안녕하세요. 디엔티 수학연구소 대표 조민성입니다. 저희 디엔티에서 수험생 여러분들의 수학 실력 향상에 조금이나마 도움을 주고 싶다는 마음에 4~5가지 테마를 바탕으로 칼럼을 기재할 예정입니다. 한 가지 테마에 대해 기출문제를 통해 몇가지 분석을 하고 이를 바탕으로 새로 만들어진 문항들의 풀이를 이어나가려고 합니다. 많은 관심 부탁드리겠습니다.

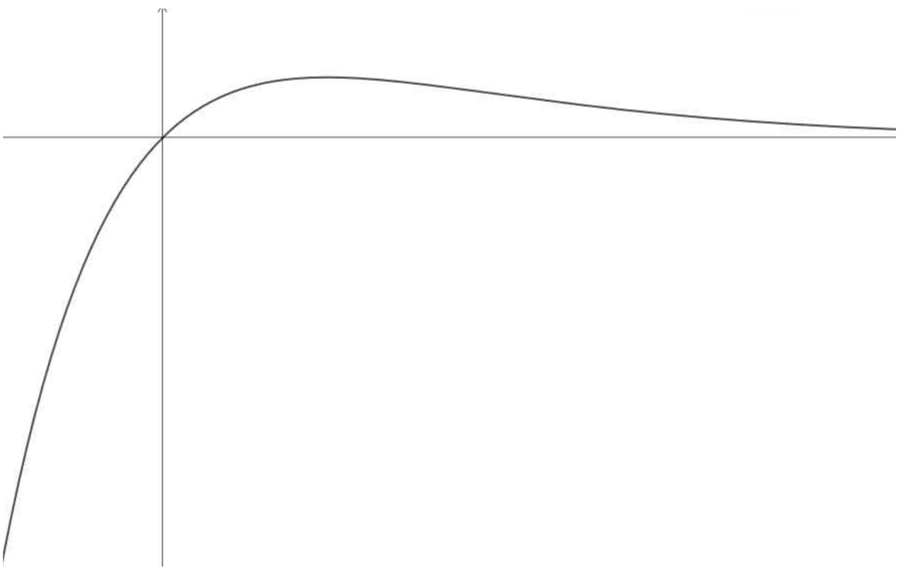
Thema (1). (다항함수)$\times e^{-x}$ 함수의 그래프 개형

최근 수능과 평가원 모의고사에서 출제된 미적분 문제를 살펴봅시다. 2013학년도 수능과 2014학년도 수능을 거쳐 이번 2016학년도 6, 9평까지 (다항함수)$\times e^{-x}$ 또는 (다항함수)$\times e^{x}$의 함수가 출제되었음을 확인할 수 있습니다. 수능 수학시험은 알고 있는 내용들을 빠르게 해결하여 시간을 확보하는 것이 중요한데, 만약 여러분이 (다항함수)$\times e^{-x}$ 함수의 그래프 개형을 알고있다면 수능에서 많은 도움이 될 것이라 생각합니다. ((다항함수)$\times e^{x}$의 함수의 그래프는 비슷한 방법으로 수험생 여러분들이 직접 추론해 보세요.)

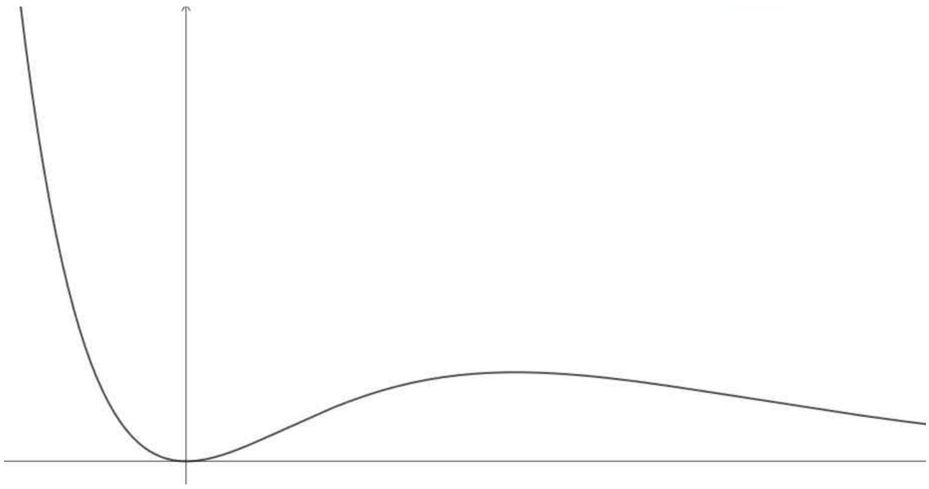
먼저 $f(x)=xe^{-x}$의 그래프를 살펴보겠습니다. 우리는 그래프를 그리기 위해 (1) x축과의 교점 (2) 함수의 점근선과 극한값 (3) 함수의 극대극소를 우선 확인해봅니다.

