

# 집합



## 들어가며

### 1) 자료 소개

: 입시에서 대학의 ‘Needs’는 무엇일까? **단언컨대 대학의 유일한 Needs는 ‘우수한 학생을 선발하는 것’이다.** 최상위 대학에 진학하려면 우수한 학생이 되어야 한다.

그렇다면 어떤 학생이 우수한 학생일까? 많은 학생들이 문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한다. **하지만 이유도 모른 채 기계적으로 답만 잘 맞히는 학생을 우수하다고 생각하는 대학은 없을 것이다.** 대학은 이와 같이 공부한 학생을 떨어뜨리려고 할 것이다. **때문에 상위권과 최상위권을 변별하기 위한 준킬러와 킬러 문항은 ‘생소한 형태’로 출제된다.**

문제와 그 풀이를 유형화하는 방식으로 공부한 학생이 시험에서 ‘생소한 유형’의 문제를 맞닥뜨리면 어떻게 될까? 아마도 제대로 풀지 못할 것이다. 시간만 뺏기고 답을 내지 못하면 멘탈이 무너질 수도 있다. 이렇게 되면 시험을 망칠 가능성이 높다.

그렇다면 어떻게 공부해야 할까? 3년간 공부한 것을 수능에서는 30문제로 평가한다. 때문에 핵심적인 개념과 아이디어 위주로 시험에 출제할 수 밖에 없다. 고난도 문제는 이를 생소한 형태로 출제하는 것일 뿐이다. 면접이나 논술에서도 마찬가지다. **따라서 문제와 그 풀이를 유형화할 것이 아니라, 학습목표에 해당하는 핵심적인 개념과 아이디어에 초점을 맞추고 공부해야 한다.** 핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 문제를 분석하고 해결함으로써, 이것들이 언제 어떻게 쓰이는지, 무엇을 주의해야 하는지 등을 신경 써서 공부하면 된다.

**본 자료의 목적은 “핵심 개념과 아이디어를 바탕으로 다양한 문제를 체계적, 논리적으로 분석하고 해결함으로써, 이를 공부한 학생들이 ‘생소한 형태의 고난도 문제를 쉽고 정확하게 해결’할 수 있도록 하는 것”이다.** 이를 통해 안정적인 1등급 달성하고 최상위권 대학 진학하길 바란다.

### 2) 누구를 위한 건가요?

- 치열하게 공부하는데도 성적이 오르지 않는 학생
- 생소한 형태의 문제가 두려운 학생
- 안정적인 1등급을 원하는 학생
- 최상위권 대학 진학이 목표인 학생**

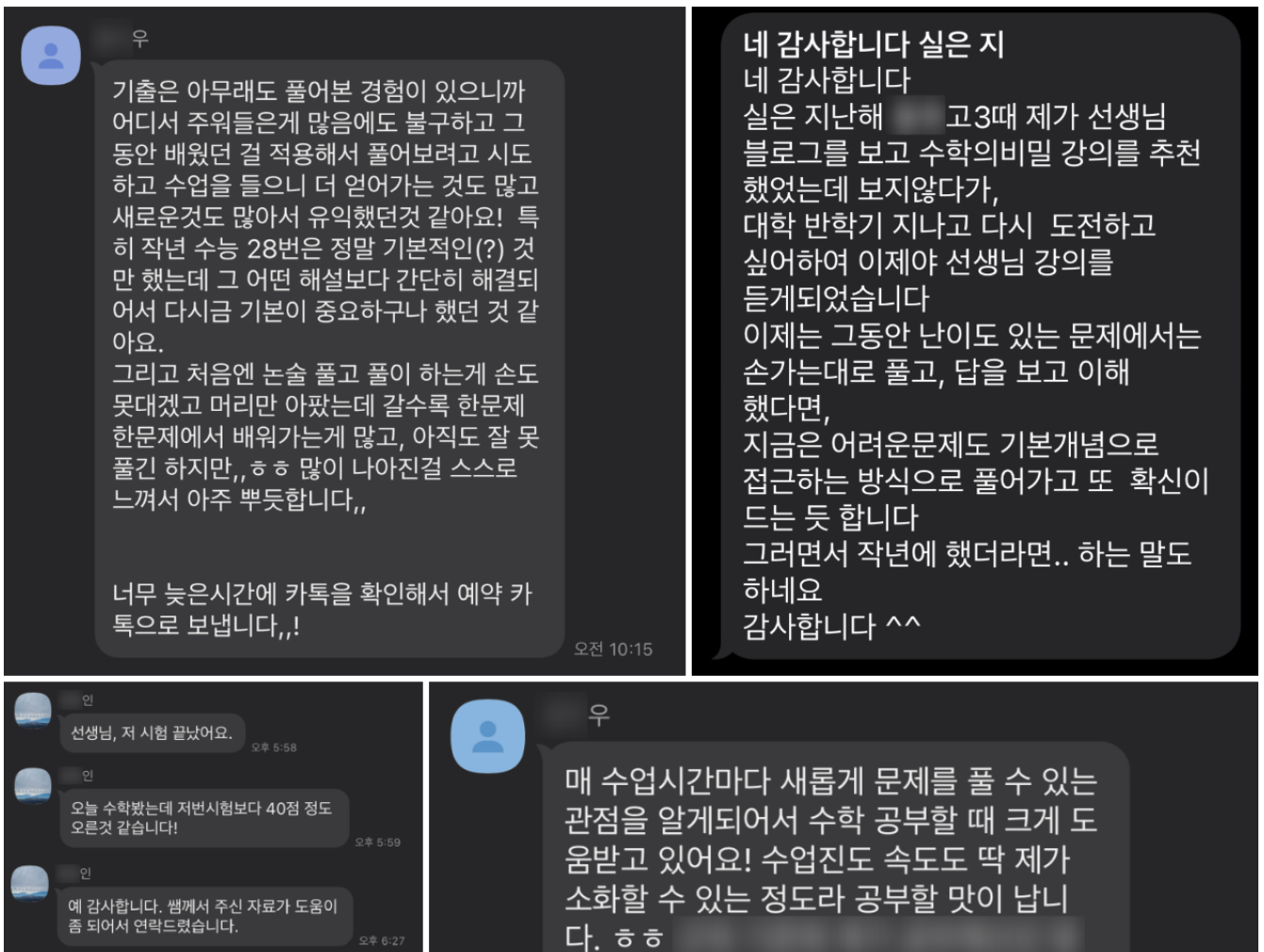
### 3) 얻을 수 있는 것은 무엇인가요?

