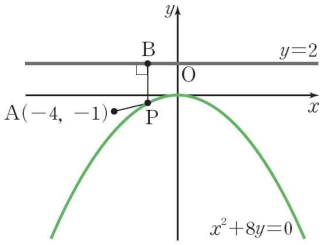
01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

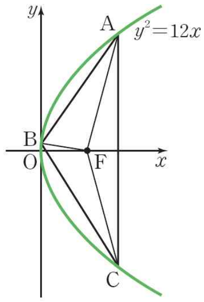
문제 1

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A(-4,\ -1)$과 포물선 $x^2+8y=0$이 있다. 포물선 위의 점 P에서 직선 $y=2$에 내린 수선의 발을 B라고 할 때, $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구하여라.



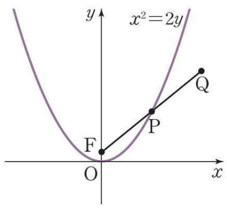
문제 2

포물선 $y^2=12x$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심이 이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF}$의 값을 구하여라.



문제 3

오른쪽 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $x^2=2y$ 위에 $\overline{FP}=2$인 점 P가 있다. 선분 FP의 연장선 위에 $\overline{FP}=\overline{PQ}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q와 준선 사이의 거리를 구하여라.

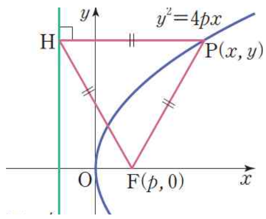


문제 4

오른쪽 그림과 같이 초점이 $F(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선

$$y^2=4px \quad (p>0)$$

위의 한 점 P와 점 P에서 준선에 내린 수선의 발 H에 대하여 삼각형 PHF는 정삼각형이고 넓이가 $4\sqrt{3}$일 때, 점 P의 좌표를 구하여라.

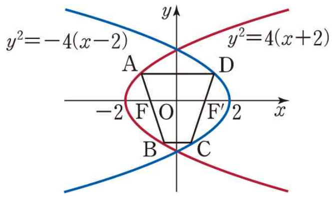


01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

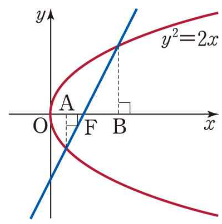
문제 5

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위의 사각형 ABCD에 대하여 두 꼭짓점 A, B는 포물선 $y^2=4(x+2)$ 위에 있고, 두 꼭짓점 C, D는 포물선 $y^2=-4(x-2)$ 위에 있다. $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는 각각 두 포물선의 초점 F와 F'을 지나고 $\overline{AD}$와 $\overline{BC}$는 x축에 평행할 때, 사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하여라.



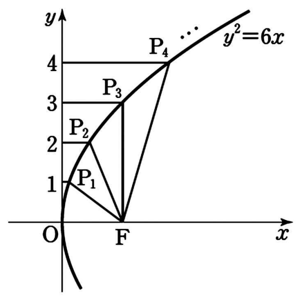
문제 6

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=2x$의 초점 F를 지나고 기울기가 2인 직선이 포물선과 만나는 두 점에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자. 이때, $\overline{AF}\cdot\overline{BF}$의 값을 구하여라.



문제 7

다음 그림과 같이 포물선 $y^2=6x$와 직선 $y=1$, $y=2$, $y=3$, $\cdots$이 만나는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, $\cdots$이라고 했을 때, 포물선의 초점 F에 대하여 $\sum_{k=1}^{13}\overline{FP_k}$의 값을 구하여라.

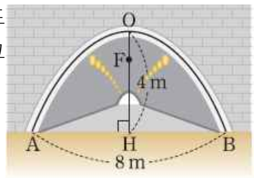


01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

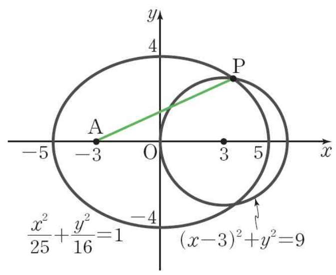
문제 8

오른쪽 그림과 같이 포물선 모양의 터널이 있다. 포물선이 지면과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 포물선의 꼭짓점 O에서 지면에 내린 수선의 발을 H라고 하자. 포물선의 초점 F가 선분 OH 위에 있고 $\overline{AB}=8\,\mathrm{m}$, $\overline{OH}=4\,\mathrm{m}$일 때, 선분 FH의 길이를 구하여라.