(1) $f(x)=xe^{-x}$은 $x=0$에서 x축과 만난다.
(2) $x\to-\infty$ 일 때 $f(x)\to-\infty$ 이고, $x\to\infty$ 일 때 $f(x)\to0$ 이다.
(3) $f'(x)=(1-x)e^{-x}$이므로 $x=1$에서 극대를 갖는다.

(1), (2), (3) 에 따라서 $f(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 갖습니다.



이번에는 $g(x)=x^2e^{-x}$의 그래프를 그려보겠습니다.
(1) $g(x)=x^2e^{-x}$은 $x=0$에서 x축과 만난다.
(2) $x\to-\infty$ 일 때 $g(x)\to\infty$ 이고, $x\to\infty$ 일 때, $g(x)\to0$ 이다.
(3) $g'(x)=x(2-x)e^{-x}$이므로 $x=0$에서 극소 $x=2$에서 극대를 갖는다. ((1)에 의해 $x=0$에서 x축에 접한다.)



따라서 $g(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 갖습니다.

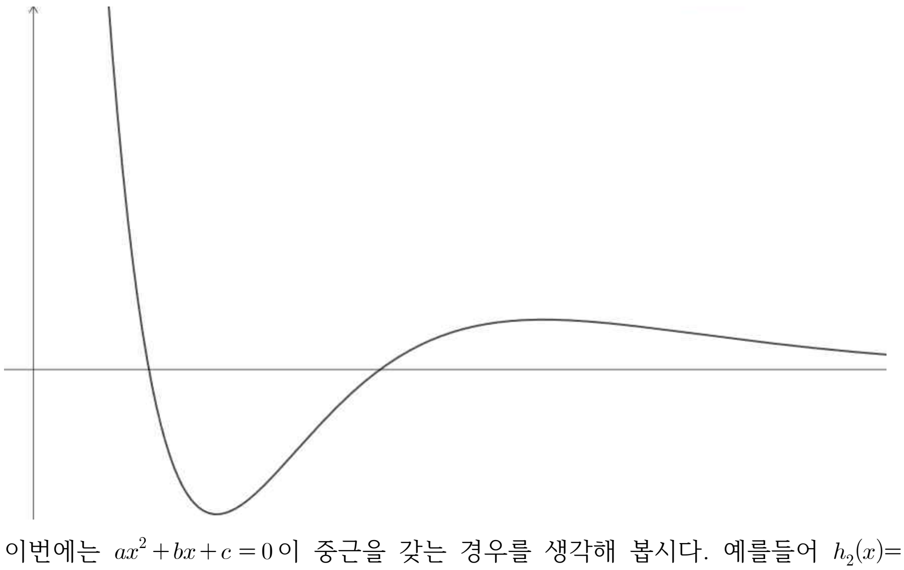
마지막으로 $h(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ $(a>0)$의 그래프를 확인해봅시다.

$h(x)$를 미분하면 $h'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$가 됩니다. 이 때, $-ax^2+(2a-b)x+b-c$의 판별식을 구해보면 $D=4a^2+b^2-4ac$ 임을 확인할 수 있네요. 즉, $h(x)$의 다항함수 부분인 ax^2+bx+c의 근의 존재유무와 $h(x)$의 극대, 극소의 존재여부는 $b^2-4ac\le 0$일 때 큰 연관성이 없다는 것을 확인할 수 있습니다. 따라서 우리는 $ax^2+bx+c=0$이 실근을 갖는 경우의 그래프를 생각해보겠습니다.

먼저 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는 경우를 생각해 봅시다. 예를들어 $h_1(x)=a(x-1)(x-3)e^{-x}$ $(a>0)$ 일 때,

(1) $h_1(x)$는 $x=1$와 $x=3$에서 x축과 만난다.
(2) $x\to-\infty$ 일 때 $h_1(x)\to\infty$ 이고, $x\to\infty$ 일 때, $h_1(x)\to 0$ 이다.
(3) $h_1{}'(x)=-(x^2-6x+7)e^{-x}$이므로 $1<x=3-\sqrt{2}<3$에서 극대를 갖고 $3<x=3+\sqrt{2}$에서 극소를 갖는다.