- 핵심 개념과 아이디어에 대한 이해
- 문제를 체계적이고 논리적으로 분석하는 방법
- 생소한 형태의 고난도 문항에 대한 두려움 해소
- 안정적인 1등급 및 최상위권 대학 진학**

#### 4) 어수강 수학

- 홈페이지 : [www.soogangmath.com](http://www.soogangmath.com)
- 블로그 : [blog.naver.com/math-fish](http://blog.naver.com/math-fish)
- 유튜브 : [www.youtube.com/@soogangmath](http://www.youtube.com/@soogangmath)
- 이메일 : [mathfish@snu.ac.kr](mailto:mathfish@snu.ac.kr)
- 전자도서 : 당신이 수학을 망치는 N가지 이유, 서울대 박사가 알려주는 수학의 비밀

#### 5) 후기



## [집합]

**[문제1]**  $x$ 에 대한 방정식  $(k+2)x^2 + 2(k+3)x + (k+6) = 0$ 이 실근을 가지도록 하는 실수  $k$ 의 범위를 구하시오.<sup>1</sup>



**[문제2]** 자연수  $m, n$ 에 대하여

$$n^2 - 2mn + 2m + n = 8$$

가 성립할 때,  $m+n$ 의 최솟값을 구하시오.<sup>2</sup>



**[문제3]** 다음 조건을 만족하는 일차함수  $f(x)$ 를 모두 구하시오.<sup>3</sup>

$$\{f(xy)\}^2 = f(x^2)f(y^2)$$



[문제4]  $x + y = -6$ 이고  $xy = 1$ 일 때,  $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 의 값을 구하시오.<sup>4</sup>



[문제5] 집합  $S = \{\emptyset, 1, 2, \{1\}\}$ 에 대하여, 다음 중 옳지 않은 것을 고르시오.<sup>5</sup>

- ㉠  $0 \notin S$       ㉡  $\{1\} \in S$       ㉢  $1 \in S$       ㉣  $\emptyset \in S$       ㉤  $\{1, 2\} \in S$



[문제6] 집합  $A = \{x \mid x^5 = 1\}$ 에 대하여, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.<sup>6</sup>

- ㉠  $x, y \in A$ 이면  $x + y \in A$       ㉡  $x, y \in A$ 이면  $xy \in A$       ㉢  $1 \in A$   
㉣  $x, y \in A$ 이면  $\frac{x}{y} \in A$       ㉤  $x \in A$ 이면  $\frac{1}{x} \in A$