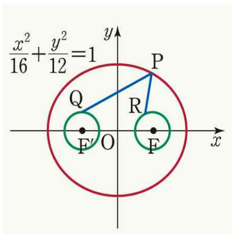
문제 9

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$과 원 $(x-3)^2+y^2=9$의 한 교점을 P라고 할 때, 점 P와 점 A$(-3,\,0)$ 사이의 거리를 구하여라.



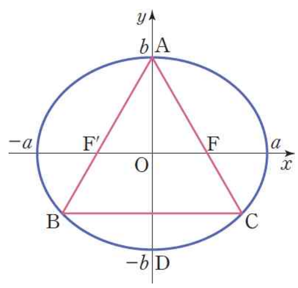
문제 10

오른쪽 그림과 같이 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$의 내부에 각 초점 F, F′을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 두 원이 있다. 타원 위의 점 P와 각 원 위의 점 Q, R에 대하여 $\overline{PQ}+\overline{PR}$의 최댓값을 구하여라.



문제 11

오른쪽 그림과 같이 두 점 F, F′이 초점인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$에서 점 A와 D는 타원의 단축이 타원과 만나는 점이고 점 B와 C는 각각 선분 AF′과 선분 AF의 연장선이 타원과 만나는 점이다. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, $\dfrac{8\overline{FF'}}{\overline{BC}}$의 값을 구하여라.

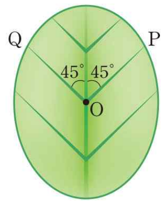


01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

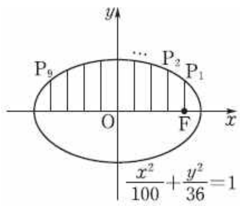
문제 12

오른쪽 그림은 장축의 길이가 8 cm 이고, 단축의 길이가 6 cm 인 타원 모양의 나뭇잎이다. 이 나뭇잎의 옆으로 뻗은 잎맥이 중앙의 잎맥과 45° 의 각을 이루고 있을 때, 타원의 중심 O 에서 옆으로 뻗은 두 잎맥 $\overline{OP}$ 와 $\overline{OQ}$ 의 길이의 합을 구하여라.



문제 13

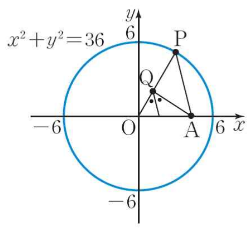
오른쪽 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ 의 장축을 10등분하고, 각 등분점에서 장축에 수직인 직선을 긋는다. 이 직선과 타 원의 교점 중에서 y좌표가 양수인 점을 차례대로 P_1, P_2, $\cdots$, P_9라 하고, 타원의 한 초점을 F 라고 할 때, $\sum_{k=1}^{9}\overline{FP_k}$ 의 값을 구하여라.



문제 14

오른쪽 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 P$(a,\ b)$ $(b\neq 0)$와 점 A$(4,\ 0)$에 대하여 다음 두 조건을 만족시키는 점 Q 를 나타내는 방정식을 구하여라.

· 점 Q 는 선분 OP 위에 있다.
· 점 Q 를 지나고 직선 AP 에 평행한 직선 이 ∠OQA 를 이등분한다.

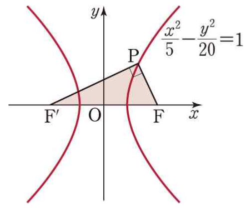


01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

문제 15

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점을 F, F′이라고 하자. 이 쌍곡선 위의 한 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{FPF'}=90°$ 일 때, 삼각형 FPF′의 넓이를 구하여라.

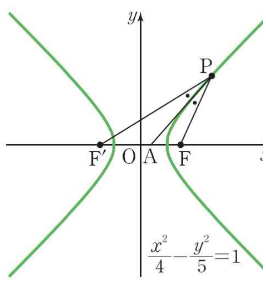


문제 16

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 위의 점 P에서 두 점근선에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$의 값을 구하여라.

문제 17

쌍곡선 $\frac{x^2}{y^2}-\frac{1}{5}=1$ 위의 한 점 P와 두 초점 F, F′에 대하여 $\angle$F′PF의 이등분선이 x축과 만나는 점을 A라고 하면 $\overline{\mathrm{F'A}}:\overline{\mathrm{FA}}=2:1$이다. 이때 삼각형 PF′F의 둘레의 길이를 구하고 그 과정을 서술하여라.

