

3) [정답] 2

4) [정답] ④

5) [정답] ④

6) [정답] ④

7) [정답] ②

8) [정답] ②

9) [정답] ⑤

[해설]
조건 (가)에서 이차항의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 곱이 7이므로
$f(x)=x^2+ax+7$ (a는 상수)
라 놓을 수 있다.
조건 (나)에서 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$
$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7$
따라서 $f(\alpha)+f(\beta)=3$에서
$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+\beta^2)+a(\alpha+\beta)+14=7+3a+14=3$
$\therefore a=-6$
$f(x)=x^2-6x+7$이므로 $f(7)=14$

10) [정답] ④

11) [정답] ③

12) [정답] **3**

[해설]
이차함수 $f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+5$에서
꼭짓점의 x좌표는 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$이고, $a<0$이므로
$1\le x\le 2$에서 이차함수 $y=f(x)$는 감소한다.
이차함수 $y=f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a+b+5=3$이다.
$a+b=-2$이고 a, b는 음의 정수이므로 $a=-1$, $b=-1$이다.
따라서 $f(-2)=4a-2b+5=-4+2+5=3$이다.

13) [정답] ①

14) [정답] ⑤

15) [정답] ⑤

16) [정답] ①

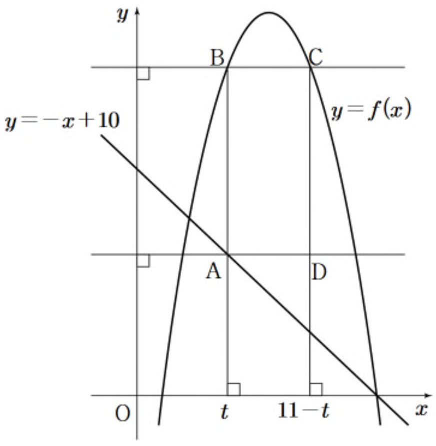
17) [정답] 7

18) [정답] ③

[해설]
이차방정식 $-x^2+11x-10=-x+10$의 근은 $x=2$, 10이므로 두 점 (2, 8)과 (10, 0)에서 두 그래프가 만난다.
$\mathrm{A}(t,\ -t+10)$, $\mathrm{B}(t,\ -t^2+11t-10)$라 하면 선분 AB의 길이는

$$-t^2+11t-10-(-t+10)=-t^2+12t-20$$

(ⅰ) $2<t<\frac{11}{2}$인 경우



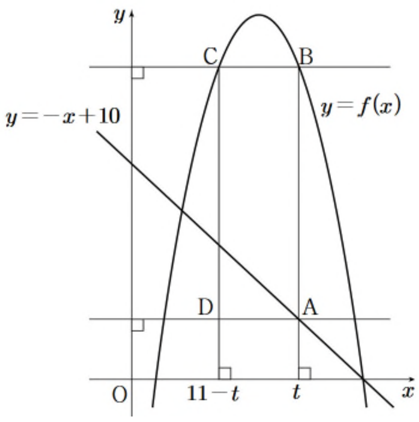
선분 BC의 길이는 $2\times\left(\frac{11}{2}-t\right)=11-2t$이다.

직사각형 BADC의 둘레의 길이는

$$2(-t^2+10t-9)=-2(t-5)^2+32$$

$2<t<\frac{11}{2}$에서 직사각형 BADC의 둘레의 길이의 최댓값은 32이다.

(ⅱ) $\frac{11}{2}<t<10$인 경우



선분 BC의 길이는 $2\times\left(t-\frac{11}{2}\right)=2t-11$이다.

직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$2(-t^2+14t-31)=-2(t-7)^2+36$$

$\frac{11}{2}<t<10$에서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 36이다.

19) [정답] ①

[해설]

정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times 3}{5}=108^\circ$이다.

$\triangle$ABE는 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{BAE}=108^\circ$이므로 $\angle\mathrm{ABE}=36^\circ$이다.

$\triangle$BAC는 이등변삼각형이고 $\angle\mathrm{ABC}=108^\circ$이므로 $\angle\mathrm{BAC}=36^\circ$이다.

$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{ABP}=36^\circ$이므로 $\angle\mathrm{APB}=108^\circ$이고 $\angle\mathrm{APE}=72^\circ$이고 $\angle\mathrm{EAP}=72^\circ$이다.

