공간도형과 회전

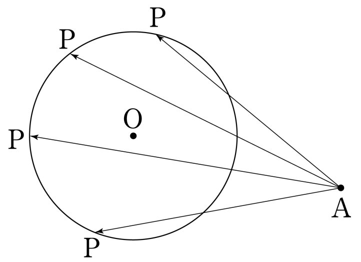
공간도형과 회전에 대하여 알아보겠습니다.
공간도형과 회전이 결합되면 문제의 난이도가 매우 높아집니다. 공간도형과 회전을 정복하기 위해서는 다음과 같은 4가지 사항을 학습해야 합니다.

① 평면에서 원과 한 점이 주어질 때
② 공간에서 원과 한 점이 주어질 때
③ 평면에서 두 원이 주어질 때
④ 공간에서 두 원이 주어질 때

최종 목표는 다음과 같습니다.
"공간상의 두 원 위를 도는 각각의 두 점 사이의 거리의 최솟값과 최댓값을 자유롭게 구한다."
(단, 공간상의 두 원 각각의 중심을 지나고 각각의 원에 수직인 두 직선은 반드시 한 점에서 만나야 한다.)

① 평면에서 원과 한 점이 주어질 때
다음 예시를 살펴보겠습니다.

ex) 평면에서 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원이 있다. 원 밖의 한 점 A 에 대하여 $\overline{OA}=2$ 일 때, 원 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.



이 문제는 어떻게 해결할까요? 우리가 옛날부터 늘 풀어왔듯이 최솟값은 1 일 것이고, 최댓값은 3 일 것이 자명합니다. 그러나 이것을 좀 더 논리적으로 분석해봅시다. 그래야만 우리는 공간도형으로 변모했을 때에도 문제를 해결하는 데에 어려움이 없을 것입니다.

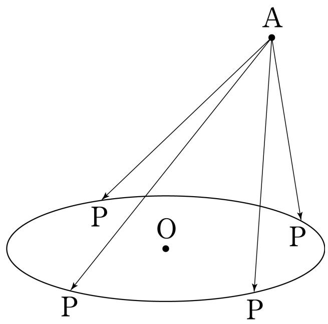
(풀이) 세 점 A, O, P 가 한 직선 위에 있지 않다면, 삼각형의 성질에 의하여 $\overline{OA}-\overline{OP}<\overline{AP}<\overline{OA}+\overline{OP}$ 가 반드시 성립한다. 한편, 세 점 A, O, P 가 한 직선 위에 있다면, 선분 AP 사이에 점 O 가 있을 때 $\overline{AP}=\overline{OA}+\overline{OP}$ 가 성립하며, 선분 AP 외부에 점 O 가 있을 때 $\overline{AP}=\overline{OA}-\overline{OP}$ 가 성립한다.
한편 $\overline{OA}=2$, $\overline{OP}=1$ 이므로 <u>세 점 A, O, P 가 한 직선 위에 있을 때 최솟값과 최댓값을 모두 갖는다.</u>

여기에서 한 직선 위에 있을 때 최솟값과 최댓값을 모두 갖는다는 것에 잠깐 주목해볼 필요가 있습니다. 이것은 차후에 공간도형에서 "한 평면 위에 있을 때 최솟값과 최댓값을 모두 갖는다."라는 사실이 뒤에 소개되는데, 그 내용의 2 차원 버전이라고 생각하면 편할 것입니다.

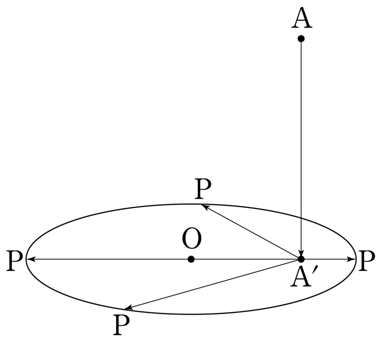
결론적으로, 위에서 점 P 는 중심이 O 인 원의 주위를 회전합니다. 따라서 회전의 대상은 주로 원이며, 이렇게 접근하는 방식의 대부분의 문제들은 모두 회전의 대상이 원이 됩니다. 예시에서는 길이만을 물었지만, 실제로 $\angle AOP$ 의 최대 최소를 통한 내적값을 물어볼 수도 있으며 이 경우에도 풀이방식은 비슷할 것입니다.

② **공간에서 원과 한 점이 주어질 때**
이것은 무엇을 뜻할까요? 다음 예시를 살펴보겠습니다.

ex) 중심이 점 O 이고 반지름의 길이가 3 인 원이 있다. 원 밖의 한 점 A 에 대하여 점 A 와 원을 포함하는 평면 사이의 거리는 4 이고 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 원 위의 점 P 에 대하여 선분 AP 의 길이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.



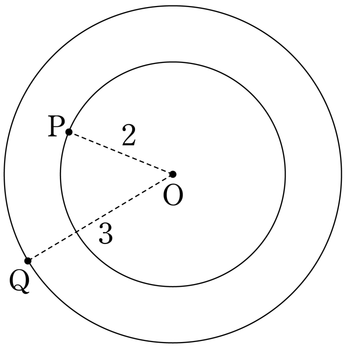
이 문제는 어떻게 해결할까요? 아까 전의 문항보다 한층 어려워졌는데, 그것은 점 A 가 원을 포함하는 평면 위에 있지 않기 때문입니다. 그러나 이것은 점 A 를 원을 포함하는 평면에 수선의 발 A′ 을 내리면 해결할 수 있습니다. 왜냐하면 교과서에서 점 A 에서 원을 포함하는 평면에 수선의 발을 내렸을 때, 원 위의 모든 점 P 에 대하여 $\angle \mathrm{AA'P}=90°$가 성립하기 때문입니다.



