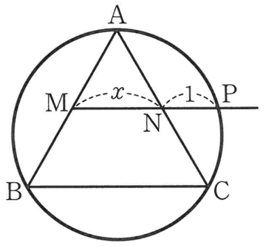
깨단수학 실력진단 테스트

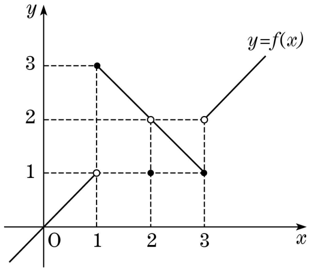
약점보완 테스트 7회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. 정삼각형 ABC에서 두 변 AB와 AC의 중점을 각각 M, N이라 하자. 그림과 같이 점 P는 반직선 MN이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점이고 $\overline{NP}=1$이다.
$\overline{MN}=x$라 할 때, $10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$의 값을 구하시오.



2. 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



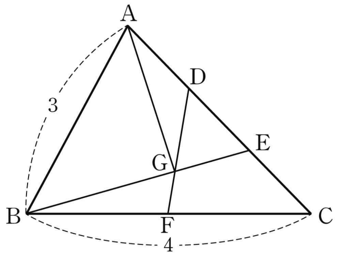
함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=2$, $x=3$에서만 불연속이다. 이차함수 $g(x)=x^2-4x+k$에 대하여 함수 $(f\circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 합을 구하시오.

3. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수
$f(x)=|2x^2-2|, g(x)=x+|x-k|$에 대하여
방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 네 개의 해를 가진다.
이를 만족하는 k의 값 중에서 $4k$가 정수가 되는 k의 개수는?
[충남고기출]

4. 자연수 n에 대하여 집합 $\{k \mid 1 \le k \le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 세 원소 $a,\ b,\ c\,(a < b < c)$가 등차수열을 이루는 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 개수를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

5. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overline{\mathrm{AG}}$와 $\overline{\mathrm{BE}}$가 서로 수직일 때, $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은? (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [영동고기출]



① 11 ② 13 ③ 24
④ 37 ⑤ 50

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) 정답 30

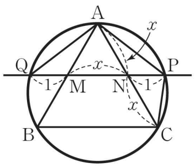
두 점 M, N이 각각 두 변 AB, AC의 중점이므로

$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ (AA 닮음)

따라서 $\triangle AMN$은 한 변의 길이가 x인 정삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{AN}=\overline{NC}=x$

오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하면



$\overline{QM}=\overline{NP}=1$

삼각형 AQN과 삼각형 PCN에서

$\angle QAN=\angle CPN$

(호 QBC에 대한 원주각)

$\angle ANQ=\angle PNC$ (맞꼭지각)

$\therefore\ \triangle AQN \backsim \triangle PCN$ (AA닮음)

즉, $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$이므로

$(1+x):x\ =x:1$, $x^2=x+1$

$\therefore\ x^2-x-1=0$

$x>0$이므로 위의 식의 양변을 x로 나누면

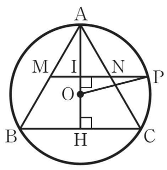
$x-1-\dfrac{1}{x}=0$, 즉 $x-\dfrac{1}{x}=1$

$\therefore\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2=1+2=3$

$\therefore\ 10\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=10\times3=30$

[다른 풀이]

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 외심을 O, 선분 MN의 중점을 I라 하면 외심 O는 삼각형 ABC의 무게중심이다.



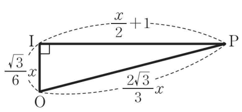
이때, $\overline{MN}=x$에서 $\triangle ABC$는 한 변의 길이가 $2x$인 정삼각형이고, $\overline{AH}=\sqrt{3}\,x$이므로

$\overline{IO}=\dfrac{1}{6}\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$

$\overline{IP}=\overline{\in}+\overline{NP}=\dfrac{x}{2}+1$

$\overline{OP}=\overline{OA}=\dfrac{2}{3}\overline{AH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x$

직각삼각형 IOP에서 피타고라스 정리에 의하여



$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^2$

$=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$

$\therefore\ x^2-x-1=0$

즉, $x-\dfrac{1}{x}=1$이므로

$10\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=10\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}=30$

2) [정답] 13

3) [정답] 8

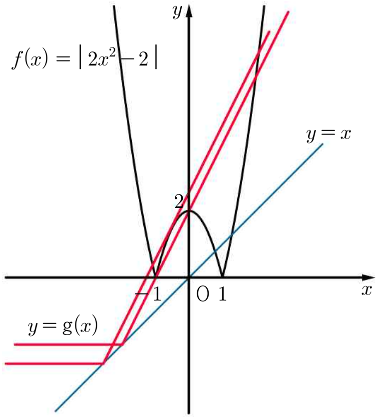
두 함수 $f(x)=|2x^2-2|$, $g(x)=x+|x-k|$의 그래프를 그려서 문제를 해결해 보도록 하자.

함수 $f(x)=|2x^2-2|$의 그래프는 $y=2x^2-2$의 그래프를 이용하여 그리면 된다. 또한 함수 $y=g(x)$는

$g(x)=\begin{cases} k & (x\le k) \\ 2x-k & (x>k) \end{cases}$

이므로 점 $(k,\ k)$를 지난다. 따라서 다음의 [그림1], [그림2]를 얻을 수 있다.

[그림1]



① **[그림1]**에서와 같이 $y=\mathrm{g}(x)$의 그래프가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때의 k의 값은 $k=-2$이다.