$\triangle$APE는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{PE}}=1$이다.

$$\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{PE}}:\overline{\mathrm{BP}}$$

$$x:1=1:(x-1)$$

$$x(x-1)=1,\ x^2-x-1=0$$

$x>0$이므로 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이다.

$$x^2=x+1,$$
$$x^3=(x+1)x=2x+1,$$
$$x^4=(2x+1)x=3x+2,$$
$$x^5=(3x+2)x=5x+3,$$
$$x^6=(5x+3)x=8x+5$$

$$\begin{aligned}&1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+x^6-x^7+x^8\\&=1+(-x+x^2)+x^2(-x+x^2)+x^6(-x+x^2)\\&\qquad+x^4(-x+x^2)\\&=1+1+x^2+x^4+x^6\\&=2+(x+1)+(3x+2)+(8x+5)\\&=12x+10\\&=12\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}+10\\&=16+6\sqrt{5}\end{aligned}$$

따라서 $p=16,\ q=6$이므로 $p+q=22$

20) [정답] 50

[해설]

꼭짓점 E에서 변 AD에 내린 수선의 발을 L이라 하고 $\overline{\mathrm{JL}}=x(x>0)$라 하자.

$\triangle$EJI는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{EL}}=x$이고 $\triangle$EJI의 넓이는 x^2이다.

$\overline{\mathrm{AJ}}=1-x$이므로 $\triangle$AKJ의 넓이는 $\frac{(1-x)^2}{2}$이다.

$\triangle$AKJ의 넓이가 $\triangle$EJI의 넓이의 $\frac{3}{2}$배이므로

$$\frac{(1-x)^2}{2}=\frac{3}{2}x^2,\qquad 2x^2+2x-1=0$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\ (x>0)$$

$\overline{\mathrm{OE}}=\sqrt{2}k$이고,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OE}}&=\overline{\mathrm{OL}}+\overline{\mathrm{EL}}\\&=1+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이므로 $\sqrt{2}k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

즉, $k=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 이므로 $p=q=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 100(p+q)=50$

21) [정답] ②

[해설]

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4=x^2-3ax+2a^2+4$ 이다.

x에 대한 이차방정식 $x^2-3ax+2a^2+4=0$이 중근을 가지므로 판별식 $D=(3a)^2-4(2a^2+4)=0$이다.

$(3a)^2-4(2a^2+4)=9a^2-8a^2-16=a^2-16=0$ 이므로 $a=4$ 또는 $a=-4$이다.

(i) $a=4$인 경우

$\{P(x)+2\}^2=x^2-12x+36=(x-6)^2$

이므로 $P(x)+2=x-6$ 또는 $P(x)+2=-x+6$에서

$P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$이다.

(ii) $a=-4$인 경우

$\{P(x)+2\}^2=x^2+12x+36=(x+6)^2$

이므로 $P(x)+2=x+6$ 또는 $P(x)+2=-x-6$ 에서

$P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$이다.

(i)과 (ii)에 의해 조건을 만족시키는 일차다항식 $P(x)$는 $x-8$, $-x+4$, $x+4$, $-x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 -7, 3, 5, -9이다.

따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은 $(-7)+3+5+(-9)=-8$이다.

[다른 풀이]

$\{P(x)+2\}^2=(x-a)(x-2a)+4$에서 다항식 $P(x)$는 일차식이다.

$P(x)=px+q\ (p\neq 0)$라 하자.

$(px+q+2)^2=(x-a)(x-2a)+4$에서

$p^2x^2+(2pq+4p)x+q^2+4q+4=x^2-3ax+2a^2+4$ 이므로

$p^2=1$, $2pq+4p=-3a$,

$q^2+4q+4=2a^2+4$이다.

(i) $p=1$인 경우

$2q+4=-3a$, $q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$이므로 $q=4$ 또는 $q=-8$이다.

따라서 $P(x)=x+4$ 또는 $P(x)=x-8$이다.

(ii) $p=-1$인 경우

$-2q-4=-3a$, $q^2+4q=2a^2$에서 $(q-4)(q+8)=0$

이므로 $q=4$ 또는 $q=-8$이다.

따라서 $P(x)=-x+4$ 또는 $P(x)=-x-8$이다.

그러므로 $P(x)$는 $x+4$, $x-8$, $-x+4$, $-x-8$이고 모든 $P(1)$의 값은 5, -7, 3, -9이다.

