

수학공부법 1탄 - 개념의 이해

안녕하세요.

초성민 수학선생님 입니다.

앞서 제가 얘기했듯이 다섯가지 수학적 능력 을 이야기 하였으며,
그 첫째로 개념의 이해능력 해볼까 합니다.

.
.

개념의 이해능력은 정말 다른 기본능력들의 근본이 될 수 있는 **뿌리**같은 능력입니다.

여러분이 안정적 2등급이 되기 위한 필수적 능력이고,
불안한 1등급인 친구들은
좀 더 탄탄하게 만들어 줄 수 있는 능력이 아닐까 싶네요.

시작해보겠습니다.

개념은 왜 중요할까요 ??

어떤 학생이건 수학공부에 있어서
개념공부는 정말 많은 고민이 될 수 밖에 없습니다.

어떤수험생이건, 다음과 같은 과정을 거치죠.

어떤 선생님 **개념강의** 를 .. 무엇을 들을까 ?
'뉴란' '슈발점' 을 들을까 '베타테크닉'을 들을까 ??

개념서는 무엇을 보아야할까 ?
개념 강의를 들으면서 개념서 하나 더 돌릴까 ?

이런 고민과 함께 공부를 시작합니다.
(현시점(3월25일) 아마 저런 고민이 이제 막 결정되었거나 진행 중 일 듯 하네요)

그리고 중간 쯤 되면 기출풀이 . EBS 풀이. 수많은 인강들.
이런 끊임없는..

선택과 시기에 대해서 정말 많은 고민을 합니다.
사실 정해진 정답은 없는데, 넘쳐흐르는 정보 바다속에서
어디로 가야할지 모르고 헤매는 경우가 많죠.

그렇게 수많은 길 중 하나를 선택하고 꾸준하게 하면
성적이 오르기도 하고 오르지 않기도 합니다.
(꾸준히 안하고 오르는 경우는 없습니다.)
오늘 저는 우선적으로. 1등급 (적어도 2등급 이내로)

무엇을 선택하든 꾸준하게 제일 중요하구요.
어찌됐든 그 시작인 개념의 이해능력을 길러주기 위한 수많은 개념강의라는 것이

왜 필요하며 어떤식으로 공부해야하는지 써보겠습니다.
(서론이 겁나길다..)

먼저, 개념의 이해능력이란 어떤 능력인지
살펴보겠습니다.

다음페이지는 제가 쓰고 있는 기출책(다보기) 에 들어갈 내용입니다.

개념의 이해 능력이란. ?

C. 개념의 이해.

개념이 중요하다 ??? 너무나 당연한 말인데 어떻게 느껴야하고 어떤 식으로 학습해야 할까??

권투시합을 빗대어 상황 설명해보자. 최종 결승전.

여기까지 오기까지 한 선수는 어떻게 살아왔는가. ???

처음 권투를 시작할 때 보자. 들어본 적 있을 것이다. 줄넘기만 수천 번을 몇 주 혹은 몇 달을 한다고 한다.

당연하지만 모든 스포츠의 기본은 체력이다. 체력은 너무나 필수적인 요소이다.

농구선수도 하루 수백개에서 천개이상의 자유투 연습을 한다고 한다.

이러한 운동의 가장 기본이 되는 능력들을 수학을 푸는것에 있어서 수학의 개념으로 보면 좋겠다.

어떤 상황에서 라이트를 뺏어야하며 어떤 상황에서 뒤로 물러나고 어떤 상황에서 클런치(방어하기위해 상대를 끌어안는 행동)를 해야하는지는 수백번 수천번 체력이 바탕이 된 상황에서

라이트를 , 클런치를, 자유투를, 3점슛을 , 트레이핑을 그런 기본을 연습해봐야 가능하다고 본다.

다른 예시를 보자.

똑딱똑딱 망치질 을 개념이라고 생각해보자.

우리는 처음 망치질을 배운 것이고, 그 망치질을 통해 의자를 조립한다.

의자를 조립하고 책상을 조립해본다. 그리고 더 나아가 누군가가 갑자기 TV장을 만들어달라고 부탁한다.