따라서, 점 P 가 어디에 있든 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AA'}}^2+\overline{\mathrm{A'P}}^2}$ 가 성립할 수밖에 없고, 항상 $\overline{\mathrm{AA'}}=4$ 이므로 $\overline{\mathrm{A'P}}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하면 됩니다. 근데 이것은 우리가 위에서 이미 다루었지요. $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA'}}=2$ 가 됩니다. 그렇다면 최솟값과 최댓값은 세 점 A′, O, P 가 일직선상에 있을 때, 각각 $\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OA'}}=3-2=1$, $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{OA'}}=3+2=5$ 가 됩니다. 여기까지는 어렵지 않지요?

③ **평면에서 두 원이 주어질 때**
다음 예시를 살펴보겠습니다.

ex) 평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 2 인 원 위의 한 점 P 와 반지름의 길이가 3 인 한 점 Q 에 대하여 선분 PQ 의 길이의 최솟값과 최댓값을 구하시오.



우리가 선분 PQ 의 길이를 길이관계만을 통하여 구할 수 있는 방법은 존재하지 않습니다. 이 때, 우리는 선분 OP 의 길이와 선분 OQ 의 길이가 고정됨을 활용하여, 선분 PQ 의 길이는 제2코사인법칙을 활용하면 각도만으로 표현이 가능하다는 것을 알 수 있습니다.

따라서, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2^2+3^2-12\cos\theta}$ 에서 θ가 작을수록 PQ 의 길이도 작아지고, θ가 커질수록 PQ의 길이도 커짐을 알 수 있습니다. (단, $0 \le \theta \le \pi$)
문제의 그림에서는 $0 \le \theta \le \pi$의 범위가 모두 가능하므로, 최솟값은 $\theta=0$ 일 때 1, 최댓값은 $\theta=\pi$ 일 때 5 입니다.

우리가 이 문제에서는 중심이 동일한 원에 대하여 다루었습니다. 그 이유는 이르는 거리가 같은 점들의 집합은 각도로 분석이 가능하기 때문입니다. 이것은 공간에서 더 많이 활용할 수 있습니다.

④ 공간에서 두 원이 주어질 때

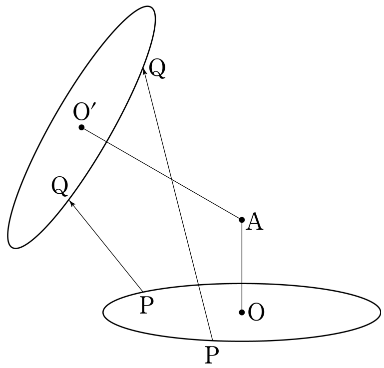
④는 ①부터 ③까지의 내용이 모두 적용됩니다. 또한 매우 어렵습니다. 차분한 마음으로 접근하시고 단번에 이해가 안되더라도 실망하지 마시고 꾸준히 반복해서 정독하시기 바랍니다. 예시를 통해 이해해보도록 하겠습니다.

ex) 중심이 각각 O, O$'$ 이고 반지름의 길이가 3 인 두 원 C_1, C_2 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 O 를 지나고 원 C_1을 포함하는 평면과 수직인 직선을 l 이라 하고,
> 점 O$'$을 지나고 원 C_2를 포함하는 평면과 수직인 직선을 m 이라 할 때,
> l 과 m 은 한 점 A 에서 만나며 $\overline{\mathrm{OA}}=3$, $\overline{\mathrm{O'A}}=3\sqrt{3}$ 이다.
> (나) $\angle \mathrm{OAO'}=120°$

원 C_1 위의 점 P 와 원 C_2 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값과 최댓값을 구하시오.

먼저, 이 문제는 갑자기 난이도가 확 높아졌기 때문에, 문제의 상황을 반드시 그림으로 그려볼 필요가 있겠습니다.



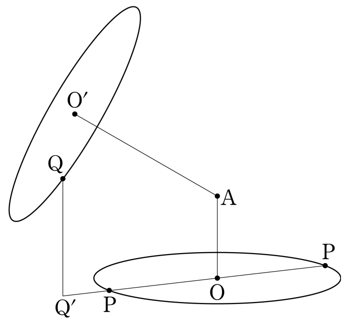
다음과 같이 그려질 것입니다. 문제의 상황이 잘 이해가 되시나요?

1) 최솟값 구하기

이 상황에서 어떻게 선분 PQ 의 길이의 최솟값을 찾을 수 있을까요?

먼저, 위의 그림만으로 알 수 있는 것은 선분 AQ 의 길이와 선분 AP 의 길이는 항상 일정하므로 선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면 $\angle \mathrm{PAQ}$ 의 크기가 최소가 되어야 합니다. 따라서, 우리는 각도를 어떻게든 최소로 만드는 것을 길이와 연계하여 설명하려고 노력해야 할 것입니다.