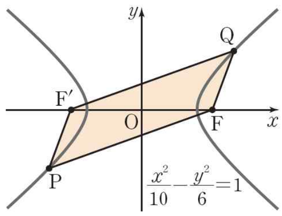


01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

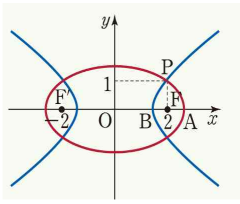
문제 18

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하고, 꼭짓점이 아닌 쌍곡선 위의 한 점 P를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 하자. 사각형 F′QFP의 넓이가 24가 되는 점 P의 좌표를 (a, b)라고 할 때, $|a|+|b|$의 값을 구하여라.



문제 19

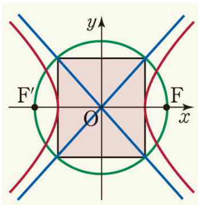
오른쪽 그림은 두 점 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$을 초점으로 하는 타원과 쌍곡선을 나타낸 것이다. 타원과 쌍곡선의 한 교점이 $P(2, 1)$이고 타원과 쌍곡선이 x축의 양의 부분과 만나는 점을 각각 A, B라 고 할 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하여라.



문제 20

오른쪽 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점 F, F′을 지름의 양 끝점으로 하는 원이 있다. 이 원이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$



01 이차곡선

기하와 벡터 교과서 Review

〈정답 및 해설〉 기하와 벡터- 1단원. 이차곡선

1. $\sqrt{17}$

2. 18

3. 3

4.

. 초점 F에서 $\overline{HP}$에 내린 수선의 발을 K라고 하면 삼각형 PHF가 정삼각형이므로 $\overline{FK}$는 $\overline{HP}$의 수직이등분선이다. 포물선 $y^2=4px$의 초점 F의 좌표는 $(p,\ 0)$이고 준선의 방정식은 $x=-p$이므로 $\overline{HK}=2p$이고 $\overline{HP}=4p$이다. 이때 점 P는 $(3p,\ 2\sqrt{3}p)$이다.

$$\triangle PHF=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{HP}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16p^2=4\sqrt{3},\quad p=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3,\ 2\sqrt{3})$

5. 12

6. $y^2=2x=4px$에서 $p=\frac{1}{2}$이므로 점 F의 좌표는

$$F\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$$

초점 F를 지나고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2\left(x-\frac{1}{2}\right),\ \text{즉}\ y=2x-1$$

포물선 $y^2=2x$와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표를 구하면

$(2x-1)^2=2x$에서 $4x^2-6x+1=0$ …… ①

위 ①의 이차방정식의 두 실근을 $x_1,\ x_2(x_1<x_2)$라고 하면

$$x_1+x_2=\frac{3}{2},\ x_1x_2=\frac{1}{4}$$

이때, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(x_1,\ 0),\ B(x_2,\ 0)$이므로

$$\overline{AF}\cdot\overline{BF}=\left(\frac{1}{2}-x_1\right)\left(x_2-\frac{1}{2}\right)$$
$$=-x_1x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)-\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

7.

. $\frac{dx}{dt}=3t^2-6t,\ \frac{dy}{dt}=6t^2-18t+12$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6t^2-18t+12}{3t^2-6t}=2-\frac{2}{t}\ (t\neq 0\ \text{그리고}\ t\neq 2)$$

따라서 $\lim_{t\to 2}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 2}\left(2-\frac{2}{t}\right)=1$

8. 점 O가 원점, 직선 OH가 y축의 음의 방향과 일치하도록 좌표평면 위에 포물선을 놓으면

$A(-4,\ -4), H(0,\ -4),\ B(4,\ -4)$

$F(0,\ p)$라고 하면 포물선의 방정식은

$x^2=4py\ (-4\le x\le 4)$

이 포물선이 점 $B(4,\ -4)$를 지나므로

$16=-16p,\quad p=-1$

$\overline{FH}=\overline{OH}-\overline{OF}=4-1$

$=3\,(\mathrm{m})$

9. 7

10. 10

11.

. 타원의 두 초점의 좌표를 각각

$F(c,\ 0),\ F'(-c,\ 0)\quad (c>0)$

이라고 하면 $\overline{FF'}=2c$

점 A가 타원 위의 점이므로 타원의 정의에 의하여

$2\overline{AF}=\overline{AF}+\overline{AF'}=2a,\quad \overline{AF}=a$

$\triangle AOF$가 $\angle FAO=30^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AF}=2\overline{OF}=2c,\quad a=2c$

한편 점 C는 직선 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$과 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의

교점이므로 $\frac{x^2}{a^2}+\left(1-\frac{x}{c}\right)^2=1$

$a=2c$이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{8}{5}c$

따라서 $\overline{BC}=\frac{16}{5}c$이고 $\frac{8\overline{FF'}}{\overline{BC}}=\frac{16c}{\frac{16}{5}c}=5$

12. 타원의 단축을 지나는 직선을 x축, 장축을 지나는 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 나뭇잎이 나타내는 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (b>a>0)$$

로 놓을 수 있다.