이때 우리는 TV장을 어떻게 만들어야할까 ??

의자를 만드는 것은 흔히 말하는 쉬운 문제.

책상을 만드는 것은 연습문제.

TV장을 만드는 것을 새로운 문제라고 빗대어보자.

우리는 여러 가구들을 만들어가면서 그 능력을 가지고 TV장을 떠올리며 만들어야한다.

하지만 무엇보다도 그 이전에 우리는 우선 망치질을 자유자재로 할 줄 알아야하며,

결국 이러한 능력이 개념이라 볼 수 있다. (망치질 이외에도 톱질, 다듬기 등도 다른 개념 다지기로 볼 수 있다.)

개념의 활용은 말 그대로 문제를 풀기위해서 가장 우선시되는 , 기본이 되는 능력이다.

수학에서의 개념은 단순히 누군가가 얘기해줬을 때 아는 것으로 끝나면 안 된다.

특 건드리면 입으로 튀어나올 정도로. 그리고 그것의 가장 기본예제 정도는

떠오를 정도로 머릿속에 박혀 있어야한다.

혹은 그 증명과정들을 유도 할줄 알아야, 그러한 개념들이 활용되는 폭까지 확장시킬 수 있다.

개념에 대해서 공부가 잘된 학생들은 문제의 상황자체를 보자마자,

떠오르는 유형 및 식 전개를 이끌어낼 수 있다

개념이 단단해야 위에서 언급한 계산능력에 있어서 실수가 줄고, 좀더 정확한 계산을 할 수 있다.

개념이 단단해야 위에서 언급한 수학적 의사소통이 원활하다.

개념이 단단해야 문제해결력이 증진된다.

개념이 단단해야 문제 추론하는 과정에서 큰 추진력을 얻게된다.

제가 쓰고 있는 책에서는
 개념의 이해능력을
 '망치질' 과 '운동선수의 기본 체력운동' 으로 빗대어 보았습니다.

수학에서 개념이란 것은 어떤 식으로 적용될까요 ???

.
 .
 .

이것을 체감해볼까요 ??
 다음문제를 풀어보세요.

Q. 수열 a_n 에 관하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{2n} + 2^n}{9^n} + a_n \right) = 2016$ 이다, 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 은 ?

이 문제를 풀 때, 조금이라도 수열 식을 풀어 나간다면 아직
 개념이 부족한 셈.

조금 쉽기에 바로 보일 수 있지만, 그렇지 않은 학생도 있을것같네요.

위문제는 바로 수열의 극한에서 유명한 명제인,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 가 수렴하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ 이다.}$$

로 풀어나가면 곧바로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{2n} + 2^n}{9^n} + a_n \right) = 0$

우리는 개념공부를 할 때, 단순히 개념을 암기과목을 외우듯이 외워나가면
 정작 문제풀이에서 애먹을 수 있습니다.

개념공부란 그 개념들이
곧바로 문제에 적용이 되는 훈련까지 포함되어야합니다.

이번에는 위에서 언급한 개념의 중요성들을 문제를 통해 체감해볼 것.

- 1) 개념이 단단해야 위에서 언급한 계산능력에 있어서 실수가 줄고, 좀더 정확한 계산을 할 수 있다.
- 2) 개념이 단단해야 위에서 언급한 수학적 의사소통이 원활하다.
- 3) 개념이 단단해야 문제해결력이 증진된다.
- 4) 개념이 단단해야 문제 추론하는 과정에서 큰 추진력을 얻게 된다.

[2013학년도 6월 모의평가 가형 26번]

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 1 이다. 함수 $f(2x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다. $10(a+b)$ 의 값을 구하시오.

(이과전용 문제)

문제를 풀 때 역함수의 미분을 이용한 문제이며,
4점짜리이지만, 어느 개념서 에서 볼 수 있는 문제입니다.
허나 다음 문제는 ??

[2016 학년도 수능 가형 21번]

$0 < t < 41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t), t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t), t)$ 라 하자. $h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{79}{12}$ ② $\frac{85}{12}$ ③ $\frac{91}{12}$ ④ $\frac{97}{12}$ ⑤ $\frac{103}{12}$

이 문제 같은 경우 난이도가 조금 높은 문제였으며,
생각보다 많은 학생들이 풀지 못하였습니다.