먼저, 우리는 두 점 P 와 Q 가 모두 움직이고 있으므로 한 점 Q 만 고정시키고 점 P 는 계속 회전할 때 선분 PQ 의 길이의 최솟값이 어떨 때 생겨나는지 확인해보도록 하겠습니다.



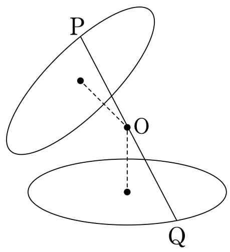
점 Q 를 고정시키면, 결국 우리는 위의 ②의 문제와 똑같은 형태가 됨을 알 수 있습니다. 또한, 이 경우에 최댓값과 최솟값을 갖는 부분에서는 선분 OA 와 선분 QQ′이 평행함을 알 수 있습니다. 그러므로 두 선분을 포함하는 평면은 점 P 도 반드시 포함합니다. 따라서, 다섯 개의 점 O, A, Q, Q′, P 가 모두 한 평면 위에 있습니다.
따라서, 이 경우에 선분 PQ 의 길이가 최소가 되는 경우는 $\angle PAQ = \angle OAQ - \angle OAP$ 일 때입니다.
$\angle OAP = 45°$이므로 $\angle PAQ = \angle OAQ - 45°$인 상황에서 $\angle OAQ$ 의 범위를 구해봐야 할 것입니다.

$\angle OAQ$의 범위를 구해야 하는데, 이것은 결국 OQ 의 길이의 최대최소를 이용하면 구할 수 있습니다.
$\angle O'AQ = 30°$이므로 $90° \le \angle OAQ \le 150°$이고, 따라서 $45° \le \angle PAQ \le 105°$입니다.
$\overline{AQ} = 6$, $\overline{AP} = 3\sqrt{2}$ 이므로 최솟값은 $\sqrt{36+18-36} = 3\sqrt{2}$ 가 됨을 알 수 있습니다.

2) 최댓값 구하기
최댓값도 마찬가지입니다. 다섯 개의 점 O, A, Q, Q′, P 가 모두 한 평면 위에 있습니다.
따라서, 이 경우에 선분 PQ 의 길이가 최소가 되는 경우는 $\angle PAQ = \angle OAQ + \angle OAP$ 일 때입니다.
$\angle OAP = 45°$이므로 $\angle PAQ = \angle OAQ + 45°$인 상황에서 $\angle OAQ$ 의 범위를 구해봐야 할 것입니다.

$\angle OAQ$의 범위를 구해야 하는데, 이것은 결국 OQ 의 길이와 비례할 것입니다.
따라서, $\angle O'AQ = 30°$이므로 $90° \le \angle OAQ \le 150°$이고, 따라서 $135° \le \angle PAQ \le 195°$입니다.
엇? 이상합니다. 그렇습니다. 180°가 넘어가는 부분이 생깁니다.
180°가 넘어가면 길이가 다시 줄어든다는 것을 알 수 있습니다.

즉, $\angle PAQ = 2\pi - (OAQ + \angle OAP)$로 계산해야 하는 경우도 생긴다는 것이죠.
그러므로, $90° \le \angle OAQ \le 135°$일 때, $\angle PAQ = \angle OAQ + \angle OAP$ 이고, 따라서 $135° \le \angle PAQ \le 180°$입니다.
$135° \le \angle OAQ \le 180°$일 때, $\angle PAQ = 2\pi - (\angle OAQ + \angle OAP)$이고, 따라서 $165° \le \angle PAQ \le 180°$입니다.
즉 최댓값은 $\angle OAQ = 135°$일 때, 즉 $\angle PAQ = 180°$일 때이므로 $3+\sqrt{3}$ 이 정답이 됩니다.



(그림 참고 - 이 케이스는 흔히 알려진 단면화로 답을 구하는 것이 불가능하다.)

(참고 : $\angle OAQ$ 의 범위에서 180°를 넘는 경우에, 범위는 그대로 두어야 합니다. 왜냐하면 우리는 결국 $\angle PAQ = \angle OAQ + \angle OAP$ 임을 이용해야 하는데 180°를 넘었을 때 각도를 다시 360°에서 빼버리면 $\angle PAQ = \angle OAQ + \angle OAP$ 를 이용할 수 없기 때문입니다. 즉, 최종적인 $\angle PAQ$ 에서만 180°를 넘었을 때 다시 360°에서 빼는 과정을 하는 것이 중요합니다.)

(FAQ : 최대 또는 최소가 되는 상황을 그림에서 어디인지 정확히 알 수 있나요?
A : 그림에다가 표현할 수는 있지만, 사실은 직관적인 이해 그 이상의 것을 얻어낼 수는 없습니다. 따라서 그림에 그리는 경우에는 혼동이 올 수 있으므로 그림은 이해의 도구 정도로만 활용하시고 수식으로 명확히 이해하시기 바랍니다.)

풀이를 이해했다면, 회전의 대상이 2개일 때 모두 원뿔의 형태를 띄고 있다는 말이 무슨 뜻인지 이해하실 것입니다.
점 A 를 원뿔의 꼭짓점으로 하고, 원 C_1, C_2를 각각 밑면으로 하는 두 원뿔이 생겨남을 알 수 있습니다. 실제 문제에서는 원뿔을 교묘히 숨겨놓는 경우가 많은데, 그 숨어 있는 원뿔을 찾아낸다면 답을 구해나갈 수 있을 것입니다.