따라서 모든 $P(1)$의 값의 합은 $5+(-7)+3+(-9)=-8$이다.

22) [정답] 6

[해설]

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$ …… ㉠, $\alpha\beta=b$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+3ax+3b=0$의 서로 다른 두 근이 $\alpha+2$, $\beta+2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-3a$ …… ㉢

$(\alpha+2)(\beta+2)=3b$ …… ㉣

㉠, ㉢에서

$-a+4=-3a$, $a=-2$

㉠, ㉡을 ㉣에 대입하면

$b+2\times2+4=3b$, $b=4$

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=4$

$\alpha^2-2\alpha+4=0$에서 $\alpha^3=-8$

$\beta^2-2\beta+4=0$에서 $\beta^3=-8$이므로

$\alpha+\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times4=-4$

$\alpha^3+\beta^3=(-8)+(-8)=-16$

$\alpha^4+\beta^4=\alpha^3\times\alpha+\beta^3\times\beta=-8(\alpha+\beta)=-16$

$\alpha^5+\beta^5=\alpha^3\times\alpha^2+\beta^3\times\beta^2=-8(\alpha^2+\beta^2)=32$

$\alpha^6+\beta^6=(\alpha^3)^2+(\beta^3)^2=(-8)^2+(-8)^2=128$

$\alpha^7+\beta^7=(\alpha^3)^2\times\alpha+(\beta^3)^2\times\beta=64(\alpha+\beta)$

$=128$

따라서 $\alpha^6+\beta^6=\alpha^7+\beta^7=128$이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 6

23) [정답] **120**

[해설]

근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=-b$이므로

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=(-2a)^2+4b$$
$$=4a^2+4b$$

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{a^2+b}<12$ (a, b는 자연수)이므로

$a^2+b<36$이다.

$a=1$일 때, $b<35$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $\cdots$, $(1,\ 34)$로 개수는 34이다.

$a=2$일 때, $b<32$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $\cdots$, $(2,\ 31)$로 개수는 31이다.

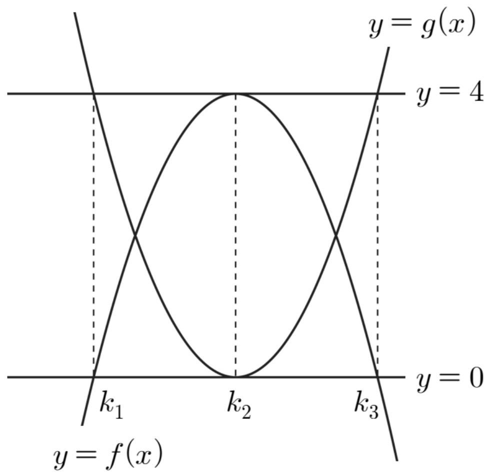
$a=3$일 때, $b<27$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 26)$으로 개수는 26이다.
$a=4$일 때, $b<20$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ \cdots,\ (4,\ 19)$로 개수는 19이다.
$a=5$일 때, $b<11$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 10)$으로 개수는 10이다.
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 총 개수는

$$34+31+26+19+10=120$$

24) [정답] ④

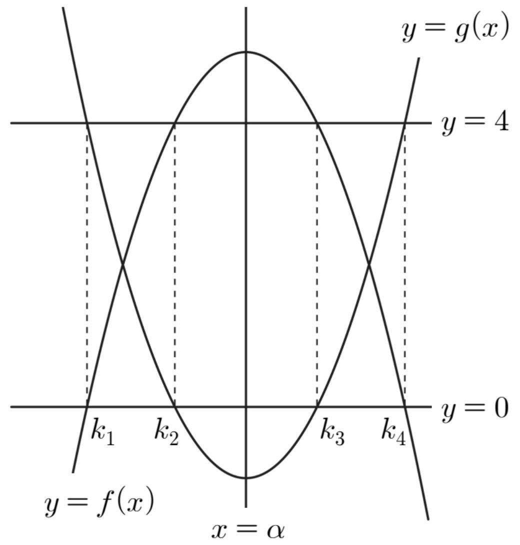
[해설]
x에 대한 이차방정식
$\{x-f(k)\}\{x-g(k)\}=0$이 서로 다른 두 실근
0, 4를 갖기 위해서는 실수 k에 대하여
$\begin{cases} f(k)=0 \\ g(k)=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(k)=4 \\ g(k)=0 \end{cases}$이다.
조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가
3이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프가 두 직선
$y=0,\ y=4$와 만나는 서로 다른 점의 개수는
3 또는 4이다.