윗 문제와 똑같음에도 불구하고 풀지 못하였는데, 그이유는 .. ?
이문제 역시 역함수의 미분을 활용해야하는데, 그것이
표면적으로 드러나지 않고 있기때문이죠.

사실 현실적으로 학생입장에서는 위 문제를 보자마자,
역함수미분인 것이 떠오르기는 힘들 수 있습니다.
허나 $h'(5)$ 를 구하는 과정 속에서, x 좌표들을 구하려다 보면,
 $f(t)$ 와 $g(t)$ 를 x 축에 해당하는 좌표가 함수값을 갖는 형태이다보니,

$y = x$ 에 대칭되는 형태를 생각한다면
몇 몇정보를 모아서 역함수의 미분으로 해결하게끔 유도가 되어야합니다.

이는 역함수 자체의 개념에서부터 발상이 되어야 한다고 보여집니다.

(추가로 문제해결력이 가미되어야하는 문제 !)

또 다른 문제를 봅시다.
 이번에는 풀 필요는 없지만, 과정만 생각해볼까요.
 (이과문제지만 문과도 그냥 읽어보면 좋겠습니다.)

[2016학년도 6월 모의평가 가형 21번]

2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자.

$1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

이 문제 역시 매우 쉽다고 보기어렵지만, (다른 다양한 능력이 필요)
 그 시작은 개념의 이해부터 잡을 수 있습니다.

아래는 이번에 출시준비중인 책에서의 해설일부분입니다.

[2016학년도 6월 모의평가 가형 21번]

2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자.

$1 \leq g(n) \leq 8$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은? [4점]

“역함수를 갖도록 하는”이라는 표현이 있으므로 “단조 증가, 단조 감소”를 떠올리자.
 $f(x)$ 가 역함수를 갖기 위해선 $f'(x) \geq 0$ 또는 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

[의사소통능력]
 [개념의 활용]

그렇다. ‘역함수를 갖도록’에서부터
 개념이 단단한 친구들은
 문제푸는 것에 있어서

방향설정이 이루어집니다.

공부를 조금 더 솔직히 해야 할 필요가 있습니다.

외워진 것은 아닌지 .?
 틀린문제를 그냥 답지보고 이해만 하고 넘어간 것이 아닌지 ?

우리는 개념공부를 개념강의 및 개념서 를 몇회 독후에
 문제를 풀어가면서 개념 다지기를 해야합니다.

결론 ; 개념학습법.

개념 인강을 2번듣던지, 개념서를 두 번 보던지 어떤 책을,
어떤 강의를 듣는 선택은 개인의 자유다.

단, 쉬운 예제 유제 역시 꼭 풀어보자.
(앞서 얘기한 듯이 프로선수들도 기본기는 꾸준히 다진다.)



보통 개념강의가 끝나면 기출을 본다.
사실 근대 이때, 개념강의 + 유형화된 문제집 풀이가 좋다.
유형화된 문제집을 풀다보면 자연스레 개념을 만지작 거릴 수 있는
능력들이 생긴다. (흔히들 개념의 활용이라고 말하는 것 같다.)



기출을 풀 때가 중요한데, 맞고 틀리고, 틀린문제 다시보고
이런 학습은 만두에서 만두피만 먹고 속은 버리는셈.

기출에서 어떤 개념을 어떻게 사용했으며,
어떤 식으로 표현했는지, 분석하는 것이 정말 중요하다.

문제를 읽고(혹은 풀면서) 어떤개념을 어떻게 내고있구나
정도가 보여야만 개념학습이 끝난 상태이다.

다시 한번 이야기하지만

개념이 단단해야 위에서 언급한 계산능력에 있어서 실수가 줄고, 좀더 정확한 계산을 할 수 있다.

개념이 단단해야 위에서 언급한 수학적 의사소통이 원활하다.

개념이 단단해야 문제해결력이 증진된다.

개념이 단단해야 문제 추론하는 과정에서 큰 추진력을 얻게 된다.

끝까지 읽어주셔서 감사합니다.