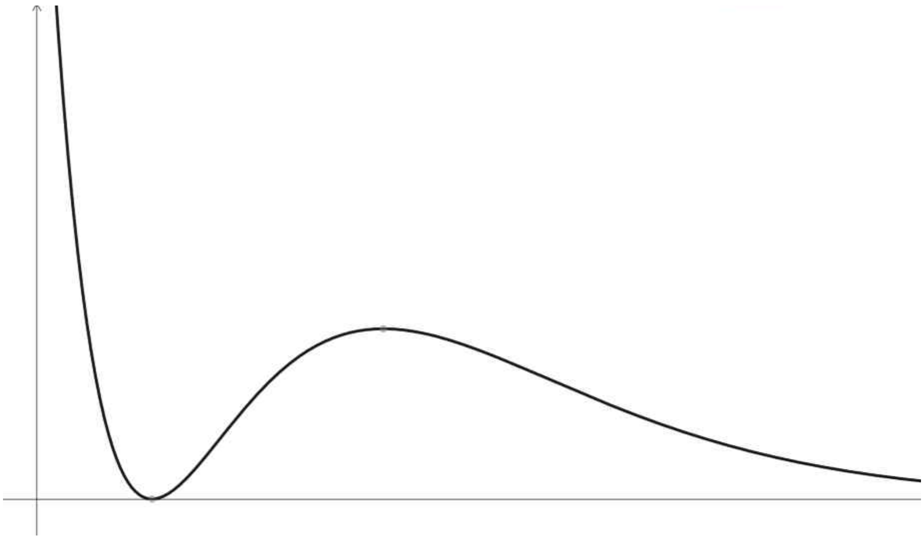
따라서 $h_1(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 갖습니다.



이번에는 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는 경우를 생각해 봅시다. 예를들어 $h_2(x)=a(x-1)^2e^{-x}(a>0)$ 일 때,

(1) $h_2(x)$는 $x=1$에서 x축과 만난다.
(2) $x \to -\infty$ 일 때 $h_2(x) \to \infty$ 이고, $x \to \infty$ 일 때, $h_2(x) \to 0$ 이다.
(3) $h_1'(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x}$이므로 $x=1$에서 극대를 갖고 $x=3$에서 극소를 갖는다. ((1)에 의해 $x=1$에서 x축에 접한다.)

따라서 $h_2(x)$의 그래프는 다음과 같은 개형을 갖습니다.



지금까지 살펴본 그래프의 개형을 통해 우리는 (다항함수)$\times e^{-x}$ 그래프의 개형을 어느정도 직관적으로 추론해 볼 수 있습니다.

<1> $y = a(x-\alpha)(x-\beta)e^{-x}$
<2> $y = a(x-\alpha)^2 e^{-x}$

Q. 다음 함수의 그래프 개형을 여러분이 그려보세요.

$y = (3x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

어느 정도 그래프의 개형에 대해 파악이 끝났다면 문제를 풀어볼까요. -> 2014학년도 수능 30번 문제 해설

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=f(x)e^{-x}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 점 $(1,\ g(1))$과 점 $(4,\ g(4))$는 곡선 $y=g(x)$의 변곡점이다. (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-1<k<0$이다.

$g(-2)\times g(4)$의 값을 구하시오.

풀이) $f(x)$가 이차함수이므로 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$g(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$

$g'(x)=-\left\{ax^2+(b-2a)x+c-b\right\}e^{-x}$

$g''(x)=\left\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\right\}e^{-x}$

(가) 조건에서 $g''(1)=g''(4)=0$이므로

$$\begin{aligned}ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c&=a(x-1)(x-4)\\&=ax^2-5ax+4a\end{aligned}$$

이 항등식을 만족한다. 따라서 계수비교법을 이용하면 $b=-a,\ c=0$

$\therefore g(x)=ax(x-1)e^{-x}$

이 때, (나) 조건에서 접점을 $(t,\ g(t))$라 가정하여 접선의 방정식을 구하면

$y-at(t-1)e^{-t}=-a\left(t^2-3t+1\right)e^{-t}(x-t)$이고, 이 직선이 점 $(0,\ k)$를 지나므로 대입하여 정리하면

$at^2(t-2)e^{-t}=k$가 된다. (지금부터 $h(t)=at^2(t-2)e^{-t}$이라 하자.)

이 때, k가 $-1<k<0$인 범위에서 접선의 개수가 3이라 했으므로 곡선 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 주어진 범위에서 3개의 교점을 가져야 한다.

여기서 우리는 $y=h(t)$의 그래프가 우리가 앞서 공부했던 (다항함수)$\times e^{-x}$의 형태임을 알 수 있다.

