

[고려대학교 문항정보]

1. 일반 정보		
유형	<input checked="" type="checkbox"/> 논술고사 <input type="checkbox"/> 면접 및 구술고사 <input type="checkbox"/> 선다형고사	
전형명	모의논술	
해당 대학의 계열(과목) / 문항번호	자연계열 / 1~4번	
출제 범위	교육과정 과목명	수학 I, 수학 II, 미적분, 확률과 통계, 기하
	핵심개념 및 용어	미분, 적분, 기하, 조건부확률
예상 소요 시간	80분	

2. 문항 및 제시문

문항 1. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

함수 $\sigma(x)$ 는 다음과 같다.

$$\sigma(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

1-1) $b \leq c$ 인 두 실수 b, c 에 대하여 $g(x) = -\sigma(-x+b)+1$, $h(x) = -\sigma(x-c)+2$ 라 하자.

$$f(x) = \sigma(g(x)) + \sigma(h(x))$$

일 때, 함수 $f(x)$ 가 세 점에서만 미분불가능이 되도록 하는 b 와 c 의 관계를 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

1-2) 함수 $g(x) = -\sigma(-x-1)+1$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = (x-a)(x-b)[\sigma(g(x)) + \sigma(g(-x)) - 1]$$

이다. $f(x)$ 가 두 점에서만 미분불가능하고, $f(0) > 0$ 인 순서쌍 (a, b) 를 모두 구하고, 그 이유를 설명하시오. (단 a, b 는 실수이다.) (15점)

1-3) 함수 $g(x) = -\sigma(-x-1)+1$ 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \sigma(g(x)) + \sigma(g(-x)) - 1$$

이다. 두 실수 a, b 에 대하여 직선 $y = ax + b$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프와 세 점에서 만나기 위한 순서쌍 (a, b) 가 평면에서 차지하는 영역의 면적을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (10점)

문항 2. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (35점)

$f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ 은 다음 조건들을 만족하는 삼차 다항함수이다.

(가) p, q, r 은 정수이고 p 는 0이 아니다.

(나) $y = f(x)$ 의 변곡점에서 접선의 방정식은 $y = -x$ 이다.

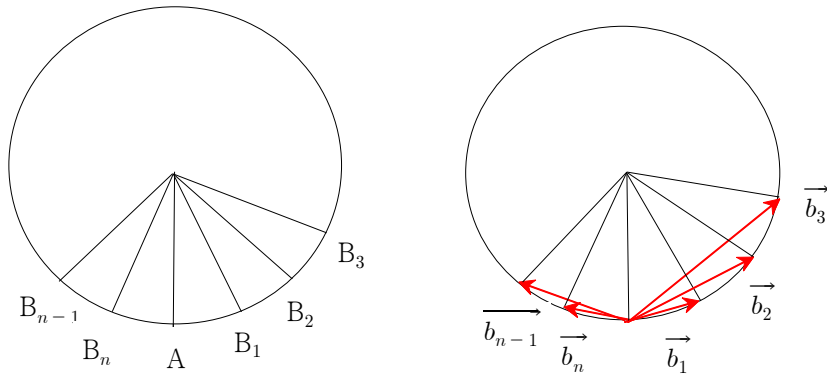
2-1) pqr 이 최솟값을 가지는 $f(x)$ 를 모두 찾고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

2-2) $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pq}{r}$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (5점)

2-3) 점 $(-3, 0)$ 을 지나고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선이 3개가 되도록 하는 자연수 p 의 값을 모두 찾고, 그 이유를 설명하시오. (15점)

문항 3. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (15점)

그림과 같이 반경이 1인 원 위에 $\overline{AB_1} = \overline{B_1B_2} = \overline{B_2B_3} = \dots = \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{B_nA}$ 를 만족시키는 n 개의 점 B_1, B_2, \dots, B_n 이 순서대로 놓여있다. 벡터 $\vec{b}_i = \overrightarrow{AB_i}$ ($1 \leq i \leq n$)라 하자.



3-1) $n = 7$ 일 때, 내적 $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_5$ 의 값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

3-2) 다음 극한값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (9점)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{b}_i \right)$$

문항 4. 다음 글을 읽고 물음에 답하시오. (15점)

상금 당첨 행사에서 진홍색 공 4개와 파란색 공 5개가 든 상자가 준비되어 있다. 네 번의 공을 뽑을 기회가 주어진다. 뽑은 공은 다시 상자에 넣지 않는다.

