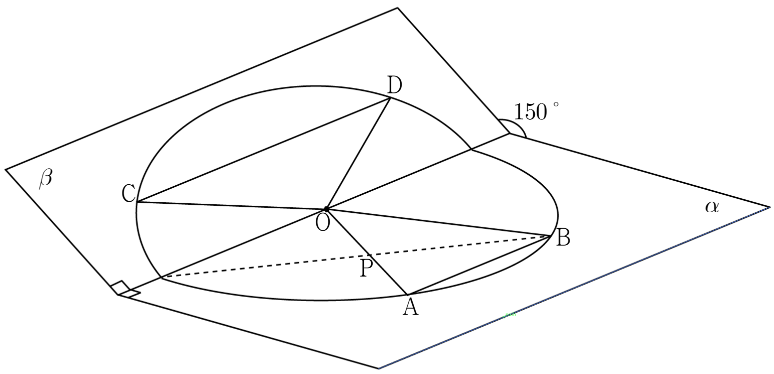
안녕하세요. 디엔티 수학연구소 대표 조민성입니다. 지난번 공개한 이면각 3문항의 해설강의가 영상파일에 심각한 오류가 발생하였습니다. 스케줄상 재촬영이 어렵다고 판단되어 3번 문항에 대한 해설로 대체합니다.

---

3. 그림과 같이 두 평면 α와 평면 β가 이루는 각이 150°이고, 각각의 평면 위에 반지름의 길이가 10인 두 반원 C_1, C_2가 있다. 두 원 C_1, C_2의 중심 O는 두 평면 α, β의 교선 위에 있을 때, C_1위의 두 점 A, B와 C_2위의 두 점 C, D에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=10$, $\overline{\mathrm{CD}}=16$ (나) 두 평면 α, β의 교선과 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.

점 B에서 두 반원 C_1, C_2의 한 교점을 이은 선분과 선분 OA가 만나는 점을 P라 하자. 평면 BPC와 평면 α가 이루는 각 θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\tan\theta=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 단, p, q는 서로소이고, $\angle\mathrm{AOC}>\frac{\pi}{2}$ 이다.)



<해설>

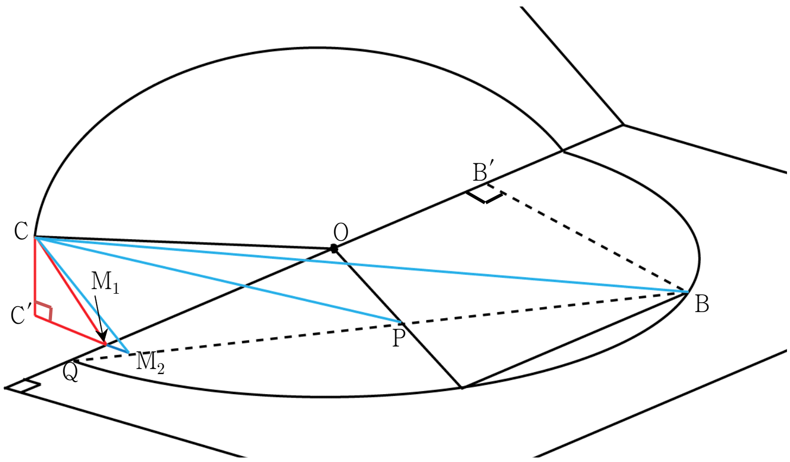
1. **점** C', M_1, M_2, Q, B' **설정**

1-(a) 그림과 같이 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 C'이라고 하자.

1-(b) 점 C'에서 두 평면의 교선에 내린 수선의 발을 M_1이라 하고, BP까지 선을 연장하면 그림과 같이 점 M_2에서 만난다.

1-(c) 평면 α위의 반원과 두 평면 α, β의 교선이 만나는 한 점을 Q라 하자.

1-(d) 점 B에서 두 평면 α, β의 교선에 내린 수선의 발을 B'이라 하자. (직각삼각형 + 각을 보기위해서)



2. **길이 구하기.**

2-(a) (가) 조건에 의해, 삼각형 OAB는 정삼각형이다. 그러므로 $\angle B'QB = 30^\circ$이다.

2-(b) (나) 조건에 의해, $\overline{OM_1} = 8$이다. 그리고 삼각형 OCM_1은 직각삼각형이므로 $\overline{CM_1} = 6$이다.

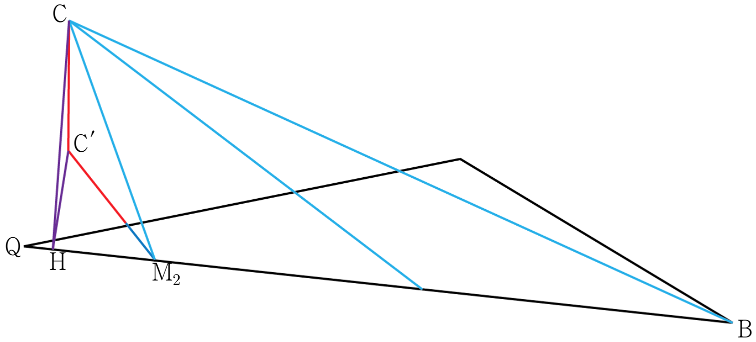
2-(c) 두 평면 α, β사이의 각이 30°이므로, $\overline{CC'} = \overline{CM_1} \times \sin 30^\circ = 3$, $\overline{C'M_1} = 3\sqrt{3}$이다.