1. 좌표공간에 점 $\mathrm{A}(9,\ 0,\ 5)$가 있고, xy평면 위에 타원 $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$이 있다. 타원 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 최댓값을 구하시오. [3점] [2012학년도 대수능]

2. 좌표공간에서 중심이 C 인 구 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$와 평면 $x+y+z=6$이 만나서 생기는 도형을 S라 하자. 도형 S 위의 두 점 P, Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 내적 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$의 최솟값은?

[4점] [2008학년도 대수능]

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 1　　⑤ 2

3. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다. (나) 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? [4점] [2012학년도 대수능]

① $2\sqrt{6}+1$　　② $2\sqrt{2}+3$　　③ $3\sqrt{5}-1$
④ $2\sqrt{5}+1$　　⑤ $3\sqrt{6}-2$

4. 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3}\rvert=2$ (나) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_k}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_3}\right)=\cos\dfrac{3-k}{3}\pi\ \ (k=1,\ 2,\ 3)$

$\lvert\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}\rvert$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점] [2013학년도 9평]

5. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면

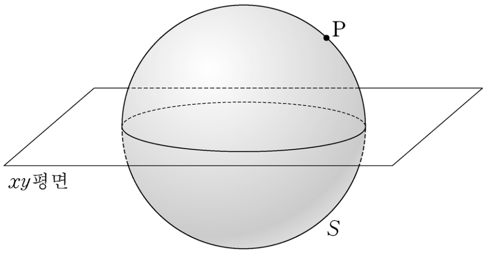
$$\alpha : x+y+2z=15,\qquad \beta : x-y-4\sqrt{3}\,z=25$$

와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최솟값을 구하시오.

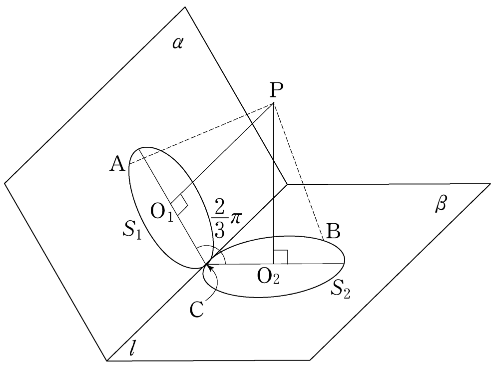
[4점] [2010학년도 9평]

6. 좌표공간에 구 S: $x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0,\ 5,\ 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C에 대하여 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] [2016학년도 대수능]

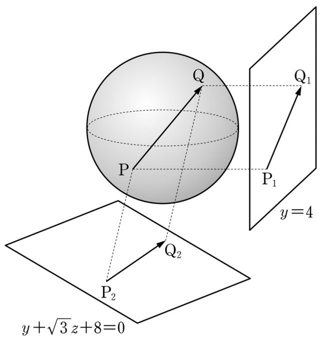
(가) 원 C는 점 P를 지나는 평면과 구 S가 만나서 생긴다. (나) 원 C의 반지름의 길이는 1이다.



7. 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하자. 평면 α 위에 있는 원 S_1과 평면 β 위에 있는 원 S_2는 반지름의 길이가 모두 2이다. 그림과 같이 원 S_1과 원 S_2는 점 C에서 직선 l과 접한다. S_1의 중심 O_1을 지나고 평면 α에 수직인 직선과 S_2의 중심 O_2를 지나고 평면 β에 수직인 직선이 만나는 점을 P라 하자. $\angle \mathrm{O}_1\mathrm{C}\mathrm{O}_2=\frac{2}{3}\pi$일 때, S_1 위에 있는 임의의 점 A와 S_2 위에 있는 임의의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값을 M, 최솟값은 m이라 하자. $M+m$의 값을 구하시오. [4점] [2006학년도 9평]

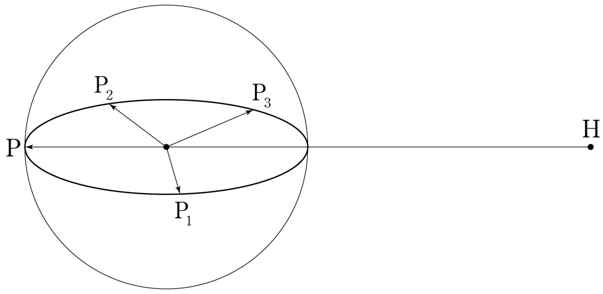


8. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위를 움직이는 두 점 P, Q가 있다. 두 점 P, Q에서 평면 $y=4$에 내린 수선의 발을 각각 P_1, Q_1이라 하고, 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$에 내린 수선의 발을 각각 P_2, Q_2라 하자.
$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}|^2$의 최댓값을 구하시오. [4점] [2014학년도 대수능]



해설

1. 점 A 에서 xy 평면에 수선의 발을 내리면 $H(9,\ 0,\ 0)$ 이다.
따라서, 선분 AP 의 길이의 최댓값은 곧 선분 PH 의 길이의 최댓값을 구하는 것과 동치이다.
(공간도형과 회전 ② 참조)
따라서, 선분 PH 의 길이의 최댓값은 다음과 같이 설명할 수 있다.