4-1) 네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑을 확률을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (6점)

4-2) 첫 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우 100만 원, 네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우 200만 원의 상금을 준다. 상자에서 공을 네 번 뽑았을 때 얻게 되는 총상금액을 확률 변수 X 라고 하자. 이때 X 의 기댓값을 구하고, 그 이유를 설명하시오. (예를 들어, 첫 번째와 네 번째 기회 둘 다 진홍색 공을 뽑으면 상금은 300만 원이다.) (9점)

3. 출제 의도

- 주어진 조건이 의미하는 바를 정확히 이해하고 주어진 조건을 활용하여 물음에 대한 답을 논리적으로 설명할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 문항이 의도한 바를 정확하게 이해하고 주장에 대한 근거를 합리적으로 추론할 수 있는 능력을 평가하고자 함
- 함수의 극한, 접선의 방정식, 함수의 그래프 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 벡터의 의미, 벡터의 내적, 삼각함수의 덧셈정리 등을 종합적으로 활용하여 주어진 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 정적분과 급수 사이의 관계를 이해하고 활용하여 문제를 논리적으로 해결하는 능력을 평가하고자 함
- 확률과 기댓값의 의미를 정확히 이해하고, 확률과 기댓값을 구하는 과정을 평가하고자 함

4. 출제 근거

가) 교육과정 근거

적용 교육과정	1. 교육부 고시 제2020-236호 [별책8] “수학과 교육과정”		
관련 성취기준	1. 교과명: 수학		
	과목명: 수학 I		관련
	성취 기준	(2) 삼각함수 [12수학I 102-03] 사인법칙과 코사인법칙을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	문항 3

과목명: 수학 II		관련
성취 기준	(1) 함수의 극한과 연속 [12수학 II 01-02] 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.	문항 2 2-2)
	(2) 미분 [12수학 II 02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다. [12수학 II 02-06] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12수학 II 02-08] 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다. [12수학 II 02-09] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문항 1 문항 2 2-3)

과목명: 미적분		관련
성취 기준	(2) 미분법 [12미적 02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다. [12미적 02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다. [12미적 02-11] 접선의 방정식을 구할 수 있다. [12미적 02-12] 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	문항 2 나), 2-3) 문항 3
	(3) 적분법 [12미적03-04] 정적분과 급수의 합 상이의 관계를 이해한다.	문항 3 3-2)

과목명: 확률과 통계		관련
성취 기준	(2) 확률 [12확통02-03] 확률의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다. [12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.	문항 4

과목명: 기하		관련
성취 기준	(2) 평면벡터 [12기하 02-01] 벡터의 뜻을 안다. [12기하 02-02] 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배를 할 수 있다. [12기하 02-03] 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다. [12기하 02-04] 벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.	문항 3

나) 자료 출처

교과서 내						
도서명	저자	발행처	발행년도	쪽수	관련 자료	재구성 여부
수학 I	권오남 외 14인	교학사	2018	97-108	문항 3	0
수학 I	황선욱 외 8인	미래엔	2018	97-106		0
수학 I	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	92-104		0
수학 I	홍성복 외 10인	지학사	2018	69-105		0
수학 I	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	97-108		0
수학 I	이준열 외 9인	천재교육	2018	97-108		0
수학 II	권오남 외 14인	교학사	2018	12-41 60-62 80-99	문항 1 문항 2 2-2), 2-3)	0
수학 II	황선욱 외 8인	미래엔	2018	11-40 53-98		0
수학 II	고성은 외 6인	좋은책신사고	2018	11-41 52-59 72-90		0
수학 II	홍성복 외 10인	지학사	2018	10-40 59-61 74-93		0
수학 II	류희찬 외 10인	천재교과서	2018	12-42 52-57 67-85		0
수학 II	이준열 외 9인	천재교육	2018	10-40 53-58 73-97		0
미적분	권오남 외 14인	교학사	2018	64-76 108-119 168-172	문항 2 (나), 2-3) 문항 3 3-2)	0
미적분	황선욱 외 8인	미래엔	2018	63-69 71-76 161-164		0
미적분	고성은 외 5인	좋은책신사고	2018	58-71 97-108 150-153		0
미적분	홍성복 외 10인	지학사	2018	61-75 110-121 161-163		0
미적분	류희찬 외 9인	천재교과서	2018	68-84 124-134 177-180		0
미적분	이준열 외 7인	천재교육	2018	65-78 107-117 164-166		0