2-(d) $\overline{OM_1} = 8$. $\overline{QM_1} = 2$

3. **평면** α**와 평면** BPC **평면이 이루는 각 구하기.**

평면 BPC는 세 점 B, P, C를 포함한다. 그리고 이 평면은 두 점 M_2, Q를 포함한다.
그러므로 평면 α와 평면 BM_2C가 이루는 각을 구하는 것과 같다.

아래의 그림과 같이 필요한 부분만 보자.

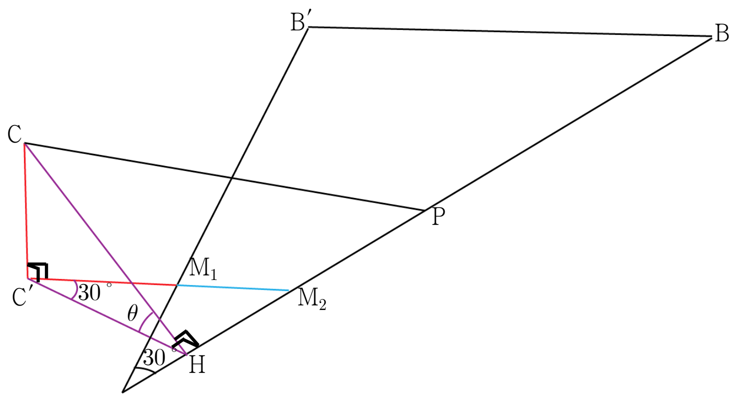


두 평면사이의 각 θ는 C′에서 직선 BQ에 내린 수선의 발 H를 이용하자.
그러면 삼수선의 정리에 의해 $\alpha \perp \overline{CC'}$, $\overline{BQ} \perp \overline{CH}$, $\overline{BQ} \perp \overline{C'H}$가 된다.

평면 BPC와 평면 α가 이루는 각 $\theta = \angle CHC' = \theta \;\Leftrightarrow\; \tan\theta = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{C'H}}$

4. $\overline{C'H}$의 길이 구하기

1-(b)에서 점 M_2를 설정한 이유는 $\overline{C'H} = \overline{C'M_2} \times \cos 30^\circ$ 임을 이용할 수 있기 때문이다.
($\angle BQB' = \angle M_2C'H = 30^\circ$ 이므로)



$$\overline{C'H} = \overline{C'M_2} \times \cos 30^\circ = \left(\overline{C'M_1} + \overline{M_1M_2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(3\sqrt{3} + \overline{QM_1} \times \tan 30^\circ\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \left(3\sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{11}{2}$$

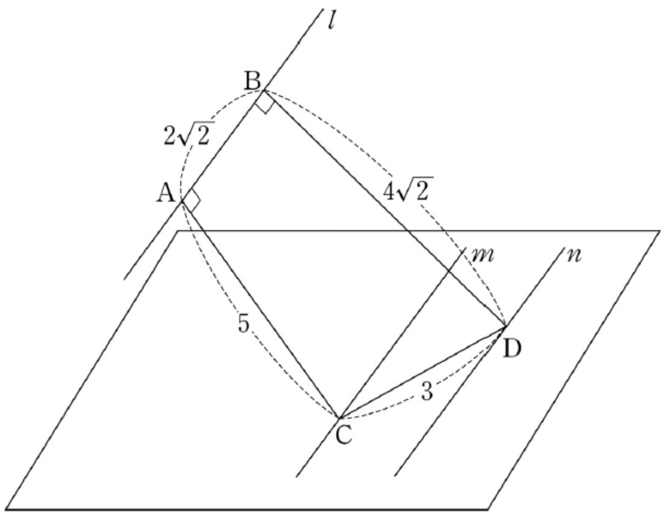
$\therefore \tan\theta = \dfrac{\overline{CC'}}{\overline{C'H}} = \dfrac{6}{11}$, $p = 11$, $q = 6$

답: $p + q = 17$

다음의 두 문제로 위의 아이디어를 정리해 보세요. 특히 위 문항은 2011학년도 9월 평가원 25번 문제와 유사한 아이디어가 사용된 문제 입니다.

❖ 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$
(나) $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
(다) $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



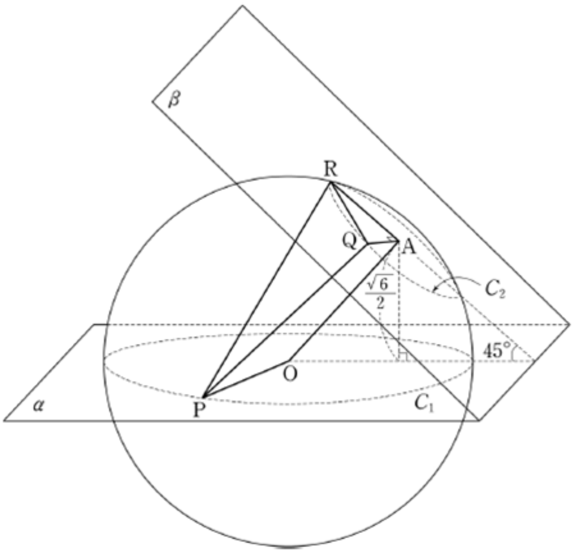
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

[2011학년도 9월 평가원]

❖ 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle \mathrm{QAR} = 90^\circ$
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각은 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[2012학년도 예비평가]