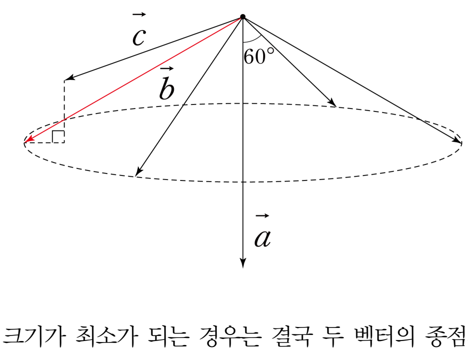


장축의 길이를 반지름으로 하는 원에 대하여 타원은 원 위에 또는 원의 내부에 존재한다.
따라서, $\overline{HP} > \overline{HP_n}$ 이다. $(n=1,\ 2,\ 3)$
그러므로 선분 HP 의 길이의 최댓값은 $9+3=12$ 이다. 이때의 선분 AP 의 길이는 $\sqrt{12^2+5^2}=13$ 이다.

2. 내적의 최솟값을 구하는 문제인데, 선분 CP 의 길이와 선분 CQ 의 길이가 이미 고정되어 있으므로 결국 두 벡터가 이루는 각의 최댓값을 구하면 된다. 그런데 두 벡터가 이루는 각의 최댓값은 곧 선분 PQ 의 길이를 최대로 하라는 것과 동일한 이야기이다.
구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 두 점 P, Q 에서 선분 PQ 의 길이의 최대가 되려면 결국 지름일 때이다.

평면 $x+y+z=6$ 과 점 $(1,\ 1,\ 1)$ 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다. 따라서 선분 PQ 의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.
그러므로 $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = |\overrightarrow{CP}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{CP}|^2+|\overrightarrow{CQ}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2\right) = \frac{1}{2}\times(-6) = -3$ 이다.

3. xy 평면의 법선벡터를 $\vec{a}$, 삼각형 ABC 의 법선벡터를 $\vec{b}$, 평면 $x-2y+2z=1$ 의 법선벡터를 $\vec{c}$ 라 하자.
(가)와 (나)의 조건에 의하여 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$임을 알 수 있다.
또한 벡터 $\vec{a}$와 벡터 $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 이다.
벡터 $\vec{b}$ 와 벡터 $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기가 최소일 때, $\cos\theta$ 가 최대이므로 정사영한 넓이가 최대가 된다. 우리가 구하고자 하는 것은 결국 벡터 $\vec{b}$ 와 벡터 $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기가 최소가 되는 경우를 찾는 것이다. 다음 그림을 보자.



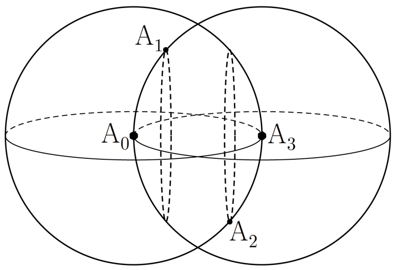
벡터 $\vec{b}$ 와 벡터 $\vec{c}$ 가 이루는 각의 크기가 최소가 되는 경우는 결국 두 벡터의 종점의 길이가 최소가 되는 경우를 찾는 것과 동일하다. 따라서 이것은 공간도형과 회전 ②에서 이미 다룬 것과 같이 벡터 $\vec{c}$ 의 종점에서 벡터 $\vec{b}$ 의 자취를 이루는

평면에 수선의 발을 내린 후 벡터 $\vec{b}$의 자취까지 이르는 거리의 최솟값을 구하면 된다.
따라서, 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 한 평면 위에 있을 때, 삼각함수의 덧셈정리를 활용하면 구할 수 있다.
$\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$이다. 따라서, 정사영한 넓이의 최댓값은 $1+2\sqrt{6}$이다.

4. (나)에서 $k=1,\ 2,\ 3$을 차례로 대입해보면,
$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\frac{1}{2}$, $|\overrightarrow{A_0A_3}|=2$이다.
조건 (가)를 통해서 알 수 있는 것은, A_2는 중심이 A_0이고 반지름의 길이가 2인 구 위에 있는 점이고,
A_1은 중심이 A_3이고 반지름의 길이가 2인 구 위에 있는 점일 것이다.

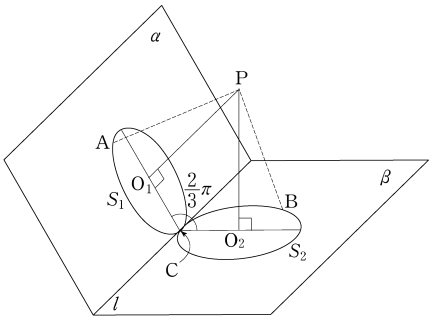
$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=-\frac{1}{2}$에서 선분 A_0A_3의 중점을 M이라 하면,
$\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\overrightarrow{MA_3}\cdot\overrightarrow{MA_1}=-\frac{1}{2}$이면 된다.
두 벡터 $\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MA_3}$가 이루는 각의 크기를 θ_1라 할 때, $|\overrightarrow{MA_3}|=1$이고, $|\overrightarrow{MA_1}|\cos\theta_1=-\frac{1}{2}$이면 된다.
따라서, A_1의 자취가 아래 그림의 점선으로 그려진 원임을 알 수 있다. (원과 점 A_3 사이의 거리는 $\frac{3}{2}$이다.)