확률과통계	권오남 외 14인	교학사	2019	53-56 89-95	문항 4	0
확률과통계	황선욱 외 9인	미래엔	2019	50-53 86-91		0
확률과통계	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	50-53 84-90		0
확률과통계	홍성복 외 10인	지학사	2019	51-57 83-91		0
확률과통계	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	53-58 85-92		0
확률과통계	이준열 외 7인	천재교육	2019	53-57 91-97		0
기하	권오남 외 14인	교학사	2019	12-18 62-75 82-98	문항 3	0
기하	황선욱 외 8인	미래엔	2019	11-15 69-81 87-101		0
기하	고성은 외 5인	좋은책신사고	2019	11-15 59-69 75-90		0
기하	홍성복 외 10인	지학사	2019	11-15 58-73 78-97		0
기하	류희찬 외 9인	천재교과서	2019	12-19 62-99		0
기하	이준열 외 7인	천재교육	2019	11-17 61-74 79-95		0

5. 문항 해설

- 1번 문항의 1-1), 1-2) 문항은 주어진 함수를 구하고, 주어진 함수가 특정 점에서 미분불가능이 되는 조건들을 찾는 문제임. 1-3) 문항은 주어진 함수의 그래프를 통해, 이 그래프와 한 직선이 3점에서 만나는 조건을 찾는 문제임
- 2번 문항은 주어진 조건들을 만족하는 3차 다항식의 계수들 사이의 관계를 유추하고, 주어진 문항을 해결하는 문제임
- 3번 문항은 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 구하고, 정적분과 급수 사이의 관계를 이용하는 문제임
- 4번 문항은 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구하는 문제임

6. 채점 기준

하위 문항	채점 기준
1-1	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 $b \leq c$에 대해 함수 $f(x)$를 정확히 구하고, 함수 $f(x)$가 세 점에서 미분불가능이 되도록 하는 b와 c의 관계가 $b = c$임을 보이고, 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-2	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$를 정확히 구한다. 좌미분과 우미분을 통해 함수 $f(x)$가 두 점에서만 미분가능하고, $f(0) > 0$이 되는 순서쌍 (a, b)를 정확히 구한다. 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
1-3	<ul style="list-style-type: none"> 주어진 함수 $f(x)$를 정확히 구하고, 두 실수 a, b에 대하여 직선 $y = ax + b$가 $y = f(x)$의 그래프와 세 점에서 만나기 위한 순서쌍 (a, b)가 평면에서 차지하는 영역을 찾고 그 면적을 구하면 좋은 점수를 부여함
2-1	<ul style="list-style-type: none"> 조건 (가), (나)를 만족하는 삼차 다항식 $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$에서 $p = 3k, q = 3k^2 - 1, r = k^3, k$는 0이 아닌 정수임을 보이고, pqr이 최소가 되게 하는 $k = \pm 1$임을 보인다. 이를 통해 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$과 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$임을 보인다. 그 과정과 이유를 논리적으로 설명하면 좋은 점수를 부여함
2-2	<ul style="list-style-type: none"> 문항 2-1)에서 구한 p, q, r의 관계($p = 3k, q = 3k^2 - 1, r = k^3, k$는 0이 아닌 정수)를 활용하여 극한값 $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pq}{r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k \times (3k^2 - 1)}{k^3} = 9$을 구하면 좋은 점수를 부여함.
2-3	<ul style="list-style-type: none"> 자연수 k가 있어서, $f(x) = x^3 + 3kx^2 + (3k^2 - 1)x + k^3$이다. 점 $(-3, 0)$을 지나고 곡선 $y = f(x)$에 접하는 직선이 3개가 되도록 하는 자연수 $p = 3k$의 값이 $p = 3$임을 보이고, 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
3-1	<ul style="list-style-type: none"> 내적의 정의를 활용하여 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 정확히 구하고, 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
3-2	<ul style="list-style-type: none"> 조건에 맞는 각 벡터를 구하고, 내적의 정의를 활용하여 주어진 조건에 해당하는 두 벡터의 내적을 정확히 구한다. 정적분과 급수 사이의 관계 등을 이용하여 주어진 급수의 값을 구한다. 그 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함
4-1	<ul style="list-style-type: none"> 확률의 개념을 정확히 이해하고, 주어진 확률을 정확히 구하면 좋은 점수를 부여함
4-2	<ul style="list-style-type: none"> 이산확률변수의 기댓값(평균)을 구하는 문제임. 답을 구하는 과정이 논리적이면 좋은 점수를 부여함