**[문제7]** 두 집합  $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + 2ax + a - 4 < 0\}$ 에 대하여  $A \subset B$ 가 성립하도록 하는 실수  $a$ 의 값의 범위를 구하시오.<sup>7</sup>



**[문제8]** 두 집합  $M = \{5a + 4b \mid a, b \text{는 정수}\}$ 과  $N = \{3a + 2b \mid a, b \text{는 정수}\}$ 에 대하여  $M = N$ 임을 증명하시오.<sup>8</sup>



**[문제9]** 전체집합  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 5\} \text{ 이고 } B - A \neq \emptyset$$

가 성립할 때,  $B$ 의 모든 원소의 합을 구하시오.<sup>9</sup>



**[문제10]** 두 집합  $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ,  $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$ 에 대하여,

$$A \cup B = \{x \mid x \text{는 실수}\} \text{ 이고 } A \cap B = \{3 < x \leq 4\}$$

가 성립할 때, 실수  $a, b$ 의 값을 구하시오.<sup>10</sup>



**[문제11]** 자연수  $n$ 에 대하여, 집합  $A_n$ 을

$$A_n = \{x \mid 2n - 1 < x \leq 7n + 20\}$$

라고 할 때,  $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$ 을 만족하는 자연수  $n$ 의 최댓값을 구하시오.<sup>11</sup>



[문제12] 전체집합  $U$ 의 세 부분집합  $A, B, C$ 에 대하여

$$\{A \cap (A^c \cup B)\} \cup \{B \cap (B \cup C)\}$$

를 간단히 하시오.<sup>12</sup>



[문제13] 자연수  $n$ 에 대하여, 두 집합  $A_n, B_n$ 을

$$A_n = \{a \mid a^n = 1\}, \quad B_n = \{b \mid b^{2n} + (-1)^n b^n + 1 = 0\}$$

이라고 하자. 자연수  $n$ 에 대하여,  $B_n \subset A_m$ 을 만족하는 자연수  $m$ 의 최솟값을  $f(n)$ 이라고 할 때, 다음 중 참인 것을 모두 고르시오.<sup>13</sup>

- ㉠ 임의의 자연수  $n, m$ 에 대하여  $A_n \not\subset B_m$
- ㉡  $f(1) = f(2) = 6$
- ㉢ 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $f(n) \leq f(2n)$





[문제14] 전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여,

$$\{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cap B = A$$

일 때, 다음 중 항상 참인 것을 고르시오.<sup>14</sup>

㉠  $A \subset B$

㉡  $B \subset A$

㉢  $A^c \subset B$

㉣  $A^c \subset B^c$

㉤  $B^c \subset A$



[문제15] 실수  $p, q$ 에 대하여, 집합  $X$ 를  $X = \{x \mid p \leq x \leq q\}$ 라고 하자. 두 집합

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}, B = \{x \mid 3 < x < 7\}$$

에 대하여

$$A \cap X = X, (A - B) \cup X = X$$

가 성립하도록 하는 실수  $q$ 의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오.<sup>15</sup>



[문제16] 다음 두 조건을 만족시키는 집합  $S$ 의 개수를 구하시오.<sup>16</sup>

(가)  $\emptyset \neq S \subset \mathbb{N}$

(나)  $x \in S$ 이면  $6 - x \in S$



**[문제17]** 집합  $B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수 중에서 } 25 \text{ 이하인 자연수}\}$ 에 대하여

1.  $B$ 의 부분집합의 개수
2. 3과 6을 모두 포함하고 9는 포함하지 않는  $B$ 의 진부분집합의 개수
3. 3 또는 6을 포함하는  $B$ 의 부분집합의 개수
4. 적어도 하나의 홀수를 포함하는  $B$ 의 부분집합의 개수

를 구하시오.<sup>17</sup>



**[문제18]** 어느 학급 학생 35명을 대상으로 두 음료수  $A$ ,  $B$ 의 선호도를 조사하였다. 음료수  $A$ 를 좋아하지 않는 학생이 10이고  $B$ 를 좋아하지 않는 학생이 13명일 때, 두 음료수를 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.<sup>18</sup>



**[문제19]** 다항식  $(xy + x - y + 2z - 1)^8$ 에 대하여 다음 물음에 답하시오.<sup>19</sup>

1. 계수의 총합을 구하시오.
2.  $x, y$ 를 모두 포함한 항의 계수의 총합을 구하시오.
3.  $x, y, z$ 를 모두 포함한 항의 계수의 총합을 구하시오.