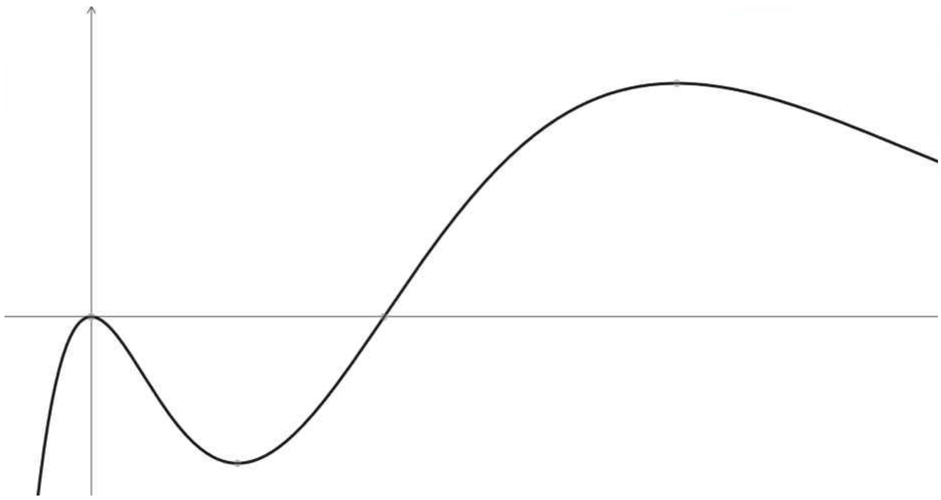
$a>0$일 때

(1) $h(t)$는 $t=0$, $t=1$에서 t축과 만난다.

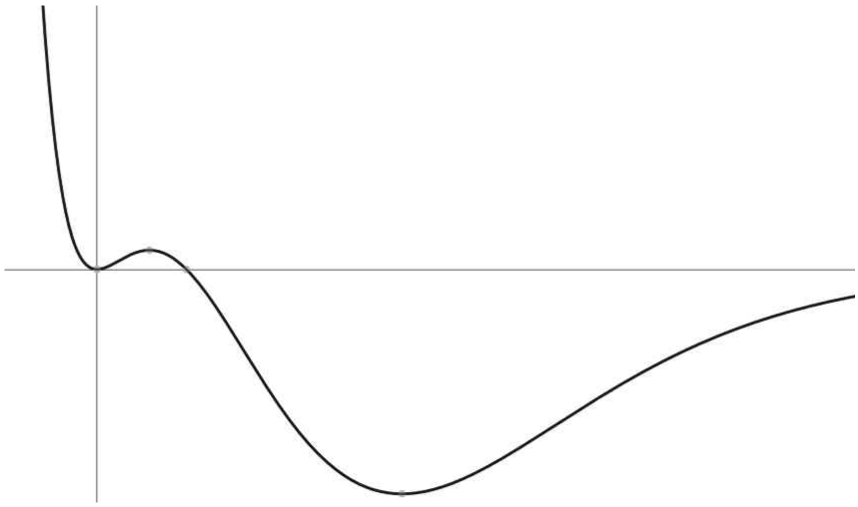
(2) $t\to-\infty$ 일 때 $h(t)\to-\infty$ 이고, $t\to\infty$ 일 때, $h(t)\to 0$ 이다.

(3) $h'(t)=-at(t-1)(t-4)e^{-t}$이므로 $t=0$, $t=4$에서 극대를 갖고 $t=1$에서 극소를 갖는다. ((1)에 의해 $t=0$에서 t축에 접한다.)

따라서 $h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이로부터 (나) 조건에 의해 극솟값 $h(1) = -1$이 됨을 알 수 있고, $a=e$가 되어 답 72를 구할 수 있다.
($a<0$인 경우 그래프 개형이 위 그래프를 x축 대칭시킨 아래의 그래프가 나오는데, 이때 $-1<k<0$인 범위에서 3개의 교점을 갖지 못함을 알 수 있다. 따라서 $a>0$이다.)



여기까지 (다항함수)$\times e^{-x}$ 함수의 그래프 개형에 대해 공부해 보았습니다. 특히나 올해 6월, 9월 모평에서 모두 (다항함수)$\times e^{x}$의 함수가 출제되었으므로 올해 수능 시험장에 들어가기 전 반드시 공부를 하고 들어가야 하는 부분이라 생각되어 저희 칼럼의 첫 번째 테마로 결정하였습니다. 다음주에는 (다항함수)$\times e^{-x}$ 또는 (다항함수)$\times e^{x}$의 함수의 그래프 개형을 이용하는 새로운 문제들을 풀어보며 위 내용을 복습하도록 하겠습니다.

얼마남지 않은 수능 최선을 다하시길 바랍니다. 모두 열공합시다!