7. 예시 답안 혹은 정답

하위
문항

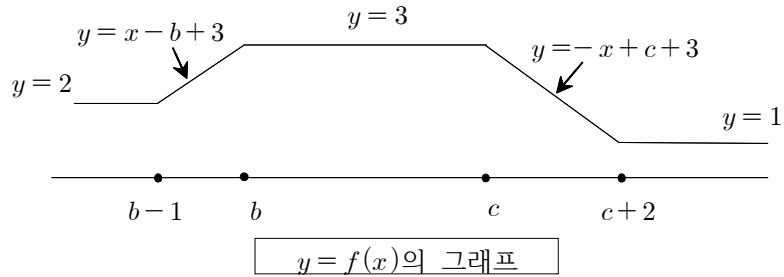
예시 답안

1-1

$$\sigma(g(x)) = \begin{cases} 1 & (x \geq b) \\ x - b + 1 & (b - 1 \leq x < b) \\ 0 & (x < b - 1) \end{cases}, \quad \sigma(h(x)) = \begin{cases} 0 & (x \geq c + 2) \\ -x + c + 2 & (c \leq x < c + 2) \\ 2 & (x < c) \end{cases}$$

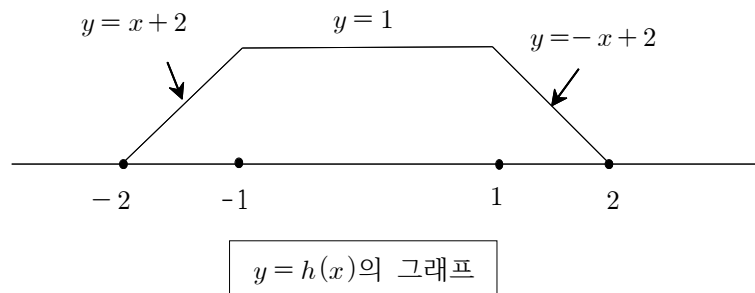
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq c + 2) \\ -x + c + 3 & (c \leq x < c + 2) \\ 3 & (b \leq x < c) \\ x - b + 3 & (b - 1 \leq x < b) \\ 2 & (x < b - 1) \end{cases}$$

따라서 $b = c$ 일 때 세 점에서만 미분불가능하다.



1-2

$$h(x) = \sigma(g(x)) + \sigma(g(-x)) - 1 \text{ 라 두면 } h(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 2) \\ -x + 2 & (1 \leq x < 2) \\ 1 & (-1 \leq x < 1) \\ x + 2 & (-2 \leq x < -1) \\ 0 & (x < -2) \end{cases} \text{ 이고,}$$



f 의 미분가능한 점에서 $f'(x) = (x - a)(x - b)h'(x) + (2x - a - b)h(x)$ 이다. 즉,

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x > 2) \\ (2x - a - b)(-x + 2) + (x - a)(x - b)(-1) & (1 < x < 2) \\ 2x - a - b & (-1 < x < 1) \\ (2x - a - b)(x + 2) + (x - a)(x - b) & (-2 < x < -1) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$$

1-2

함수 $f(x) = (x-a)(x-b)h(x)$ 는 $x = -2, -1, 1, 2$, 네 점에서 미분불가능 할 수 있다.

(1) $f(x)$ 의 $x = -2$ 에서의 좌미분은 0, 우미분은 $(-2-a)(-2-b)$ 이므로, $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 미분가능할 조건은 : $a = -2$ 혹은 $b = -2$ 이다.

(2) $f(x)$ 의 $x = -1$ 에서의 좌미분은 $(-2-a-b) + (-1-a)(-1-b)$, 우미분은 $-2-a-b$ 이므로, $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 미분가능할 조건은 : $a = -1$ 혹은 $b = -1$ 이다.