(ⅰ) 만나는 점의 개수가 3인 경우
만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기 순서대로
$k_1,\ k_2,\ k_3$이라 하자.
$g(k_1)=4,\ g(k_2)=0,\ g(k_3)=4$이고
조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가 3이므로
함수 $y=f(x)$의 그래프는 세 점 $(k_1,\ 0),\ (k_2,\ 4),\ (k_3,\ 0)$을
모두 지나야 한다.



$f(2)=4$이므로 $k_2=2$이고 함수 $y=g(x)$의
그래프가 점 $(2,0)$에서 직선 $y=0$에 접하므로
$g(x)=(x-2)^2$
함수 $y=g(x)$의 그래프가
두 점 $(k_1,\ 4),\ (k_3,\ 4)$를 지나므로
$(x-2)^2=4$에서 $x=0$ 또는 $x=4$
$k_1=0,\ k_3=4$
함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(2,4)$에서
직선 $y=4$에 접하므로
$f(x)=a(x-2)^2+4\ (a<0)$이고
두 점 $(0,0),\ (4,0)$을 지나므로
$f(0)=f(4)=4a+4=0,\ a=-1$
$f(x)=-(x-2)^2+4$

(ⅱ) 만나는 점의 개수가 4인 경우



만나는 점의 x좌표를 작은 수부터 크기 순서대로
$k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$라 하자.
$g(k_1)=4,\ g(k_2)=0,\ g(k_3)=0,\ g(k_4)=4$이고 함수
$y=g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 x좌표를
α라 하면 $\dfrac{k_1+k_4}{2}=\dfrac{k_2+k_3}{2}=\alpha$ …… ㉠
$k_1<k_2<\alpha<k_3<k_4$
조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수가
3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 네 점
$(k_1,\ 0),\ (k_2,\ 4),\ (k_3,\ 4),\ (k_4,\ 0)$
중 세 점만을 지나야 한다.

(ㄱ) 두 점 $(k_1,\ 0),\ (k_4,\ 0)$을 지나는 경우
㉠에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의
x좌표는 α이고 이차함수의 그래프의 성질에 의하여
함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점
$(k_2,\ 4),\ (k_3,\ 4)$ 중 한 점만을 지날 수 없으므로 모든
실수 k의 값이 $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$로 4개가 되어 조건을
만족시키지 않는다.

(ㄴ) 두 점 $(k_2,\ 4),\ (k_3,\ 4)$를 지나는 경우
㉠에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의
x좌표는 α이고 이차함수의 그래프의 성질에 의하여
함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점
$(k_1,\ 0),\ (k_4,\ 0)$ 중 한 점만을 지날 수 없으므로 모든
실수 k의 값이 $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$로 4개가 되어 조건을
만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$g(x)=(x-2)^2$, $f(x)=-(x-2)^2+4$

따라서 $g(8)-f(8)=36-(-32)=68$

25) [정답] ②

[해설]

이차함수 $y=ax^2$ $(a>0)$의 그래프와

직선 $y=x+6$이 만나는 점의 x좌표는 $ax^2=x+6$에서

이차방정식 $ax^2-x-6=0$의 두 실근 α, β $(\alpha<\beta)$와

같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\frac{6}{a}$

한편, $\overline{\mathrm{CA}}=\beta-\alpha$이고 직선 $y=x+6$의 기울기가

1이므로 $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{CA}}}=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\beta-\alpha}=1$에서 $\beta-\alpha=\overline{\mathrm{BC}}=\frac{7}{2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$\left(\frac{7}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{a}\right)^2-4\times\left(-\frac{6}{a}\right)$

$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{24}{a}-\frac{49}{4}=0$이므로 $49a^2-96a-4=0$에서

$(49a+2)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$

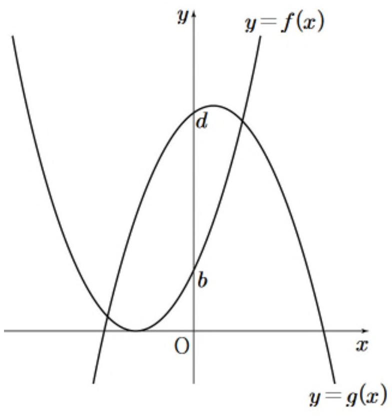
따라서

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{6}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}+6=\frac{25}{4}\end{aligned}$$

이다.

26) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $f(x)=0$의 판별식 $D=a^2-4b=0$이다. (참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $b=\frac{a^2}{4}$이므로 $a^2-4d=4b-4d$이다.

$b-d<0$이므로 $a^2-4d<0$이다. (참)

ㄷ. 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$x^2+ax+b=-x^2+cx+d$

$2x^2+(a-c)x+b-d=0$의 판별식

$D=(a-c)^2-8(b-d)>0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27) [정답] ②

[해설]

$y=(x-k)^2-2$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만나므로

$(x-k)^2-2=2$, $(x-k)^2=4$

$x=k-2$ 또는 $x=k+2$

따라서 $\mathrm{A}(k-2,\ 2)$, $\mathrm{B}(k+2,\ 2)$

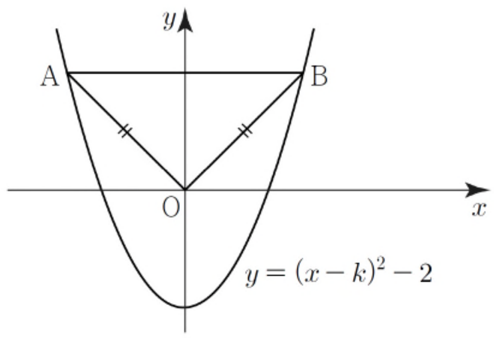
$\overline{\mathrm{AB}}=(k+2)-(k-2)=4$

삼각형 AOB가 이등변삼각형이 되는 경우는

(ⅰ) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 경우

$\sqrt{(k-2)^2+2^2}=\sqrt{(k+2)^2+2^2}$

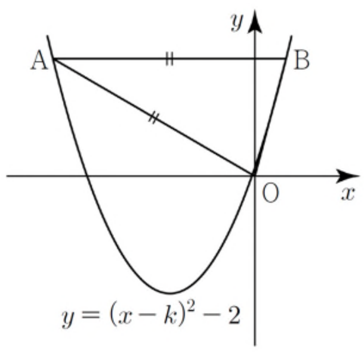
$(k-2)^2=(k+2)^2$, $k=0$



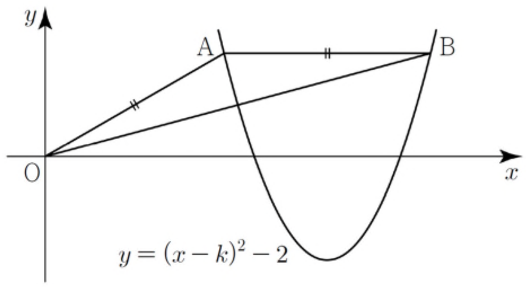
(ⅱ) $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 경우

$\sqrt{(k-2)^2+2^2}=4$, $k^2-4k-8=0$

$k=2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=2+2\sqrt{3}$



[$k=2-2\sqrt{3}$인 경우]

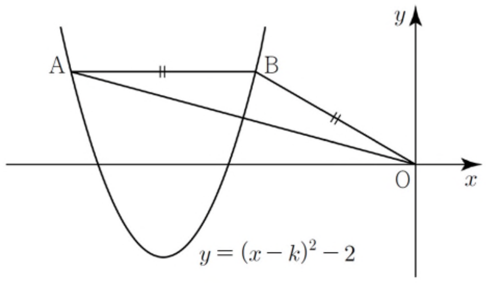


[$k=2+2\sqrt{3}$인 경우]

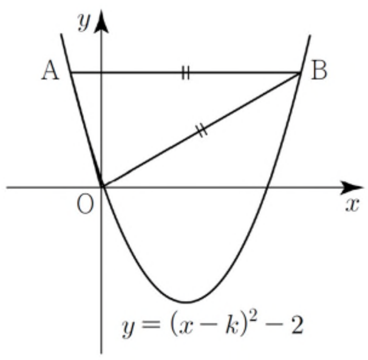
(iii) $\overline{OB}=\overline{AB}$인 경우

$\sqrt{(k+2)^2+2^2}=4$, $k^2+4k-8=0$

$k=-2-2\sqrt{3}$ 또는 $k=-2+2\sqrt{3}$



[$k=-2-2\sqrt{3}$인 경우]