$y=f(x)$의 그래프와 $y=\mathrm{g}(x)$의 그래프가 접할 때의 k의 값을 구해 보자. $y=-2x^2+2$의 그래프와 $y=2x-k$의 그래프가 접하는 경우이므로 방정식

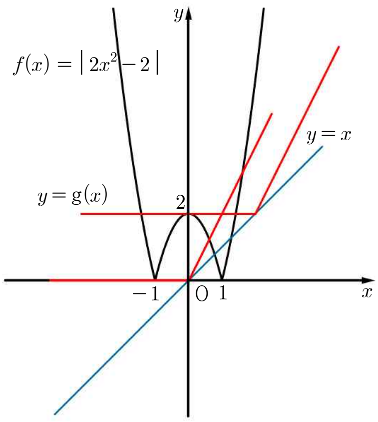
$$-2x^2+2=2x-k \Leftrightarrow 2x^2+2x-k-2=0$$

이 중근을 갖는 경우이다. 따라서

$$\frac{D}{4}=1+2(k+2)=2k+5=0$$

이므로 $k=-\frac{5}{2}$일 때이다. 따라서 $-\frac{5}{2}<k<-2$이다.

[그림2]



② **[그림1]**에서 조건을 만족하는 k의 범위는 $0<k<2$이다.

①, ②에서 $4k$의 값이 정수가 되는 k의 값은

$-\frac{9}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4}$ 이므로 그 개수는 8(개)이다.

4) **정답** ②

$n=1$일 때, $1\le k\le 2$이므로 등차수열을 이루는 집합은 없다.

$\therefore\ T_1=0$

$n=2$일 때, $1\le k\le 4$이므로 등차수열을 이루는 집합은

공차가 1인 경우 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$로 2개이다

$\therefore\ T_2=2$

$n=3$일 때, $1\le k\le 6$이므로 등차수열을 이루는 집합은

공차가 1인 경우 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{4,\ 5,\ 6\}$

공차가 2인 경우 $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$로 6개이다

$\therefore\ T_3=4+2=6$

$n=4$일 때, $1\le k\le 8$이므로 등차수열을 이루는 집합의

공차가 1인 경우 $\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$, $\{4,\ 5,\ 6\}$, $\{5,\ 6,\ 7\}$, $\{6,\ 7,\ 8\}$

공차가 2인 경우 $\{1,\ 3,\ 5\}$, $\{2,\ 4,\ 6\}$, $\{3,\ 5,\ 7\}$, $\{4,\ 6,\ 8\}$

공차가 3인 경우 $\{1,\ 4,\ 7\}$, $\{2,\ 5,\ 8\}$로 12개이다

$\therefore\ T_4=6+4+2=12$

같은 방법으로 구하면 $n=5$일 때, $T_5=8+6+4+2=20$

이와 같은 방법으로 규칙을 찾아보면

$$T_n=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\cdot 2+2\cdot 1$$
$$=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n^2-n$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2}=1$

다른 풀이

세 원소 $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$가 등차수열을 이루므로 b는 a와 c의 등차중항이 되어 $2b=a+c$이고 좌변인 $2b$는 짝수이므로 우변인 $a+c$도 짝수이어야 한다.

이때 두 수 $a,\ c$를 선택하기만 하면 $a<c$에 의하여 a와 c는 자동으로 정해지고 $2b=a+c$에 의하여 b 또한 정해진다.

이때 $a+c$가 짝수가 되도록 두 수 $a,\ c$를 선택하기 위해서는 (짝수)+(짝수), (홀수)+(홀수)의 경우가 있다

즉 $a+c$가 짝수이려면 두 수 $a,\ c$가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

집합 $\{k\,|\,1\le k\le 2n,\ k$는 자연수$\}$의 원소 중에서 짝수와 홀수는 모두 n개씩 있으므로 두 수 $a,\ c$가 모두 짝수이려면 짝수 n개에서 2개를 모두 홀수이려면 홀수 n개에서 2개를 선택하면 된다.

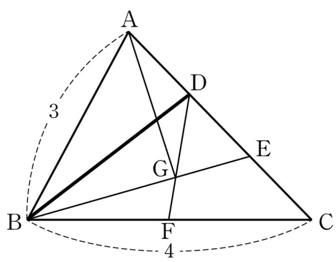
(ⅰ) $a,\ c$ 모두 홀수일 때, 홀수 중에서 두 개를 뽑으면 된다.
1부터 $2n$까지의 자연수 중 홀수의 개수는 n개이므로 만족하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$

(ⅱ) $a,\ c$ 모두 짝수일 때, 짝수 중에서 두 개를 뽑으면 된다.
1부터 $2n$까지의 자연수 중 짝수의 개수는 n개이므로 만족하는 경우의 수는 ${}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $T_n=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2}=1$

5) [정답] ④



$\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{EC}}=2:1$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=2x$, $\overline{\mathrm{EC}}=x$

B, D를 이으면 G는 $\triangle$BDC의 무게중심이므로,

$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$이므로 $\overline{BG}=2y$, $\overline{GE}=y$ 로 두면

$\angle BGA=\angle AGE=90^\circ$ (문제조건에서) 이므로

$9-4y^2=4x^2-y^2$, $3y^2=9-4x^2$ $\cdots$ ①

$\triangle$ABE, $\triangle$ABC에서 $\angle$A에 대해 제2코사인법칙을 이용하면

$$\frac{9+4x^2-9y^2}{2\cdot3\cdot2x}=\frac{9+9x^2-16}{2\cdot3\cdot3x}$$

①을 대입하고 정리하면

$3(9+4x^2-27+12x^2)=2(9+9x^2-16)$

$30x^2=40$, $x^2=\frac{4}{3}$

$\cos\angle ABC=\frac{9+16-12}{2\cdot3\cdot4}=\frac{13}{24}=\frac{q}{p}$에서 $p+q=37$