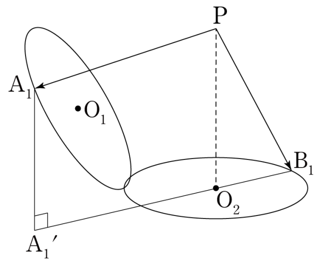
마찬가지로, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\frac{1}{2}$에서 $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\overrightarrow{MA_3}\cdot\overrightarrow{MA_2}=\frac{1}{2}$이면 된다.
두 벡터 $\overrightarrow{MA_2}$, $\overrightarrow{MA_3}$가 이루는 각의 크기를 θ_2라 할 때, $|\overrightarrow{MA_3}|=1$이고, $|\overrightarrow{MA_2}|\cos\theta_2=\frac{1}{2}$이면 된다.
따라서, A_2의 자취가 아래 그림의 점선으로 그려진 원임을 알 수 있다. (원과 점 A_0 사이의 거리는 $\frac{3}{2}$이다.)



선분 A_1A_2의 길이의 최댓값은 점 A_1에서 점 A_2의 자취에 수선의 발을 내린 후 최장거리를 구하면 된다. (최장거리는 이미 ②에서 다뤘듯, 중심을 뚫고 지나갈 수 밖에 없다.) 두 원이 평행하므로 점 A_1이 어디에 있던지 최댓값은 늘 같은 값을 가지게 된다. 따라서 선분 A_1A_2의 길이의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이므로 우리가 구하는 답은 8이다.

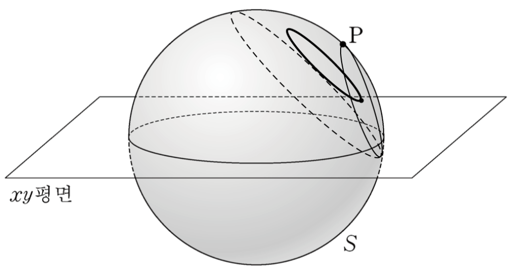
5. $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$이다.
한편, $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=4$이다.
따라서, $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2=32+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$의 최댓값과 최솟값에 관하여 논하면 된다.
최대가 되려면 이루는 각이 최대한 작아야 하고, 최소가 되려면 이루는 각이 최대한 커야 한다.
따라서, 최댓값은 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}$일 때 64로 자명하다. ($0°$일 때)





$\angle$APB 의 크기가 최대가 된다는 말은 선분 AB 의 길이가 가장 크다는 것과 동치이다.
원 O_1 위를 돌고 있는 점 A를 고정시킨 점을 A_1이라 하자. 선분 A_1B 의 길이의 최댓값을 구해보자.
점 A_1을 원 O_2를 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 A_1'이라 할 때, 원 O_2를 움직이는 점 B 에 대하여 선분 $A_1'B$ 의 길이가 최대가 되도록 하는 점을 B_1이라 하면, 선분 $A_1'B_1$은 원 O_2의 중심을 지난다.
따라서 세 점 A_1, A_1', B_1을 포함하는 평면은 반드시 선분 O_2P를 포함한다.
$\angle O_2PB_1$은 항상 30°이므로 움직이는 점 A 에 대하여 $\angle APO_2$의 범위만 구하면 된다. 그 구하는 과정은 ④에서 했던 과정과 동일하다. 점 O_2를 원 O_1을 포함하는 평면에 수선의 발을 내린 후 선분 OA 의 길이의 최댓값을 구하면 된다.
따라서 $\angle$APB 의 최댓값은 120°이므로 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|^2=32+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=16$이다.
따라서 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 8, 최솟값은 4 이다.

6.



원 C는 연한 실선, 원 C의 중심의 자취는 진한 실선이고, 원 C의 점 P 의 맞은편에 있는 점의 자취를 점선이라고 하자. 원 C의 반지름의 길이가 1 이므로 구의 중심과 원 C의 중심까지의 거리는 7 이다.
따라서, 원 C의 법선벡터는 모선의 길이가 7 인 원뿔이 그려진다.
원 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이가 최대가 되려면, xy 평면과 원 C의 이루는 각의 크기가 최소여야 한다. 3번과 동일한 문항으로 해석할 수 있다. (풀이 생략)
따라서, xy 평면과 원 C의 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, $\overrightarrow{OP}$와 원뿔의 모선이 이루는 각의 크기를 α 라 하면,
$\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{4}{5}$이다.
따라서, 원 C의 xy 평면 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{4}{5}\pi$ 이므로 답은 9 이다.

7. 먼저, 구와 두 평면이 만나서 생기는 원의 중심의 좌표를 구해보자.

평면 α 의 법선벡터 $(t,\ t,\ 2t)$가 평면과 만나는 점의 좌표는 $6t=15$ 에서 $t=\frac{5}{2}$이다. 따라서, $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ 5\right)$이다.
또한, 평면 β 의 법선벡터 $(p,\ -p,\ -4\sqrt{3}p)$가 평면과 만나는 점의 좌표는 $50p=25$ 에서 $p=\frac{1}{2}$이다.
따라서, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -2\sqrt{3}\right)$이다.