[$k=2+2\sqrt{3}$인 경우]

(i), (ii), (iii)에서 $n=5$, $M=2+2\sqrt{3}$

따라서 $n+M=5+(2+2\sqrt{3})=7+2\sqrt{3}$

28) [정답] 48

[해설]

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=mx+4a$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면

$A(\alpha, a\alpha^2)$, $B(\beta, a\beta^2)$

이차방정식 $ax^2-mx-4a=0$의 두 실근이 α, β이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{m}{a}$, $\alpha\beta=-4$

선분 AB가 원 C의 지름이므로 $\angle BOA=90^\circ$

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\frac{a\alpha^2-0}{\alpha-0}\times\frac{a\beta^2-0}{\beta-0}=a\alpha\times a\beta$$

$$=a^2\times\alpha\beta$$

$$=-4a^2=-1$$

에서 양수 a의 값은 $\dfrac{1}{2}$

점 $P\left(k, \dfrac{k^2}{2}\right)$은 원 C 위의 점이므로 $\angle APB=90^\circ$

직선 PA의 기울기와 직선 PB의 기울기의 곱이 -1이므로

$$\frac{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\alpha-k}\times\frac{\frac{\beta^2}{2}-\frac{k^2}{2}}{\beta-k}=\frac{1}{4}(\alpha+k)(\beta+k)$$

$$=\frac{1}{4}\{k^2+(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$

$$=\frac{1}{4}(k^2+2mk-4)=-1$$

$k^2+2mk=0$, $k=-2m$이고 $P(-2m, 2m^2)$

점 $P(-2m, 2m^2)$과 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를 d_1이라 하면

$$d_1=\frac{|m\times(-2m)-2m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

점 O와 직선 $y=mx+2$ 사이의 거리를 d_2라 하면

$$d_2=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$$

삼각형 ABP와 삼각형 AOB의 넓이의 비는 $d_1:d_2$이므로

$\dfrac{|-4m^2+2|}{\sqrt{m^2+1}}:\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}=5:1$에서

$|-4m^2+2|=10$, $m^2=3$

m은 양수이므로 $m=\sqrt{3}$, $k=-2\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, $g(x)=\sqrt{3}x+2$이므로

$f(k)\times g(-k)=6\times8=48$

29) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^2-x+k$라 하면 방정식 $f(x)=x+1$의 두 실근이 $x=\alpha$, β이므로 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$은 $A(\alpha, f(\alpha))$, $C(\beta, f(\beta))$에서 만난다.

직선 $y=x+1$의 기울기는 1이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이며 $f(\alpha)=\alpha+1$, $f(\beta)=\beta+1$이다.

삼각형의 넓이는 $(\beta-\alpha)^2\times\dfrac{1}{2}=8$이고, $\alpha<\beta$이므로

$\beta-\alpha=4$

한편, 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=2$이므로

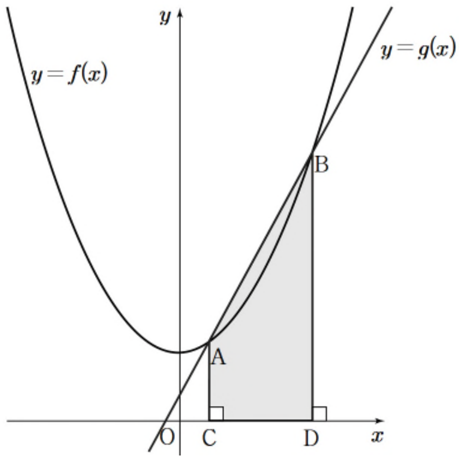
$\alpha=-1$, $\beta=3$

따라서 $k=-2$이므로 $f(x)=x^2-x-2$

$f(6)=6^2-6-2=28$

30) [정답] ④

[해설]



두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$$x^2+n^2=2nx+1, \qquad x^2-2nx+n^2-1=0$$

$$\therefore\ x=n-1 \text{ 또는 } x=n+1$$

따라서 점 $\mathrm{A}(n-1,\ 2n^2-2n+1)$, $\mathrm{B}(n+1,\ 2n^2+2n+1)$라 하면 $\mathrm{C}(n-1,\ 0)$, $\mathrm{D}(n+1,\ 0)$이다.

사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}})\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(4n^2+2)\times 2=4n^2+2$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 자연수 n은 $4n^2+2=66$

즉, $n^2=16$이므로 $n=4$