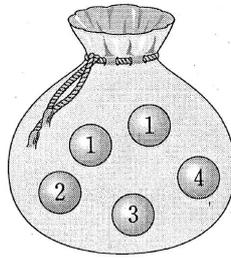


9평 B형 15번 긴급점검

: 같은 것이 포함된 것에서 일부만 뽑는 확률의 첫 등장
 ⇨ 같은 것이 있는 순열로 확률 계산하지 마세요!!

2015년 9월 평가원 15번

주머니에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 a, b, c, d 라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은?



이 문제를 다음과 같은 방식으로 푼 학생들은 꼭 주목해 주세요.

<같은 것이 있는 순열로 풀어 잘못된 풀이>

크기 순서대로 나열되는 경우는

1234, 1123, 1124, 1134 …… ②

네 가지인데

1234의 경우 4!가지

1123의 경우 $\frac{4!}{2!}$ 가지

1124의 경우 $\frac{4!}{2!}$ 가지

1134의 경우 $\frac{4!}{2!}$ 가지 …… ②

따라서, ①②에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!}} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

이 풀이의 중요한 문제점은 명백히 잘못된 풀이임에도 답은 맞다라는 점입니다.

풀이가 틀렸는데 정답과 같은 결과가 나와서 잘못된 풀이임을 알지 못하고

조건이 조금 변경되면 결국 틀리게 될 위험이 매우 크다는 점입니다.

게다가 일부 인터넷 강사 선생님들마저 이 풀이로 해설을 해 놓은 상태여서 긴급한 점검과 교정이 필요합니다.

먼저 올바른 풀이를 살펴봅시다.

올바른 풀이의 기본은 시행을 정확히 파악하고 그 의미대로 경우의 수를 구하는 것입니다.

시행은 주머니에서 임의로 4개를 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 시행을 하므로 전체의 경우의 수는

$${}_5C_4 \times 4! = 120$$

입니다.

“뽑고”, “나열한다”는 행위가 계산의 과정에 그대로 보이지요?

$$\text{뽑고} \Rightarrow {}_5C_4. \text{ 나열한다} \Rightarrow 4!$$

분자의 경우도 이 전체의 경우의 일부이므로 이 형식을 그대로 지켜서 쓰면 가장 정확한 풀이가 됩니다.

물론, “뽑고 나열한다”를 단번에 ${}_5P_4$ 로 표현해도 되지만 이 문제처럼 같은 것이 있거나 다른 조건이 붙으면 분자 계산이 오히려 어려워지는 경향이 있으므로 “뽑고”와 “나열한다”를 분리시키는 것이 더 좋습니다. 이처럼 시행을 정확하게 반영하는 방식으로 계산을 진행한 올바른 풀이는 다음과 같습니다.

<올바른 풀이>

$1_A 1_B$ 중 하나를 뽑고, 2,3,4를 모두 뽑아 $(1_{\square}, 2, 3, 4)$ 꼴로 크기순으로 나열하는 경우	$1_A 1_B$ 를 모두 뽑고, 2,3,4 중에서 2개를 뽑아 $(1_{\square}, 1_{\square}, \square, \square)$ 꼴로 크기순으로 나열하는 경우
$\frac{({}_2C_1 \times {}_3C_3) \times 1 + ({}_2C_2 \times {}_3C_2) \times 2!}{{}_5C_4 \times 4!} = \frac{2 + 6}{120} = \frac{1}{15}$	
$1_A 1_B 2, 3, 4$ 중에서 4개를 뽑고 일렬로 나열하는 전체 경우	

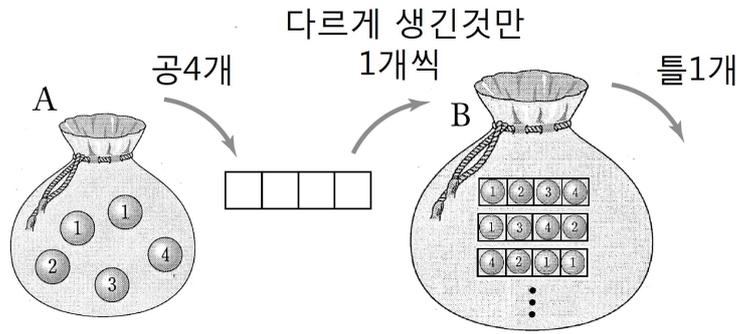
이 때, 두 개의 1을 1_A 와 1_B 로 표현한 것은 확률 계산의 가장 중요한 원칙

“확률에서는 같아 보여도 다른 것이다”

를 반영한 것입니다.

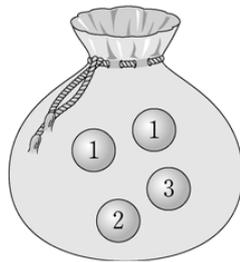
결국 첫 번째에 보여드린 <같은 것이 있는 순열로 풀어 잘못된 풀이>는 “5개중 4개를 뽑고, 일렬로 나열한다”는 시행을 생략해 버리고, 뽑아 놓은 결과들을 가지고 새로운 상황을 만들어 새로운 시행을 하는 구조입니다. 억지로라도 <같은 것이 있는 순열로 풀어 잘못된 풀이>가 어떤 상황에 맞는 풀이인지를 만들어 보면 다음과 같습니다.