이때 $2a=6,\ 2b=8$이므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

직선 OP는 x축의 양의 방향과 45°의 각을 이루므로 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이다. 따라서 직선 OP의 방정식은 $y=x$이다.

직선 $y=x$가 타원과 만나는 다른 한 점을 R라고 하면

$$\overline{OP}+\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{OR}=\overline{PR}$$

$y=x$를 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$에 대입하여 정리하면

$$25x^2=144,\ x=\pm\frac{12}{5}$$

따라서 두 점 P, R의 좌표는 각각

$$P\left(\frac{12}{5},\ \frac{12}{5}\right),\ R\left(-\frac{12}{5},\ -\frac{12}{5}\right)$$

이므로 $\overline{PR}=\frac{24\sqrt{2}}{5}(\mathrm{cm})$

즉, 두 잎맥 $\overline{OP}$와 $\overline{OQ}$의 길이의 합은 $\frac{24\sqrt{2}}{5}$ cm이다.

13. 타원의 다른 한 초점을 F′이라고 하면

$\overline{FP_9}=\overline{F'P_1}$이므로 타원의 정의에 의하여

$\overline{FP_1}+\overline{FP_9}=\overline{FP_1}+\overline{F'P_1}=2\cdot 10=20$

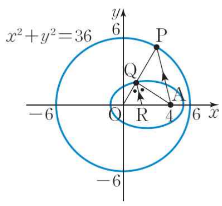
같은 방법으로 하면

$\overline{FP_2}+\overline{FP_8}=\overline{FP_3}+\overline{FP_7}=\overline{FP_4}+\overline{FP_6}=20$

$$\sum_{k=1}^{9}\overline{FP_k}=\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\cdots+\overline{FP_9}$$

$= (\overline{FP_1} + \overline{FP_9}) + (\overline{FP_2} + \overline{FP_8})$
$\quad + (\overline{FP_3} + \overline{FP_7}) + (\overline{FP_4} + \overline{FP_6}) + \overline{FP_5}$
$= 20 \cdot 4 + 10$
$= 90$

14. △PQA는 이등변삼각형이므로 $\overline{QA} = \overline{QP}$
원 위의 점 P에 대하여 $\overline{OP} = 6$으로 항상 일정하므로 점 Q의 자취는 두 점 O, A를 초점으로 하는 타원 위의 점이 된다.
이 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 6이고 중심이 $(2, 0)$이므로
$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$(단, $y \neq 0$)



15. 20

16. 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은
$$y = \pm \frac{1}{2}x$$
즉, $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$
이때, 점 P의 좌표를 (x_1, y_1), 점 P에서 두 직선 $x - 2y = 0$, $x + 2y = 0$에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하면
$$\overline{PA} = \frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{5}}$$
$$\overline{PB} = \frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{5}}$$
이므로
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{|x_1 - 2y_1|}{\sqrt{5}} \times \frac{|x_1 + 2y_1|}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{|x_1^2 - 4y_1^2|}{5}$$
점 P는 쌍곡선 위의 점이므로
$$\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1,\ \text{즉}\ x_1^2 - 4y_1^2 = 4$$
따라서
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{|x_1^2 - 4y_1^2|}{5} = \frac{4}{5}$$ 답 $\dfrac{4}{5}$

17. $\overline{PA}$가 ∠F'PF의 이등분선이므로
$\overline{PF'} : \overline{PF} = \overline{F'A} : \overline{FA} = 2 : 1$
즉, $\overline{PF'} = 2k$, $\overline{PF} = k\,(k > 0)$로 놓으면 쌍곡선의 정의에 의하여
$\overline{PF'} - \overline{PF} = k = 2 \times 2$, $k = 4$
따라서 $\overline{P'F} = 8$, $\overline{PF} = 4$이고, $\sqrt{4+5} = 3$에서 $\overline{FF'} = 6$이므로
삼각형 PF'F의 둘레의 길이는
$\overline{PF'} + \overline{PF} + \overline{FF'} = 8 + 4 + 6 = 18$

18. 8

19. 1

20. ③