(3) $f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 좌미분은 $2-a-b$, 우미분은 $2-a-b - (1-a)(1-b)$ 이므로, $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능할 조건 : $a = 1$ 혹은 $b = 1$ 이다.

(4) $f(x)$ 의 $x = 2$ 에서의 좌미분은 $-(2-a)(2-b)$, 우미분은 0 이므로, $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능할 조건은 : $a = 2$ 혹은 $b = 2$ 이다.

$f(x)$ 가 두 점에서만 미분 불가능하기 위해서는 (a,b) 가 위의 (1), (2), (3), (4) 식 중에서 두 개만 만족해야 하고, 따라서 다음과 같아야 한다.

$$(a,b) = (1,-1), (1,-2), (1,2), (-1,1), (-1,-2), (-1,2),$$

$$(-2,-1), (-2,1), (-2,2), (2,-2), (2,-1), (2,1).$$

이 중에 $f(0) = ab > 0$ 인 (a,b) 는

$$(a,b) = (1,2), (-1,-2), (-2,-1), (2,1)$$

이다.

1-3

$h(x) = f(x) - ax - b$ 라고 하면,

$$h(x) = \begin{cases} -ax - b & (x \geq 2) \\ -(a+1)x + 2 - b & (1 \leq x < 2) \\ -ax - b + 1 & (-1 \leq x < 1) \\ (1-a)x + 2 - b & (-2 \leq x < -1) \\ -ax - b & (x < -2) \end{cases}$$

이고, $h(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점에서 만나면 된다.

▶ 우선 $a = 0$ 인 경우, x 축과 두 번 만나거나 무한히 많은 점에서 만남으로 $a > 0$ 혹은 $a < 0$ 이어야 한다.

▶ $a > 0$ 인 경우, 구간 $x < -2$ 그리고 $x > -1$ 에서 $h(x)$ 는 감소함으로, $h(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 번 만나기 위해서는, $h(-2) < 0$, $h(-1) > 0$ 이어야 한다. 즉, $b < a+1$, $b > 2a$ 이어야 한다.

▶ $a < 0$ 인 경우, 구간 $x < 1$ 그리고 $x > 2$ 에서 $h(x)$ 는 증가함으로, $h(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 번 만나기 위해서는, $h(1) > 0$, $h(2) < 0$ 이어야 한다. 즉, $b < -a+1$, $b > -2a$ 이어야 한다. 따라서, (a,b) 가 차지하는 영역의 면적은 1이다.

변곡점의 x 좌표를 α 라고 하면, $f''(\alpha) = 6\alpha + 2p = 0$ 이므로 $\alpha = -\frac{p}{3}$ 이다.

변곡점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선이 $y = -x$ 이므로 $f(\alpha) = -\alpha$ 와 $f'(\alpha) = -1$ 을 만족한다.
즉,

$$f(\alpha) = -\frac{p^3}{27} + p \times \frac{p^2}{9} + q \times \left(-\frac{p}{3}\right) + r = \frac{p}{3} \text{ 이고}$$

$$f'(\alpha) = 3 \times \frac{p^2}{9} + 2p \times \left(-\frac{p}{3}\right) + q = -1 \text{ 이다.}$$

2-1 따라서, $2p^3 - 9pq + 27r = 9p$ 이고 $-p^2 + 3q = -3$ 이다.

두 번째 식에서, $p^2 = 3(q+1)$ 이므로 $p = 3k$ (k 는 0이 아닌 정수)라고 놓을 수 있다. 그러면, $q = 3k^2 - 1$ 이 성립한다. 이제 첫 번째 식에서, $54k^3 - 27k(3k^2 - 1) + 27r = 27k$ 가 얻어지므로, $r = k^3$ 이다.

따라서, $(p, q, r) = (3k, 3k^2 - 1, k^3)$ 인 0이 아닌 정수 k 가 존재한다.

$pqr = 3k^4(3k^2 - 1)$ 이므로 $k = \pm 1$ 일 때 $pqr = 6$ 을 최솟값으로 가진다. 이때,

$(p, q, r) = (3, 2, 1)$ 과 $(p, q, r) = (-3, 2, -1)$ 이므로

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ 과 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ 이 답이다.

2-2
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{pq}{r} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k \times (3k^2 - 1)}{k^3} = 9$$

자연수 k 가 있어서, $f(x) = x^3 + 3kx^2 + (3k^2 - 1)x + k^3$ 이다.