주머니 A에 1, 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 주머니 A에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 그림과 같은 4개의 빈칸이 있는 틀에 임의로 넣는다. 4개의 공이 채워진 틀 중에서 서로 다른 모양인 것들을 1개씩 골라 주머니 B에 넣는다. 주머니 B에서 임의로 하나의 틀을 골라 나열된 순서대로 공에 적혀 있는 수를 a, b, c, d 라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$ 일 확률은?



뭔가 문제가 있었다는 사실이 조금 이해가 되는지요?
이제, 상황을 좀 더 단순화시켜서 명확한 이해에 도달해 봅시다.

주머니에 1, 1, 2, 3의 숫자가 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하고, 나열된 순서대로 공에 적혀있는 수를 a, b 라 할 때, $a \leq b$ 일 확률은?



<같은 것이 있는 순열로 풀어 잘못된 풀이>로 푼다면 다음과 같습니다.

크기 순서대로 나열되는 경우는
11, 12, 13, 23 …… ①

네 가지인데

11의 경우 $\frac{2!}{2!}$ 가지

12의 경우 2!가지

13의 경우 2!가지

23의 경우 2!가지 …… ②

따라서, ①②에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{\frac{2!}{2!} + 2! + 2! + 2!} = \frac{4}{7}$$

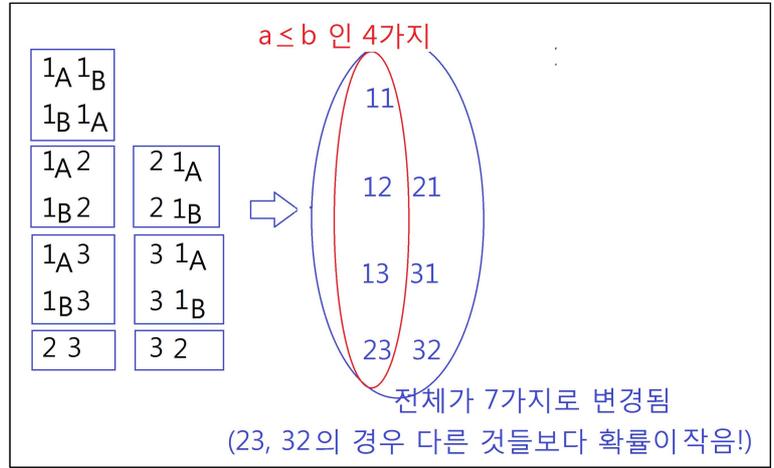
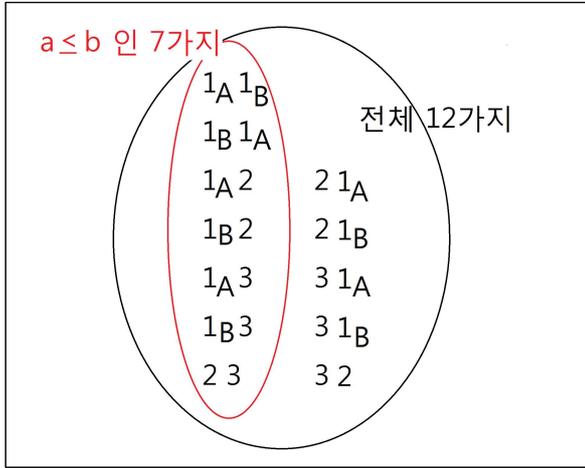
<올바른 풀이>로 푼다면 다음과 같습니다.

$$\frac{{}_2C_2 \times 2! + ({}_2C_1 \times {}_2C_1) \times 1 + {}_2C_2 \times 1}{{}_4C_2 \times 2!} = \frac{2 + 4 + 1}{12} = \frac{7}{12}$$

이제 이 둘의 차이가 왜 생기는지 모두 나열해서 확인해 봅시다.

<올바른 풀이>

<같은 것이 있는 순열로 풀어 잘못된 풀이>



자, 이제 무엇이 잘 못되었는지 이해가 되셨지요?

사실 이번 9평 이전까지의 문제의 경우 같은 것이 포함되어 있는 경우에 같은 것이 있는 순열을 써서 풀어도 확률 계산에 문제가 없었습니다.(이전까지의 문제들은 존재하는 모든 것을 배열했기 때문입니다.) 그래서 많은 학생들은 물론 여러 선생님들까지 여전히 같은 것이 순열로 확률을 계산했습니다. 이번에는 존재하는 것들 중에 일부만 뽑아 배열했기 때문에 주의해야 했음에도 정말 우연히도 정답과 같은 $\frac{1}{15}$ 이라는 결과가 나왔기에 모두들 그 위험성에 대해 제대로 모르고 있어 긴급히 분석을 해 보았습니다. 글이 너무 길어지므로 여기서 모두 배열하면 왜 문제가 발생하지 않는지는 설명하지 않겠습니다. 다만 이것만은 명심하세요.

같은 것이 포함되어 있는 경우의 확률은

첫째, 전체를 다 배열하면 같은 것을 하나로 보아 같은 것이 있는 순열로 풀어도 문제가 되지 않음

둘째, 이번 9평 15번처럼 일부만 뽑아 배열할 경우 같은 것이 있는 순열로 풀면 큰 문제가 발생할 수 있음!!!

셋째, 가장 일관되고도 쉬운 방법은 같은 것이 있는 순열을 쓰지 않고 모두 다른 것으로 처리하는 것!!!

결론 : 이제, 확률 계산에 같은 것이 있는 순열 쓰지 말자^^

<덧붙이는 말>

때마침 오늘 포카칩님이 15번에 대한 명쾌한 해설강의를 올려 놓으셨네요. 역시 포카칩님^^

(끝)