**[문제20]** 전체집합  $U = \{3, 6, 9, \dots, 21\}$ 의 임의의 두 부분집합  $X, Y$ 에 대하여, 연산  $\Delta$ 을

$$X \Delta Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

라고 하자. 이때, 두 집합  $A = \{3, 9, 15, 21\}$ ,  $B = \{12, 15, 18, 21\}$ 에 대하여  $(A \Delta B) \Delta B^c$ 의 모든 원소의 합을 구하시오.<sup>20</sup>



**[문제21]** 집합  $\{1, 3, 5, 7\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 각각  $A_1, A_2, \dots, A_{15}$ 라고 하고, 자연수  $1 \leq k \leq 15$ 에 대하여, 집합  $A_k$ 의 원소 중에서 가장 작은 원소를  $a_k$ 라고 할 때,  $a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$ 의 값을 구하시오.<sup>21</sup>



**[문제22]** 전체집합  $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 의 부분집합  $X$ 에 대하여,  $S(X)$ 를 집합  $X$ 의 모든 원소의 합이라고 하자. 전체집합  $U$ 의 두 부분집합  $A, B$ 에 대하여, 다음 중 항상 참인 것을 모두 고르시오.<sup>22</sup>

- ㉠  $S(A^c) = S(U) - S(A)$
- ㉡  $S(A)$ 의 최댓값은 55
- ㉢  $A \subset B$ 이면  $S(A) \leq S(B)$
- ㉣  $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$ 이면  $A \cap B = \emptyset$
- ㉤  $A \cap B = \emptyset$ 이면  $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$



**[문제23]** 자연수 전체의 집합  $\mathbb{N}$ 의 부분집합  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}\}$ 에 대하여,

$$a < b < c < d, a + b = 13 \text{이고 } A \cap B = \{a, b\}$$

가 성립할 때,  $a + d$ 의 값을 구하시오.<sup>23</sup>



**[문제24]** 임의의 두 집합  $X, Y$ 에 대하여 연산  $\triangle$ 을

$$X \triangle Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$$

라고 정의하자. 이때, 임의의 집합  $A, B, C, D, E$ 에 대하여 다음 중 항상 참인 것을 모두 고르시오.<sup>24</sup>

- ㉠  $A \triangle B = A^c \triangle B^c$
- ㉡  $A \triangle B \triangle C = A^c \triangle B^c \triangle C^c$
- ㉢  $A \triangle B \triangle C \triangle D = A^c \triangle B^c \triangle C^c \triangle D^c$
- ㉣  $A \triangle B \triangle C = D \triangle E$ 이면  $A \triangle C^c \triangle D = B \triangle E^c$ 이다.
- ㉤  $A \subset B$ 이면, 임의의 집합  $W$ 에 대하여  $A \triangle W \subset B \triangle W$ 이다.



[문제25] 실수  $a, b, c$ 와 임의의 자연수  $n$ 에 대하여, 집합  $A, B_n$ 을

$$A = \{x \mid (x+2)^2(x-a)(x-b) \leq 0\}, B_n = \{x \mid (x-1)^n(x-n)(x-c) \leq 0\}$$

이라고 하자. 실수  $a, b, c$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때,  $a+b+c$ 의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.<sup>25</sup>

(가)  $a+b > 5$ 이면  $a$ 와  $b$ 는 서로 다른 정수

(나)  $n \geq 6$ 이면  $A \subset B_n$



## 정답

<sup>1</sup>  $k \leq -\frac{3}{2}$

<sup>2</sup> 4

<sup>3</sup>  $f(x) = ax \ (a \neq 0)$

<sup>4</sup>  $2\sqrt{2}i$

<sup>5</sup>  $\ominus$

<sup>6</sup>  $\ominus, \omin�, \omin�, \omin�$

<sup>7</sup>  $1 < a < 4$

<sup>8</sup>  $5a + 4b = 3a + 2(a + 2b)$ 이고  $3a + 2b = 5(3a + 2b) + 4(-3a - 2b)$ 이므로(!)

<sup>9</sup> 14

<sup>10</sup>  $a = -3$ 이고  $b = -4$

<sup>11</sup> 13

<sup>12</sup> B

<sup>13</sup>  $\omin�, \omin�, \omin�$

<sup>14</sup>  $\omin�$

<sup>15</sup> 8

<sup>16</sup> 7개

<sup>17</sup> 1. 256개, 2. 32개, 3. 192개, 4. 240개

<sup>18</sup> 34

<sup>19</sup> 1. 256, 2. 1, 3. 256

<sup>20</sup> 36

<sup>21</sup> 37

<sup>22</sup>  $\omin�, \omin�, \omin�$

<sup>23</sup> 85

<sup>24</sup>  $\omin�, \omin�, \omin�$

<sup>25</sup> -54