$(-3, 0)$ 을 지나고 곡선 $y = f(x)$ 에 접하는 직선이 곡선에 접하는 점을 $(t, f(t))$ 라고 놓자. 그러면, 접선의 방정식은 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ 이고 $-f(t) = f'(t)(-3 - t)$ 를 만족한다. 따라서,

$$g(t) = (t+3)f'(t) - f(t) = 2t^3 + (3k+9)t^2 + 18kt + (9k^2 - 3 - k^3)$$

2-3 가 0이 되는 서로 다른 실수 t 가 세 개 존재하는 조건을 찾으면 된다.

$g'(t) = 6t^2 + (6k+18)t + 18k = 6(t+3)(t+k)$ 이므로 $g(-3)$ 과 $g(-k)$ 의 부호가 다르면 된다.

$g(-3) = -(k^3 - 9k^2 + 27k - 24) = -(k-3)^3 - 3$ 는 $k = 1$ 이면 양수이고 $k \geq 2$ 이면

음수이다. $g(-k) = -2k^3 + (3k+9)k^2 - 18k^2 + (9k^2 - 3 - k^3) = -3$ 이므로 항상 음수이다.

따라서, $k = 1$ 이고 $p = 3k = 3$ 이다.

3-1

$|\vec{b}_i| = 2\sin\frac{\pi i}{n+1}$ 이고 두 벡터 \vec{b}_i, \vec{b}_j 의 사잇각은 $|\frac{\pi(i-j)}{n+1}|$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j &= (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\cos\frac{\pi}{n+1}(i-j) \\ &= (2\sin\frac{\pi}{n+1}i)(2\sin\frac{\pi}{n+1}j)\left(\cos\frac{\pi}{n+1}i\cos\frac{\pi}{n+1}j + \sin\frac{\pi}{n+1}i\sin\frac{\pi}{n+1}j\right)\end{aligned}$$

이다. 따라서, $n=7$ 일 때,

$$\begin{aligned}\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_5 &= (2\sin\frac{\pi}{4})(2\sin\frac{5\pi}{8})\cos\frac{3\pi}{8} \\ &= (2\sin\frac{\pi}{4})(2\cos\frac{\pi}{8})\sin\frac{\pi}{8} \\ &= (2\sin\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

을 얻는다.

3-2

3-1)에서 얻어진 공식

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_i = (2\sin\frac{\pi}{n+1})(2\sin\frac{\pi i}{n+1})\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\cos\frac{\pi i}{n+1} + \sin\frac{\pi}{n+1}\sin\frac{\pi i}{n+1}\right)$$

로 부터

$$\vec{b}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{b}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4\left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{\pi}{n+1})^2 (\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$$

를 얻는다. 따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{b}_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{\pi}{n+1})^2 (\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right)$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{2\pi}{n+1})\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right)\right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sin\frac{2\pi i}{n+1}\right) \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2\pi \int_0^1 \sin 2\pi x dx = 0\end{aligned}$$

이다. 또한 $\left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{\pi}{n+1})^2 (\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right) \leq n(\sin\frac{\pi}{n+1})^2$ 로 부터

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (\sin\frac{\pi}{n+1})^2 (\sin\frac{\pi i}{n+1})^2\right) = 0$ 을 얻는다. 따라서, $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \vec{b}_i\right) = 0$ 이다.

4-1

네 번째 기회에서 진홍색 공을 뽑는 경우의 수
전체 경우의 수

는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{8 \times 7 \times 6 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{4}{9}$$

4-2

$E[X] = 100P(X=100) + 200P(X=200) + 300P(X=300)$, 여기서

$$P\{X=100\} = P\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 파란색 공}\} = \frac{4 \times 7 \times 6 \times 5}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{20}{72},$$

$$P\{X=200\} = P\{\text{첫 번째 파란색 공, 네 번째 진홍색 공}\} = \frac{5 \times 7 \times 6 \times 4}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{20}{72},$$

$$P\{X=300\} = P\{\text{첫 번째 진홍색 공, 네 번째 진홍색 공}\} = \frac{4 \times 7 \times 6 \times 3}{9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{12}{72}.$$

따라서, $E[X] = 100 \frac{20}{72} + 200 \frac{20}{72} + 300 \frac{12}{72} = \frac{400}{3}$.