따라서, 원점으로부터 두 평면에 이르는 수선의 발이 이루는 각도는

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ 5\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -2\sqrt{3}\right)}{\sqrt{\frac{75}{2}}\sqrt{\frac{25}{2}}} \text{에서 } \cos\theta = \frac{-20\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} = -\frac{4}{5} \text{이다.}$$

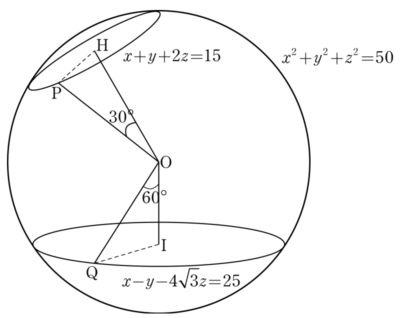
따라서, $180°$에 가까운 큰 둔각이다.

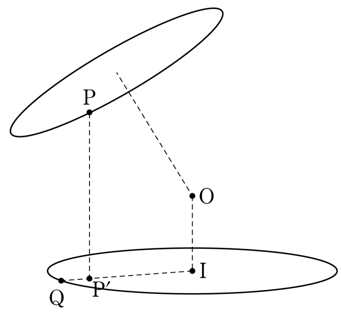
한편, 평면 α 와 구가 만나는 원 위의 중심 H 와 원 위의 점 P 와 구의 중심 O 에 대하여 $\angle$POH 의 크기를 구해보자.

점 H 의 좌표가 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2},\ 5\right)$이므로, 구의 중심과 점 H 사이의 거리는 $\frac{5\sqrt{6}}{2}$이고, 구의 반지름의 길이가 $5\sqrt{2}$ 이므로,

$\angle\mathrm{POH} = 30°$이다.

마찬가지로, 평면 β 와 구가 만나는 원 위의 중심 I 와 원 위의 점 Q 에 대하여 $\angle$QOI 의 크기는 마찬가지 방법을 통해 $60°$임을 알 수 있다. 지금까지의 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.





이제 선분 PQ 의 길이의 최솟값을 구해보자. 그 구하는 모든 과정은 위의 6번 문항과 동일하다.

선분 PQ 의 길이의 최솟값은 결국 $\angle$POQ 가 최소가 됨을 의미한다.

먼저, 임의의 점 P 를 잡고, 그 점을 평면 $x-y-4\sqrt{3}z=25$ 에 수선의 발 P′을 내린 후, 선분 P′Q 의 최솟값이 되는 점을 찾은 뒤 세 점 P, P′, Q 를 포함하는 평면이 선분 OI 까지 포함함을 보인다.

따라서, $\angle$POQ 가 최소가 되려면 결국 $\angle$POI 가 최소인 경우를 의미한다. 이 말은 다시 말해서 선분 PI의 길이가 최소가 될 때이다. 선분 PI의 길이가 최소가 되려면 점 I 에서 평면 $x+y+2z=15$ 에 수선의 발을 내리면 된다. 내린 후 $\angle$POI의 범위를 구하면 된다. (과정 생략)

따라서, $\cos\angle\mathrm{HOI} = -\frac{4}{5}$ 이므로, $\cos\angle\mathrm{POQ} = \frac{3}{5}$ 이다. 그러므로 코사인법칙에 의해 $\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 40$ 이다.

8. 먼저, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}$ 이 이루는 각의 크기를 θ_1, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{P_2Q_2}}$ 가 이루는 각의 크기를 θ_2라 하면,

$2|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta_1 - |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\cos^2\theta_2$

$= |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_1 + |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_1 + |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_2 = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)$

의 최댓값을 구하면 된다. $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2)$가 최대가 되려면, 먼저, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 4$ 이면 된다.

왜냐하면, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 의 최댓값은 4 이며 (왜냐하면, 구 위의 임의의 두 점을 잡았을 때 두 점을 포함하는 원이 반드시 존재하며 그 원의 지름의 길이는 4 이하이기 때문이다.) 이 때 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 는 모든 공간벡터를 표현할 수 있으므로 $\sin^2\theta_1$과 $\sin^2\theta_2$의 값과 무관하게 생각해도 된다. 이제, 그림을 그려보자. 그림을 그리기 전에 위치관계를 명확히 해야 하므로 다음과 같은 연산과정을 거친다.

먼저, 구의 중심이 두 평면이 이루는 각 중 어디에 위치해있는지를 찾아보아야 한다. 그러려면 마찬가지로 중심에서 두 평면에 내린 수선의 발의 좌표를 구해야 한다.

원점 $(0,\ 0,\ 0)$에서 평면 $y=4$ 에 수선의 발을 내리면 점 $\mathrm{H}(0,\ 4,\ 0)$이 된다.

또한 원점 $(0,\ 0,\ 0)$에서 평면 $y+\sqrt{3}z+8=0$ 에 수선의 발을 내리면 점 $\mathrm{I}(0,\ -2,\ -2\sqrt{3})$이 된다.

따라서, $\cos\angle\mathrm{HOI}=-\dfrac{1}{2}$ 이므로, 선분 OH 와 OI 가 이루는 각의 크기는 $120°$임을 알 수 있다.

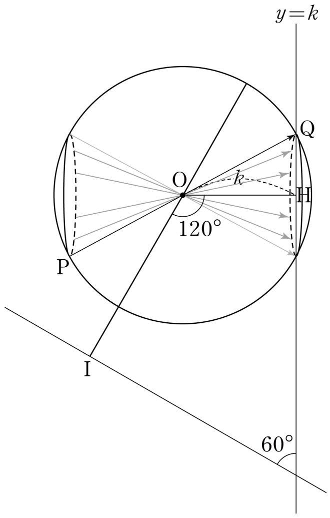
이제, $\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta_1=k\,(0<k<2)$가 정해져 있을 때, 언제 $\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta_2$ 가 최댓값을 갖는지 알아보자.

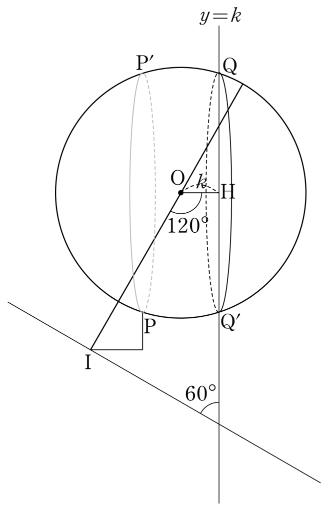
($\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta_1$가 정해지면, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_1$가 정해지므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\sin^2\theta_2$ 가 최대가 되면 된다.)

$\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta_2$가 최대가 되려면, 결국 θ_2 가 최대가 되어야 한다.

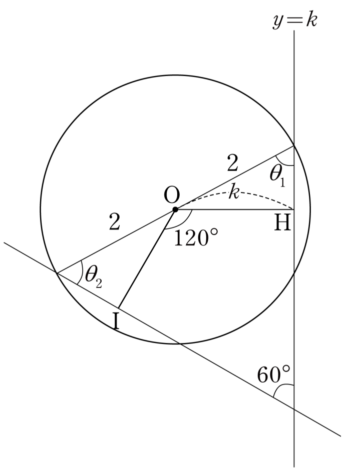
θ_2 가 최대가 되려면, 결국 점 P 의 자취 중에서 점 I (문제의 그림에서 선분 $\mathrm{P_2Q_2}$ 의 중점이라고 정의하자)와의 거리가 가장 짧아지는 순간이 θ_2 가 최대이다.(왜냐하면 선분 PI 의 길이가 최소이면 $\angle\mathrm{POI}$ 가 최소이고, 따라서 θ_2 가 최대이다.) 많이 해본 상황임을 알 수 있다.

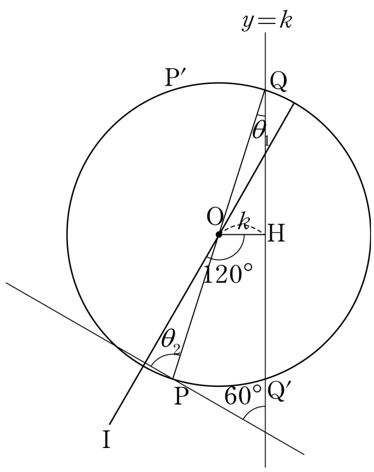
(4번 문항을 생각해보면 동일한 상황임을 알 수 있다. 그러므로 선분 PI 의 길이의 최솟값을 구하는 과정은 생략한다.)





따라서, 다음과 같이 요약할 수 있다.





첫 번째 그림) $\theta_1+\theta_2=120°$일 때, $4\left(|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2\right)=16(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)$ 의 최댓값을 구하면 된다.

$$
\begin{aligned}
4\left(|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2\right)&=16(\sin^2\theta_1+\sin^2(120°-\theta_1))\\
&=16\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1\cos\theta_1\right)\\
&=16\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta_1}{4}-\frac{\cos 2\theta_1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

두 번째 그림) $\theta_2-\theta_1=60°$일 때, $4\left(|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2\right)=16(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)$의 최댓값을 구하면 된다.

$$
\begin{aligned}
4\left(|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OI}}|^2\right)&=16(\sin^2\theta_1+\sin^2(60°+\theta_1))\\
&=16\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sin^2\theta_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta_1\cos\theta_1\right)\\
&=16\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta_1}{4}-\frac{\cos 2\theta_1}{4}\right)
\end{aligned}
$$

첫 번째 그림에서 도출한 식과 두 번째 그림에서 도출한 식은 동일한 식이다.
첫 번째 그림과 두 번째 그림에서
$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta_1-\frac{1}{4}\cos 2\theta_1$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로, $16\left(1+\frac{\sqrt{3}\sin 2\theta_1}{4}-\frac{\cos 2\theta_1}{4}\right)$의 최댓값은 24 이다.

사실 29번을 나름대로 아주 훌륭하게 풀이한 해설강의가 한두 분 정도 계십니다.
(공간도형과 회전을 활용하면 모든 평가원의 기출을 같은 방법으로 풀 수 있다는 장점이 있는데, 다른 해설강의처럼 2014학년도 수능 29번과 2012학년도 수능 21번에 한해서는 삼수선의 정리로도 해결할 수 있습니다. 저 역시 삼수선의 정리로 푸는 것도 좋은 풀이라고 생각합니다. 다만 삼수선의 정리로는 2개가 도는 것은 해결할 수 없어서, 회전하는 형태의 모든 풀이가 통일되지 않다보니 공간도형과 회전을 활용하여 해결할 뿐입니다.)
그러나 그 해설 강의에서도 왼쪽의 그림의 형태로만 법선벡터를 그리거나 활용할 뿐, 오른쪽 그림 같은경우에는 "그냥 해보면 된다."고 은근슬쩍 넘어갑니다. 그래서 그 부분을 좀 더 보충하여 설명한 것입니다.